Partea

# 1

# Algebră

*Permutări*

*Matrice*

*Determinanți*

*Sisteme de ecuații*

Capitolul 1

# PERMUTĂRI

## 1.1 Noțiunea de permutare, operații, proprietăți

Fie $M = \{1, 2, \ldots, n\}$ mulțimea primelor $n$ numere naturale, $n \in \mathbb{N}^*$.

| | |
|---|---|
| **Definiție** | O funcție bijectivă $\varphi : M \to M$ se numeşte *permutare* de ordinul (gradul) $n$. |

Mulțimea tuturor permutărilor de ordinul $n$ se notează cu $P_n$. Se ştie că pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$ există $n!$ permutări de ordinul $n$. Un mod de scriere a unei permutări este:

$$\varphi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & n \\ \varphi(1) & \varphi(2) & \ldots & \varphi(n) \end{pmatrix} \text{ sau } \varphi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & n \\ i_1 & i_2 & \ldots & i_n \end{pmatrix}.$$

### Compunerea permutărilor

Fie $\varphi$ şi $\psi$ două permutări ale mulțimii $M = \{1, 2,\ldots, n\}$.

Putem scrie $M \xrightarrow{\varphi} M \xrightarrow{\psi} M$. Vom nota cu $\psi \circ \varphi$ compunerea permutărilor. Mai precis dacă $\varphi(h) = i_h$ şi $\psi(i_h) = j_{i_h}$, atunci $(\psi \circ \varphi)(h) = j_{i_h}$, pentru orice $h \in M$. Se observă că $\psi \circ \varphi$ este de asemenea o permutare a mulțimii $M$ (compunerea a două funcții bijective este o funcție bijectivă).

### Proprietăți ale compunerii permutărilor

**1.** Compunerea a două permutări nu este comutativă, deci există două permutări $\varphi \circ \psi$ pentru care $\varphi \circ \psi \neq \psi \circ \varphi$.

***Exemple***

Fie permutările $\varphi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$, $\psi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$.

Atunci: $\psi \circ \varphi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ şi $\varphi \circ \psi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

**2.** Compunerea a două permutări este asociativă, adică

$$\varphi_1 \circ (\varphi_2 \circ \varphi_3) = (\varphi_1 \circ \varphi_2) \circ \varphi_3,\ \forall \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3 \in P_n.$$

**3.** Există permutarea identică $\varphi_0 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ 1 & 2 & 3 & \dots & n \end{pmatrix}$, astfel încât

$$\varphi \circ \varphi_0 = \varphi_0 \circ \varphi = \varphi,\ \forall\ \varphi \in P_n.$$

**4.** Pentru orice permutare $\varphi$ există permutarea inversă $\varphi^{-1}$ cu proprietatea că:

$$\varphi \circ \varphi^{-1} = \varphi^{-1} \circ \varphi = \varphi_0.$$

Permutarea inversă $\varphi^{-1}$ se obține prin următorul procedeu:

$$\varphi^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ \varphi^{-1}(1) & \varphi^{-1}(2) & \varphi^{-1}(3) & \dots & \varphi^{-1}(n) \end{pmatrix},$$

unde $\varphi^{-1}(1)$ este valoarea inversei funcției (bijective) $\varphi$ în $y = 1$, …, $\varphi^{-1}(n)$ este valoarea inversei funcției $\varphi$ în $y = n$.

De exemplu, dacă $\varphi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 5 & 4 & 3 \end{pmatrix}$, adică $\varphi : \{1, 2, 3, 4, 5\} \to \{1, 2, 3, 4, 5\}$ este o funcție bijectivă cu $\varphi(1) = 2$, $\varphi(2) = 1$, $\varphi(3) = 5$, $\varphi(4) = 4$, $\varphi(5) = 3$, atunci $\varphi^{-1} : \{1, 2, 3, 4, 5\} \to \{1, 2, 3, 4, 5\}$ este de asemenea o funcție bijectivă şi $\varphi^{-1}(1) = \varphi^{-1}(\varphi(2)) = (\varphi^{-1} \circ \varphi)(2) = \varphi_0(2) = 2$, respectiv (prin calcul analog) $\varphi^{-1}(2) = 1$, $\varphi^{-1}(3) = 5$, $\varphi^{-1}(4) = 4$ şi $\varphi^{-1}(5) = 3$.

Rezultă că permutarea $\varphi^{-1}$ se va scrie:

$$\varphi^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 5 & 4 & 3 \end{pmatrix}.$$

Considerăm următoarea reprezentare (utilizând săgeți) sugestivă pentru înțelegerea modului de determinare a inversei permutării $\varphi$.

Dacă $\varphi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ 2 & 1 & 5 & 4 & 3 \end{pmatrix}$, atunci $\varphi^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 5 & 4 & 3 \end{pmatrix}$, urmărind corespondența dată de săgeți.

Lăsăm ca exercițiu verificarea faptului că: $\varphi \circ \varphi^{-1} = \varphi^{-1} \circ \varphi = \varphi_0$.

### Schimbare de poziție într-o permutare

Fie o permutare $\varphi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ i_1 & i_2 & i_3 & \dots & i_n \end{pmatrix}$.

| | |
|---|---|
| **Definiție** | Spunem că în $\varphi$ am efectuat o *schimbare de poziție* dacă în linia a doua a permutării $\varphi$ schimbăm între ele două numere, iar celelalte sunt lăsate pe loc. |

Efectuând în $\varphi$ o schimbare de poziție se obține o permutare $\psi$ care este diferită de $\varphi$.

***Exemplu***

Fie permutarea $\varphi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$. Efectuăm schimbarea numerelor 4 şi 3 din linia a doua şi obținem: $\psi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}$.

## 1.2. Inversiuni. Semnul unei permutări

| | |
|---|---|
| **Definiție** | Se numeşte *inversiune* a unei permutări $\varphi$ o pereche $(i, j) \in M \times M$ cu proprietatea că $i < j$ şi $\varphi(i) > \varphi(j)$. |

Numărul tuturor inversiunilor unei permutări $\varphi$ se notează cu Inv $\varphi$.

Numărul $\operatorname{sgn} \varphi = (-1)^{\operatorname{Inv} \varphi}$ se numeşte *semnul* (*signatura*) permutării $\varphi$.

Dacă $\operatorname{sgn} \varphi = +1$, atunci $\varphi$ se numeşte *permutare pară*, iar dacă $\operatorname{sgn} \varphi = -1$, atunci $\varphi$ se numeşte *permutare impară*.

***Exemple***

Fie $M = \{1, 2, 3\}$. Atunci

$\varphi_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$, $\varphi_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$, $\varphi_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ sunt permutări pare,

iar

$\varphi_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, $\varphi_5 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$, $\varphi_6 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ sunt permutări impare.

## Exercițiu rezolvat

Să se determine Inv φ, unde $\varphi(h) = n - h + 1$, $\forall h \in \{1, 2, \dots, n\}$.

*Soluție:* $\varphi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ n & n-1 & n-2 & \dots & 1 \end{pmatrix}$

$$\text{Inv}\,\varphi = (n-1) + (n-2) + \dots + 2 + 1 = \frac{n(n-1)}{2}.$$

Oricare ar fi permutarea φ a unei mulțimi finite de $n$ elemente, are loc dubla inegalitate:

$$0 \le \text{Inv}\,\varphi \le \frac{n(n-1)}{2}.$$

Din definiția inversiunii rezultă că perechea $(k, l)$ este inversiune a permutării φ, dacă şi numai dacă

$$\frac{i_l - i_k}{l-k} < 0, \text{ unde } i_l = \varphi(l) \text{ şi } i_k = \varphi(k).$$

Fie permutarea $\varphi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ i_1 & i_2 & \dots & i_n \end{pmatrix}$. Vom nota cu $\prod\limits_{1 \le k < l \le n} \frac{i_l - i_k}{l-k}$ produsul tuturor rapoartelor $\frac{i_l - i_k}{l-k}$, unde $k, l \in \{1, \dots, n\}$ şi $k < l$. Acest produs are $C_n^2$ factori.

Rezultă că:

– permutarea φ este pară dacă şi numai dacă $\prod\limits_{1 \le k < l \le n} \frac{i_l - i_k}{l-k} > 0$;

– permutarea φ este impară dacă şi numai dacă $\prod\limits_{1 \le k < l \le n} \frac{i_l - i_k}{l-k} < 0$.

**Teorema 1.** Fie două permutări $\varphi_1, \varphi_2 \in P_n$.

*i) Permutarea $\varphi_2 \circ \varphi_1$ este pară dacă şi numai dacă permutările $\varphi_1$ şi $\varphi_2$ sunt ambele pare sau ambele impare.*

*ii) Permutarea $\varphi_2 \circ \varphi_1$ este impară dacă şi numai dacă $\varphi_1$ este pară şi $\varphi_2$ este impară sau $\varphi_1$ este impară şi $\varphi_2$ este pară.*

**Observație:** Permutările pare se mai numesc de clasa I, iar permutările impare de clasa a II-a.

**Teorema 2.** *Dacă două permutări se obțin una din cealaltă printr-o schimbare de poziție, atunci ele sunt de clase diferite.*

**Corolar**. *Numărul permutărilor pare de ordin n este $\frac{n!}{2}$, iar numărul permutărilor impare de ordin n este $\frac{n!}{2}$.*

## Test de evaluare

(*2p*) **1.** Stabiliți semnul permutării: $\varphi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 6 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

(*2p*) **2.** Calculați inversa următoarei permutări: $\varphi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

**3.** Efectuați compunerile:

(*2p*) a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 6 & 5 & 4 & 3 & 1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 6 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$;

(*2p*) b) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}^{-1}$.

*Timp de lucru: 20 de minute.*

## Exerciții propuse

**1.** Stabiliți dacă următoarele permutări sunt pare sau impare:

a) $\varphi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 2 & 4 \end{pmatrix}$; b) $\varphi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 4 & 7 & 2 & 1 & 6 & 5 & 3 \end{pmatrix}$.

**2.** Efectuați compunerile:

a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 2 & 4 \end{pmatrix}$;

b) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 1 & 4 & 3 & 6 & 5 & 8 & 7 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 5 & 7 & 8 & 1 & 6 & 3 & 4 & 2 \end{pmatrix}$;

**3.** Calculați inversele următoarelor permutări:

a) $\varphi = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$; b) $\varphi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$;

c) $\varphi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 1 & 2 & 5 & 3 \end{pmatrix}$

d) $\varphi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 8 & 1 & 2 & 3 & 4 & 6 & 5 & 7 \end{pmatrix}$;

e) $\varphi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 9 & 1 & 2 & 4 & 3 & 7 & 6 & 5 & 8 \end{pmatrix}$.

Capitolul **2**

# MATRICE

## 2.1. Tabel de tip matriceal. Matrice, mulțimi de matrice

### Tabel de tip matriceal

**1)** Temperaturile măsurate zilnic la o stație meteorologică în luna februarie a unui an (care nu este bisect) într-o localitate din România au fost următoarele:

| | Luni | Marți | Miercuri | Joi | Vineri | Sâmbătă | Duminică |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Săptămâna I | – 5° | – 6° | – 8° | – 5° | – 4° | – 8° | 0° |
| Săptămâna a II-a | – 4° | – 8° | – 9° | – 4° | – 8° | – 9° | – 2° |
| Săptămâna a III-a | – 4° | – 7° | – 6° | – 1° | – 8° | 0° | 2° |
| Săptămâna a IV-a | – 8° | 0° | – 1° | – 1° | – 2° | – 3° | 3° |

Prognoza descrisă anterior se poate prezenta sub forma unui tabel de tip matriceal.

$$\begin{pmatrix} -5 & -6 & -8 & -5 & -4 & -8 & 0 \\ -4 & -8 & -9 & -4 & -8 & -9 & -2 \\ -4 & -7 & -6 & -1 & -8 & 0 & 2 \\ -8 & 0 & -1 & -1 & -2 & -3 & 3 \end{pmatrix}$$

Tabelul are 4 linii şi 7 coloane, iar elementele tabelului sunt numere întregi.

**2)** Prețurile în lei noi la morcovi, ceapă, cartofi în fiecare zi a unei săptămâni într-o piață din București sunt:

| | Morcovi | Ceapă | Cartofi |
|---|---|---|---|
| Luni | 1,5 | 1,6 | 1,8 |
| Marți | 1,4 | 1,5 | 2 |
| Miercuri | 1,8 | 1,4 | 1,9 |
| Joi | 1,4 | 1,3 | 1,8 |
| Vineri | 1,6 | 1,5 | 2 |
| Sâmbătă | 1,6 | 1,6 | 2 |
| Duminică | 1,7 | 1,7 | 1,9 |

Evoluția prețurilor descrisă anterior se poate prezenta ca un tabel de tip matriceal de forma:

$$\begin{pmatrix} 1{,}5 & 1{,}6 & 1{,}8 \\ 1{,}4 & 1{,}5 & 2 \\ 1{,}8 & 1{,}4 & 1{,}9 \\ 1{,}4 & 1{,}3 & 1{,}8 \\ 1{,}6 & 1{,}5 & 2 \\ 1{,}6 & 1{,}6 & 2 \\ 1{,}7 & 1{,}7 & 1{,}9 \end{pmatrix}$$

Tabelul are 7 linii şi 3 coloane, iar elementele tabelului sunt numere raționale.

## Matrice. Mulțimi de matrice

| **Definiție** | Fie $m, n \in \mathbb{N}^*$. Se numeşte *matrice** *de tipul* $m \times n$ peste $\mathbb{R}$ (sau $\mathbb{C}$) o funcție: $A : \{1, 2, \ldots, m\} \times \{1, 2, \ldots, n\} \to \mathbb{R}$ (sau $\mathbb{C}$). |
|---|---|

Dacă notăm $A(i, j) = a_{ij}$, $\forall i \in \{1,\ldots, m\}$, $\forall j \in \{1,\ldots, n\}$, matricei $A$ i se poate asocia un tablou dreptunghiular cu $m$ linii şi $n$ coloane de numere reale (respectiv complexe), pe care îl vom nota tot cu $A$.

---

* Etimologie: De la latinescul „matrix" cu sensul de „a face", „a produce". În sens figurat înseamnă locul în care un obiect se produce, în care începe dezvoltarea sa. De asemenea arată tiparul, forma care imprimă aspectul exterior al unui obiect. Termenul matematic păstrează întrucâtva acest din urmă sens. Singular: matrice. Plural: matrice. Denumirea de „matrice" a fost introdusă în 1851 de James Joseph Sylvester (1814-1897), matematician şi avocat englez, profesor la universitatea Oxford.

Vom spune că matricea $A$ are $m$ linii şi $n$ coloane.

În general o matrice $A$ se prezintă sub forma:

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}=(a_{ij})_{\substack{i=\overline{1,m} \\ j=\overline{1,n}}}.$$

Mulţimea matricelor cu $m$ linii şi $n$ coloane cu elemente din $\mathbb{R}$ (respectiv $\mathbb{C}$) se notează cu $M_{m\times n}(\mathbb{R})$ (respectiv $M_{m\times n}(\mathbb{C})$).

Dacă $A \in M_{m\times 1}$, atunci $A$ se numeşte matrice coloană (sau vector coloană), iar dacă $A \in M_{1\times n}$, atunci $A$ se numeşte matrice linie (sau vector linie).

***Exemplu***

$A=\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \in M_{4\times 1}(\mathbb{R})$ este o matrice coloană, iar $B=\begin{pmatrix} 1 & \sqrt{2} & \sqrt{3} \end{pmatrix} \in M_{1\times 3}(\mathbb{R})$ este o matrice linie.

## Transpusa unei matrice

| **Definiție** | Fie $A \in M_{m\times n}(\mathbb{C})$ o matrice. *Transpusa* matricei $A$ este o matrice, notată ${}^tA \in M_{n\times m}(\mathbb{C})$, în care coloana $j$ este linia $j$ a matricei $A$, pentru orice $j \in \{1,\dots,m\}$. Prin urmare ${}^tA=(b_{ij})_{\substack{i=\overline{1,n} \\ j=\overline{1,m}}}$, cu $b_{ij}=a_{ji}$, $\forall(i,j) \in \{1,\dots,n\}\times\{1,\dots,m\}$. |
| --- | --- |

***Exemplu***

Dacă $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 0 & 4 & 8 \end{pmatrix}$, atunci ${}^tA=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 4 \\ 5 & 8 \end{pmatrix}$.

În particular, transpusa unei matrice coloană este o matrice linie şi viceversa.

De exemplu, pentru matricea $V = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$, avem ${}^tV = (v_1\ v_2\ \ldots\ v_n)$.

## Matrice pătratice

| **Definiție** | Fie $A$ o matrice de tipul $m\times n$. Spunem că $A$ este o *matrice pătratică de ordinul n* dacă $m = n$. |
|---|---|

***Exemplu***

Matricea $\begin{pmatrix} 0 & \sqrt{7} \\ 1{,}35 & -5 \end{pmatrix}$ este o matrice pătratică de tipul $2 \times 2$.

## Diagonala principală a unei matrice pătratice

Numerele reale (sau complexe) $a_{11}$, $a_{12}$, …, $a_{nn}$ formează diagonala principală a matricei pătratice $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}$.

## Urma unei matrice pătratice

| **Definiție** | Se numeşte *urma* matricei $A = (a_{ij})_{\substack{i=\overline{1,n} \\ j=\overline{1,n}}}$ şi se notează* tr($A$) suma: $$\sum_{i=1}^{n} a_{ii} = a_{11} + a_{22} + \ldots + a_{nn}.$$ |
|---|---|

***Exemplu***

Dacă $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & -1 \\ 4 & -5 & 6 \end{pmatrix}$, atunci tr($A$) = 1 + 3 + 6 = 10.

---

* În engleză „trace“ înseamnă urmă.

## Matrice superior triunghiulare. Matrice inferior triunghiulare

| | |
|---|---|
| **Definiție** | Se numeşte *matrice superior triunghiulară* o matrice pătratică $U$ de forma: $U = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$, deci o matrice în care toate elementele situate sub diagonala principală sunt nule. |

| | |
|---|---|
| **Definiție** | Se numeşte o *matrice inferior triunghiulară* o matrice pătratică $L$ de forma: $L = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \dots & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$, deci o matrice în care toate elementele situate deasupra diagonalei principale sunt nule. |

## Conjugata unei matrice cu elemente numere complexe

| | |
|---|---|
| **Definiție** | Dacă $A = (a_{ij}) \in M_{m\times n}(\mathbb{C})$, atunci matricea $\left(\overline{a_{ij}}\right) \in M_{m\times n}(\mathbb{C})$ se numeşte *conjugata* matricei $A$ şi se notează cu $\overline{A}$. |

***Exemplu***

Dacă $A = \begin{pmatrix} 1+\mathrm{i} & 2-3\mathrm{i} \\ \sqrt{2}-\mathrm{i} & 7 \end{pmatrix}$, atunci $\overline{A} = \begin{pmatrix} \overline{1+\mathrm{i}} & \overline{2-3\mathrm{i}} \\ \overline{\sqrt{2}-\mathrm{i}} & \overline{7} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-\mathrm{i} & 2+3\mathrm{i} \\ \sqrt{2}+\mathrm{i} & 7 \end{pmatrix}$

## Matrice egale

| | |
|---|---|
| **Definiție** | Două matrice $A, B \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ (sau $M_{m\times n}(\mathbb{C})$), $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij})$ se numesc *egale* dacă pentru orice $(i, j) \in \{1, \dots, m\}\times\{1, \dots, n\}$ avem $a_{ij} = b_{ij}$. |

• Dacă matricele $A$ şi $B$ sunt de tipuri diferite, atunci $A \neq B$.

***Exemplu***

Dacă $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ (sau $M_{m\times n}(\mathbb{C})$), atunci ${}^t({}^tA) = A$.

## Exerciții rezolvate

**1.** Să se arate că dacă $n \in \mathbb{N}^*$ şi $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ (sau $M_{n\times n}(\mathbb{C})$), atunci $\mathrm{tr}({}^tA) = \mathrm{tr}(A)$.

*Soluție:* Dacă $A = (a_{ij})_{\substack{1\le i\le n\\ 1\le j\le n}}$, atunci ${}^tA = (b_{ij})_{\substack{1\le i\le n\\ 1\le j\le n}}$, unde $b_{ij} = a_{ji}$ pentru orice $(i, j)$, $i \in \overline{1,n}$, $j \in \overline{1,n}$. În particular, $\forall i \in \{1,\dots,n\}$ avem $b_{ii} = a_{ii}$. Atunci:

$$\mathrm{tr}({}^tA) = \sum_{i=1}^{n} b_{ii} = \sum_{i=1}^{n} a_{ii} = \mathrm{tr}(A).$$

**2.** Să se arate că dacă $n \in \mathbb{N}^*$ şi $A \in M_{n\times n}(\mathbb{C})$, atunci $\mathrm{tr}\left(\overline{A}\right) = \overline{\mathrm{tr}(A)}$.

*Soluție:* Dacă $A = (a_{ij})_{\substack{1\le i\le n\\ 1\le j\le n}}$, atunci $\overline{A} = \left(\overline{a_{ij}}\right)_{\substack{1\le i\le n\\ 1\le j\le n}}$ şi deci

$$\mathrm{tr}\left(\overline{A}\right) = \sum_{i=1}^{n} \overline{a_{ii}} = \overline{\sum_{i=1}^{n} a_{ii}} = \overline{\mathrm{tr}(A)}.$$

# 2.2. Operații cu matrice: adunarea a două matrice, înmulțirea unei matrice cu un scalar, produsul a două matrice, proprietăți

### Adunarea matricelor

| | |
|---|---|
| **Definiție** | Fie matricele $A = (a_{ij})_{\substack{i=\overline{1,m}\\ j=\overline{1,n}}}$, $B = (b_{ij})_{\substack{i=\overline{1,m}\\ j=\overline{1,n}}} \in M_{m\times n}(\mathbb{C})$. Se numeşte *suma* matricelor $A$ şi $B$, notată cu $A + B$, matricea $\left((a_{ij}) + (b_{ij})\right)_{\substack{i=\overline{1,m}\\ j=\overline{1,n}}}$ |

| | |
|---|---|
| | sau altfel spus: $\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \ldots & & \ldots \\ a_{m1} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & \ldots & b_{1n} \\ \ldots & & \ldots \\ b_{m1} & \ldots & b_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & \ldots & a_{1n}+b_{1n} \\ \ldots & & \ldots \\ a_{m1}+b_{m1} & \ldots & a_{mn}+b_{mn} \end{pmatrix}$. |

***Exemplu***

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & 0 \\ 5 & 7 & -4 & \sqrt{2} \\ -6 & 7 & 2 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 1 & -8 & 6 \\ 4 & 2 & -5 & -\sqrt{2} \\ -6 & 7 & -2 & 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 0 & -5 & 6 \\ 9 & 9 & -9 & 0 \\ -12 & 14 & 0 & 11 \end{pmatrix}.$$

## Înmulțirea unei matrice cu un scalar

| | |
|---|---|
| **Definiție** | Fie $A = (a_{ij})_{\substack{i=\overline{1,m} \\ j=\overline{1,n}}} \in M_{m\times n}$ (ℝ) (respectiv $M_{m\times n}$ (ℂ)) și $\lambda \in$ ℝ (respectiv ℂ). Prin definiție: $\lambda A = (\lambda a_{ij})_{\substack{i=\overline{1,m} \\ j=\overline{1,n}}}$, sau echivalent: $\lambda \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \ldots & & \ldots \\ a_{m1} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \ldots & \lambda a_{1n} \\ \ldots & & \ldots \\ \lambda a_{m1} & \ldots & \lambda a_{mn} \end{pmatrix}$. |

***Exemplu***

$$3\begin{pmatrix} 5 & -5 & 2 \\ 0 & 1 & 7 \\ 3 & 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 & -15 & 6 \\ 0 & 3 & 21 \\ 9 & 6 & -3 \end{pmatrix}.$$

## Matrice nule

| | |
|---|---|
| **Definiție** | O matrice în care toate elementele sunt nule se numește o matrice *nulă* și se notează cu $O_{m\times n}$, iar când nu există pericolul unei confuzii, cu $O$. |

***Exemple***

$$O_{2\times 3}=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix},\quad O_{2\times 1}=\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix},\quad O_{1\times 1}=(0).$$

| **Definiție** | Prin definiție, pentru o matrice $A$, *opusa* ei, notată cu $-A$, este matricea $(-1)\cdot A$. |
|---|---|

***Exemplu***

Dacă $A=\begin{pmatrix}4 & -5\\ \pi & -\sqrt{3}\\ \sqrt[3]{2} & 0\end{pmatrix}$, atunci $-A=\begin{pmatrix}-4 & 5\\ -\pi & \sqrt{3}\\ -\sqrt[3]{2} & 0\end{pmatrix}$.

## Proprietăți ale adunării matricelor şi ale înmulțirii unei matrice cu un scalar

**Teoremă.** *Dacă $A$, $B$, $C \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ (sau $M_{m\times n}(\mathbb{C})$) și $\lambda$, $\mu \in \mathbb{R}$ (sau $\mathbb{C}$), atunci:*

**1.** $(A + B) + C = A + (B + C)$ *(asociativitatea adunării matricelor de un acelaşi tip)*

**2.** $A + O = O + A = A$ *(adunarea matricelor de un acelaşi tip admite matricea nulă de acel tip ca element neutru)*

**3.** $A + (-A) = (-A) + A = O$ *(această proprietate ne arată că orice matrice este simetrizabilă în raport cu adunarea matricelor de acelaşi tip cu ea)*

**4.** $A + B = B + A$ *(comutativitatea adunării)*

**5.** $\lambda(A + B) = \lambda A + \lambda B$ *(distributivitatea înmulțirii cu un scalar a unei matrice față de adunarea matricelor de un acelaşi tip)*

**6.** $(\lambda + \mu)A = \lambda A + \mu A$, *(distributivitatea înmulțirii cu un scalar a unei matrice față de adunarea scalarilor)*

**7.** $(\lambda\mu)A = \lambda(\mu A)$

**8.** $1 \cdot A = A$

Lăsăm în seama cititorului demonstrația acestei teoreme.

## Matrice simetrice. Matrice antisimetrice

| | |
|---|---|
| **Definiție** | • O matrice $A$ se numeşte *simetrică* dacă şi numai dacă ${}^tA = A$.<br>• O matrice $A$ se numeşte *antisimetrică* dacă şi numai dacă ${}^tA = -A$. |

***Exemplu***

Dacă $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 3 & 4\\ 3 & 4 & 5\end{pmatrix}$ şi $B=\begin{pmatrix}0 & 1 & 2\\ -1 & 0 & 3\\ -2 & -3 & 0\end{pmatrix}$,

atunci $A$ este simetrică, iar $B$ este antisimetrică.

## Exerciții propuse

**1.** Dacă $A, B \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ (sau $M_{m\times n}(\mathbb{C})$), atunci:

${}^t(k\cdot A)=k\cdot {}^tA$ şi ${}^t(A+B)={}^tA+{}^tB$.

**2.** Determinați matricea $B$, astfel încât $A+{}^tB={}^t(A-B)$,

unde $A=\begin{pmatrix}2 & -3 & 0\\ 4 & -1 & 3\\ -1 & 0 & 1\end{pmatrix}$.

**3.** Determinați numerele reale $a$, $b$, $c$, $d$ astfel încât:

$\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}=2\cdot\begin{pmatrix}a & 3\\ 2 & a+c\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2+b & a+9\\ c+d & b\end{pmatrix}$.

## Înmulțirea matricelor

| | |
|---|---|
| **Definiție** | Fie $A$, $B$ două matrice astfel încât $A\in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ şi $B\in M_{n\times p}(\mathbb{R})$ (sau $A\in M_{m\times n}(\mathbb{C})$ şi $B\in M_{n\times p}(\mathbb{C})$), $A=\left(a_{ij}\right)_{\substack{1\le i\le m\\ 1\le j\le n}}$, $B=\left(b_{ij}\right)_{\substack{1\le i\le n\\ 1\le j\le p}}$.<br>Atunci *produsul* $A\cdot B$ (cu matricele $A$, $B$ în această ordine) este o matrice $C\in M_{m\times p}(\mathbb{R})$ (sau $C\in M_{m\times p}\,\mathbb{C}$), unde $C=(c_{ij})_{\substack{1\le i\le m\\ 1\le j\le p}}$ cu<br>$c_{ij}=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}b_{kj}, \forall (i,j)\in\{1,2,\ldots,m\}\times\{1,2,\ldots,p\}$. |

***Exemple***

**1.** $$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{pmatrix},$$

unde:

$$c_{11} = a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + a_{13}b_{31}, \quad c_{12} = a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} + a_{13}b_{32},$$

$$c_{13} = a_{11}b_{13} + a_{12}b_{23} + a_{13}b_{33}, \quad c_{21} = \sum_{h=1}^{3} a_{2h}b_{h1}, \quad c_{22} = \sum_{h=1}^{3} a_{2h}b_{h2},$$

$$c_{23} = \sum_{h=1}^{3} a_{2h}b_{h3}, \quad c_{31} = \sum_{h=1}^{3} a_{3h}b_{h1}, \quad c_{32} = \sum_{h=1}^{3} a_{3h}b_{h2}, \quad c_{33} = \sum_{h=1}^{3} a_{3h}b_{h3}.$$

**2.** $$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 5 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\cdot1+3\cdot5 & 2\cdot2+3\cdot(-1) & 2\cdot0+3\cdot0 \\ 4\cdot1+0\cdot5 & 4\cdot2+0\cdot(-1) & 4\cdot0+0\cdot0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 17 & 1 & 0 \\ 4 & 8 & 0 \end{pmatrix}.$$

**3.** $$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} = (1 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + 3 \cdot 5) = (20) \in M_{1\times1}(\mathbb{R}).$$

## Matrice unitate

| | |
|---|---|
| **Definiție** | *Matricea unitate de ordin n*, $n \in \mathbb{N}^*$, este o matrice pătratică, de elemente $a_{ij}$, notată cu $I_n$, unde pentru orice $i, j \in \{1,\dots, n\}$ avem $a_{ij} = \begin{cases} 1, \text{ dacă } i = j \\ 0, \text{ dacă } i \neq j \end{cases}.$ |

Prin urmare: $$I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \dots & \dots & & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

***Exemple***

**1.** Matricea unitate de ordinul 2 este: $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

**2.** Matricea unitate de ordinul 3 este: $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

**3.** Matricea unitate de ordinul 1 este: $I_1 = (1)$.

Prin calcul direct rezultă că dacă $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ (sau $M_{m\times n}(\mathbb{C})$), atunci $A \cdot I_n = A$, iar dacă $B \in M_{n\times p}(\mathbb{R})$ (sau $M_{n\times p}(\mathbb{C})$), atunci $I_n \cdot B = B$.

Dacă $C \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ (sau $M_{n\times n}(\mathbb{C})$), atunci $I_n \cdot C = C \cdot I_n = C$, adică $I_n$ este un element neutru pentru înmulțirea matricelor pătratice de ordin $n$.

## Proprietăți ale înmulțirii matricelor

Înmulțirea matricelor pătratice de un același ordin nu este comutativă.

Să verificăm această afirmație pentru matrice pătratice de ordinul 2.

Pentru $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ şi $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, avem:

$$A\cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \text{ şi}$$

$$B\cdot A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

deci $A \cdot B \neq B \cdot A$.

**Teoremă.** *Fie matricele* $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$, $B \in M_{n\times p}(\mathbb{R})$, $C \in M_{p\times q}(\mathbb{R})$ (*sau* $A \in M_{m\times n}(\mathbb{C})$, $B \in M_{n\times p}(\mathbb{C})$, $C \in M_{p\times q}(\mathbb{C})$) şi $\lambda \in \mathbb{R}$ (*sau* $\mathbb{C}$)). *Atunci:*

1) $A(BC) = (AB)C$ *(asociativitatea înmulțirii matricelor)*

2) $\lambda(BC) = (\lambda B)C = B(\lambda C)$.

*Demonstrație*

Notăm $D = BC \in M_{n\times q}(\mathbb{R})$ (sau $M_{n\times q}(\mathbb{C})$), $D = (d_{kj})$ şi $G = AB \in M_{m\times p}(\mathbb{R})$ (sau $M_{m\times p}(\mathbb{C})$), $G = (g_{ih})$.

Elementele matricei $A(BC)$ sunt:

$$\sum_{h=1}^{n} a_{ih} d_{hj} = \sum_{h=1}^{n} a_{ih} \left( \sum_{k=1}^{p} b_{hk} c_{kj} \right) = \sum_{h=1}^{n} \sum_{k=1}^{p} a_{ih} b_{hk} c_{kj},\ \forall i \in \{1, \ldots, m\},\ \forall j \in \{1, \ldots, q\}.$$

Analog matricea $(AB)C$ are elementele:

$$\sum_{k=1}^{p} g_{ik}c_{kj} = \sum_{k=1}^{p}\left(\sum_{h=1}^{n} a_{ih}b_{hk}\right)c_{kj} = \sum_{k=1}^{p}\sum_{h=1}^{n} a_{ih}b_{hk}c_{kj},\ \forall i \in \{1,\ldots,m\},\ \forall j \in \{1,\ldots,q\}.$$

Din comutativitatea sumei rezultă concluzia teoremei.

| |
|---|
| **Teoremă.** *Dacă A, B* $\in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ (*sau A, B* $\in M_{n\times n}(\mathbb{C})$), *atunci* ${}^t(AB)={}^tB\,{}^tA$. |

Lăsăm în seama cititorului demonstrația acestei teoreme.

| |
|---|
| **Teoremă.** • *Dacă A, B* $\in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ şi $C \in M_{n\times p}(\mathbb{R})$ (*sau A, B* $\in M_{m\times n}(\mathbb{C})$ *şi* $C \in M_{n\times p}(\mathbb{C})$), *atunci* $(A + B)C = AC + BC$ *(distributivitatea la dreapta a înmulțirii față de adunare).*<br>• *Dacă* $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ şi $B, C \in M_{n\times p}(\mathbb{R})$ *(sau* $A \in M_{m\times n}(\mathbb{C})$ *şi* $B, C \in M_{n\times p}(\mathbb{C})$), *atunci* $A(B + C) = AB + AC$ *(distributivitatea la stânga a înmulțirii față de adunare).* |

Demonstrația o lăsăm în seama cititorului.

## Matrice scalare. Matrice de permutări *(facultativ)*

| | |
|---|---|
| **Definiție** | • Orice matrice de forma $\lambda I_n$, cu $\lambda \in \mathbb{C}$ se numeşte o *matrice scalară.*<br>• Orice matrice obținută din matricea $I_n$ printr-o permutare a liniilor (sau coloanelor) se numeşte o *matrice de permutări.* |

***Exemple***

**1.** $\begin{pmatrix} i & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & i \end{pmatrix} = i \cdot I_3$ este o matrice scalară (aici i reprezintă unitatea imaginară).

**2.** $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ şi $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ sunt matrice de permutări.

**Observație:** La o matrice de permutări pe fiecare linie câte un element este 1, iar celelalte elemente sunt 0. Aceeaşi proprietate are loc şi pentru coloane.

## 2.3. Matrice inversabile. Inversa unei matrice

| **Definiție** | O matrice $A \in M_{m\times n}(\mathbb{C})$ se numeşte *inversabilă la stânga* (respectiv la *dreapta*) dacă şi numai dacă există o matrice $B \in M_{n\times m}(\mathbb{C})$ astfel încât $BA = I_n$ (respectiv $B\in M_{n\times m}(\mathbb{C})$ astfel încât $AB = I_m$) (spunem că $B$ este o matrice inversă la stânga (respectiv la dreapta) a matricei $A$). |
|---|---|

***Exemplu***

Fie matricele $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & -1\\ 2 & 0 & 1\end{pmatrix}$ şi $B=\begin{pmatrix}1 & -3\\ -1 & 5\\ -2 & 7\end{pmatrix}$.

Avem: $$AB=\begin{pmatrix}1 & 2 & -1\\ 2 & 0 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & -3\\ -1 & 5\\ -2 & 7\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=I_2$$

şi

$$BA=\begin{pmatrix}1 & -3\\ -1 & 5\\ -2 & 7\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 2 & -1\\ 2 & 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-5 & 2 & -4\\ 9 & -2 & 6\\ 12 & -4 & 9\end{pmatrix}\neq I_3.$$

Deci matricea $A$ este inversabilă la dreapta şi $B$ este o matrice inversă la dreapta a matricei $A$, dar $B$ nu este o matrice inversă la stânga a matricei $A$ (se poate demonstra că $A$ nu este inversabilă la stânga).

**Lemă.** *Fie o matrice $A \in M_{n\times n}(\mathbb{C})$ inversabilă atât la stânga cât şi la dreapta. Dacă B este o inversă la stânga a lui A, iar C este o inversă la dreapta a lui A, atunci B = C.*

*Demonstrație*

Prin calcul direct, deoarece $BA = I_n$ şi $AC = I_n$, avem succesiv:

$B = B\cdot I_n = B\cdot(A\cdot C) = (B\cdot A)\cdot C = I_n\cdot C = C.$

*Consecințe*

**1)** Dacă o matrice $A$ este inversabilă la stânga şi posedă cel puțin două matrice inverse la stânga, atunci ea nu este inversabilă la dreapta.

**2)** Dacă o matrice $A$ este inversabilă la dreapta şi posedă cel puțin două matrice inverse la dreapta, atunci ea nu este inversabilă la stânga.

**Observație:** Se poate da un exemplu de matrice nepătratică şi inversabilă la stânga care posedă o infinitate de inverse la stânga.

De exemplu, dacă $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, atunci pentru fiecare matrice

$B_{xy} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & x \\ 0 & 1 & y \end{pmatrix}$, cu $x, y \in \mathbb{C}$, avem:

$$B_{xy} \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & x \\ 0 & 1 & y \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2;$$

matricea $A$ nu este inversabilă la dreapta.

| | |
|---|---|
| **Definiție** | Fie $n \in \mathbb{N}^*$ şi $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ (sau $M_{n\times n}(\mathbb{C})$). Vom spune că $A$ este *inversabilă* (sau *nesingulară*) dacă şi numai dacă există $B \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ (sau $M_{n\times n}(\mathbb{C})$) astfel încât $AB = BA = I_n$. |

În caz că există, matricea $B$ este unică şi se numeşte *inversa* matricei $A$ şi se notează cu $A^{-1}$.

O matrice pătratică neinversabilă se mai numeşte şi *singulară*.

### *Exemplu*

Fie matricea $A = \begin{pmatrix} a & c \\ c & d \end{pmatrix} \in M_{2\times 2}(\mathbb{R})$. Dacă $ad - bc \neq 0$, atunci, prin calcul direct, se verifică uşor că matricea $A^{-1} = \dfrac{1}{ad - bc} \cdot \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$ reprezintă inversa matricei $A$.

| |
|---|
| **Teoremă.** *Fie matricele $A$, $B \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ (sau $M_{n\times n}(\mathbb{C})$) inversabile. Atunci $A \cdot B$ este o matrice inversabilă şi $(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$.* |

*Demonstrație*

Deoarece matricele $A$ şi $B$ sunt inversabile, există matricele $A^{-1}$ şi $B^{-1}$ astfel încât: $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I_n$ şi $B \cdot B^{-1} = B^{-1} \cdot B = I_n$. Prin urmare:

$(AB)(B^{-1}A^{-1}) = ((AB)B^{-1})A^{-1} = A(BB^{-1})A^{-1} = AI_nA^{-1} = (AI_n)A^{-1} = AA^{-1} = I_n$;

$(B^{-1}A^{-1})(AB) = ((B^{-1}A^{-1})A)B = B^{-1}(A^{-1}A)B = B^{-1}I_nB = B^{-1}(I_nB) = B^{-1}B = I_n$.

Deci inversa matricei $AB$ este matricea $B^{-1} \cdot A^{-1}$.

## Puterile cu exponent întreg ale unei matrice $A \in M_{n\times n}(\mathbb{C})$

Dacă $m \in \mathbb{N}$, avem $A^0 \overset{\text{def}}{=} I_n$ şi pentru $m \geq 1 : A^m = A^{m-1} \cdot A$.

Dacă $A$ este inversabilă, atunci pentru $k \in \mathbb{Z}$, $k < 0 : A^k \overset{\text{def}}{=} \left(A^{-1}\right)^{-k}$.

Dacă $A^{k+l}$, $A^k$, $A^l$ au sens şi $k, l \in \mathbb{Z}$, atunci $A^k \cdot A^l = A^{k+l}$.

Dacă $A$ este singulară, relația de mai sus este adevărată numai pentru exponenți pozitivi.

**Teoremă.** *Dacă* $A, B \in M_{\text{nxn}}(\mathbb{C})$ *astfel încât* $AB = BA$, *atunci pentru orice* $n \in \mathbb{N}^*$, *avem*

$$\left(A+B\right)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k A^{n-k} B^k .$$

Lăsăm în seama cititorului să demonstreze, prin inducție matematică, această teoremă.

## Test de evaluare

(2p) **1.** Se dau matricele: $A = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ şi $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 3 \end{pmatrix}$. Calculați $B \cdot A$.

(2p) **2.** Calculați ${}^tA$ şi ${}^tA \cdot A$ pentru $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 5 \\ 4 & 3 & -2 & 1 \\ 5 & -1 & -1 & -2 \end{pmatrix}$.

(2p) **3.** Fie matricele $A, B \in M_2(\mathbb{C})$ astfel încât $ABAB = O_2$.
Demonstrați că $BABA = O_2$.

($2p$) **4.** Fie $A$ o matrice inversabilă astfel încât $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

Determinați matricea $C$ astfel încât $AC = A^4 + A^3 + A^2 + A$.
*Timp de lucru: 45 de minute.*

## Exerciții propuse

**1.** Dacă $A, B, C \in M_{3\times3}(\mathbb{R})$ și $A \neq O_3$, din egalitatea $AB = AC$ rezultă $B = C$?

**2.** Fie $A$ o matrice pătratică. Demonstrați că: a) matricele $A \cdot {}^tA$ și $A + {}^tA$ sunt simetrice; b) $A - {}^tA$ este antisimetrică.

**3.** Folosind problema 2, să se arate că orice matrice pătratică $A$ se poate scrie ca suma dintre o matrice simetrică și o matrice antisimetrică.

**4.** Se dau matricele $A = (0\ 0\ 0)$ și $B = \begin{pmatrix} 1 & 6 & 4 \\ 2 & 3 & 0 \\ 5 & 5 & 1 \end{pmatrix}$. Calculați $A \cdot B$.

**5.** Fie $A$ o matrice inversabilă și $k \in \mathbb{Z}$. Este adevărat că ${}^t(A^k) = ({}^tA)^k$?

**6.** Fie matricele: $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ și $C = (1\ -1)$.

Calculați $ABC$ și $CAB$.

**7.** Fie matricea $A \in M_{3\times3}(\mathbb{C})$ astfel încât $AB = BA$ pentru orice matrice $B \in M_{3\times3}(\mathbb{C})$.

Demonstrați că $A$ este o matrice scalară.

**8.** Fie matricea $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Demonstrați că există $p \in \mathbb{N}$ astfel încât $A^p = O_4$.

**9.** Fie matricea $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 0\\ 0 & 1 & 3\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$. Calculați $A^k$, $k \in \mathbb{Z}$.

**10.** Scrieți matricea $A=\begin{pmatrix}1 & 8 & 5 & 4\\ 2 & 1 & 3 & 5\\ 6 & 1 & 3 & 2\\ 7 & 3 & -1 & 5\end{pmatrix}$ sub forma $A = B + C$, unde $B$ este o matrice simetrică şi $C$ este o matrice antisimetrică.

**11.** Există valori ale lui $a$, $b$, $c \in \mathbb{C}$ astfel încât $\begin{pmatrix}a & b\\ c & 0\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}a & b\\ c & 0\end{pmatrix}$?

**12.** Dacă $A \in M_{3\times2}(\mathbb{R})$ şi $B \in M_{2\times3}(\mathbb{R})$, rezultă că matricea $AB$ este inversabilă?

**13.** Să se arate că dacă $A = (a_{ij}) \in M_{n\times n}(\mathbb{C})$, $B = (b_{ij}) \in M_{n\times n}(\mathbb{C})$ şi notăm $\operatorname{tr}(A)=\sum_{i=1}^{n} a_{ii}$, atunci:

a) $\operatorname{tr}(A + B) = \operatorname{tr}(A) + \operatorname{tr}(B)$;

b) $\operatorname{tr}(A - B) = \operatorname{tr}(A) - \operatorname{tr}(B)$;

c) $\operatorname{tr}(kA) = k \operatorname{tr}(A)$, $\forall\, k \in \mathbb{C}$;

d) $\operatorname{tr}(AB) = \operatorname{tr}(BA)$;

e) nu există matrice $A, B \in M_{n\times n}(\mathbb{C})$ astfel încât $AB - BA = I_n$;

f) dacă $A$ şi $B$ sunt inversabile, iar $U \in M_{n\times n}(\mathbb{C})$, atunci $\operatorname{tr}(AUA^{-1}) = \operatorname{tr}(BUB^{-1})$.

**14.** Fie $A, B, C \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ şi notăm cu $[A, B] = AB - BA$. Să se demonstreze identitatea lui Jacobi[1]:

$$[[A, B],C] + [[B, C],A] + [[C, A],B] = O_n.$$

**15.** Fie $A$ o matrice inversabilă, $A \in M_{m\times n}(\mathbb{C})$ şi $k \in \mathbb{C}^*$. Demonstrați că:

a) $A^{-1}$ este inversabilă şi $(A^{-1})^{-1} = A$;

b) $kA$ este inversabilă şi $(kA)^{-1}=\frac{1}{k}\cdot A^{-1}$;

c) ${}^tA$ este inversabilă şi $\left({}^tA\right)^{-1}={}^t\left(A^{-1}\right)$.

**16.** Demonstrați că oricare ar fi matricele pătratice $X_1, ..., X_n$ de acelaşi ordin şi inversabile are loc egalitatea $(X_1\cdot\ldots\cdot X_n)^{-1}=X_n^{-1}\cdot\ldots\cdot X_1^{-1}$.

**17.** Demonstrați că pentru orice matrice inversabilă $X$ şi pentru orice $n \in \mathbb{Z}$ avem $\left(X^n\right)^{-1}=\left(X^{-1}\right)^n$.

[1] Jacobi, Karl Gustav (1804-1851), matematician, mecanician, astronom şi om politic german.

Capitolul 3

# DETERMINANŢI

## 3.1. Determinant de ordin *n*, proprietăți

Fie mulțimea $M = \{1, 2, 3, \ldots, n\}$ şi fie σ o permutare a mulțimii $M$, adică:

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \ldots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \sigma(3) & \ldots & \sigma(n) \end{pmatrix}.$$

Notăm cu $P_n$ mulțimea tuturor permutărilor mulțimii $M$.

Reamintim că funcția sgn $n$ (semnul unei permutări) se defineşte în modul următor:

$$\text{sgn} : P_n \to \{-1, 1\},\ \text{sgn}\,\sigma = \begin{cases} -1, & \text{dacă } \sigma \text{ este permutare impară} \\ 1, & \text{dacă } \sigma \text{ este permutare pară.} \end{cases}$$

**Exerciţiu rezolvat**

Fie permutarea $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$. Calculați sgn σ.

*Soluție.* Inversiunile permutării σ sunt:

(2, 1); (3, 1); (4, 1). Deci σ este impară, iar sgn σ = –1.

Considerăm în continuare $n^2$ numere întregi, raționale, reale sau complexe ($n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$) pe care le notăm cu $a_{11}, a_{12}, a_{13}, \ldots, a_{1n}$; $a_{21}, a_{22}, a_{23}, \ldots a_{2n}$; $\ldots a_{n1}, a_{n2}, a_{n3}, \ldots, a_{nn}$. Aceste $n^2$ numere le scriem în modul următor:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} \overset{\text{not}}{=} D_n.$$

| **Definiție** | Numim *determinant de ordin n*, numărul $D_n$ definit prin: $D_n = \sum_{\sigma\in P_n}(\text{sgn}\,\sigma)a_{1\sigma(1)}\cdot a_{2\sigma(2)}\cdot\ldots\cdot a_{n\sigma(n)}$. |
|---|---|

Evident $D_n \in \mathbb{Z}$ (respectiv $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$) după cum $a_{ij} \in \mathbb{Z}$ (respectiv $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$), unde: $1 \le i \le n$, $1 \le j \le n$.

Deoarece $P_n$ are $n!$ elemente rezultă că $D_n$ are în dezvoltare $n!$ termeni, din care $\frac{n!}{2}$ termeni au semnul „+” şi $\frac{n!}{2}$ termeni au semnul „–”.

Să observăm că un determinant are $n$ linii şi $n$ coloane.

Un element $a_{ij}$ ( $i = 1, \ldots, n$ şi $j = 1,\ldots, n$) este situat pe linia $i$ şi coloana $j$.

## Determinant de ordin doi

Pentru $n = 2$, avem: $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \sum_{\sigma\in P_2}(\text{sgn}\,\sigma)\cdot a_{1\sigma(1)}\cdot a_{2\sigma(2)}$. (1)

Cele două permutări ale mulțimii $P_2$ sunt: $\sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, $\sigma_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

Avem $\text{sgn}\,\sigma_1 = 1$ şi $\text{sgn}\,\sigma_2 = -1$.

Egalitatea (1) devine:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} + (-1)\cdot a_{12}a_{21} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

## Determinant de ordinul trei

Pentru $n = 3$, avem: $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \sum_{\sigma\in P_3}(\text{sgn}\,\sigma)\cdot a_{1\sigma(1)}\cdot a_{2\sigma(2)}\cdot a_{3\sigma(3)}$. (2)

Cele 6 permutări ale mulțimii $P_3$ sunt:

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix},$$

$$\sigma_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad \sigma_5 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad \sigma_6 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Semnele acestor permutări sunt:

$\operatorname{sgn} \sigma_1 = 1$, $\operatorname{sgn} \sigma_2 = -1$, $\operatorname{sgn} \sigma_3 = -1$,
$\operatorname{sgn} \sigma_4 = -1$, $\operatorname{sgn} \sigma_5 = 1$, $\operatorname{sgn} \sigma_6 = 1$.

Rezultă că egalitatea (2) devine:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + (-1)\cdot a_{12}a_{21}a_{33} + (-1)\cdot a_{11}a_{23}a_{32} +$$

$$+ (-1)\cdot a_{13}a_{22}a_{31} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}$$

sau

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} -$$

$$- a_{13}a_{22}a_{31} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}.$$

Să considerăm determinantul de ordinul 3

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{21}a_{32}a_{13} - \\ - a_{13}\, a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{23}a_{32}a_{11}.$$

O regulă de calcul a acestui determinant de ordin 3 este foarte simplă, fiind cunoscută sub numele de *regula triunghiului*.

Considerăm următoarele figuri sugestive pentru înțelegerea acestei reguli.

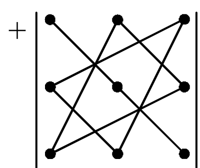


**Figura 1**

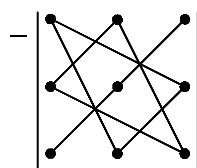


**Figura 2**

Explicit, termenii cu semnul + din expresia determinantului de ordin 3 sunt: produsul elementelor $a_{11}$, $a_{22}$, $a_{33}$ de pe diagonala principală şi produsele elementelor ce determină o dreaptă paralelă cu diagonala principală ($a_{12}$ şi $a_{23}$ respectiv $a_{21}$ şi $a_{32}$) cu elementele din colţul „opus" al matricei ($a_{31}$, respectiv $a_{13}$).

Analog, termenii cu semnul − se obţin considerând produsul elementelor de pe diagonala secundară şi produsul „vârfurilor" triunghiurilor ce au una dintre laturi paralele cu diagonala secundară.

***Exemplu***

Vom calcula determinantul $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 3 \\ 0 & -2 & 1 \end{vmatrix}$ folosind regula triunghiului.

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 3 \\ 0 & -2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{aligned} & 1 \cdot 1 \cdot 1 + 0 \cdot 3 \cdot 0 + (-1) \cdot (-2) \cdot 2 - \\ & - 2 \cdot 1 \cdot 0 - 3 \cdot (-2) \cdot 1 - (-1) \cdot 0 \cdot 1 = \\ & = 1 + 4 + 6 = 11. \end{aligned}$$

Pentru calculul unui determinant de ordinul 3 se mai foloseşte şi *regula lui Sarrus* (atenţie! se foloseşte numai pentru determinanţi de ordinul 3):

$$\begin{array}{ccc} \multicolumn{3}{c}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{array}$$

Se scriu elementele determinantului aşezate pe linii şi pe coloane şi apoi se copiază primele două linii.

Se fac produsele pe diagonalele trasate cu linii pline şi se adună, obţinându-se numărul $d_1$. Apoi se fac produsele pe diagonalele trasate cu linii punctate şi se adună, obţinându-se numărul $d_2$. Determinantul $d$ are valoarea $d = d_1 - d_2$.

Evident, cele 2 reguli expuse anterior sunt echivalente.

## Determinat de ordinul patru

Pentru $n = 4$, avem:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} = \sum_{\sigma \in P_4} \operatorname{sgn} \sigma \, a_{1\sigma(1)} \cdot a_{2\sigma(2)} \cdot a_{3\sigma(3)} \cdot a_{4\sigma(4)} \qquad (3)$$

Partea dreaptă a egalității (3) are $4! = 24$ termeni.

## Exerciții rezolvate

**1.** În dezvoltarea unui determinant de ordinul 5, unul din termeni este: $\varepsilon \cdot a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{34} \cdot a_{45} \cdot a_{51}$. Stabiliți dacă $\varepsilon$ este $(+1)$ sau $(-1)$.

*Soluție*: Permutarea din $P_5$ atașată termenului din enunț este:

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 1 \end{pmatrix}.$$

Inversiunile permutării $\sigma$ sunt: (2, 1), (3, 1), (4, 1), (5, 1).
Deci $\sigma$ este o permutare pară, prin urmare $\varepsilon = 1$.
**2.** Un determinant de ordinul $n$ are în dezvoltarea sa 720 de termeni. Determinați $n$.
*Soluție*: $n! = 720$, deci $n = 6$.

**3.** Calculați determinantul $D = \begin{vmatrix} \operatorname{tg} t & 1 \\ 1 & \operatorname{ctg} t \end{vmatrix}$, unde $t \in (0, \frac{\pi}{2})$.

*Soluție*: $D = \operatorname{tg} t \cdot \operatorname{ctg} t - 1 = 0$.

**4.** Calculați determinantul $D = \begin{vmatrix} n+1 & n+2 \\ n & n+1 \end{vmatrix}$, unde $n \in \mathbb{N}$.

*Soluție*: $D = (n + 1)^2 - n(n + 2) = 1$.

**5.** Calculați determinanții:

a) $D=\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix}$ b) $D=\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & (n+1)^2 & n^2+3n+3 \\ 1 & n & n+1 \end{vmatrix}$, unde $n \in \mathbb{N}$.

*Soluție*:

a) $D = 2 \cdot 2 \cdot 2 + 0 \cdot 0 \cdot 1 + 0 \cdot 1 \cdot 1 - 1 \cdot 2 \cdot 0 - 1 \cdot 0 \cdot 2 - 2 \cdot 1 \cdot 0 = 8$

b) Procedând analog punctului a), obținem $D = 1$.

## Exerciții propuse

**1.** Să se calculeze determinanții de ordinul 2.

a) $\begin{vmatrix} a & \frac{1}{a} \\ \frac{1}{a} & a \end{vmatrix}$, $a \neq 0$; b) $\begin{vmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{vmatrix}$, $\alpha \in \mathbb{R}$;

c) $\begin{vmatrix} 1+\mathrm{i} & 2+\mathrm{i} \\ 2-\mathrm{i} & 1-\mathrm{i} \end{vmatrix}$; d) $\begin{vmatrix} 2^{\sqrt{3}-\sqrt{2}} & 2^{\sqrt{3}} \\ 2^{\sqrt{3}} & 2^{\sqrt{3}+\sqrt{2}} \end{vmatrix}$;

e) $\begin{vmatrix} \mathrm{tg}\, t & \sin t \\ 1 & \cos t \end{vmatrix}$, $t \in (0, \frac{\pi}{2})$; f) $\begin{vmatrix} \sqrt{1-x^2} & x \\ x & \sqrt{1-x^2} \end{vmatrix}$, $x \in (-1, 1)$;

g) $\begin{vmatrix} \frac{x}{1+x^2} & 1 \\ 1 & 1+x^2 \end{vmatrix}$, $x \in \mathbb{R}$; h) $\begin{vmatrix} 2006 & 2005 \\ 2005 & 2006 \end{vmatrix}$.

**2.** Să se calculeze determinanții de ordinul 3.

a) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 2 & 1 & 6 \\ 4 & 8 & -2 \end{vmatrix}$; b) $\begin{vmatrix} 6 & a & b \\ 9 & 1 & 2 \\ 3 & a & 4 \end{vmatrix}$, $a, b \in \mathbb{C}$;

c) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix}$, $a, b, c \in \mathbb{C}$; d) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & a \end{vmatrix}$, $a \in \mathbb{C}$;

e) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1+a & 1+b & 1+c \\ a & b & c \end{vmatrix}$, $a, b, c \in \mathbb{C}$; f) $\begin{vmatrix} 1 & 9 & 99 \\ 5 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$;

g) $\begin{vmatrix} \cos x & \cos y & \cos z \\ \sin x & \sin y & \sin z \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$; h) $\begin{vmatrix} e^x & e^{-x} & 1 \\ e^y & e^{-y} & 1 \\ e^z & e^{-z} & 1 \end{vmatrix}$, $x, y, z \in \mathbb{R}$;

i) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ n & n+1 & n+2 \\ n^2 & (n+1)^2 & (n+2)^2 \end{vmatrix}$, $n \in \mathbb{N}$; j) $\begin{vmatrix} n & n+2 & n+4 \\ n+1 & n+5 & n+6 \\ n+9 & n+3 & n+8 \end{vmatrix}$, $n \in \mathbb{N}$;

k) $\begin{vmatrix} x^2 & y^2 & (x+y)^2 \\ 1 & 1 & 1 \\ x & y & x+y \end{vmatrix}$, $x, y \in \mathbb{R}$; l) $\begin{vmatrix} \sin a & \sin b & \sin c \\ \sin 2a & \sin 2b & \sin 2c \\ \sin 3a & \sin 3b & \sin 3c \end{vmatrix}$, $a, b, c \in \mathbb{R}$.

## 3.2. Proprietățile determinanților

Fie $D_n = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$ un determinant de ordinul $n$.

Știm că prin definiție

$$D_n = \sum_{\sigma \in P_n} (\operatorname{sgn} \sigma) a_{1i_1} \cdot a_{2i_2} \cdot \ldots \cdot a_{ni_n},$$

unde $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ i_1 & i_2 & \dots & i_n \end{pmatrix}$.

Remarcăm că în fiecare produs de forma $(\operatorname{sgn} \sigma)\, a_{1i_1} a_{2i_2} \dots a_{ni_n}$ indicii liniilor figurează în ordine naturală. Este firesc să ne întrebăm ce rezultat se obține dacă se face suma

$$\sum_{\varphi\in P_n}(\operatorname{sgn}\varphi)a_{j_1 1}a_{j_2 2}\ldots a_{j_n n}\ , \qquad (*)$$

unde indicii coloanelor figurează în ordine naturală şi φ este permutarea

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & n \\ j_1 & j_2 & \ldots & j_n \end{pmatrix}.$$

Răspunsul este dat de următoarea:

**Teoremă.** *Suma celor n! produse de forma* (*) *este $D_n$ adică*

$$D_n = \sum_{\varphi\in P_n}(\operatorname{sgn}\varphi)a_{j_1 1}a_{j_2 2}\ldots a_{j_n n}.$$

*Demonstraţie*

Factorii oricărui produs de forma $a_{1i_1}a_{2i_1}\ldots a_{ni_n}$ sunt elemente ale determinantului $D_n$, alese câte unul din fiecare linie şi fiecare coloană. Rezultă că orice produs de această formă poate fi scris schimbând corespunzător ordinea factorilor astfel încât indicii coloanelor să figureze în ordine naturală. Astfel încât dacă:

$\varphi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & n \\ i_1 & i_2 & \ldots & i_n \end{pmatrix}$ şi $\psi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & n \\ j_1 & j_2 & \ldots & j_n \end{pmatrix}$, trebuie să avem egalitatea

$$a_{1i_1}a_{2i_2}\ldots a_{ni_n} = a_{j_1 1}a_{j_2 2}\ldots a_{j_n n} \qquad (**)$$

***Exemplu***

În calculul unui determinant de ordinul 5 apare şi termenul $a_{13}a_{25}a_{32}a_{41}a_{54}$. Schimbând ordinea factorilor avem egalitatea:

$a_{13}\,a_{25}\,a_{32}a_{41}\,a_{54} = a_{41}a_{32}a_{13}a_{54}a_{25}$.

Permutările φ şi ψ sunt respectiv:

$$\varphi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix},\quad \psi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 3 & 1 & 5 & 2 \end{pmatrix}.$$

Să considerăm un element oarecare $a_{kl}$ care figurează în produsele din membrul stâng şi cel drept al egalităţii (**). Mai exact, în membrul stâng (în care indicii liniilor sunt în ordine naturală) elementul $a_{kl}$ ocupă locul $k$ (numărând factorii de la stânga la dreapta), iar în membrul drept (unde indicii coloanelor sunt în ordine naturală) acelaşi element ocupă locul $l$.

Ținând seama de cum au fost definite permutările $\varphi$ şi $\psi$, $\varphi$ îl duce pe $k$ în $l$ şi $\psi$ îl duce pe $l$ în $k$. Avem:

$$\varphi(k) = l \Leftrightarrow \psi(l) = k, \forall k, l = 1, 2, \ldots, n.$$

Dacă notăm $M = \{1, 2, \ldots, n\}$ rezultă că $\varphi, \psi : M \to M$ sunt funcții bijective inverse una alteia adică:

$$\varphi \circ \psi = \psi \circ \varphi = \mathbf{1}_M.$$

Însă $\mathbf{1}_M$ este permutarea identică (permutare pară). Cum $\varphi \circ \psi$ este o permutare pară rezultă că $\varphi$ şi $\psi$ sunt de aceeaşi clasă, adică $\operatorname{sgn} \varphi = \operatorname{sgn} \psi$.

Rezultă că respectiv termenii sumelor:

$$\sum_{\varphi \in P_n} (\operatorname{sgn} \varphi) a_{1i_1} a_{2i_2} \ldots a_{ni_n} \text{ şi } \sum_{\psi \in P_n} (\operatorname{sgn} \psi) a_{j_1 1} a_{j_2 2} \ldots a_{j_n n}$$

sunt egali (doi câte doi), deci sumele sunt egale. Teorema este demonstrată.

Folosind teorema demonstrată anterior avem o primă proprietate a determinanților.

**Teorema 1.** *Prin schimbarea într-un determinant a liniilor în coloană se obține un determinant egal cu cel inițial.*

O altă proprietate a determinanților este dată de:

**Teorema 2.** *Prin schimbarea între ele a două linii (sau două coloane) determinantul îşi schimbă semnul.*

*Demonstrație:*

Pentru $n = 4$, putem alege de exemplu liniile 2 şi 4, fără a restrânge generalitatea.

Fie $D_4 = |a_{ij}|$, $i = 1, 2, 3, 4$, $j = 1, 2, 3, 4$, deci

$$D_4 = \sum_{\varphi \in P_4} (\operatorname{sgn} \varphi) a_{1i_1} a_{2i_2} a_{3i_3} a_{4i_4} \qquad (*)$$

Să presupunem de asemenea că schimbăm între ele liniile 2 şi 4 ale lui $D_4$. Fie $D_4'$ determinantul astfel obținut.

Un element al lui $D_4$ de forma $a_{2i_2}$ devine în $D_4^{'}$ element al liniei 4 (coloana $i_2$), iar un element al lui $D_4$ de forma $a_{4i_4}$ devine în $D_4^{'}$ element al liniei 2 (coloana $i_4$). În acelaşi timp elementele lui $D_4$ de forma $a_{1i_1}$ şi $a_{3i_3}$ rămân pe loc în $D_4^{'}$.

Să renotăm elementul $a_{2i_2}$ cu $a^{'}_{4i_4^{'}}$ şi elementul $a_{4i_4}$ cu $a^{'}_{2i_2^{'}}$. După cum am remarcat $i_4^{'} = i_2$, $i_2^{'} = i_4$.

Obținem: $$D_4^{'} = \sum_{\psi \in P_4} (\text{sgn } \psi) a_{1i_1} a^{'}_{2i_2^{'}} a_{3i_3} a^{'}_{4i_4^{'}} \qquad (**)$$

Ne propunem să arătăm că $D_4^{'} = -D_4$.

Să stabilim legătura între semnele cu care figurează în sumele date de (*) şi (**) perechile de produse: $a_{1i_1}a_{2i_2}a_{3i_3}a_{4i_4}$, $a_{1i_1}a^{'}_{2i_2^{'}}a_{3i_3}a^{'}_{4i_4^{'}}$.

Cele două permutări ataşate acestor produse sunt respectiv:

$$\varphi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ i_1 & i_2 & i_3 & i_4 \end{pmatrix} \text{ şi } \psi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ i_1 & i_2^{'} & i_3 & i_4^{'} \end{pmatrix}, \text{ unde } i_2^{'} = i_4,\ i_4^{'} = i_2.$$

Cum permutările $\varphi$ şi $\psi$ se obțin una din alta printr-o schimbare de poziție, rezultă că sgn $\psi = -$ sgn $\varphi$.

Obținem că: $(\text{sgn}\,\psi) a_{1i_1} a^{'}_{2i_2^{'}} a_{3i_3} a^{'}_{4i_4^{'}} = (-\text{sgn}\,\varphi) a_{1i_1} a_{2i_2} a_{3i_3} a_{4i_4}$.

Deoarece egalitatea anterioară are loc pentru orice pereche $(\varphi, \psi)$ de permutări de forma menționată, rezultă că:

$$\sum_{\psi \in P_4} (\text{sgn}\,\psi) a_{1i_1} a^{'}_{2i_2^{'}} a_{3i_3} a^{'}_{4i_4} = -\sum_{\psi \in P_4} (\text{sgn}\,\varphi) a_{1i_1} a_{2i_2} a_{3i_3} a_{4i_4}, \text{ adică } D_4^{'} = -D_4.$$

Acelaşi raționament se poate face pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$, $n \geq 2$.

**Teorema 3.** *Un determinant $D_n$ cu 2 linii (respectiv două coloane) identice este egal cu* 0.

*Demonstrație*

Fie $D_n^{'}$ determinantul care se obține din $D_n$ prin schimbarea celor două linii (respectiv coloane) identice, deci $D_n^{'} = D_n$. Conform teoremei 2 avem $D_n^{'} = -D_n$. Rezultă $D_n = -D_n$, adică $D_n = 0$.

**Teorema 4.** *Prin înmulțirea unei linii (respectiv coloane) a unui determinant cu un număr, se obține un determinant egal cu produsul dintre determinantul inițial şi acel număr.*

*Exemplu:* $\begin{vmatrix} \lambda & 4 & 5 \\ 2\lambda & 8 & 6 \\ 3\lambda & 1 & 3 \end{vmatrix} = \lambda \begin{vmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 2 & 8 & 6 \\ 3 & 1 & 3 \end{vmatrix}$.

**Teorema 5.** *Dacă un determinant are două linii (două coloane) proporționale, atunci el este nul.*

*Exemplu:* $\begin{vmatrix} \lambda a & \lambda b & \lambda c \\ \mu a & \mu b & \mu c \\ \alpha & \beta & \gamma \end{vmatrix} = 0.$

**Teorema 6.** *Dacă într-un determinant elementele unei linii (respectiv coloane) sunt fiecare sumă de două elemente, atunci determinantul se descompune într-o sumă de doi determinanți după modelul:*

$$\begin{vmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & a_{13}+b_{13} & \dots & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & \dots & b_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Următoarea teoremă este foarte importantă pentru calculul determinanților.

**Teorema 7.** *Dacă la o linie (respectiv coloană) a unui determinant se adună o altă linie (respectiv coloană) înmulțită cu un număr arbitrar, se obține un determinant egal cu determinantul inițial.*

***Exemple***

**1.** $$\begin{vmatrix} x & y & z \\ u & v & w \\ l & m & n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x+\alpha u+\beta l & y+\alpha v+\beta m & z+\alpha w+\beta n \\ u & v & w \\ l & m & n \end{vmatrix};$$

**2.** $$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 7 & -1 \\ 1 & 1 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} \overset{-2C_1+C_2}{\underset{\substack{-C_1+C_3 \\ -C_1+C_4}}{=\!=\!=}} \begin{vmatrix} 1 & -3 & 3 & 4 \\ 2 & -1 & 5 & -3 \\ 1 & -1 & 2 & 4 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= -\begin{vmatrix} -3 & 3 & 4 \\ -1 & 5 & -3 \\ -1 & 2 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 3 & 4 \\ 1 & 5 & -3 \\ 1 & 2 & 4 \end{vmatrix} \overset{-2C_1+C_2}{\underset{-4C_1+C_3}{=\!=\!=}}$$

$$= \begin{vmatrix} 3 & -3 & -8 \\ 1 & 3 & -7 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} -3 & -8 \\ 3 & -7 \end{vmatrix} = 21 + 24 = 45.$$

## Dezvoltarea unui determinant după elementele unei linii (respectiv coloane)

Considerăm un determinant de ordin $n$, cu $n \geq 3$,

$$D_n = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Fie $i, j \in \{1,\ldots, n\}$ arbitrar fixați. Determinantul obținut din $D_n$ prin suprimarea liniei $i$ şi coloanei $j$, notat $d_{ij}$, se numeşte *minorul corespunzător elementului* $a_{ij}$.

Numărul $A_{ij} = (-1)^{i+j} d_{ij}$ se numeşte *cofactorul* (sau *complementul algebric*) lui $a_{ij}$.

**Teorema 8.** *Fie $D_n$ un determinant de ordin n, cu $n \geq 3$. Atunci:*

$$D_n = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} A_{ij}\ ,\ \forall i \in \{1, \ldots, n\}$$

*Demonstrație*

Fără a restrânge generalitatea, putem presupune $i = 1$. În caz contrar, putem schimba liniile 1 şi $i$ între ele.

Vom demonstra că $D_n = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + \ldots + a_{1n}A_{1n}$ (1).

Pentru aceasta observăm că nici un termen al determinantului $D_n$ nu poate apărea în două produse diferite din dezvoltarea (1): toți termenii determinantului care intră în produsul $a_{11}A_{11}$ conțin elementul $a_{11}$, deci sunt diferiți de termenii care intră în produsul $a_{12}A_{12}$, aceştia conținând numai elementul $a_{12}$ de pe linia 1 etc.

Pe de altă parte, numărul termenilor determinantului $D_n$ care apar în dezvoltarea (1) este egal cu $(n-1)!n = n!$, deci dezvoltarea (1) conține toți termenii lui $D_n$.

Rămâne să demonstrăm că termenii lui $D_n$ apar cu acelaşi semn în dezvoltarea (1).

În minorul lui $a_{1j_1}$, termenul arbitrar $a_{2j_2} \ldots a_{nj_n}$ are semnul $(-1)^l$, unde $l$ este numărul inversiunilor permutării:

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & \ldots & n \\ j_2 & j_3 & \cdots & j_n \end{pmatrix}$$

Atunci semnul lui $a_{1j_1} a_{2j_2} \ldots a_{nj_n}$ în dezvoltarea (1) este $(-1)^{l+j_1+1}$.

Pe de altă parte, semnul lui $a_{1j_1} a_{2j_2} \ldots a_{nj_n}$ în $D_n$ este semnul permutării

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \ldots & n \\ j_1 & j_2 & j_3 & \cdots & j_n \end{pmatrix},$$

adică $(-1)^{l+j_1-1} = (-1)^{l+j_1+1}$, ceea ce încheie demonstrația.

**Corolar.** *Fie $D_n$ un determinant de ordin n, cu $n \geq 3$. Atunci*:

$$D_n = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} A_{ij}\ ,\ \forall j \in \{1, \ldots, n\}$$

Demonstrația rezultă din teoremele 1 şi 8.

## Exerciţiu rezolvat

Să se calculeze determinantul:

$$d = \begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 & 2 \\ -5 & 1 & 3 & -4 \\ 2 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -5 & 3 & -3 \end{vmatrix}$$

*Soluție:* Dezvoltând după linia a treia, avem:

$$d = (-1)^{3+1} \cdot 2 \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 3 & -4 \\ -5 & 3 & -3 \end{vmatrix} + (-1)^{3+3} \cdot 1 \begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 \\ -5 & 1 & -4 \\ 1 & -5 & -3 \end{vmatrix} +$$

$$+ (-1)^{3+4} \cdot (-1) \begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 \\ -5 & 1 & 3 \\ 1 & -5 & 3 \end{vmatrix} = 2 \cdot 16 - 40 + 48 = 40.$$

**Funcția determinant**

Putem defini funcția *determinant*

$$\det : M_n(\mathbb{C}) \to \mathbb{C} \text{ astfel:}$$

pentru orice matrice $A \in M_n(\mathbb{C})$, $A = (a_{ij})_{\substack{i=\overline{1,n} \\ j=\overline{1,n}}}$, det $A$ este numărul complex

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

**Observație:** Analog putem defini funcția det pe $M_n$ ($\mathbb{R}$), $M_n$ ($\mathbb{Q}$) sau $M_n$ ($\mathbb{Z}$) cu valori respectiv în $\mathbb{R}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{Z}$.

Vom da fără demonstrație următoarea teoremă, referitoare la determinantul produsului a două matrice.

**Teoremă.** *Fie* $n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$ *şi două matrice* $A, B \in M_n$ ($\mathbb{C}$). *Atunci*

$$\det (AB) = (\det A) \cdot (\det B).$$

## Exerciții rezolvate

**1.** Dacă $X, Y \in M_2$ ($\mathbb{C}$), să se arate că:

$$\det (X+Y) + \det(X-Y) = 2 \det X + 2 \det Y.$$

*Soluție:* Fie $X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $Y = \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix}$ cu $a, b, c, d, e, f, g, h \in \mathbb{C}$

$$X+Y = \begin{pmatrix} a+e & b+f \\ c+g & d+h \end{pmatrix}, \quad X-Y = \begin{pmatrix} a-e & b-f \\ c-g & d-h \end{pmatrix},$$

$$\det(X+Y)+\det(X-Y) = (a+e)(d+h)-(b+f)(c+g)+(a-e)(d-h)-(b-f)(c-g) =$$

$$= 2ad+2eh-2bc-2fg = 2(ad-bc+eh-fg) = 2\det X + 2\det Y.$$

**2.** Fie $(a_n)_{n\geq 1}$ o progresie aritmetică de rație $r$. Calculați determinantul

$$\begin{vmatrix} a_{n+1} & a_{n+2} & a_{n+4} \\ a_{n+3} & a_{n+5} & a_{n+7} \\ a_{n+6} & a_{n+8} & a_{n+9} \end{vmatrix}.$$

*Soluție:*

$$\begin{vmatrix} a_1+nr & a_1+(n+1)r & a_1+(n+3)r \\ a_1+(n+2)r & a_1+(n+4)r & a_1+(n+6)r \\ a_1+(n+5)r & a_1+(n+7)r & a_1+(n+8)r \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1+nr & a_1+(n+1)r & a_1+(n+3)r \\ 2r & 3r & 3r \\ 3r & 3r & 2r \end{vmatrix} =$$

$$= r^2 \cdot \begin{vmatrix} a_1+nr & a_1+(n+1)r & a_1+(n+3)r \\ 2 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 2 \end{vmatrix} = r^2 \cdot \begin{vmatrix} a_1+nr & r & 3r \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & -1 \end{vmatrix} =$$

$$= r^2 \cdot (-a_1 - nr - 6r + 2r) = r^2 \cdot (-a_1 - nr - 4r) = r^2(-a_1 - (n+4)r =$$
$$= -r^2 \cdot a_{n+5}.$$

**3.** Calculați determinantul $\Delta_n = \begin{vmatrix} a_{n+1} & a_{n+2} & a_{n+4} & a_{n+7} \\ a_{n+3} & a_{n+5} & a_{n+8} & a_{n+11} \\ a_{n+6} & a_{n+9} & a_{n+12} & a_{n+14} \\ a_{n+10} & a_{n+13} & a_{n+15} & a_{n+16} \end{vmatrix}$, dacă $(a_n)_{n\geq 1}$ este o progresie aritmetică de rație $r$.

*Soluție:*

$$\Delta_n \xlongequal{L_i \leftarrow \begin{bmatrix} L_i - L_1 \\ i=2,3,4 \end{bmatrix}} \begin{vmatrix} a_{n+1} & a_{n+2} & a_{n+4} & a_{n+7} \\ 2r & 3r & 4r & 4r \\ 5r & 7r & 8r & 7r \\ 9r & 11r & 11r & 9r \end{vmatrix} \xlongequal{C_i \leftarrow \begin{bmatrix} C_i - C_1 \\ i=2,3,4 \end{bmatrix}}$$

$$= r^3 \cdot \begin{vmatrix} a_{n+1} & r & 3r & 6r \\ 2 & 1 & 2 & 2 \\ 5 & 2 & 3 & 2 \\ 9 & 2 & 2 & 0 \end{vmatrix} \xlongequal{C_i \leftarrow \begin{bmatrix} C_i - 2C_1 \\ i=1,3,4 \end{bmatrix}} r^3 \cdot \begin{vmatrix} a_{n+1}-2r & r & r & 4r \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & -2 \\ 5 & 2 & -2 & -4 \end{vmatrix} =$$

$$= r^3 \cdot \begin{vmatrix} a_{n+1}-2r & r & 4r \\ 1 & -1 & -2 \\ 5 & -2 & -4 \end{vmatrix} \xlongequal[C_3 \leftarrow C_3 - 2C_2]{C_1 \leftarrow C_1 + C_2} r^3 \cdot \begin{vmatrix} a_{n+1}-r & r & 2r \\ 0 & -1 & 0 \\ 3 & -2 & 0 \end{vmatrix} = 6r^4.$$

**4.** Calculați următorii determinanți:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} ac & ad \\ bc & db \end{vmatrix};\ \Delta_2 = \begin{vmatrix} am+bq & an+br & ap+bs \\ cm+dq & cn+dr & cp+ds \\ em+fq & en+fr & ep+fs \end{vmatrix};$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} am+br+cv & an+bs+cw & ap+bt+cy & aq+bu+cz \\ dm+er+fv & du+es+fw & dp+et+fy & dq+eu+fz \\ gm+hr+iv & gn+hs+iw & gp+ht+iy & gq+hu+iz \\ jm+kr+lv & jn+ks+lw & jp+kt+ly & jq+ku+lz \end{vmatrix}.$$

*Soluție:*

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} a & 0 \\ b & 0 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} c & d \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0 \cdot 0 = 0;\quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a & b & 0 \\ c & d & 0 \\ e & f & 0 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} m & n & p \\ q & r & s \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0 \cdot 0 = 0\ ;$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} a & b & c & 0 \\ d & e & f & 0 \\ g & h & i & 0 \\ j & k & l & 0 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} m & n & p & q \\ r & s & t & u \\ v & w & y & z \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0 \cdot 0 = 0.$$

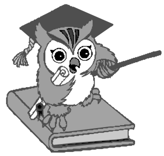
**5.** Calculați determinantul matricei:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2a+3 & 3a^2+4a & 4a^3+5a^2 \\ 1 & 2b+3 & 3b^2+4b & 3b^3+5b^2 \\ 1 & 2c+3 & 3c^2+4c & 3c^3+5c^2 \\ 1 & 2d+3 & 3d^2+4d & 3d^3+5d^2 \end{pmatrix}, a,b,c,d \in \mathbb{C}\ .$$

*Soluție:*

Fie matricele $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ și $V = \begin{pmatrix} 1 & a & a^2 & a^3 \\ 1 & b & b^2 & b^3 \\ 1 & c & c^2 & c^3 \\ 1 & d & d^2 & d^3 \end{pmatrix}$.

Deoarece $M = V \cdot A$ și $\det M = \det V \cdot \det A$, rezultă că:
$\det M = 24(d-a)(d-b)(d-c)(c-a)(c-b)(b-a)$.



## Test de evaluare

**1.** Calculați următorii determinanți:

$(2p)$ a) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 5 \end{vmatrix}$; $(2p)$ b) $\begin{vmatrix} a^2 & ab & ab & b^2 \\ ab & a^2 & b^2 & ab \\ ab & b^2 & a^2 & ab \\ b^2 & ab & ab & a^2 \end{vmatrix}$.

**2.** Rezolvați următoarele ecuații:

$(2p)$ a) $\begin{vmatrix} 2 & 2 & x \\ 2 & x & 2 \\ x & 2 & 2 \end{vmatrix} = 0$; $(2p)$ b) $\begin{vmatrix} x & a & a & a \\ a & x & a & a \\ a & a & x & a \\ a & a & a & x \end{vmatrix} = 0$, $a \in \mathbb{R}$.

*Timp de lucru: 30 de minute.*

## Exerciții propuse

**1.** Calculați:

a) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{vmatrix}$; b) $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 5 & 0 \\ 3 & 0 & -1 & 3 \end{vmatrix}$.

**2.** Calculați:

a) $\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 & a^4 \\ 1 & b & b^2 & b^4 \\ 1 & c & c^2 & c^4 \\ 1 & d & d^2 & d^4 \end{vmatrix}$; b) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ C_n^1 & C_{n+1}^1 & C_{n+2}^1 & C_{n+3}^1 \\ C_n^2 & C_{n+1}^2 & C_{n+2}^2 & C_{n+3}^2 \\ C_n^3 & C_{n+1}^3 & C_{n+2}^3 & C_{n+3}^3 \end{vmatrix}$, $n \in \mathbb{N}^*$, $n \geq 3$.

c) $\begin{vmatrix} \frac{1}{a} & \frac{1}{b} & \frac{1}{c} & \frac{1}{d} \\ \frac{1}{a+r} & \frac{1}{b+r} & \frac{1}{c+r} & \frac{1}{d+r} \\ \frac{1}{a+2r} & \frac{1}{b+2r} & \frac{1}{c+2r} & \frac{1}{d+2r} \\ \frac{1}{a+3r} & \frac{1}{b+3r} & \frac{1}{c+3r} & \frac{1}{d+3r} \end{vmatrix}$; d) $\begin{vmatrix} x & y & z & t \\ -y & x & -t & z \\ -z & t & x & -y \\ -t & -x & y & x \end{vmatrix}$;

e); $\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 & a^3 \\ a^3 & a^2 & a & 1 \\ 1 & 2a & 3a^2 & 4a^3 \\ 4a^3 & 3a^2 & 2a & 1 \end{vmatrix}$; f) $\begin{vmatrix} a & a & a & a \\ a & b & b & b \\ a & b & c & c \\ a & b & c & d \end{vmatrix}$

**3.** Să se arate că dacă $a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{C}$, atunci are loc egalitatea:

$$V(a_1, a_2, \dots, a_n) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ a_1^2 & a_2^2 & \dots & a_n^2 \\ \dots & \dots & & \dots \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-2} & \dots & a_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1 \le i < j \le n} (a_j - a_i)$$

(determinantul de mai sus se numeşte *determinant Vandermonde*[1]).

# 3.3. Aplicații: ecuația unei drepte determinate de două puncte distincte; aria unui triunghi şi coliniaritatea a trei puncte în plan

## Ecuația unei drepte determinate de două puncte distincte

Fie $A(x_A, y_A)$ şi $B(x_B, y_B)$ două puncte distincte într-un sistem cartezian din plan. Se ştie că ecuația dreptei determinate de punctele $A$ şi $B$ este

$$y - y_A = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}\left(x - x_A\right),$$

[1] Vandermonde, Théophile Alexandre Charles August (1735-1796), matematician şi fizician elvețian. A activat la Paris.

sau echivalent,

$$(x - x_A)(y_B - y_A) - (y - y_A)(x_B - x_A) = 0.$$

Această ecuație poate fi scrisă sub formă de determinant:

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x - x_A & y - y_A & 0 \\ x_B - x_A & y_B - y_A & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

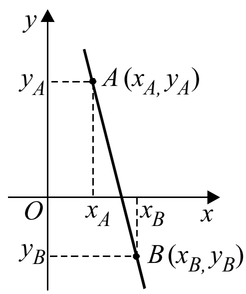
Dacă scădem linia I din linia a II-a, obținem:

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_A & y_A & 1 \\ x_B - x_A & y_B - y_A & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

În sfârşit, adunând ultimele 2 linii, obținem:

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Am găsit astfel ecuația dreptei $AB$ sub formă de determinant.




## Aria unui triunghi

Considerăm într-un sistem cartezian un triunghi $ABC$, cu vârfurile $A(x_A, y_A)$, $B(x_B, y_B)$ şi $C(x_C, y_C)$.

Ecuația dreptei $BC$ este:

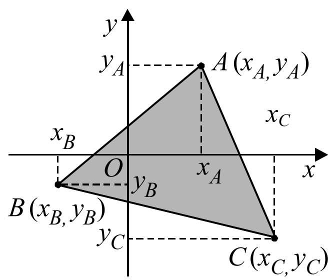
$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x_C & y_C & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Atunci distanța de la punctul $A$ la dreapta $BC$ este

$$d(A,BC)=\frac{\left|\det\begin{pmatrix}x_A & y_A & 1\\ x_B & y_B & 1\\ x_C & y_C & 1\end{pmatrix}\right|}{\sqrt{(y_B-y_C)^2+(x_B-x_C)^2}}=\frac{\left|\det\begin{pmatrix}x_A & y_A & 1\\ x_B & y_B & 1\\ x_C & y_C & 1\end{pmatrix}\right|}{BC}.$$

Prin urmare

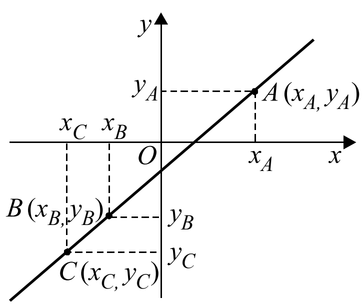
$$\mathscr{A}(\Delta ABC)=\frac{1}{2}BC\cdot d(A,BC)=\frac{1}{2}\left|\det\begin{pmatrix}x_A & y_A & 1\\ x_B & y_B & 1\\ x_C & y_C & 1\end{pmatrix}\right|.$$




## Coliniaritatea a trei puncte în plan

Fie $A(x_A,\ y_A)$, $B(x_B,\ y_B)$ şi $C(x_C,\ y_C)$ trei puncte distincte într-un sistem cartezian din plan. Ecuația dreptei $BC$ este: $\begin{vmatrix}x & y & 1\\ x_B & y_B & 1\\ x_C & y_C & 1\end{vmatrix}=0.$

Atunci punctele $A$, $B$ şi $C$ sunt coliniare dacă şi numai dacă $A\in BC$, sau echivalent, $\begin{vmatrix}x_A & y_A & 1\\ x_B & y_B & 1\\ x_C & y_C & 1\end{vmatrix}=0.$ Am obținut condiția ca trei puncte din plan să fie coliniare.



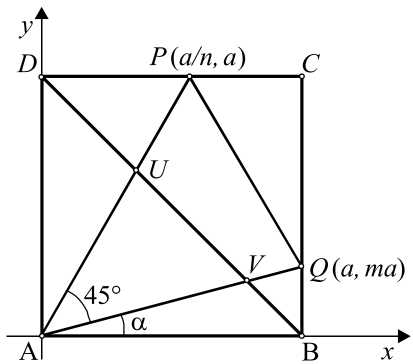
**Observație:** Dacă $B = C$, atunci evident $A$, $B$ și $C$ sunt coliniare și

$$\begin{vmatrix} x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x_C & y_C & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

## Exercițiu rezolvat

Fie $ABCD$ un pătrat. Considerăm punctele $Q \in (BC)$ și $P \in (CD)$ astfel încât $m(\widehat{PAQ}) = 45°$. Dacă $AQ \cap BD = \{V\}$ și $AP \cap BD = \{U\}$, să se calculeze raportul dintre aria triunghiului $APQ$ și aria triunghiului $AUV$.

*Soluție*: Fie $\alpha° = m(\widehat{BAQ})$, $m = \text{tg}\,\alpha° \in (0, 1)$ și $n = \text{tg}(\alpha° + 45°) = \dfrac{m+1}{1-m}$.




$$\mathscr{A}[\Delta APQ] = \frac{1}{2} \cdot \left| \det \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ \frac{a}{n} & a & 1 \\ a & ma & 1 \end{pmatrix} \right| = \frac{1}{2} \cdot a^2 \cdot \frac{n-m}{n} = \frac{1}{2} \cdot a^2 \frac{\frac{1+m}{1-m} - m}{\frac{1+m}{1-m}} = \frac{1}{2} \cdot a^2 \frac{1+m^2}{1+m}.$$

$BD : x + y = a$; $AQ : y = mx$; $AP : y = nx$.

$$V : \begin{cases} BD : x + y = a \\ AQ : y = mx \end{cases} \text{; deducem că } V\left( \frac{a}{m+1}; \frac{am}{m+1} \right).$$

$$U : \begin{cases} BD : x + y = a \\ AP : y = nx \end{cases} \text{; deducem că } U\left( \frac{a}{n+1}; \frac{an}{n+1} \right) \text{ sau } U\left( \frac{a(1-m)}{2}; \frac{a(1+m)}{2} \right).$$

$$\mathscr{A}[\Delta AUV]=\frac{1}{2}\cdot\left|\det\begin{pmatrix}0 & 0 & 1\\ \frac{a(1-m)}{2} & \frac{a(1+m)}{2} & 1\\ \frac{a}{m+1} & \frac{ma}{m+1} & 1\end{pmatrix}\right|=\frac{1}{2}\cdot\frac{a^2}{2(1+m)}\cdot\left(1+m^2\right);\ \frac{\mathscr{A}[\Delta APQ]}{\mathscr{A}[\Delta AUV]}=2.$$

## Exerciții propuse

**1.** Verificați că simetricele vârfurilor $B$ şi $C$ ale triunghiului $ABC$ față de mijloacele segmentelor $[AC]$ şi $[AB]$ sunt coliniare cu $A$.

**2.** Fie $A$ şi $B$ puncte fixe în plan. Determinați locul geometric al punctelor $M$ din plan pentru care aria triunghiului $MAB$ este constantă.

**3.** Fie patrulaterul $ABCD$ cu $A(-1, 6)$, $B(1, -3)$, $C(4, 10)$, $D(9, 0)$. Calculați aria patrulaterului $ABCD$.

**4.** Determinați locul geometric al punctelor $M$ din planul triunghiului $ABC$ pentru care ariile triunghiurilor $MAB$ şi $MAC$ sunt egale.

**5**. Se consideră punctele $A(a, 0)$, $B(b, 0)$, $C(c, 0)$, unde $0 < a < b < c$ şi punctele $A_1(0, 1)$, $B_1(0, 2)$, $C_1(0, 3)$.

Fie $\{M\} = AB_1 \cap A_1B$, $\{N\} = AC_1 \cap A_1C_1$, $\{P\} = BC_1 \cap B_1C$.

Demonstrați că punctele $M$, $N$, $P$ sunt coliniare (un caz particular al teoremei lui Pappus).

**6**. Fie un triunghi $ABC$ şi $DEF$ triunghiul său ortic ($D \in BC$, $E \in AC$)

Demonstrați că simetricele lui $D$ față de $AB$ şi respectiv $AC$ şi punctele $E$, $F$, sunt coliniare.

**7.** Fie $A(1, 2, 5)$, $B(2, 6, 3)$, $C(a, b + 3, a + 6)$. Determinați $a$ şi $b$ ştiind că punctele $A$, $B$, $C$ sunt coliniare.

**8.** Fie $A(a + 1, a + 3)$, $B(a + 3, a)$, $C(2, 5)$. Determinați $a$ ştiind că $A$, $B$, $C$ sunt coliniare.

**9.** Fie triunghiul $ABC$ şi punctele $M \in [AB]$, $P \in [AC]$ astfel încât $\frac{AM}{MB}=\frac{1}{2}$ şi $\frac{AP}{PC}=\frac{4}{5}$. Determinați poziția punctului $Q$ pe dreapta $BC$ astfel încât punctele $M$, $P$, $Q$ să fie coliniare.

Capitolul 4

# SISTEME DE ECUAŢII LINIARE

## 4.1. Matrice inversabile din $M_n(\mathbb{C})$, $n \leq 4$

### Algoritmul de calcul al inversei unei matrice

Să considerăm matricea $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$, $A \in M_n(\mathbb{C})$ cu elemente numere complexe, $n \leq 4$.

Acestei matrice i se poate asocia matricea $B = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2n} \\ \dots & \dots & & \dots \\ A_{n1} & A_{n2} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}$,

unde $A_{ij}$ este *complementul algebric (cofactorul)* elementului $a_{ij}$ ($A_{ij} = (-1)^{i+j}M_{ij}$, unde $M_{ij}$ este minorul de ordinul $(n - 1)$ obținut prin „tăierea“ liniei $i$ şi coloanei $j$), $i, j \in \{1,\dots, n\}$.

Matricea $B$ se numeşte *matricea cofactorilor* lui $A$.

Transpusa matricei $B$ (notată ${}^tB$) se numeşte *adjuncta matricei A* şi se notează cu $A^*$.

Folosind proprietățile determinanților, se poate arăta uşor că pentru $\forall i$, $j \in \{1,\dots, n\}$ are loc relația

$$a_{i_1}A_{j_1} + a_{i_2}A_{j_2} + \dots + a_{i_n}A_{j_n} = \begin{cases} \det A, & \text{dacă } i = j \\ 0, & \text{dacă } i \neq j \end{cases}.$$

Rezultă că

$$A \cdot A^* = \begin{pmatrix} \det A & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \det A & \dots & 0 \\ \dots & \dots & & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \det A \end{pmatrix} = (\det A) \cdot I_n, \qquad (*)$$

unde cu $I_n$ notăm, ca de obicei, matricea unitate de ordinul $n$.

O matrice $A \in M_n(\mathbb{C})$ este *inversabilă* dacă admite o inversă (notată cu $A^{-1}$) astfel încât: $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I_n$

**Teoremă.** *O matrice $A \in M_n(\mathbb{C})$ este inversabilă dacă şi numai dacă det $A \neq 0$*

*Demonstrație*

Dacă matricea $A$ este inversabilă, atunci

$\det A \cdot \det(A^{-1}) = \det I_n \Rightarrow \det A \cdot \det(A^{-1}) = 1$.

Reciproc, dacă $\det A \neq 0$, atunci din relația (*) rezultă: $A \cdot \left( \frac{1}{\det A} \cdot A^* \right) = I_n$.

Prin urmare, $A^{-1} = \frac{1}{\det A} A^*$ este *inversa matricei A*.

## Exerciții rezolvate

**1.** Se consideră matricea $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$. Să se calculeze $A^{-1}$.

*Soluție:* Avem

$$M_{11} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -2; \qquad M_{12} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -1; \qquad M_{13} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 1;$$

$$M_{21}=\begin{vmatrix}2 & 3\\ 3 & 1\end{vmatrix}=-7;\qquad M_{22}=\begin{vmatrix}1 & 3\\ 2 & 1\end{vmatrix}=-5;\qquad M_{23}=\begin{vmatrix}1 & 2\\ 2 & 3\end{vmatrix}=-1;$$

$$M_{31}=\begin{vmatrix}2 & 3\\ 1 & 1\end{vmatrix}=-1;\qquad M_{32}=\begin{vmatrix}1 & 3\\ 1 & 1\end{vmatrix}=-2;\qquad M_{33}=\begin{vmatrix}1 & 2\\ 1 & 1\end{vmatrix}=-1.$$

Prin urmare $B=\begin{pmatrix}-2 & 1 & 1\\ 7 & -5 & 1\\ -1 & 2 & -1\end{pmatrix}$ şi $A^*={}^tB=\begin{pmatrix}-2 & 7 & -1\\ 1 & -5 & 2\\ 1 & 1 & -1\end{pmatrix}$

$$A\cdot A^*=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 1 & 1 & 1\\ 2 & 3 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-2 & 7 & -1\\ 1 & -5 & 2\\ 1 & 1 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3 & 0 & 0\\ 0 & 3 & 0\\ 0 & 0 & 3\end{pmatrix}=(\det A)\cdot I_3 .$$

Deci det $A$ = 3 şi $A^{-1}=\frac{1}{3}\cdot A^*$, adică:

$$A^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{-2}{3} & \frac{7}{3} & \frac{-1}{3}\\ \frac{1}{3} & \frac{-5}{3} & \frac{2}{3}\\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3}\end{pmatrix}$$

Se verifică uşor faptul că $A^{-1}\cdot A = A\cdot A^{-1} = I_3$.

**Observație:** Bineînțeles, determinantul matricei $A$ se poate calcula direct, fără a efectua înmulțirea $A\cdot A^*$.

**2.** Se consideră matricea $A=\begin{pmatrix}1+\mathrm{i} & 1-\mathrm{i}\\ \mathrm{i} & 2\mathrm{i}\end{pmatrix}$. Să se calculeze $A^{-1}$.

*Soluție:*

Matricea cofactorilor lui $A$ este:

$B=\begin{pmatrix}2\mathrm{i} & -\mathrm{i}\\ -1+\mathrm{i} & 1+\mathrm{i}\end{pmatrix}$, iar transpusa lui $A$ este ${}^tA=\begin{pmatrix}1+\mathrm{i} & \mathrm{i}\\ 1-\mathrm{i} & 2\mathrm{i}\end{pmatrix}$.

Deci adjuncta matricei $A$ este:

$$A^*=\begin{pmatrix}2\mathrm{i} & -1+\mathrm{i}\\ -\mathrm{i} & 1+\mathrm{i}\end{pmatrix}$$

Rezultă

$$AA^* = \begin{pmatrix} \mathrm{i}-3 & 0 \\ 0 & \mathrm{i}-3 \end{pmatrix} = (\mathrm{i}-3)I_2 = (\det A)\cdot I_2 .$$

Deci:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}\cdot A^* = \frac{1}{\mathrm{i}-3}\begin{pmatrix} 2\mathrm{i} & -1+\mathrm{i} \\ -\mathrm{i} & 1+\mathrm{i} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{2\mathrm{i}}{\mathrm{i}-3} & \frac{-1+\mathrm{i}}{\mathrm{i}-3} \\ \frac{-\mathrm{i}}{\mathrm{i}-3} & \frac{1+\mathrm{i}}{\mathrm{i}-3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2\mathrm{i}(\mathrm{i}+3)}{-10} & \frac{(-1+\mathrm{i})(\mathrm{i}+3)}{-10} \\ \frac{-\mathrm{i}(\mathrm{i}+3)}{-10} & \frac{(1+\mathrm{i})(\mathrm{i}+3)}{-10} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{2-6\mathrm{i}}{10} & \frac{4-2\mathrm{i}}{10} \\ \frac{3\mathrm{i}-1}{10} & \frac{-4\mathrm{i}-2}{10} \end{pmatrix} = \frac{1}{10}\begin{pmatrix} 2-6\mathrm{i} & 4-2\mathrm{i} \\ -1+3\mathrm{i} & -2-4\mathrm{i} \end{pmatrix}.$$

**3.** Fie matricele $A, B \in M_4(\mathbb{C})$ astfel încât $A$ este inversabilă şi $B^2 = O_4$ (matricea nulă din $M_4(\mathbb{C})$). Demonstrați că matricea $C = I_4 + A^{-1}BA$ este inversabilă.

*Soluție:*

$$(I_4 + A^{-1}BA)(I_4 - A^{-1}BA) = I_4 + A^{-1}BA - A^{-1}BA - (A^{-1}BA)(A^{-1}BA) =$$
$$= I_4 + A^{-1}B(AA^{-1})BA = I_4 + A^{-1}BI_4BA =$$
$$= I_4 + A^{-1}B^2A = I_4 + A^{-1}O_4A = I_4.$$

Rezultă: $(I_4 + A^{-1}BA)^{-1} = I_4 - A^{-1}BA.$

**4.** Fie $A, B \in M_3(\mathbb{R})$ astfel încât $AB = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, unde $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ şi $ad - bc = 1$.

Să se calculeze $\det(BA + (BA^{-1}))$.

*Soluție:*

Deoarece $\det(AB) = 1$ rezultă că matricele $A$ şi $B$ sunt inversabile, deci există $A^{-1}$ şi $B^{-1}$.

Matricea $AB$ verifică egalitatea: $(AB)^2 - (a+d)AB + (ad-bc)I_2 = O_2$.

Înmulțind la stânga cu $A^{-1}$ şi la dreapta cu $B^{-1}$, obținem:

$BA - (a+d)I_2 + (BA)^{-1} = O_2$. Rezultă $BA + (BA)^{-1} = (a+d)I_2$, deci $\det(BA + (BA)^{-1}) = a + d$.

## Exerciţii propuse

**1.** Verificaţi dacă matricele

$$A=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\0&2&3&4\\0&0&3&4\\0&0&0&4\end{pmatrix};\ B=\begin{pmatrix}1&1&1\\0&2&3\\5&5&1\end{pmatrix};\ C=\begin{pmatrix}1&2&-1\\3&2&3\\2&2&1\end{pmatrix};$$

$$D=\begin{pmatrix}1&1&1&1\\a&b&c&d\\a^2&b^2&c^2&d^2\\a^3&b^3&c^3&d^3\end{pmatrix};\ a,\ b,\ c,\ d\in\mathbb{R},\ a,\ b,\ c,\ d \text{ distincte, sunt inversabile.}$$

În caz favorabil, determinaţi inversele lor.

**2.** Calculaţi inversele matricelor:

$$A=\begin{pmatrix}4&2&-2\\-5&3&2\\-2&4&1\end{pmatrix};\ B=\begin{pmatrix}1&1&1\\2&6&8\\4&36&64\end{pmatrix}.$$

**3.** Fie matricea $A$ astfel încât $A^{-2}=\begin{pmatrix}1&8\\5&6\end{pmatrix}$. Să se calculeze $A^2$.

**4.** Fie matricea $A=\begin{pmatrix}1&2&8\\2&1&5\\3&4&6\end{pmatrix}$. Calculaţi $A^{-1}$, $(A^{-1})^{-1}$.

**5.** Dacă $U\in M_3(\mathbb{R})$, $U=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{pmatrix}$, atunci $\operatorname{tr} U \stackrel{\text{def}}{=} a_{11}+a_{22}+a_{33}$ se numeşte *urma* matricei $U$. Să se arate că:

a) dacă $A, B\in M_3(\mathbb{R})$, atunci $\operatorname{tr}(AB)=\operatorname{tr}(BA)$;

b) dacă $A\in M_3(\mathbb{R})$ este inversabilă şi $C\in M_3(\mathbb{R})$, atunci $\operatorname{tr}(ACA^{-1})=\operatorname{tr} C$.

**6.** Să se calculeze $A^{-1}$, unde $A$ este una dintre matricele:

a) $A=\begin{pmatrix}1 & \mathrm{i} & -\mathrm{i}\\ 0 & 1 & \mathrm{i}\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$; b) $A=\begin{pmatrix}\mathrm{i} & 0 & \mathrm{i}\\ 0 & -\mathrm{i} & 0\\ -\mathrm{i} & 0 & \mathrm{i}\end{pmatrix}$.

**7.** Fie $A$, $B$, $C \in M_n(\mathbb{C})$ astfel încât $ABC = I_n$. Demonstrați că $BCA = I_n$ şi $CAB = I_n$.

**8.** Fie matricea $A=\begin{pmatrix}a & -b & -c & -d\\ b & a & -d & c\\ c & d & a & -b\\ d & -c & b & a\end{pmatrix}$, $a, b, c, d \in \mathbb{Q}$, $a^2+b^2+c^2+d^2 \neq 0$.

Calculați $A^{-1}$.

**9.** Fie matricele inversabile $A, B, C \in M_3(\mathbb{R})$. Să se calculeze $\det(AB^{-1}C^{-1}A^{-1}BC)$.

**10.** Să se determine parametrul $m \in \mathbb{R}$, ştiind că matricea

$$A=\begin{pmatrix}2 & x & 3\\ x & -1 & x\\ 1 & 2 & m\end{pmatrix}$$

este inversabilă pentru orice $x \in \mathbb{R}$.

## 4.2. Ecuații matriceale

În general, o ecuație *matriceală* (liniară) este de forma: $AX = B$, unde $A \in M_{n\times m}(\mathbb{C})$, $X \in M_{m\times p}(\mathbb{C})$, $B \in M_{n\times p}(\mathbb{C})$.

Matricele $A$ şi $B$ sunt date, iar $X$ este matricea necunoscută care trebuie determinată.

Pentru a rezolva o ecuație matriceală se scrie sistemul liniar ataşat şi se rezolvă acest sistem. Soluțiile sistemului ne vor da componentele matricei necunoscute.

## Exercițiu rezolvat

Să se rezolve ecuația matriceală $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $x, y \in \mathbb{C}$.

*Soluție:*

$\begin{pmatrix} 2x + y \\ 4x + 2y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ şi deci $2x + y = 0$, $4x + 2y = 0$. Obținem $x = m$, $y = -2m$, deci $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m \\ -2m \end{pmatrix}$, $m \in \mathbb{C}$. Rezultă că o infinitate de matrice sunt soluții ale ecuației.

Un caz special de ecuații sunt cele de tipul $AX = B$, unde $A \in M_{n\times n}(\mathbb{C})$, $X \in M_{n\times p}(\mathbb{C})$, iar $B \in M_{n\times p}(\mathbb{C})$ şi mai mult matricea $A$ este nesingulară (inversabilă).

În acest caz avem echivalențele:

$AX = B \Leftrightarrow A^{-1} \cdot (AX) = A^{-1} \cdot B \Leftrightarrow (A^{-1} \cdot A)X = A^{-1} \cdot B \Leftrightarrow I_nX = A^{-1} \cdot B \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow X = A^{-1} \cdot B$.

Dacă ecuația este de forma $A \cdot X \cdot B = D$, unde $A, B, D, X \in M_{n\times n}(\mathbb{C})$ şi $A, B$ sunt nesingulare, atunci ecuația admite soluția: $X = A^{-1} \cdot D \cdot B^{-1}$.

Nu toate ecuațiile matriceale sunt liniare; de exemplu ecuația

$$X^2 + X = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, X \in M_2(\mathbb{C}),$$

este o ecuație neliniară, deoarece matricea $X$ apare şi cu exponentul 2.

În general pentru ecuațiile atipice nu există metode de rezolvare standard. Acestea se rezolvă de la caz la caz.

## Exerciții rezolvate

**1.** Să se rezolve ecuația $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 7 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

*Soluție:*

Deoarece matricea $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}$ este inversabilă (având determinantul nenul), avem $X = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Dar $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 7 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$.

Deci $X=\begin{pmatrix} 7 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow X=\begin{pmatrix} 5 & 5 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}$.

**2.** Să se arate că matricea $X=\begin{pmatrix} \cos\frac{\pi}{50} & \sin\frac{\pi}{50} \\ -\sin\frac{\pi}{50} & \cos\frac{\pi}{50} \end{pmatrix}$ este soluție a ecuației

$$X^{100} = I_2, \text{ unde } I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, X \in M_2(\mathbb{R}).$$

*Soluție:*

Dacă $A=\begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$, se demonstrează prin inducție matematică relația $A^n=\begin{pmatrix} \cos n\alpha & \sin n\alpha \\ -\sin n\alpha & \cos n\alpha \end{pmatrix}$.

Deci matricea $X=\begin{pmatrix} \cos\frac{\pi}{50} & \sin\frac{\pi}{50} \\ -\sin\frac{\pi}{50} & \cos\frac{\pi}{50} \end{pmatrix}$ este soluție a ecuației $X^{100}=I_2$.

## Exerciții propuse

**1.** Să se rezolve ecuațiile matriceale:

a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 9 \\ 3 \end{pmatrix}$;

b) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 6 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 8 \end{pmatrix}$;

c) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 9 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} x \\ y \\ x \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$;

d) $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 8 & 27 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix}$;

e) $\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 6 & 1 \\ 5 & -1 \end{pmatrix}$.

**2.** Să se determine $A \in M_3(\mathbb{Z})$ astfel încât

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot A \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

**3.** Rezolvați ecuația matriceală neliniară

$$X^2 + X = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}.$$

**4.** Să se determine matricele $X, Y \in M_2(\mathbb{R})$ care verifică simultan relațiile:

$X + Y = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $X \cdot Y = Y$, în cazurile:

a) $Y$ este o matrice inversabilă

b) $Y$ nu este o matrice inversabilă.

# 4.3. Sisteme liniare cu cel mult 4 necunoscute, sisteme de tip Cramer

## Sisteme de ecuații liniare cu cel mult 4 necunoscute

Teoria sistemelor de ecuații liniare joacă un rol important în algebră. Termenul de „liniar“ provine din geometria analitică, unde o ecuație de gradul I cu coeficienți reali în două necunoscute reprezintă o dreaptă în plan, respectiv o ecuație de gradul I cu coeficienți reali în 3 necunoscute reprezintă un plan în spațiu.

Prin *ecuație liniară* cu coeficienți numerici în necunoscute $x_1, x_2, \ldots, x_n$ înțelegem o egalitate de forma

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n = b,$$

unde $a_1, a_2, \ldots, a_n, b \in \mathbb{R}$. Numerele $a_1, \ldots, a_n$ se numesc *coeficienții necunoscutelor*, iar $b$ se numeşte *termenul liber* al ecuației. Când cel puțin unul dintre numerele $a_1, a_2, \ldots, a_n$ este nenul spunem că egalitatea de mai sus este *o ecuație de gradul întâi* în necunoscutele $x_1, x_2,, \ldots, x_n$.

Vom folosi următoarele simboluri pentru un sistem de $m$ ecuații liniare cu $n$ necunoscute: vom nota cu $x_j$ necunoscutele, cu $a_{ij}$ coeficientul lui $x_j$ în ecuația numărul $i$

a sistemului, cu $b_i$ termenul liber din ecuația numărul $i$, unde $i \in \{1, 2,\ldots, m\}$ şi $j \in \{1, 2,\ldots, n\}$.

Deci un sistem $S$ de $m$ ecuații liniare cu $n$ necunoscute este de forma:

$$S:\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 & \text{(ecuația 1)} \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 & \text{(ecuația 2)} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\ a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n = b_i & \text{(ecuația } i\text{)} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m & \text{(ecuația } m\text{)} \end{cases}$$

Matricea $A = (a_{ij})_{\substack{i=\overline{1,m} \\ j=\overline{1,n}}}$ formată din coeficienții necunoscutelor sistemului de ecuații liniare $S$ se numeşte *matricea sistemului S* (vom înțelege prin „sistem“ un sistem de ecuații liniare).

În general, $A$ este o matrice dreptunghiulară.

Dacă $m = n$ (numărul ecuațiilor este egal cu numărul necunoscutelor), $A$ este o matrice pătratică de ordinul $n$.

O *soluție* a sistemului $S$ o constituie o mulțime de $n$ numere $k_1, k_{2,} {}_{\ldots,}\ k_n$ care verifică fiecare dintre ecuațiile sistemului $S$.

| | |
|---|---|
| **Definiție** | • Un sistem de ecuații liniare se numeşte *incompatibil*, dacă nu admite nici o soluție.<br>• Dacă un sistem $S$ admite soluții, el se numeşte *compatibil*.<br>• Un sistem care admite o unică soluție se numeşte *compatibil determinat*.<br>• Un sistem care admite mai mult de o soluție se numeşte *compatibil nedeterminat*. |

În exemplele pe care le vom da vom considera $n \le 4$ (sisteme de ecuații liniare cu cel mult 4 necunoscute).

***Exemple***

**1.** Sistemul $\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 7 \\ x_1 + x_2 = 4 \end{cases}$ are soluție unică $x_1 = 1$, $x_2 = 3$, deci este compatibil determinat.

**2.** Sistemul $\begin{cases} 3x_1 - x_2 = 1 \\ 6x_1 - 2x_2 = 2 \end{cases}$ este compatibil nedeterminat, deoarece admite o infinitate de soluții la forma $x_1 = k$, $x_2 = 3k - 1$, $k \in \mathbb{R}$ arbitrar.

**3.** Sistemul $\begin{cases} x_1 + 3x_2 = 1 \\ x_1 + 3x_2 = 5 \end{cases}$ este incompatibil.

Spunem că două sisteme $S_1$ şi $S_2$ sunt *echivalente* dacă ambele sunt incompatibile sau ambele sunt compatibile, având aceleaşi soluții.

În funcție de numărul de ecuații şi de numărul de necunoscute ale unui sistem $S$, se disting mai multe cazuri: $m = n$ (det $A \neq 0$ sau det $A = 0$) sau $m \neq n$.

## Sisteme de tip Cramer

Vom considera mai întâi sisteme de ecuații liniare în care numărul ecuațiilor este egal cu numărul necunoscutelor ($m = n$).

$$S = \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}.$$

Vom nota cu $d$ = det $A$, unde $A$ este matricea sistemului $S$.

Să presupunem că $d \neq 0$. În acest caz $S$ se numeşte *sistem de tip Cramer*. Vom arăta că în acest caz sistemul $S$ este compatibil determinat.

Vom nota cu $d_j$ determinantul matricei obținute din matricea $A$ prin înlocuirea elementelor coloanei $j$ cu termenii liberi $b_1$, $b_2$, …, $b_n$ respectiv.

Explicit:

$$d = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} \text{ şi } d_j = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1j-1} & b_1 & a_{1j+1} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2j-1} & b_2 & a_{2j+1} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nj-1} & b_n & a_{nj+1} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

unde $j$ parcurge mulțimea $\{1, 2, \ldots, n\}$.

Vom arăta că sistemul $S$ admite soluție unică:

$$x_1 = \frac{d_1}{d}, \quad x_2 = \frac{d_2}{d}, \ldots, x_n = \frac{d_n}{d}.$$

**Observație:** Reamintim că se notează cu $A_{ij}$ complementul algebric (cofactorul) elementului $a_{ij}$.

Dezvoltând determinantul $d$ după coloana $j$ obținem

$$d = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \ldots + a_{nj}A_{nj},$$

iar dezvoltând determinantul $d_j$ după coloana $j$ obținem:

$$d_j = b_1A_{1j} + b_2A_{2j} + \ldots + b_nA_{nj}.$$

Revenind la sistemul $S$ de $n$ ecuații liniare cu $n$ necunoscute, să presupunem că acesta este compatibil şi fie $x_1, x_2, \ldots, x_n$ una dintre soluțiile sale.

Au loc următoarele ecuații:

$$S = \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}.$$

În prima ecuație a sistemului înmulțim ambii membri cu $A_{1j}$; analog, în a doua ecuație se înmulțesc ambii membri cu $A_{2j}$, respectiv în a $n$ – a ecuație cu $A_{nj}$.

Obținem:

$$\begin{cases} a_{11}A_{1j}x_1 + a_{12}A_{1j}x_2 + \ldots + a_{1n}A_{1j}x_n = b_1A_{1j} \\ a_{21}A_{2j}x_1 + a_{22}A_{2j}x_2 + \ldots + a_{2n}A_{2j}x_n = b_2A_{2j} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}A_{nj}x_1 + a_{n2}A_{nj}x_2 + \ldots + a_{nn}A_{nj}x_n = b_nA_{nj} \end{cases}.$$

Prin adunarea celor $n$ ecuații rezultă:

$$\begin{aligned} &(a_{11}A_{1j} + a_{21}A_{2j} + \ldots + a_{n1}A_{nj})x_1 + \\ &+(a_{12}A_{1j} + a_{22}A_{2j} + \ldots + a_{n2}A_{nj})x_2 + \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &+(a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \ldots + a_{nj}A_{nj})x_j + \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &+(a_{1n}A_{1j} + a_{2n}A_{2j} + \ldots + a_{nn}A_{nj})x_n = \\ &= b_1A_{1j} + b_2A_{2j} + \ldots + b_nA_{nj}. \end{aligned}$$

Evident, conform observației precedente, coeficientul lui $x_j$ în această ecuație este $d$, iar termenul liber este $d_j$.

Coeficientul lui $x_k$, $k \neq j$, este $a_{1k}A_{1j} + a_{2k}A_{2j} + \ldots + a_{nk}A_{nj}$ şi reprezintă dezvoltarea după coloana $j$ a determinantului

$$\begin{array}{ccccccc} & & & \text{col } j & & \text{col } k & \\ \end{array}$$
$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1k} & \dots & a_{1k} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2k} & \dots & a_{2k} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nk} & \dots & a_{nk} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$
, care este 0 (coloanele $j$ şi $k$ coincid).

Deci coeficientul lui $x_k$, cu $k \neq j$, este 0.

Rezultă că $x_j = \dfrac{d_j}{d}$, $\forall j \in \{1, 2, \dots, n\}$.

Am arătat astfel că dacă sistemul $S$ este compatibil, atunci admite unica soluție:

$$x_j = \frac{d_j}{d},\ j \in \{1, 2, \dots, n\}.$$

Pentru a completa demonstrația, vom arăta că numerele

$$x_1 = \frac{d_1}{d},\ x_2 = \frac{d_2}{d},\ \dots,\ x_n = \frac{d_n}{d}$$

constituie o soluție a sistemului, deci că sistemul este compatibil.

Introducem aceste valori în ecuația numărul $i$ ($i \in \{1, 2, \dots, n\}$):

$$a_{i1}\frac{d_1}{d} + a_{i2}\frac{d_2}{d} + \dots + a_{in}\frac{d_n}{d} = \frac{1}{d}(a_{i1}d_1 + a_{i2}d_2 + \dots + a_{in}d_n) =$$

$$= \frac{1}{d}[a_{i1}(b_1A_{11} + b_2A_{21} + \dots + b_nA_{n1}) + a_{i2}(b_1A_{12} + b_2A_{22} + \dots + b_nA_{n2}) + \dots\dots\dots +$$

$$+ a_{in}(b_1A_{1n} + b_2A_{2n} + \dots + b_nA_{nn})] = \frac{1}{d}[b_1(a_{i1}A_{11} + a_{i2}A_{12} + \dots + a_{in}A_{1n}) +$$

$$+ b_2(a_{i1}A_{21} + a_{i2}A_{22} + \dots + a_{in}A_{2n}) + \dots\dots\dots + b_n(a_{i1}A_{n1} + a_{i2}A_{n2} + \dots + a_{in}A_{nn})] =$$

$= \dfrac{1}{d}b_i \cdot d = b_i$, deci ecuația $i$ este verificată.

Am arătat astfel că $x_1 = \dfrac{d_1}{d}$, $x_2 = \dfrac{d_2}{d}$, ..., $x_n = \dfrac{d_n}{d}$ reprezintă o soluție a sistemului $S$.

Am obținut astfel următorul rezultat, cunoscut ca *regula lui Cramer*.

**Teoremă.** *Un sistem de n ecuații cu n necunoscute cu determinantul matricei sistemului nenul are soluție unică (un sistem de tip Cramer este compatibil determinat).*

**Observație:** Un sistem de tip Cramer poate fi rezolvat şi prin *metoda matriceală*.
Forma matriceală a unui sistem de tip Cramer este

$$AX = B,$$

cu matricea sistemului $A$ nesingulară, deci inversabilă.
Înmulțind la stânga ecuația de mai sus cu $A^{-1}$, obținem că soluția (matriceală) a sistemului $S$ este

$$X = A^{-1}B.$$

***Exemple***

**1.** Se consideră sistemul $\begin{cases} 2x_1 + x_2 = 7 \\ x_1 - 3x_2 = -2 \end{cases}$.

Determinantul sistemului este $d = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = -7 \neq 0$ , deci sistemul este de tip Cramer.

Unica soluție a acestui sistem este dată de:

$$x_1 = \frac{d_1}{d},\ x_2 = \frac{d_2}{d}, \text{ unde}$$

$$d_1 = \begin{vmatrix} 7 & 1 \\ -2 & -3 \end{vmatrix} = -19,\ \ d_2 = \begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -11, \text{ deci}$$

$$x_1 = \frac{19}{7},\ x_2 = \frac{11}{7}.$$

**2.** Se consideră sistemul $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 5x_3 = -9 \\ x_1 - x_2 + 3x_3 = 2 \\ 3x_1 - 6x_2 - x_3 = 25 \end{cases}$.

Determinantul sistemului este

$$d = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 1 & -1 & 3 \\ 3 & -6 & -1 \end{vmatrix} = 24 \neq 0,$$

deci este sistem de tip Cramer şi putem aplica regula lui Cramer:

$$d_1 = \begin{vmatrix} -9 & 2 & 5 \\ 2 & -1 & 3 \\ 25 & -6 & -1 \end{vmatrix} = 48, \quad d_2 = \begin{vmatrix} 1 & -9 & 5 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 25 & -1 \end{vmatrix} = -72, \quad d_3 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -9 \\ 1 & -1 & 2 \\ 3 & -6 & 25 \end{vmatrix} = -24.$$

Soluția sistemului este $x_1 = 2$, $x_2 = -3$, $x_3 = -1$ şi este unică.

**3.** Se consideră sistemul $\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 5x_3 + x_4 = 8 \\ x_1 - 3x_2 - 6x_4 = 9 \\ 2x_2 - x_3 + 2x_4 = -5 \\ x_1 + 4x_2 - 7x_3 + 6x_4 = 0 \end{cases}$.

Determinantul sistemului este $d = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -5 & 1 \\ 1 & -3 & 0 & -6 \\ 0 & 2 & -1 & 2 \\ 1 & 4 & -7 & 6 \end{vmatrix} = 27 \neq 0$,

deci sistemul este de tip Cramer şi putem aplica regula lui Cramer.

$$d_1 = \begin{vmatrix} 8 & 1 & -5 & 1 \\ 9 & -3 & 0 & -6 \\ -5 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 4 & -7 & 6 \end{vmatrix} = 81, \quad d_2 = \begin{vmatrix} 2 & 8 & -5 & 1 \\ 1 & 9 & 0 & -6 \\ 0 & -5 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -7 & 6 \end{vmatrix} = -108,$$

$$d_3 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 8 & 1 \\ 1 & -3 & 9 & -6 \\ 0 & 2 & -5 & 2 \\ 1 & 4 & 0 & 6 \end{vmatrix} = -27, \quad d_4 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -5 & 8 \\ 1 & -3 & 0 & 9 \\ 0 & 2 & -1 & -5 \\ 1 & 4 & -7 & 0 \end{vmatrix} = 27.$$

Astfel,

$$x_1 = \frac{d_1}{d} = 3; \; x_2 = \frac{d_2}{d} = -4; \; x_3 = \frac{d_3}{d} = -1; \; x_4 = \frac{d_4}{d} = 1.$$

formează unica soluție a acestui sistem.

Un caz interesant al sistemelor de tip Cramer este cel al sistemelor formate din ecuații liniare omogene (cu termenul liber nul), adică sisteme de tipul:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = 0 \end{cases}$$

cu $d \neq 0$, numite *sisteme omogene*.

În acest caz toți determinanții $d_j$, $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$, conțin o coloană formată numai din 0, deci $d_j = 0$, $\forall j \in \{1, 2, \ldots, n\}$.

Rezultă că singura soluție a unui sistem omogen de tip Cramer este $x_1 = 0, x_2 = 0, \ldots, x_n = 0$.

***Exemplu***

Sistemul omogen de tip Cramer

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 - 2x_3 = 0 \\ 3x_1 - 2x_2 - 6x_3 = 0 \\ -x_1 + 2x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$$

($d = 3 \neq 0$) are unica soluție $x_1 = x_2 = x_3 = 0$.

Recapitulând rezultatele enunțate şi demonstrate anterior, obținem următoarele teoreme şi aplicații ale acestora pentru sisteme de ecuații de tip Cramer cu $n = 2$, $n = 3$.

**Teoremă.** *Fie S un sistem de 2 ecuații liniare cu 2 necunoscute*

$$S: \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases}.$$

i) *dacă $d \neq 0$ atunci sistemul S are soluție unică*

$$x_1 = \frac{d_1}{d},\ x_2 = \frac{d_2}{d}\ \textit{(regula lui Cramer)}$$

ii) *dacă $d = 0$ iar $d_1 \neq 0$ sau $d_2 \neq 0$, atunci S este incompatibil;*

iii) *dacă cel puțin o ecuație din sistem este de gradul întâi şi $d = d_1 = d_2 = 0$, atunci S este compatibil nedeterminat.*

O aplicație a teoremei precedente este poziția relativă a 2 drepte în plan, aceasta putând fi determinată cu ajutorul ecuațiilor carteziene ale dreptelor.

**Teoremă.** *Fie D şi D' două drepte dintr-un plan P, raportat la un reper cartezian xOy, de ecuaţii:* $D : ax + by + c = 0$, $D' : a'x + b'y + c' = 0$ $(a^2 + b^2 \neq 0, a'^2 + b'^2 \neq 0)$.

i) *Dacă* $\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} \neq 0$, *atunci dreptele D şi D' sunt concurente* (fig. 1).

ii) *Dacă* $\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} = 0$, *iar* $\begin{vmatrix} a & c \\ a' & c' \end{vmatrix} \neq 0$ *sau* $\begin{vmatrix} b & c \\ b' & c' \end{vmatrix} \neq 0$, *dreptele D şi D' sunt paralele şi neconfundate* (fig. 2).

iii) *Dacă* $\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & c \\ a' & c' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b & c \\ b' & c' \end{vmatrix} = 0$, *dreptele D* şi *D' sunt confundate* (fig. 3).

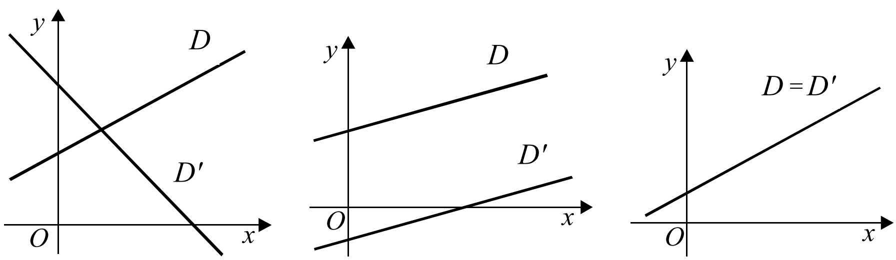



**Figura 1** **Figura 2** **Figura 3**

Ca aplicaţie la sisteme de tip Cramer de 3 ecuaţii cu 3 necunoscute, să considerăm următorul exemplu:

Sistemul $S : \begin{cases} 2x_1 - 3x_2 - 2x_3 = 8 \\ 3x_1 - 2x_2 - 6x_3 = 1 \\ -x_1 + 2x_2 + x_3 = 6 \end{cases}$ este de tip Cramer cu $d = 3 \neq 0$.

Prin calcul rezultă: $d_1 = 9$, $d_2 = -3$, $d_3 = -2$, deci unica soluţie a sistemului este $x_1 = 3$, $x_2 = -1$, $x_3 = -2$.

Să interpretăm geometric acest rezultat: dacă ecuaţiile carteziene ale planelor $P$, $P'$, $P''$, în raport cu un reper cartezian în spaţiu $Oxyz$ sunt ecuaţiile sistemului $S$, atunci cele 3 plane au în comun un singur punct de coordonate $(3, -1, -2)$. Acest raționament este valabil pentru orice sistem Cramer de 3 ecuații liniare cu 3 necunoscute.

## Exerciții rezolvate

**1.** Rezolvați sistemul $\begin{cases} x\cos\alpha + y\sin\alpha = \cos\alpha \\ -x\sin\alpha + y\cos\alpha = \sin\alpha \end{cases}$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

*Soluție:*

$$d = \begin{vmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{vmatrix} = 1;$$

$$d_1 = \begin{vmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{vmatrix} = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = \cos 2\alpha;$$

$$d_2 = \begin{vmatrix} \cos\alpha & \cos\alpha \\ -\sin\alpha & \sin\alpha \end{vmatrix} = 2\cos\alpha\sin\alpha = \sin 2\alpha .$$

Deci $x = \cos 2\alpha$, $y = \sin 2\alpha$.

**2.** Rezolvați sistemul $\begin{cases} x + 2y = 3 \\ y + 3z = 4 \\ z + 4u = 5 \\ u + 5x = 6 \end{cases}$.

*Soluție:*

$$d = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 5 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \overset{C_2 \leftarrow C_2 - 2C_1}{=} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 5 & -10 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 4 \\ -10 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -119;$$

$$d_1 = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 3 & 0 \\ 5 & 0 & 1 & 4 \\ 6 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \overset{C_1 \leftarrow C_1 - 6C_4}{=} \begin{vmatrix} 3 & 2 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 3 & 0 \\ -19 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 4 & 1 & 3 \\ -19 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -119 .$$

Analog, folosind proprietățile determinanților obținem $d_2 = d_3 = d_4 = -119$, deci sistemul admite soluția unică $x = y = z = 1$.

**3.** Rezolvați sistemul şi verificați soluția obținută.

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ ax + by + cz = k \\ a^2x + b^2y + c^2z = k^2 \end{cases},$$

unde $a, b, c, k \in \mathbb{R}$, $a \neq b$, $b \neq c$, $a \neq c$.

*Soluție:*

$d = (a-b)(b-c)(c-a) \neq 0$, $d_1 = (k-b)(b-c)(c-k)$,

$d_2 = (a-k)(k-c)(c-a)$, $d_3 = (a-b)(b-k)(k-a)$.

Soluția este: $x = \dfrac{(k-b)(c-k)}{(a-b)(c-a)}$; $y = \dfrac{(a-k)(k-c)}{(a-b)(b-c)}$; $z = \dfrac{(b-k)(k-a)}{(b-c)(c-a)}$.

Probând soluțiile se obțin identități interesante!

**4.** Rezolvați sistemul omogen $\begin{cases} x - y + 2z = 0 \\ 2x + y - z = 0 \\ -x - 2y + z = 0 \end{cases}$.

*Soluție:*

$x = 0, y = 0, z = 0$, deoarece $d = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \\ -1 & -2 & 1 \end{vmatrix} = -6 \neq 0.$

**5.** Rezolvați în $\mathbb{R}^3$ sistemul $\begin{cases} |x-2y+3z| = |x| - |y| \\ |4x+3y-z| = |y| - |z| \\ |7x+8y+5z| = |z| - |x| \end{cases}$.

*Soluție:*

Prin adunarea ecuațiilor rezultă sistemul omogen $\begin{cases} x - 2y + 3z = 0 \\ 4x + 3y - z = 0 \\ 7x + 8y + 5z = 0 \end{cases}$,

cu soluția nulă $x = y = z = 0$ $(d \neq 0)$.

## Exerciții propuse

**1.** Rezolvați prin regula lui Cramer sistemele:

a) $\begin{cases} 2x+3y=9 \\ 9x+2y=8 \end{cases}$; b) $\begin{cases} x+2y+3z=6 \\ 5x+y+z=8 \\ 2x+3y+z=6 \end{cases}$; c) $\begin{cases} x-2y=5 \\ y-3z=9 \\ z-4x=6 \end{cases}$;

d) $\begin{cases} x-y+z=-5 \\ x+y-2z=3 \\ 6x+2y+3z=1 \end{cases}$; e) $\begin{cases} x+2u=9 \\ y+2v=7 \\ u-v=2 \\ x+2z=1 \end{cases}$; f) $\begin{cases} x+3y=4 \\ y+4z=5 \\ z+4t=9 \\ t+4x=1 \end{cases}$;

g) $\begin{cases} x+y+z+u=1 \\ 2x+3y+4z+5u=2 \\ 4x+9y+16z+25u=3 \\ 8x+27y+64z+125u=4 \end{cases}$; h) $\begin{cases} x+2y=4 \\ y+3z=5 \\ z+4t=6 \\ t+5x=7 \end{cases}$;

i) $\begin{cases} nx+(n+1)y+z=0 \\ x+y+nz=1 \\ 2x+3y+4z=2 \end{cases}$; $n \in \mathbb{N}^*$; j) $\begin{cases} x\cos\alpha+y\sin\alpha=\sin\alpha \\ x\sin\alpha+y\cos\alpha=\cos\alpha \end{cases}$; $\alpha \in \mathbb{R}$.

**2.** Rezolvați sistemul

$\begin{cases} x+y+z=3 \\ ax+by+cz=a+b+c \\ a^2x+b^2y+c^2z=a^2+b^2+c^2 \end{cases}$, unde $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \neq b$, $b \neq c$, $c \neq a$.

**3.** Rezolvați sistemul: $2^x \cdot 3^y \cdot 5^z = 2^y \cdot 3^z \cdot 5^x = 2^z \cdot 3^x \cdot 5^z = 30$.

**4.** Rezolvați sistemul: $\begin{cases} x+ay+a^2z+a^3u=a^4 \\ x+by+b^2z+b^3u=b^4 \\ x+cy+c^2z+c^3u=c^4 \\ x+dy+d^2z+d^3u=d^4 \end{cases}$; $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ distincte.

**5.** Să se rezolve sistemul: $\begin{cases} ax+by=c \\ -bx+ay=c_1 \end{cases}$, unde $a$, $b$, $c$, $c_1 \in \mathbb{R}$, $a^2+b^2 \neq 0$.

# 4.4. Rangul unei matrice

Pentru studiul sistemelor de ecuații liniare cu numărul ecuațiilor egal cu numărul necunoscutelor ($m = n$) în cazul det $A = 0$, ca şi pentru cele cu numărul ecuațiilor diferit de numărul necunoscutelor ($m \neq n$), un rol important îl joacă noțiunea de *rang* al unei matrice.

Fie $A$ o matrice de tip $m \times n$ ($m$ linii, $n$ coloane) şi $r$ un număr natural nenul, $r \leq \min\{m, n\}$.

Cu elementele lui $A$ situate la intersecția a $r$ linii distincte cu $r$ coloane distincte se poate forma o submatrice pătratică de ordin $r$. Determinantul unei submatrice pătratice de ordin $r$ a lui $A$ se numeşte *minor de ordin* $r$ al lui $A$.

***Exemplu***

Fie matricea $A=\begin{pmatrix} 2 & -4 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & -4 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 3 & 1 \\ 4 & -7 & 4 & -4 & 5 \end{pmatrix}$.

Observăm că matricea are 4 linii şi 5 coloane ($m = 4$, $n = 5$).

Minorii de ordin 2 ai matricei $A$ sunt în număr de $C_4^2 \cdot C_5^2 = 60$.

De exemplu $\begin{vmatrix} 2 & -4 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 8$, $\begin{vmatrix} -4 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = -13$ etc. sunt minori de ordin 2.

Minorii de ordin 3 ai lui $A$ sunt în număr de $C_4^3 \cdot C_5^3 = 40$.

De exemplu $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & -4 \\ 0 & -1 & 3 \end{vmatrix} = -12$ este un minor de ordin 3.

Minorii de ordin 4 ai lui $A$ sunt în număr de $C_4^4 \cdot C_5^4 = 5$.

De exemplu $\begin{vmatrix} 2 & -4 & 3 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 4 & -7 & 4 & 5 \end{vmatrix} = 0$ este un minor de ordin 4.

| **Definiție** | Spunem că matricea $A$ de tip $m \times n$ $(A \neq O_{m\times n})$ are *rangul r* (scriem rang $A = r$) dacă $A$ are cel puțin un minor de ordin $r$ nenul şi toți minorii lui $A$ de ordin mai mare decât $r$ sunt nuli.<br>Prin definiție, matricea $O_{m\times n}$ are rangul 0. |
|---|---|

***Exemple***

**1.** Matricea $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & 4 & 3 & -1 \\ 2 & 4 & 3 & -1 \end{pmatrix}$ are rangul egal cu 2.

Într-adevăr, se observă că submatricea $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$, care provine din primele 2 linii ale lui $A$ şi coloanele 1 şi 3, are determinantul $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 5 \neq 0.$

Cum cea de a treia linia a matricei $A$ coincide cu a doua, rezultă că orice minor de ordin 3 va avea 2 linii egale, deci va fi nul. Rezultă rang $A = 2$.

Să observăm că $A$ mai are şi alți minori de ordin 2 nenuli, de exemplu:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -1.$$

**2.** Matricea $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & -3 & 2 \end{pmatrix}$ are rangul 3, deoarece $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & 2 \\ 0 & 3 & -3 \end{vmatrix} = 18 \neq 0.$

**Observație:** Calculul rangului unei matrice pe baza definiției conduce la multe calcule.

Să considerăm, de exemplu, o matrice de tip 4 × 5 ($m = 4$, $n = 5$), deci rangul matricei va fi $r \leq \min\{4, 5\} = 4$.

Să presupunem că am găsit un minor de ordin 2 nenul. Pentru ca această matrice să fie de rang 2, ar trebui să arătăm că toţi minorii de ordin 3 şi toţi minorii de ordin 4 sunt nuli.

Rezultă că, în total, avem de calculat: $C_4^3 \cdot C_5^3 + C_4^4 \cdot C_5^4 = 45$ minori!

Să considerăm o matrice $A$ de tip $m \times n$ de rang $r$. Conform definiţiei, matricea $A$ conţine cel puţin un minor de ordin $r$ nenul şi toţi minorii de ordin $r + 1$, $r + 2$ etc. sunt nuli.

Dar minorii de ordin $r + 2$ se vor calcula prin dezvoltarea după o linie sau o coloană, deci se vor reduce la calculul unor minori de ordin $r + 1$. Rezultă că, dacă toţi minorii de ordin $r + 1$ sunt nuli, atunci şi toţi minorii de ordin $r + 2$ sunt nuli. Analog, dacă toţi minorii de ordin $r + 2$ sunt nuli, atunci toţi minorii de ordin $r + 3$ vor fi nuli ş.a.m.d.

Conform raţionamentului de mai sus, pentru a arăta că rangul unei matrice este $r$, este suficient să găsim un minor de ordin $r$ nenul şi să arătăm că toţi minorii de ordin $r + 1$ sunt nuli.

Următoarea teoremă reduce numărul de minori de ordin $r + 1$ ce trebuie calculaţi.

| | |
|---|---|
| **Teoremă (Kronecker)** | *Fie* $A = \left(a_{ij}\right)_{\substack{i=\overline{1,m} \\ j=\overline{1,n}}}$ *o matrice de tip* $m \times n$ *de rang* $r$ *şi* $M$ *o submatrice pătratică de ordin* $r$ *a lui* $A$ *cu* $\det M \neq 0$. *Atunci orice linie (respectiv coloană) a lui* $A$ *din care nu face parte* $M$ *este combinaţie liniară de liniile (respectiv coloanele) lui* $A$ *din care provine* $M$. |

*Demonstraţie (schiţă)*

Deoarece rang $A = r$ rezultă că toţi minorii de ordin mai mare decât $r$ sunt nuli. Se foloseşte faptul că un determinant este nul dacă şi numai dacă o linie (respectiv coloană) este combinaţie liniară a celorlalte linii (respectiv coloane).

Din teorema Kronecker şi din demonstraţia acesteia rezultă următorul *procedeu de determinare a rangului unei matrice*.

Fie $A = \left(a_{ij}\right)_{\substack{i=\overline{1,m} \\ j=\overline{1,n}}}$ o matrice de tip $m \times n$ şi $M$ o submatrice pătratică de ordin $r$ a lui $A$ cu $\det M \neq 0$.

„Bordăm“ minorul $M$ cu una din cele $(m - r)$ linii rămase şi cu una din cele $(n - r)$ coloane rămase. Obţinem astfel minori de ordinul $r + 1$.

Distingem următoarele cazuri:

i) dacă toți aceşti minori sunt nuli, atunci rangul matricei $A$ va fi rang $A = r$.

ii) dacă cel puțin unul dintre minorii de ordin $r + 1$ astfel construiți este nenul, continuăm procedeul, prin bordarea minorului de ordin $r + 1$ cu una din cele $(m - r - 1)$ linii rămase sau una din cele $(n - r - 1)$ coloane rămase. Obținem astfel minori de ordin $r + 2$.

Se disting următoarele cazuri:

a) dacă toți minorii de ordin $r + 2$ astfel construiți sunt nuli, atunci rang $A = r + 1$.

b) dacă există un minor de ordin $r + 2$ nenul, se continuă procedeul până în momentul în care se ajunge la toți minorii de ordin $k$ ($k \leq \min\{m, n\}$) nuli (şi atunci rang $A = k - 1$) sau se ajunge la un minor nenul de ordin $\min\{m, n\}$ şi atunci rang $A = \min\{m, n\}$.

În concluzie, pentru a arăta că rangul unei matrice $A$ de tip $m \times n$ este $r$, este suficient să găsim un minor $M$ de ordinul $r$ nenul şi să arătăm că toți minorii de ordinul $r + 1$ obținuți prin bordarea lui $M$ cu una din cele $(m - r)$ linii rămase şi cu una din cele $(n - r)$ coloane rămase sunt nuli.

**Observații:** Astfel se reduce numărul minorilor de rang $r + 1$ ce trebuie calculați de la $C_m^{r+1} \cdot C_n^{r+1}$ (conform definiției rangului unei matrice) la $(m - r) \cdot (n - r)$ (conform procedeului de bordare).

***Exemplu***

Vom determina rangul matricei

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & -4 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 3 & 1 \\ 4 & -7 & 4 & -4 & 5 \end{pmatrix}$$

Considerăm, de exemplu, minorul de ordin doi nenul.

$$M = \begin{vmatrix} -4 & 3 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0 \Rightarrow r = \text{rang } A \geq 2.$$

Bordăm minorul $M$, de exemplu, cu elemente de pe prima coloană şi a treia linie şi obținem minorul nenul:

$$M'=\begin{vmatrix} 2 & -4 & 3 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix}=1\neq 0 \Rightarrow r=\operatorname{rang} A \geq 3.$$

Bordăm minorul $M'$ cu elemente de pe linia 4 şi coloana 4. Obţinem un minor de ordin 4 nul

$$\begin{vmatrix} 2 & -4 & 3 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & -4 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \\ 4 & -7 & 4 & -4 \end{vmatrix}=0 .$$

Bordăm minorul $M'$ cu elemente de pe linia 4 şi coloana 5. Obţinem, de asemenea, un minor de ordin 4 nul.

$$\begin{vmatrix} 2 & -4 & 3 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 4 & -7 & 4 & 5 \end{vmatrix}=0 .$$

Cum ambii minori de ordin 4 obţinuţi prin bordarea lui $M'$ sunt nuli, rezultă că rang $A$ = 3.

## 4.5. Studiul compatibilităţii şi rezolvarea sistemelor: proprietatea Kronecker – Capelli, proprietatea Rouché, metoda Gauss

Să considerăm sistemul de $m$ ecuaţii liniare cu $n$ necunoscute:

$$S:\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1n}x_n=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\ldots+a_{2n}x_n=b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\ldots+a_{mn}x_n=b_m \end{cases}.$$

Vom stabili criterii (*teoreme de compatibilitate*) cu ajutorul cărora să putem decide dacă sistemul $S$ este compatibil şi, de asemenea, metode de rezolvare a sistemelor compatibile, cu ajutorul cărora să determinăm mulțimea tuturor soluțiilor. Evident, teoremele şi metodele de rezolvare sunt aplicabile atât în cazurile nediscutate încă ($m = n$, cu $\det A = 0$ şi $m \neq n$), dar şi în cazul sistemelor de tip Cramer.

Vom nota cu $A$ matricea sistemului $S$ şi cu $\overline{A}$ matricea de tip $m \times (n + 1)$ obținută prin adăugarea la matricea $A$ a unei coloane (pe poziția $n + 1$) formată din termenii liberi $b_1, b_2, \ldots, b_m$. $\overline{A}$ se numeşte *matricea extinsă* şi este de forma:

$$\overline{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} & b_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$$

Există doar două posibilități:

i) rang $\overline{A}$ = rang $A$ sau ii) rang $\overline{A}$ = rang $A$ + 1.

## Proprietatea Kronecker – Capelli

**Teoremă.** *Fie S un sistem de m ecuații cu n necunoscute.*

*Sistemul S este compatibil dacă şi numai dacă* rang $A$ = rang $\overline{A}$.

*Demonstrație (facultativ)*

Presupunem că sistemul $S$ este compatibil şi fie $x_1, x_2,\ldots, x_n$ o soluție a sistemului $S$. Rezultă că ultima coloană a lui $\overline{A}$ este suma coloanelor lui $A$ înmulțite respectiv cu coeficienții $x_1, x_2,\ldots, x_n$.

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{cccc:cc:c} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1r} & \ldots & a_{1n} & x_1a_{11} + x_2a_{12} + \ldots + x_na_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2r} & \ldots & a_{2n} & x_1a_{21} + x_2a_{22} + \ldots + x_na_{2n} \\ & & \ldots & & & & \ldots \\ \hdashline a_{r1} & a_{r2} & \ldots & a_{rr} & \ldots & a_{rn} & x_1a_{r1} + x_2a_{r2} + \ldots + x_na_{rn} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mr} & \ldots & a_{mn} & x_1a_{m1} + x_2a_{m2} + \ldots + x_na_{mn} \end{array}\right).$$

Presupunem rang $A = r$ şi, fără a restrânge generalitatea, putem presupune că rangul este dat de minorul:

$$M=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1r} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2r} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{r1} & a_{r2} & \dots & a_{rr} \end{vmatrix} \neq 0.$$

Există două situații:

**1.** Dacă $\boxed{r < \min\{m, n\}}$, bordăm minorul $M$ cu una dintre cele $(m-r)$ linii rămase şi cu ultima coloană. Fără a restrânge generalitatea, putem alege, de exemplu, ultima linie. Obținem minorul de ordin $(r+1)$ al matricei $\overline{A}$ :

$$\begin{array}{l} \text{linia } 1 \\ \text{linia } 2 \\ \\ \text{linia } r \\ \text{linia } m \end{array}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1r} & x_1a_{11}+x_2a_{12}+\dots+x_ra_{1r}+x_{r+1}a_{1(r+1)}+\dots+x_na_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2r} & x_1a_{21}+x_2a_{22}+\dots+x_ra_{2r}+x_{r+1}a_{2(r+1)}+\dots+x_na_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{r1} & a_{r2} & \dots & a_{rr} & x_1a_{r1}+x_2a_{r2}+\dots+x_ra_{rr}+x_{n+1}a_{r(r+1)}+\dots+x_ra_{rn} \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mr} & x_1a_{m1}+x_2a_{m2}+\dots+x_ra_{mr}+x_{n+1}a_{m(r+1)}+\dots+x_na_{mn} \end{vmatrix}=$$

$$=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1r} & x_{r+1}a_{1(r+1)}+\dots+x_na_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2r} & x_{r+1}a_{2(r+1)}+\dots+x_na_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{r1} & a_{r2} & \dots & a_{rr} & x_{r+1}a_{r(r+1)}+\dots+x_na_{rn} \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mr} & x_{r+1}a_{m(r+1)}+\dots+x_na_{mn} \end{vmatrix}=$$

$$=x_{r+1}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1r} & a_{1(r+1)} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2r} & a_{2(r+1)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{r1} & a_{r2} & \dots & a_{rr} & a_{r(r+1)} \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mr} & a_{m(r+1)} \end{vmatrix}+\dots+x_n\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1r} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2r} & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{r1} & a_{r2} & \dots & a_{rr} & a_{rn} \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mr} & a_{mn} \end{vmatrix}=$$

$$=x_{r+1}\cdot M_1+\dots+x_n\cdot M_{n-r.}$$

Dar $M_1$, $M_2$, … $M_{n-r}$ sunt minori de ordin $r+1$ ai matricei $A$, deci $M_1 = M_2 = \dots = M_{n-r} = 0$ (deoarece rang $A = r$). Rezultă că orice minor de ordin $r+1$ al lui $\overline{A}$ este nul, deci rang $\overline{A} = r =$ rang $A$.

**2.** Dacă $\boxed{r = \min\{m, n\}}$, există două posibilități:

i) $\boxed{r = n}$ (dacă $n < m$) şi în acest caz există cel puțin o linie şi exact o coloană cu care putem borda minorul $M$.

Urmează un raționament analog cazului 1.

ii) $\boxed{r = m}$ (dacă $m \le n$) şi în acest caz evident avem rang $A$ = rang $\overline{A} = m$.

Prin urmare, am arătat că în ambele cazuri rezultă rang $A$ = rang $\overline{A}$.

Reciproc, să presupunem că rang $A$ = rang $\overline{A}$.

Vom arăta că sistemul $S$ este compatibil.

Fie $M = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1r} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2r} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{r1} & a_{r2} & \dots & a_{rr} \end{vmatrix} \ne 0$ un minor de ordin $r$ nenul.

Evident, există mai multe cazuri, ce rezultă din compararea numerelor $r$, $m$ şi $n$. Esențiale sunt următoarele situații:

i) $\boxed{r = m = n}$ şi atunci sistemul este de tip Cramer şi este compatibil determinat.

ii) $\boxed{r = m < n}$ Fie $\lambda_{m+1}, \dots, \lambda_n$, $(m - r)$ numere reale.

Se rezolvă sistemul Cramer.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \ldots + a_{1m}x_m = b_1 - a_{1(m+1)}\lambda_{m+1} - \ldots - a_{1n}\lambda_n \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + \ldots + a_{mm}x_m = b_m - a_{m(m+1)}\lambda_{m+1} - \ldots - a_{mn}\lambda_n \end{cases},$$

care are soluția unică $x_1, \dots, x_m$.

Atunci soluțiile sistemului $S$ vor fi $(x_1, \dots, x_m, \lambda_{m+1}, \dots, \lambda_n)$, deci sistemul $S$ este compatibil nedeterminat.

iii) $\boxed{r < m < n}$ Bordând minorul $M$ cu coloana $b_1, \dots, b_i$ şi cu orice linie $a_{i1}, \dots, a_{ir}$ cu $i \in \{r + 1, \dots, m\}$, obținem un minor de ordin $r + 1$ nul.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1r} & b_1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{r1} & \dots & a_{rr} & b_r \\ a_{i1} & \dots & a_{ir} & b_i \end{vmatrix} = 0, \ \forall i \in \{r+1, \dots, m\}.$$

Rezultă că ultima coloană poate fi scrisă ca o combinație liniară de celelalte $r$ coloane:

$$\begin{cases} b_1 = \alpha_1 a_{11} + \alpha_2 a_{12} + \ldots + \alpha_r a_{1r} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ b_r = \alpha_1 a_{r1} + \alpha_2 a_{r2} + \ldots + \alpha_r a_{rr} \\ b_i = \alpha_1 a_{i1} + \alpha_2 a_{i2} + \ldots + \alpha_r a i_{1r} \end{cases}, \forall i \in \{r+1, \dots, m\}.$$

Considerând primele $r$ ecuații de mai sus, rezultă că o soluție (unică!) a sistemului de tip Cramer (determinantul sistemului este $M$):

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1r}x_r = b_1 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{r1}x_1 + a_{r2}x_2 + \ldots + a_{rr}x_r = b_r \end{cases}$$

este $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r$.

Rezultă că o soluție a sistemului $S$ va fi $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r, \underbrace{0, 0, \ldots, 0}_{n-r})$, deci sistemul $S$ este compatibil nedeterminat.

iv) $\boxed{r = n < m}$, adică rang $A$ = rang $\overline{A}$ = $n$ = numărul de necunoscute.

Raționamentul este analog cazului iii), dar evident sistemul $S$ este compatibil determinat, cu unica soluție $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$.

O consecință a demonstrației teoremei lui Kronecker – Capelli este următoarea:

**Teoremă.** *Un sistem S de m ecuații liniare cu n necunoscute are soluție unică dacă și numai dacă rang A = rang* $\overline{A}$ *= n.*

***Exemple***

**1.** Fie sistemul $\begin{cases} 5x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 = 7 \\ 2x_1 + x_2 + 4x_3 - 2x_4 = 1 \\ x_1 - 3x_2 - 6x_3 + 5x_4 = 0 \end{cases}$, $(m = 3,\ n = 4)$.

Rangul matricei sistemului este 2, deoarece

$$\begin{vmatrix} 5 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 7 \neq 0 \text{ şi } \begin{vmatrix} 5 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 4 \\ 1 & -3 & -6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & -3 & 5 \end{vmatrix} = 0.$$

Rangul matricei extinse este 3, deoarece

$$\begin{vmatrix} 5 & -1 & 7 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 0 \end{vmatrix} = -35 \neq 0.$$

Rezultă că rang $A \neq$ rang $\overline{A}$, deci sistemul este incompatibil.

**2.** Fie sistemul $\begin{cases} 7x_1 + 3x_2 = \ \ 7 \\ \ x_1 - 2x_2 = -3 \\ 4x_1 + 9x_2 = 11 \end{cases}$, ($m$ = 3, $n$ = 2).

Rangul matricei coeficienților este 2 şi este egal cu numărul necunoscutelor. De asemenea, rangul matricei extinse este 2, deoarece:

$$\begin{vmatrix} 7 & 3 & 2 \\ 1 & -2 & -3 \\ 4 & 9 & 11 \end{vmatrix} = 0 .$$

Rezultă că rang $A$ = rang $\overline{A}$ = 2 = numărul de necunoscute.

Deci sistemul este compatibil determinat cu soluțiile: $x_1 = \dfrac{-5}{17}$, $x_2 = \dfrac{23}{17}$.

**Observație:** Să presupunem că avem un sistem format din ($n$ + 1) ecuații cu $n$ necunoscute. Atunci matricea extinsă $\overline{A}$ va fi o matrice pătratică de ordin ($n$ + 1). Dacă sistemul este compatibil, atunci, conform teoremei lui Kronecker – Capelli, det $\overline{A}$ = 0.

De exemplu, să considerăm sistemul

$$\begin{cases} x_1 - 8x_2 = \ \ 3 \\ 2x_1 + \ x_2 = \ \ 1 \\ 4x_1 + 7x_2 = -4 \end{cases}, \ (m = 3,\ n = 2,\ m = n + 1).$$

Rangul matricei sistemului este 2(rang $A$ = 2) şi rang $\overline{A}$ = 3

(deoarece: $\begin{vmatrix} 1 & -8 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \\ 4 & 7 & -4 \end{vmatrix} = -77 \neq 0$). Rezultă că sistemul este incompatibil.

Reciproca, în general, nu este adevărată: dacă det $\overline{A}$ = 0 nu rezultă neapărat că rang $A$ = rang $\overline{A}$.

De exemplu, să considerăm sistemul

$$\begin{cases} x_1+2x_2 \qquad\quad =0 \\ 3x_1 \;\; +x_2+2x_3=0 \\ 4x_1+3x_2+2x_3=1 \\ 2x_1+4x_2 \qquad\quad =0 \end{cases} \quad (m=4,\ n=3,\ m=n+1).$$

Avem det $\overline{A}=0$ şi rang $\overline{A}=3$, dar rang $A=2$, deci sistemul este incompatibil.

## Exerciții rezolvate

**1.** Rezolvați sistemul $\begin{cases} 2x_1+3x_2-4x_3-5x_4=1 \\ 4x_1-x_2+x_3+x_4=2 \\ 5x_1+x_2+6x_3+2x_4=3 \end{cases}$

*Soluție:*

Fie $A=\begin{pmatrix} 2 & 3 & -4 & -5 \\ 4 & -1 & 1 & 1 \\ 5 & 1 & 6 & 2 \end{pmatrix}$; $\overline{A}=\begin{pmatrix} 2 & 3 & -4 & -5 & 1 \\ 4 & -1 & 1 & 1 & 2 \\ 5 & 1 & 6 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

Deoarece $d=\begin{vmatrix} 2 & 3 & -4 \\ 4 & -1 & 1 \\ 5 & 1 & 6 \end{vmatrix}=-107\neq 0$, rezultă că rang $A$ = rang $\overline{A}$ = 3, deci sistemul este compatibil.

Cum $d \neq 0$, rezultă că $x_1$, $x_2$, $x_3$ sunt necunoscute principale şi $x_4$ este necunoscută secundară. Notăm cu $x_4=\lambda$ şi rezolvăm sistemul:

$$\begin{cases} 2x_1+3x_2-4x_3=5\lambda+1 \\ 4x_1-x_2+x_3=-\lambda+2 \\ 5x_1+x_2+6x_3=-2\lambda+3 \end{cases},$$

folosind regula lui Cramer.

**2.** Rezolvați sistemul $\begin{cases} 2x-ay+z=1 \\ x+ay-z=1 \\ x+y+z=1 \end{cases}$ (discuție după parametrul $a \in \mathbb{R}$).

*Soluție:*

$$d=\begin{vmatrix}2 & -a & 1\\ 1 & a & -1\\ 1 & 1 & 1\end{vmatrix}=3(a+1)$$

i) dacă $a \neq -1$, sistemul este compatibil determinat (rang $A$ = rang $\overline{A}$ = 3) şi se aplică regula lui Cramer;

ii) dacă $a = -1$ sistemul devine

$$\begin{cases}2x+y+z=1\\ x-y-z=1\\ x+y+z=1\end{cases}$$

Din primele 2 ecuații rezultă $3x = 2$, iar din ultimele două rezultă $2x = 2$, deci sistemul este incompatibil (în acest caz rang $A$ = 2, rang $\overline{A}$ = 3).

**3.** Sistemul $\begin{cases}x+2y-3z=5\\ 2x-5y+4z=3\\ 4x-y-2z=4\end{cases}$ este compatibil?

*Soluție:* $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & -3\\ 2 & -5 & 4\\ 4 & -1 & -2\end{pmatrix}$, $\overline{A}=\begin{pmatrix}1 & 2 & -3 & 5\\ 2 & -5 & 4 & 3\\ 4 & -1 & -2 & 11\end{pmatrix}$

Avem det $A = 0 \Rightarrow$ rang $A$ = 2 (de exemplu, $\begin{vmatrix}1 & 2\\ 2 & -5\end{vmatrix}\neq 0$), dar rang $\overline{A}=3$,

$$\text{deoarece } \begin{vmatrix}2 & -3 & 5\\ -5 & 4 & 3\\ -1 & -2 & 11\end{vmatrix}\neq 0.$$

Deci sistemul este incompatibil.

## Proprietatea Rouché

Considerăm un sistem $S$ de $m$ ecuații liniare cu $n$ necunoscute. Presupunem că rangul matricei sistemului este $r$, deci matricea $A$ admite cel puțin un minor de ordin $r$ nenul. Fixăm un astfel de minor (fără a restrânge generalitatea, putem considera minorul format din primele $r$ linii şi $r$ coloane). Acesta se va numi *minor principal* al matricei $A$ (sau al sistemului $S$).

$$M = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1r} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2r} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{r1} & a_{r2} & \dots & a_{rr} \end{vmatrix} \neq 0.$$

Cum rang $A = r$, rezultă că toţi minorii de ordin $r + 1$ ai lui $A$ sunt nuli.

Vom avea rang $A$ = rang $\overline{A} = r$ dacă şi numai dacă

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1r} & b_1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{r1} & \dots & a_{rr} & b_r \\ a_{i1} & \dots & a_{ir} & b_i \end{vmatrix} = 0,\ \forall i \in \{r+1, \dots, m\}.$$

Aceşti minori obţinuţi prin bordarea, pe rând, a minorului principal cu una din cele $(m - r)$ linii rămase şi cu coloana termenilor liberi, se numesc *minori caracteristici* (în număr de $m - r$).

Rezultă că un sistem este compatibil dacă şi numai dacă toţi minorii săi caracteristici sunt nuli.

Acest rezultat constituie de fapt teorema lui Rouché.

| | |
|---|---|
| **Teoremă (Rouché)** | *Un sistem S de m ecuaţii liniare cu n necunoscute este compatibil dacă şi numai dacă toţi minorii săi caracteristici sunt nuli.* |

Ecuaţiile sistemului $S$ care corespund liniilor din care face parte minorul principal (în acest caz al primelor $r$ linii) se numesc *ecuaţii principale*, iar necunoscutele corespunzătoare coloanelor minorului principal (în acest caz al primelor $r$ coloane, deci primele $r$ necunoscute) se numesc *necunoscute principale*.

Să considerăm un sistem $S$ de $m$ ecuaţii liniare cu $n$ necunoscute, în care rang $A$ = rang $\overline{A} = r$, deci compatibil. Să presupunem că minorul principal este dat de primele $r$ linii şi primele $r$ coloane.

Fie $S'$ sistemul format de ecuaţiile principale:

$$S': \begin{cases} a_{11}x_1 + \dots + a_{1r}x_r + a_{1r+1}x_{r+1} + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{r1}x_1 + \dots + a_{rr}x_r + a_{rr+1}x_{r+1} + \dots + a_{rn}x_n = b_r \end{cases}.$$

Orice soluție a sistemului $S'$ verifică şi celelalte ecuații ale sistemului $S$, deoarece liniile $r+1$, $r+2$ …, $m$ ale matricei $\overline{A}$ sunt combinații liniare ale primelor $r$ linii ale lui $\overline{A}$.

Deci rezolvarea sistemului $S$ se reduce la rezolvarea sistemului $S'$ format numai din ecuațiile principale. Necunoscutele $x_1$ …, $x_r$ sunt necunoscute principale, deci sistemul $S'$ este un sistem de $r$ ecuații cu $r$ necunoscute, de tip Cramer:

$$S':\begin{cases} a_{11}x_1+\ldots+a_{1r}x_r=b_1-a_{1r+1}x_{r+1}-\ldots-a_{1n}x_n \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{r1}x_1+\ldots+a_{rr}x_r=b_r-a_{rr+1}x_{r+1}-\ldots-a_{rn}x_n \end{cases}.$$

Necunoscutele $x_{r+1}$, …, $x_n$ se numesc *necunoscute secundare* (iar ecuațiile $r+1$, …, $m$ ale sistemului $S$ se numesc *ecuații secundare*).

Deci, folosind regula lui Cramer, putem exprima necunoscutele principale $x_1$, …, $x_r$ în funcție de necunoscutele secundare $x_{r+1}$, …, $x_n$.

Soluția generală a lui $S'$, deci şi a lui $S$, se obține dând valori arbitrare $\lambda_1$, $\lambda_2$,…, $\lambda_{n-r}$ respectiv necunoscutelor secundare $x_{r+1}$, …, $x_n$.

### Exemple

**1.** Să considerăm sistemul

$$S:\begin{cases} x_1-x_2+3x_3-2x_4=2 \\ -2x_1+4x_2-2x_3+x_4=-5 \\ -x_1+5x_2+5x_3-4x_4=-4 \end{cases}.$$

Pentru a determina rang $A$, să observăm că $M=\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 4 \end{vmatrix}=2\neq 0.$ Rezultă rang $A\geq 2$. Minorii care bordează pe $M$ sunt:

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ -2 & 4 & -2 \\ -1 & 5 & 5 \end{vmatrix}=0,\ \begin{vmatrix} 1 & -1 & -2 \\ -2 & 4 & 1 \\ -1 & 5 & -4 \end{vmatrix}=0,$$

deci rang $A=2$ şi putem alege $M$ minor principal. Deci necunoscutele principale vor fi $x_1$ şi $x_2$, iar ecuațiile principale vor fi prima şi cea de a doua ecuație.

Avem un singur minor caracteristic, şi anume:

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -2 & 4 & -5 \\ -1 & 5 & -4 \end{vmatrix}=0.$$

Cum minorul caracteristic este nul rezultă conform teoremei lui Rouché că sistemul $S$ este compatibil.

Sistemul $S$ se reduce la sistemul $S'$ format din ecuațiile principale, cu necunoscutele principale $x_1$ şi $x_2$ şi necunoscutele secundare $x_3$ şi $x_4$:

$$S': \begin{cases} x_1 - x_2 = 2 - 3x_3 + 2x_4 \\ -2x_1 + 4x_2 = -5 + 2x_3 - x_4 \end{cases}.$$

$S'$ este un sistem de tip Cramer, deci soluția sistemului $S'$ este

$x_1 = \dfrac{d_1}{d}$, $x_2 = \dfrac{d_2}{d}$, unde:

$$d = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 4 \end{vmatrix} = 2;\ d_1 = \begin{vmatrix} 2 - 3x_3 + 2x_4 & -1 \\ -5 + 2x_3 - x_4 & 4 \end{vmatrix} = -10x_3 + 7x_4 + 3;$$

$$d_2 = \begin{vmatrix} 1 & 2 - 3x_3 + 2x_4 \\ -2 & -5 + 2x_3 - x_4 \end{vmatrix} = -4x_3 + 3x_4 - 1.$$

Necunoscutele secundare pot lua valori arbitrare $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ ($x_3 = \lambda_1$, $x_4 = \lambda_2$). Rezultă că sistemul $S$ este compatibil nedeterminat cu soluțiile:

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{1}{2}(-10\lambda_1 + 7\lambda_2 + 3) \\ x_2 = \dfrac{1}{2}(-4\lambda_1 + 3\lambda_2 - 1) \\ x_3 = \lambda_1 \\ x_4 = \lambda_2 \end{cases},\ \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}.$$

**2.** Să se rezolve sistemul

$$\begin{cases} 4x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = 3 \\ x_1 - 2x_2 - x_3 + 2x_4 = 2 \\ 2x_1 + 5x_2 - x_4 = -1 \\ 3x_1 + 3x_2 - x_3 - 3x_4 = 1 \end{cases}$$

Chiar dacă numărul ecuațiilor este egal cu numărul necunoscutelor, determinantul sistemului este 0, deci nu putem aplica regula lui Cramer.

Rangul matricei sistemului este 3, dat de exemplu de minorul

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & -1 & 2 \\ 5 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -10 \neq 0.$$

Rangul matricelor extinse este de asemenea 3 (minorul caracteristic este nul).

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 & 3 \\ -2 & -1 & 2 & 2 \\ 5 & 0 & -1 & -1 \\ 3 & -1 & -3 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Rezultă că necunoscutele principale sunt $x_2$, $x_3$, $x_4$, iar $x_1 = \lambda$ este necunoscută secundară.

$$\text{Sistemul } S': \begin{cases} x_2 - 2x_3 + x_4 = 3 - 4\lambda \\ -2x_2 - x_3 + 2x_4 = 2 - \lambda \\ 5x_2 - x_4 = -1 - 2\lambda \end{cases}$$

este de tip Cramer şi are soluțiile:

$$x_1 = \lambda,\ \ x_2 = -\frac{1}{5} - \frac{2}{5}\lambda,\ \ x_3 = -\frac{8}{5} + \frac{9}{5}\lambda,\ \ x_4 = 0.$$

Un caz particular de sisteme de $m$ ecuații liniare cu $n$ necunoscute este cel al *sistemelor omogene* (toți termenii liberi sunt nuli):

$$S: \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases}$$

(pentru $m = n$, aceste sisteme au fost deja discutate la sisteme de tip Cramer).

Orice sistem omogen este compatibil pentru că întotdeauna admite soluția $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0$ (numită *soluția banală).*

Un sistem omogen $S$ admite numai soluția banală (compatibil determinat) dacă şi numai dacă rang $A = n$ = numărul necunoscutelor.

În particular, un sistem omogen cu $n$ ecuații şi $n$ necunoscute admite numai soluția banală (este compatibil determinat) dacă det $A \neq 0$ şi va avea cel puțin o soluție nebanală (compatibil nedeterminat) dacă det $A = 0$.

***Exemple***

**1.** Se consideră sistemul omogen de 2 ecuații liniare omogene cu 3 necunoscute

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 0 \\ \qquad x_2 + x_3 = 0 \end{cases}.$$

Cum rang $A = 2 < 3 =$ numărul necunoscutelor, rezultă că sistemul admite şi alte soluții în afara soluției banale $x_1 = x_2 = x_3 = 0$.

Soluția generală a sistemului este $x_1 = -\lambda$, $x_2 = \lambda$, $x_3 = -\lambda$, cu $\lambda \in \mathbb{R}$, deci sistemul este compatibil nedeterminat.

**2.** Se consideră sistemul omogen de 3 ecuații liniare omogene cu 2 necunoscute

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 = 0 \\ x_1 + x_2 = 0 \\ -x_1 + 2x_2 = 0 \end{cases}.$$

Cum rang $A = 2 =$ numărul necunoscutelor, sistemul admite numai soluția banală $x_1 = x_2 = 0$ (compatibil determinat).

**3.** Se consideră sistemul omogen de 4 ecuații liniare omogene cu 4 necunoscute

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 + 3x_4 = 0 \\ -2x_1 - x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 0 \\ 5x_1 - x_3 - x_4 = 0 \\ 3x_1 - x_2 - 3x_3 + x_4 = 0 \end{cases}.$$

Cum det $A = 0$ rezultă că sistemul este compatibil nedeterminat şi admite şi alte soluții în afara soluției banale $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 0$.

Soluția generală a sistemului este:

$$x_1 = \frac{d_1}{d} = \frac{1}{5}\lambda,\ \ x_2 = \frac{d_2}{d} = \frac{8}{5}\lambda,\ \ x_3 = \frac{d_3}{d} = 0,\ \ x_4 = \lambda.$$

**4.** Se consideră sistemul omogen de 3 ecuații liniare omogene cu 3 necunoscute

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 0 \\ -2x_1 - 3x_2 + x_3 = 0 \\ -x_1 - x_2 + 3x_3 = 0 \end{cases}.$$

Cum det $A \neq 0$ rezultă că singura soluție a sistemului este cea banală $x_1 = x_2 = x_3 = 0$ (sistemul este compatibil determinat).

## Metoda Gauss

Metoda Gauss este o metodă de rezolvare a sistemelor de ecuații liniare ce se bazează pe eliminarea succesivă a necunoscutelor (se mai numeşte şi *metoda eliminării necunoscutelor*).

Sistemul inițial $S$ se reduce la un sistem $S'$ echivalent cu $S$, prin transformări elementare asupra matricei extinse $\overline{A}$ a sistemului $S$.

Reamintim că asupra liniilor unei matrice $A$ de tip $m \times n$ se pot efectua următoarele operații (numite *transformări elementare*):

i) adunarea la linia $i$ a liniei $j$, $i \neq j$, $i, j = \overline{1,m}$, înmulțită cu numărul $\alpha \in \mathbb{R}$ (prescurtat vom scrie $L_i \leftarrow L_i + \alpha L_j$);

ii) permutarea liniei $i$ cu linia $j$, $i \neq j$, $i, j = \overline{1,m}$ ($L_i \leftrightarrow L_j$);

iii) înmulțirea liniei $i$ ($i = \overline{1,m}$) cu numărul $\alpha \neq 0$ ($L_i \leftarrow \alpha L_i$).

Analog se definesc transformările elementare asupra coloanelor unei matrice $A$ (cu notația $C_i$ pentru coloana numărul $i$, $i = \overline{1,n}$).

O matrice $E$ de tip $m \times n$ se numeşte matrice *eşalon* cu $l$ pivoți, $1 \leq l \leq \max\{m, n\}$, dacă este de forma:

$$E = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & \boxed{\alpha_1} & \beta_1 & \beta_2 & \dots & \beta_{i_1} \\ 0 & \dots & 0 & \dots & \boxed{\alpha_2} & \dots & \dots & \gamma_{i_2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \boxed{\alpha_l} & \dots & \lambda_{i_l} \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

cu $\alpha_i \neq 0$, $i \in \{1, 2, \dots, l\}$. Numerele $\alpha_i$, $i \in \{1, \dots, l\}$ se numesc *pivoții* matricei eşalon. Toate elementele matricei $E$ de pe linia $i$ care preced pe $\alpha_i$, $i \in \{1, \dots, l\}$, sunt nule. Pivoții $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_l, \alpha_i$, se găsesc în coloane diferite $j_1, j_2 \dots j_l$, cu $1 \leq j_1 < j_2 \dots < j_l \leq n$. Restul elementelor matricei $E$ sunt nule ($\beta, \gamma, \dots, \lambda = 0$).

Din teoria matricelor este cunoscut următorul rezultat.

**Teoremă.** *Fie $A$ o matrice de tip $m \times n$. Există un număr finit de transformări elementare prin care matricea $A$ poate fi redusă la o matrice eşalon $E$.*

***Exemple***

$$\begin{pmatrix} \boxed{-1} & 2 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{4} \end{pmatrix} \text{ – matrice eşalon cu 3 pivoți;}$$

$$\begin{pmatrix} \boxed{-1} & 1 & 3 \\ 0 & \boxed{2} & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ – matrice eşalon cu 2 pivoți;}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \boxed{1} & 2 & 0 & -3 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \boxed{2} & 4 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \boxed{3} & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ – matrice eşalon cu 3 pivoți.}$$

Revenind la metoda Gauss, aceasta constă în aplicarea de transformări elementare matricei extinse a sistemului $\overline{A}$ care reduc pe $A$ la o matrice eşalon $E$.

Matricea astfel obținută va fi matricea extinsă a unui nou sistem $S'$, echivalent cu sistemul inițial $S$.

Vom arăta cum se aplică metoda Gauss pentru sisteme de ecuații liniare cu cel mult 4 necunoscute.

***Exemple***

**1.** Fie sistemul $S:\begin{cases} x_1+2x_2+5x_3=-9 \\ x_1-x_2+3x_3=2 \\ 3x_1-6x_2-x_3=25 \end{cases}$.

Matricea extinsă a sistemului $S$ este

$$\overline{A}=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 5 & -9 \\ 1 & -1 & 3 & 2 \\ 3 & -6 & -1 & 25 \end{array}\right)=\left(\begin{array}{c|c} & -9 \\ A & 2 \\ & 25 \end{array}\right)$$

Prin transformări elementare ale matricei $\overline{A}$ căutăm să aducem matricea $A$ la forma eşalon.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 5 & -9 \\ 1 & -1 & 3 & 2 \\ 3 & -6 & -1 & 25 \end{array}\right)\xrightarrow{L_2\leftarrow L_2-L_1}\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 5 & -9 \\ 0 & -3 & -2 & 11 \\ 0 & -12 & -16 & 52 \end{array}\right)\xrightarrow{L_3\leftarrow L_3-4L_2}\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 5 & -9 \\ 0 & -3 & -2 & 11 \\ 0 & 0 & -8 & 8 \end{array}\right)$$

Ajungem astfel la următorul sistem de ecuații liniare

$$S': \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 5x_3 = -9 \\ -3x_2 - 2x_3 = 11 \\ -8x_3 = 8 \end{cases}$$

cu soluția unică $x_1 = 2$, $x_2 = -3$, $x_3 = -1$.

Deci sistemul $S$ este compatibil determinat.

**2.** Fie sistemul $\begin{cases} x_1 - 5x_2 - 8x_3 + x_4 = 3 \\ 3x_1 + x_2 - 3x_3 - 5x_4 = 1 \\ x_1 - 7x_3 + 2x_4 = -5 \\ 11x_2 + 20x_3 - 9x_4 = 2 \end{cases}$.

Prin transformări elementare aplicate matricei extinse a sistemului $\overline{A}$, obținem

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -5 & -8 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & -3 & -5 & 1 \\ 1 & 0 & -7 & 2 & -5 \\ 0 & 11 & 20 & -9 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow[L_3 \leftarrow L_3 - L_1]{L_2 \leftarrow L_2 - 3L_1} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -5 & -8 & 1 & 3 \\ 0 & 16 & 21 & -8 & -8 \\ 0 & 5 & 1 & 1 & -8 \\ 0 & 11 & 20 & -9 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow[L_4 \leftarrow L_2 - 20L_3]{L_2 \leftarrow L_2 - 21L_3}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -5 & -8 & 1 & 3 \\ 0 & -89 & 0 & -29 & 160 \\ 0 & 5 & 1 & 1 & -8 \\ 0 & -89 & 0 & -29 & 162 \end{array}\right) \xrightarrow{L_4 \leftarrow L_4 - L_2} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -5 & -8 & 1 & 3 \\ 0 & -89 & 0 & -29 & 160 \\ 0 & 5 & 1 & 1 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right).$$

Nu este necesară o altă transformare elementară pentru a ajunge la o formă eşalon a matricei $A$.

Am ajuns la un sistem cu ultima ecuație 0 = 2, deci sistemul inițial este incompatibil.

**3.** Să se rezolve sistemul $S = \begin{cases} x_1 - x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 2 \\ -2x_1 + 4x_2 - 2x_3 + x_4 = -5 \\ -x_1 + 5x_2 + 5x_3 - 4x_4 = -4 \end{cases}$.

Matricea extinsă a sistemului este $\overline{A} = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 3 & -2 & 2 \\ -2 & 4 & -2 & 1 & -5 \\ -1 & 5 & 5 & -4 & -4 \end{array}\right)$.

Prin transformări elementare (exercițiu!) matricea $A$ a sistemului se reduce la matricea eşalon

$$\left(\begin{array}{cccc|c} \boxed{1} & -1 & 3 & -2 & 2 \\ 0 & \boxed{2} & 4 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Aşadar sistemul $S$ este compatibil şi este echivalent cu sistemul

$$S':\begin{cases} x_1 - x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 2 \\ 2x_2 + 4x_3 - 3x_4 = -1 \end{cases}.$$

În sistemul $S'$ necunoscutele principale $x_1$ şi $x_2$ (care corespund coloanelor matricei eşalon în care se găsesc pivoții) se exprimă în funcție de necunoscutele secundare $x_3$ şi $x_4$ (corespunzătoare coloanelor lui $E$ care nu conțin pivoții).

Astfel, soluția sistemului $S$ este

$$x_1 = -5\alpha + \frac{7}{2}\beta + \frac{3}{2},\quad x_2 = -2\alpha + \frac{3}{2}\beta - \frac{1}{2},\quad x_3 = \alpha,\quad x_4 = \beta,$$

(sistem compatibil nedeterminat).

**4.** Fie sistemul: $\begin{cases} 4x_1 + x_2 - 3x_3 - x_4 = 0 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 - 5x_4 = 0 \\ x_1 - 2x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 0 \end{cases}.$

Este un sistem de ecuații liniare omogene cu numărul ecuațiilor mai mic decât numărul necunoscutelor, deci sistemul este compatibil nedeterminat.

În acest caz (termenii liberi sunt nuli!), vom considera numai transformările elementare ale matricei sistemului (observație: în cazul sistemelor neomogene se consideră, ca de obicei, matricea extinsă).

Obținem

$$\begin{pmatrix} 4 & 1 & -3 & -1 \\ 2 & 3 & 1 & -5 \\ 1 & -2 & -2 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow[L_2 \leftarrow L_2 - 2L_4]{L_1 \leftarrow L_1 - 4L_4} \begin{pmatrix} 0 & 9 & 5 & -13 \\ 0 & 7 & 5 & -11 \\ 1 & -2 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{L_1 \leftarrow L_1 - L_2} \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & -2 \\ 0 & 7 & 5 & -11 \\ 1 & -2 & -2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Am ajuns astfel la următorul sistem de ecuații:

$$\begin{cases} 2x_2 \qquad\qquad - 2x_4 = 0 \\ 7x_2 + 5x_3 - 11x_4 = 0. \\ x_1 - 2x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 0 \end{cases}$$

Considerând $x_4 = \alpha \in \mathbb{R}$, obținem $x_1 = \frac{3}{5}\alpha, \quad x_2 = \alpha, \quad x_3 = \frac{4}{5}\alpha.$

## Exerciții rezolvate

**1.** Rezolvați sistemul $\begin{cases} x + y + z = a \\ x + (1+a) + z = 2a \\ x + y + (1+a)z = 0 \end{cases}$, $a \in \mathbb{R}$.

*Soluție:*

$$d = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1+a & 1 \\ 1 & 1 & 1+a \end{vmatrix} = a^2$$

a) dacă $a \neq 0$, se aplică regula lui Cramer;

b) dacă $a = 0$, toate cele trei ecuații ale sistemului sunt identice cu ecuația $x + y + z = 0$, având soluția $x = \alpha$, $y = \beta$, $z = -\alpha - \beta$.

**2.** Rezolvați sistemul $\begin{cases} x_1 - x_2 = mx_3 \\ x_2 - x_3 = mx_1 \\ x_3 - x_1 = mx_2 \end{cases}$, $m \in \mathbb{R}$.

*Soluție:*

Sistemul se scrie $\begin{cases} x_1 - x_2 - mx_3 = 0 \\ -mx_1 + x_2 - x_3 = 0 \\ -x_1 - mx_2 + x_3 = 0 \end{cases}$;

$$d = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -m \\ -m & 1 & -1 \\ -1 & -m & 1 \end{vmatrix} = -m(m^2+3);$$

a) dacă $m = 0$, atunci $x_1 = x_2 = x_3 = 1$;

b) dacă $m \neq 0$, atunci $x_1 = x_2 = x_3 = 0$.

**3.** Determinați $m \in \mathbb{R}$ știind că sistemul $\begin{cases} x+my=m \\ 2x+3y=6 \\ 3x-4y=1 \end{cases}$ este compatibil.

*Soluție:*

Numărul $m$ este soluția ecuației $\begin{vmatrix} 1 & m & m \\ 2 & 3 & 6 \\ 3 & -4 & 1 \end{vmatrix}=0$. Rezultă $m = 27$.

**4.** Fie sistemul $\begin{cases} ax+ay+az+au=1 \\ ax+ay+az+bu=2 \\ ax+ay+bz+bu=3 \\ ax+by+bz+bu=4 \end{cases}$, unde $a, b \in \mathbb{R}$.

În ce condiții sistemul admite soluție unică?

*Soluție:*

$$d=\begin{vmatrix} a & a & a & a \\ a & a & a & b \\ a & a & b & b \\ a & b & b & b \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a & a & a & a \\ 0 & 0 & 0 & b-a \\ a & a & b & b \\ a & b & b & b \end{vmatrix}=(b-a)\begin{vmatrix} a & a & a \\ a & a & b \\ a & b & b \end{vmatrix}=$$

$$=(b-a)\begin{vmatrix} a & a & a \\ 0 & 0 & b-a \\ a & b & b \end{vmatrix}=-(b-a)^2\cdot\begin{vmatrix} a & a \\ a & b \end{vmatrix}=-(b-a)^2\cdot(ab-a^2)=a\cdot(a-b)^3.$$

Din condiția $d \neq 0$, deducem $a \neq 0$ și $a \neq b$.

**5.** Rezolvați sistemul $\begin{cases} x-y=m \\ y-z=m \\ z-u=m \\ u-x=m \end{cases}$, $m \in \mathbb{R}$.

*Soluție:*

Dacă $m = 0$, atunci $x = y = z = u = \alpha$; dacă $m \neq 0$ sistemul este incompatibil.

**6.** Rezolvați sistemul $\begin{cases} x-my+z=1 \\ x-y+z=-1 \\ mx+m^2y-z=m^2 \end{cases}$, $m \in \mathbb{R}$.

*Soluție:*

$$d=\begin{vmatrix}1 & -m & 1\\ 1 & -1 & 1\\ m & m^2 & -1\end{vmatrix}\underset{L_2\leftarrow L_2+L_3}{\overset{L_1\leftarrow L_1+L_3}{=\!=\!=}}\begin{vmatrix}m+1 & m^2-m & 0\\ m+1 & m^2-1 & 0\\ m & m^2 & -1\end{vmatrix}=$$

$$=-\begin{vmatrix}m+1 & m^2-m\\ m+1 & m^2-1\end{vmatrix}=-(m+1)\begin{vmatrix}1 & m^2-m\\ 1 & m^2-1\end{vmatrix}=$$

$$=-(m+1)(m^2-1-m^2+m)=-(m+1)(m-1).$$

i) dacă $m\neq 1$ şi $m\neq -1$, se aplică regula lui Cramer;

ii) dacă $m = 1$, primele două ecuații devin:

$$\begin{cases}x-y+z=1\\ x-y+z=-1\end{cases}$$

Prin scădere rezultă $2 = 0$, deci sistemul este incompatibil.

iii) dacă $m = -1$, atunci $x = -\alpha$, $y = 1$, $z = \alpha$.

**7.** Fie sistemul $\begin{cases}mx_1+x_2+x_3+x_4=m\\ x_1+mx_2+x_3+x_4=1\\ x_1+x_2+mx_3+x_4=1\\ x_1+x_2+x_3+mx_4=1\end{cases}$.

Determinați $m\in\mathbb{R}$ ştiind că sistemul admite soluție unică.

*Soluție:*

$$d=\begin{vmatrix}m & 1 & 1 & 1\\ 1 & m & 1 & 1\\ 1 & 1 & m & 1\\ 1 & 1 & 1 & m\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}m+3 & 1 & 1 & 1\\ m+3 & m & 1 & 1\\ m+4 & 1 & m & 1\\ m+3 & 1 & 1 & m\end{vmatrix}=(m+3)\cdot\begin{vmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & m & 1 & 1\\ 1 & 1 & m & 1\\ 1 & 1 & 1 & m\end{vmatrix}=$$

$$=(m+3)\cdot\begin{vmatrix}1 & 0 & 1 & 1\\ 1 & m-1 & 1 & 1\\ 1 & 0 & m & 1\\ 1 & 0 & 1 & m\end{vmatrix}=(m+3)(m-1)\cdot\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & m & 1\\ 1 & 1 & m\end{vmatrix}=$$

$$=(m+3)(m-1)\cdot\begin{vmatrix}1 & 0 & 1\\ 1 & m-1 & 1\\ 1 & 0 & m\end{vmatrix}=(m+3)(m-1)^3.$$

$d\neq 0 \Leftrightarrow m\in\mathbb{R}\setminus\{1,-3\}$.

**8.** Pentru ce valori ale parametrului $m \in \mathbb{Q}$, sistemul $\begin{cases} x+y+z+mu=0 \\ 2x-y-z+u=0 \\ 3x-y+3z+mu=0 \\ 4x-y+3z+u=0 \end{cases}$ admite şi soluţii diferite de soluţia (0, 0, 0, 0)?

*Soluţie:*

$$d=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & m \\ 2 & -1 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & 1 & m \\ 4 & -1 & 3 & 1 \end{vmatrix} \underset{\substack{L_3 \leftarrow L_1+L_3 \\ L_4 \leftarrow L_1+L_4}}{\overset{L_2 \leftarrow L_1+L_2}{=\!=\!=}} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & m \\ 3 & 0 & 0 & m+1 \\ 4 & 0 & 2 & 2m \\ 5 & 0 & 4 & m+1 \end{vmatrix}=$$

$$=-\begin{vmatrix} 3 & 0 & m+1 \\ 4 & 2 & 2m \\ 5 & 4 & m+1 \end{vmatrix}=-\left(3\cdot\begin{vmatrix} 2 & 2m \\ 4 & m+1 \end{vmatrix}+(m+1)\cdot\begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 5 & 4 \end{vmatrix}\right)=12(m-1)=0.$$

Deci $m = 1$, caz în care sistemul devine $\begin{cases} x+y+z=\alpha \\ 2x-y-z=\alpha \\ 3x-y+z=\alpha \\ u=-\alpha \end{cases}$,

cu soluţiile: $x=\dfrac{2\alpha}{3},\quad y=\dfrac{2\alpha}{3},\quad z=-\dfrac{\alpha}{3},\quad u=-\alpha.$

**9.** Rezolvaţi sistemul $\begin{cases} x_1-2x_2+x_3=mx_4 \\ x_2-2x_3+x_4=mx_1 \\ x_3-2x_4+x_1=mx_2 \\ x_4-2x_1+x_2=mx_3 \end{cases}$, $m \in \mathbb{R}$.

*Soluţie*

a) Dacă $m = 0$, atunci $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = \lambda$.

b) Dacă $m \neq 0$, atunci:

$$d=\begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 & -m \\ -m & 1 & -2 & 1 \\ 1 & -m & 1 & -2 \\ -2 & 1 & -m & 1 \end{vmatrix} \underset{\substack{C_3 \leftarrow C_1+C_3 \\ C_4 \leftarrow mC_1+C_4}}{\overset{C_2 \leftarrow 2C_1+C_2}{=\!=\!=}} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -m & -2m+1 & m-2 & -m^2+1 \\ 1 & -m+2 & 0 & m-2 \\ -2 & -3 & -m+2 & -2m+1 \end{vmatrix}=$$

$$=\begin{vmatrix} -2m+1 & m-2 & -m^2+1 \\ -m+2 & 0 & m-2 \\ -3 & -m+2 & -2m+1 \end{vmatrix} \overset{L_1 \leftarrow L_3+L_1}{=\!=\!=} \begin{vmatrix} -2m-2 & 0 & -m^2-2m+2 \\ -m+2 & 0 & m-2 \\ -3 & -m+2 & -2m+1 \end{vmatrix}=$$

$$=(m-2)\begin{vmatrix} 2m+2 & m^2+2m-2 \\ m-2 & -m+2 \end{vmatrix}=(m-2)^2\begin{vmatrix} 2m+2 & m^2+2m-2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}=$$

$$=(m-2)^2\begin{vmatrix} 2m+2 & m^2+4m \\ 1 & 0 \end{vmatrix}=-(m-2)^2\cdot m(m+4).$$

Se disting următoarele situații (subcazuri ale lui b):

$b_1$) dacă $m \neq 2$, $m \neq -\ 4$, atunci

$x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 0$

$b_2$) dacă $m = 2$ sistemul devine:

$$\begin{cases} x_1-2x_2+x_3-2x_4=0 \\ -2x_1+x_2-2x_3+x_4=0 \\ x_1-2x_2+x_3-2x_4=0 \\ -2x_1+x_2-2x_3+x_4=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1-2x_2=-\alpha+2\beta \\ -2x_1+x_2=2\alpha-\beta \\ x_3=\alpha \\ x_4=\beta \end{cases}$$

Apoi aplicăm regula lui Cramer.

$b_3$) dacă $m = -\ 4$ sistemul devine:

$$\begin{cases} x_1-2x_2+x_3+4x_4=0 \\ 4x_1+x_2-2x_3+x_4=0 \\ x_1+4x_2+x_3-2x_4=0 \\ -2x_1+x_2+4x_3+x_4=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1-2x_2+x_3=4\alpha \\ 4x_1+x_2-2x_3=\alpha \\ x_1+4x_2+x_3=-2\alpha \\ x_4=-\alpha \end{cases}$$

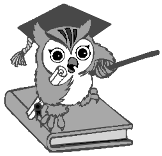
$$d=\begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 4 & 1 & -2 \\ 1 & 4 & 1 \end{vmatrix} \xlongequal[C_3\leftarrow -C_1+C_3]{C_2\leftarrow C_1+C_2} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & 9 & -6 \\ 1 & 6 & 0 \end{vmatrix}=36;$$

$$d_1=\alpha\begin{vmatrix} 4 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \\ -2 & 4 & 1 \end{vmatrix} \xlongequal[C_3\leftarrow 2C_1+C_3]{C_2\leftarrow C_1+C_2} \alpha\begin{vmatrix} 4 & -6 & 9 \\ 1 & 0 & 0 \\ -2 & 6 & -3 \end{vmatrix}=-\alpha\begin{vmatrix} -6 & 9 \\ 6 & -3 \end{vmatrix}=36\alpha$$

$$x_1=\frac{d_1}{d}=\alpha.$$

După calcule simple, în final obținem:

$x_1 = \alpha$, $x_2 = -\alpha$, $x_3 = \alpha$, $x_4 = -\ \alpha$ .



# Test de evaluare

(*2p*) **1.** Rezolvați, cu ajutorul regulii lui Cramer, sistemul $\begin{cases} x+2y+z=4 \\ 2x-y-z=0 \\ 3x+y-2z=2 \end{cases}$.

(*2p*) **2.** Să se rezolve şi să se discute sistemul $\begin{cases} \lambda x+y+z=1 \\ x+\lambda y+z=2-\lambda \\ x+y+\lambda z=3\lambda-1 \end{cases}$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

(*2p*) **3.** Să se discute sistemul $\begin{cases} ax+y+z=0 \\ x+y-2z=0 \\ x+y+az=0 \end{cases}$, $a \in \mathbb{R}$.

(*2p*) **4.** Determinați $a, b \in \mathbb{R}$, astfel încât sistemul $\begin{cases} 2x+3y=5 \\ 3x-2y=1 \\ 4x+5y=a \\ 9x-7y=b \end{cases}$ să fie compatibil.

*Timp de lucru: 50 de minute.*

## Exerciții propuse

**1.** Să se determine $\alpha$ şi $\beta$ astfel încât sistemul

$$\begin{cases} x-3y=-2 \\ x+2y=3 \\ 3x-y=\alpha \\ 2x+y=\beta \end{cases},$$

să fie compatibil.

**2.** Fie sistemul $\begin{cases} \alpha x+y+z=0 \\ x+\alpha y+z=0 \\ x+y+\alpha z=\beta \end{cases}$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

a) Să se calculeze determinantul matricei sistemului.

b) Să se rezolve sistemul în cazul $\alpha = -2$, $\beta = 0$.

c) Să se rezolve şi să se discute sistemul în funcție de $\alpha$ şi $\beta$.

**3.** Să se discute şi să se rezolve sistemul $\begin{cases} x+ay+a^2z=a^3 \\ x+by+b^2z=b^3 \\ x+cy+c^2z=c^3 \end{cases}$, $a, b, c \in \mathbb{R}$.

**4.** Să se rezolve sistemul $\begin{cases} x+y+z=1 \\ ax+by+(a+b)z=c \\ a^2x+b^2y+\left(a^2+b^2\right)z=c^2 \end{cases}$, $a, b, c \in \mathbb{R}$.

**5.** Rezolvați sistemele

a) $\begin{cases} 4mz-mz=3m+1 \\ x+my=m+1 \\ 2x+3y-z=5 \end{cases}$, $m \in \mathbb{R}$;

b) $\begin{cases} x+my+z=m \\ x+y+z=3 \\ x-my-z=1 \end{cases}$, $m \in \mathbb{R}$;

c) $\begin{cases} x+y+z+t=0 \\ 2x+3y-z+4t=1 \end{cases}$;

d) $\begin{cases} 2x+3y+4z=9 \\ 3x+2y-z=4 \\ x-y-5z=-5 \end{cases}$;

e) $\begin{cases} mx+y+z=m+2 \\ x+y+mz=m+2 \\ x+y-z=1 \end{cases}$, $m \in \mathbb{Q}$;

f) $\begin{cases} x-mz=1 \\ my-z=2 \\ x+2y=3 \end{cases}$, $m \in \mathbb{R}$;

g) $\begin{cases} x+2y+4z=7 \\ 4x-3y=5 \end{cases}$;

h) $\begin{cases} x+my=1 \\ mx+y=1 \\ x+y=1 \end{cases}$, $m \in \mathbb{R}$.

**6.** Rezolvați în $\mathbb{R}^3$ sistemul $\begin{cases} |x-y|+|y-z|+x=1 \\ |y-z|+|z-x|+2y=2 \\ |z-x|+|x-y|+3z=3 \end{cases}$.

**7.** Rezolvați sistemul $\begin{cases} x+y-4z+u=0 \\ x+y-3z+7u=2 \\ 3x+3y-14z-9u=1 \end{cases}$.

**8.** Rezolvați sistemul $\begin{cases} x+my+m^2z=0 \\ mx+m^2y+z=0 \end{cases}$, $m \in \mathbb{R}$. Discuție.

**9.** Rezolvați şi discutați sistemul $\begin{cases} mx+y+z=m \\ m^2x+my+mz=m^2 \\ x+y-z=m \end{cases}$, $m\in\mathbb{R}$.

**10.** Rezolvați sistemele:

a) $\begin{cases} 2x-y+z=1 \\ x+2y-2z=-3 \end{cases}$; b) $\begin{cases} x+y+z+u=6 \\ x-y+2z-u=z \\ 2x+y-z+u=3 \\ x+2y+3z-u=2 \end{cases}$;

c) $\begin{cases} 2x-2y+z-u+v=1 \\ x+2y-z+u-2v=1 \\ 4x-10y+5z-5u+7v=0 \\ 2x-14y+7z-7u+11v=-1 \end{cases}$; d) $\begin{cases} 2x+y-z=1 \\ 3x-2y+z=2 \\ 4x-2y+z=3 \\ x+y+z=6 \\ x+3y-2z=1 \end{cases}$.

**11.** Rezolvați în $\mathbb{R}^n$ următorul sistem $\begin{cases} |x_2+x_3+\ldots+x_n|=|x_1|-|x_2| \\ |x_1+x_3+\ldots+x_n|=|x_2|-|x_3| \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ |x_1+x_2+\ldots+x_{n-2}+x_n|=|x_{n-1}|-|x_n| \\ |x_1+x_2+\ldots+x_{n-2}+x_{n-1}|=|x_n|-|x_1| \end{cases}$

pentru $n = 4$.

**12.** Rezolvați sistemele omogene:

a) $\begin{cases} 2x+3y-5z=0 \\ x-5y+z=0 \end{cases}$; b) $\begin{cases} 2x+5y+10z=0 \\ 7x-4y-51z=0 \\ -3x+11y+59z=0 \end{cases}$.

# Exerciţii recapitulative

**1.** Fie $A \in M_n(\mathbb{R})$ şi $I_n$ matricea unitate. Să se demonstreze că

$$\det(A^2 + I_n) \geq 0.$$

**2.** Fie $A, B \in M_n(\mathbb{R})$, astfel încât $A \cdot B = B \cdot A$. Să se demonstreze că

$$\det(A^2 + B^2) \geq 0.$$

**3.** Fie $A \in M_n(\mathbb{R})$. Să se demonstreze că:

$$\det(A^2 + A + I_n) \geq 0.$$

**4.** Demonstrați că există $a, b, c, d \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ astfel încât să aibă loc egalitatea

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

**5.** Fie $A \in M_n(\mathbb{R})$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, $A$ nesingulară. Demonstrați egalitatea

$$(A^*)^* = (\det A)^{n-2} \cdot A.$$

**6.** Fie $A, B \in M_n(\mathbb{C})$. Demonstrați că în general $A \cdot B \neq B \cdot A$ şi că

$$\mathrm{Tr}(A \cdot B) = \mathrm{Tr}(B \cdot A).$$

**7.** Fie $A, B \in M_n(\mathbb{C})$ astfel încât $2AB + A + B = O_n$.
Să se arate că $AB = BA$.

**8.** Fie $A, B, C \in M_n(\mathbb{C})$ astfel încât $A^2 = B \cdot C$, $B^2 = C \cdot A$, $C^2 = A \cdot B$.
Să se arate că $A^3 = B^3 = C^3$.

**9.** Fie $A, B \in M_n(\mathbb{C})$. Demonstrați echivalența
$I_n - AB$ este inversabilă $\Leftrightarrow$ $I_n - BA$ este inversabilă.

**10.** Fie $A \in M_n(\mathbb{C})$ astfel încât $\det A = 0$. Demonstrați că există matricea $B \in M_n(\mathbb{C})$, $B \neq O_n$ astfel încât $A \cdot B = O_n$.

**11.** Determinați $m \in \mathbb{Q}$, ştiind că sistemul liniar

$$\begin{cases} x + y + z + u = 0 \\ 2x + 3y + 4z + 2u = 0 \\ 6x - 2y - 3z + mu = 0 \\ 3x + 4y + 5z - u = 0 \end{cases}$$

admite şi soluții diferite de soluția $(0, 0, 0, 0)$.

**12.** Fie $A \in M_n(\mathbb{C})$ cu $\det A \neq 0$. Determinați $a \in \mathbb{C}$, astfel încât să aibă loc egalitatea $\det A = \det(a \cdot A)$.

**13.** Calculați determinantul $D = \begin{vmatrix} 0 & 1 & \varepsilon & \varepsilon^2 \\ 0 & \varepsilon^2 & 1 & \varepsilon \\ 4 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & \varepsilon & \varepsilon^2 & 1 \end{vmatrix}$, unde $\varepsilon = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}$.

**14.** Calculați rangul matricei $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

**15.** Determinați $k \in \mathbb{Q}$, astfel încât sistemul $\begin{cases} kx_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 + (k+1)x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 + (k+2)x_3 + x_4 = 0 \\ 2x_1 + 2x_2 + (k+3)x_3 + 2x_4 = 0 \end{cases}$

să admită și soluții diferite de soluția $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$, $x_4 = 0$.

**16.** Rezolvați în $\mathbb{R}$ ecuația $\begin{vmatrix} x & a & b & c \\ a & x & c & b \\ b & c & x & a \\ c & b & a & x \end{vmatrix} = 0$, unde $a, b, c \in \mathbb{R}$.

**17.** Fie $a \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Să se arate că $\begin{vmatrix} a^2 & \frac{1}{a} & \frac{1}{a} \\ 1 & a & \frac{1}{a} \\ \frac{1}{a^2} & \frac{1}{a} & a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{1}{a^2} & a & a \\ 1 & \frac{1}{a} & a \\ a^2 & a & \frac{1}{a} \end{vmatrix}$.

**18.** Fie șirurile de numere reale $(a_n)$, $(b_n)$, $(c_n)$, $(d_n)$ date de egalitatea matriceală

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} a_n & b_n \\ c_n & d_n \end{pmatrix}, \forall n \in \mathbb{N}^*, \text{ iar}$$

$a_1 = a$, $b_1 = b$, $c_1 = c$, $d_1 = d$.

Să se demonstreze că $b_n \cdot c_m = b_m \cdot c_n$, oricare ar fi $m, n \in \mathbb{N}$.

**19.** Fie matricele:

$$A=\begin{pmatrix}\cos\alpha & \sin\alpha\\ -\sin\alpha & \cos\alpha\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix}\cos\alpha & -\sin\alpha\\ \sin\alpha & \cos\alpha\end{pmatrix},\text{ unde } \alpha\in\mathbb{R}.$$

Să se calculeze $(A\cdot B\cdot C)^n$, unde $n\in\mathbb{Z}$.

**20.** Fie matricea $A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 1\end{pmatrix}$. Să se calculeze $A^n$ ($n\in\mathbb{N}^*$).

**21.** Fie matricea $A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix}$. Să se calculeze $A^n$ ($n\in\mathbb{N}^*$).

**22.** Fie matricea $A=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$. Să se calculeze $A^n$ ($n\in\mathbb{N}^*$).

**23.** Calculați inversa matricei $A=\begin{pmatrix}\cos\alpha & -\sin\alpha & 1\\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$, unde $\alpha\in\mathbb{R}$.

**24.** Calculați inversa matricei $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 0 & 1 & 2 & 3\\ 0 & 0 & 1 & 2\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$.

**25.** Calculați determinantul $D=\begin{vmatrix}1 & a & a^2 & a^3\\ a & a^2 & a^3 & 1\\ a^2 & a^3 & 1 & a\\ a^3 & 1 & a & a^2\end{vmatrix}$, $a\in\mathbb{C}$.

**26.** Găsiți cel puțin o matrice $X\in M_2(\mathbb{R})$ astfel încât $X^2=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & 4\end{pmatrix}$.

**27.** Să se calculeze inversa matricei $A=\begin{pmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{pmatrix}$, ştiind că $a$, $b$, $c \in \mathbb{R}$ şi $a^3+b^3+c^3-3abc \neq 0$.

**28.** Fie $A \in M_n(\mathbb{R})$ nesingulară cu proprietatea că $A = A^{-1}$. Calculați det $A$.

**29.** Fie $A=\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$ şi $B=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $a \in \mathbb{R}$.

Să se calculeze $(A + B)^n$, $n \in \mathbb{N}^*$.

**30.** Găsiți matricele $X \in M_2(\mathbb{R})$ care verifică egalitatea

$\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \cdot X = X \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$, unde $a$, $b \in \mathbb{R}$, $a$, $b$ date.

**31.** Rezolvați sistemul $\begin{cases} AX - BY = C \\ BX - AY = C \end{cases}$, unde

$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, iar $X$, $Y \in M_2(\mathbb{R})$.

**32.** Fie $S$, $T \in M_n(\mathbb{R})$ şi $S$ nesingulară. Să se demonstreze că

$(S + T) \cdot S^{-1} \cdot (S - T) = (S - T) \cdot S^{-1} \cdot (S + T)$.

# *Probleme date la examenele de bacalaureat din anii anteriori*

**1.** În mulțimea $M_2(\mathbb{C})$ se consideră matricele $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ şi $O_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

a) Să se calculeze $A^2$.

b) Să se calculeze $\det A$.

c) Să se determine rangul matricei $A$.

d) Să se arate că dacă $X \in M_2(\mathbb{C})$ şi $XA = AX$, atunci există $a, b \in \mathbb{C}$, astfel încât $X = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}$.

**2.** În mulțimea matricelor $M_2(\mathbb{R})$ se consideră matricea $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ precum şi submulțimea $G = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & 1 \end{pmatrix} \middle| \; a \in (0, \infty), b \in \mathbb{R} \right\}$.

a) Să se verifice că matricea $I_2 \in G$.

b) Să se arate că dacă $A, B \in G$, atunci $AB \in G$.

c) Să se arate că dacă $C \in G$, atunci există $D \in G$ astfel încât $CD = DC = I_2$.

d) Să se găsească două matrice $S, T \in G$ pentru care $ST \neq TS$.

e) Să se demonstreze că pentru orice matrice $A \in G$ şi $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, există o matrice $X \in G$ astfel încât $X^n = A$.

**3.** În mulțimea $M_2(\mathbb{R})$ se consideră submulțimea

$$G = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 3b & a \end{pmatrix} \middle| \; a^2 - 3b^2 = 1,\, a,\, b \in \mathbb{Q} \right\}.$$

a) Să se verifice că $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in G$.

b) Să se arate că dacă $A, B \in G$, atunci $AB \in G$.

c) Să se arate că dacă $X \in G,\ X = \begin{pmatrix} a & b \\ 3b & a \end{pmatrix}$, atunci $X$ este matrice inversabilă şi că $X^{-1} = \begin{pmatrix} a & -b \\ -3b & a \end{pmatrix}$.

d) Să se găsească o matrice $A \in G,\ A = \begin{pmatrix} a & b \\ 3b & a \end{pmatrix}$, cu $b \neq 0$.

e) Să se arate că, dacă $B \in G,\ B = \begin{pmatrix} a & b \\ 3b & a \end{pmatrix}$ cu $a > 0$, $b > 0$, atunci $B^n \neq I_2$, $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$.

f) Să se arate că mulțimea $G$ este infinită.

**4.** În mulțimea $M_2(\mathbb{C})$ se consideră matricele $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$, $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ şi submulțimea $G = \{X \in M_2(\mathbb{C}) \mid AX = XA\}$.

a) Să se calculeze determinantul şi rangul matricei $A$.

b) Să se verifice că $I_2 \in G$ şi că $A \in G$.

c) Să se arate că $XA^2 = A^2X$, $\forall\, X \in G$.

d) Să se găsească o matrice $B \in M_2(\mathbb{C})$ cu proprietatea că $AB \neq BA$.

e) Să se arate că dacă $a, b \in \mathbb{C}$ atunci $aI_2 + bA \in G$.

f) Să se arate că dacă $X \in G$ atunci există $x, y \in \mathbb{C}$ astfel încât $X = xI_2 + yA$.

**5.** În mulțimea $M_3(\mathbb{C})$ se consideră matricele:

$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $O_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ şi funcția $f : M_3(\mathbb{C}) \to M_3(\mathbb{C})$, $f(X) = X^3$.

a) Să se calculeze determinantul şi rangul matricei $A$.

b) Să se calculeze $A^2$ şi $A^3$.

c) Să se arate că dacă $Y \in M_3(\mathbb{C})$ şi $YA = AY$, atunci există $a$, $b$, $c \in \mathbb{C}$, astfel încât $Y = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ b & a & 0 \\ c & d & a \end{pmatrix}$.

d) Să se arate că dacă $Z = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ b & a & 0 \\ c & b & a \end{pmatrix}$, unde $a$, $b$, $c \in \mathbb{C}$ şi $\det Z = 0$, atunci $Z^3 = O_3$.

e) Să se găsească două matrice $U \neq V \in M_3(\mathbb{C})$, astfel încât $f(U) = f(V)$.

f) Să se demonstreze că ecuația $f(X) = A$ nu are soluții în mulțimea $M_3(\mathbb{C})$.

**6.** Se consideră matricele $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 6 & 4 & 2 \\ 9 & 6 & 3 \end{pmatrix}$, $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ şi $B = I_3 + A$.

a) Să se calculeze determinantul şi rangul matricei $A$.

b) Dacă $X = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ şi $Y = (3\ \ 2\ \ 1)$, să se calculeze matricea $S = A - X \cdot Y$.

c) Să se verifice că $A^2 = 10A$.

d) Să se arate că matricea $B$ este inversabilă şi inversa sa este matricea $B^{-1} = I_3 - \dfrac{1}{11}A$.

e) Să se găsească trei matrice $U$, $V$, $W \in M_3(\mathbb{C})$ de rang 1, astfel încât:

$$B = U + V + W.$$

f) Să se arate că oricare ar fi două matrice $C$, $D \in M_3(\mathbb{C})$ de rang 1, avem:

$$C + D \neq B.$$

**7.** Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}1&1&1&1\\0&1&1&1\\0&0&1&1\end{pmatrix}$ şi $I_3=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$, precum şi sistemul $\begin{cases}x+y+z+t=1\\y+z+t=0\\z+t=0\end{cases}$, $(x, y, z, t) \in \mathbb{C}\times\mathbb{C}\times\mathbb{C}\times\mathbb{C}$.

a) Să se determine matricea sistemului.

b) Să se calculeze rangul matricei $A$.

c) Să se rezolve sistemul.

d) Să se calculeze suma elementelor matricei $I_3A$.

e) Să se arate că ecuația $AX = I_3$, cu $X \in M_{4,3}(\mathbb{C})$ are o infinitate de soluții.

f) Să se arate că ecuația $YA = I_3$, cu $Y \in M_{4,3}(\mathbb{C})$ nu are soluții.

**8.** În mulțimea $M_3(\mathbb{C})$ se consideră matricea $A=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&3\end{pmatrix}$.

a) Să se calculeze determinantul şi rangul matricei $A$.

b) Să se arate că matricea $A$ este inversabilă şi să se calculeze inversa ei.

c) Să se arate că, dacă $Y \in M_3(\mathbb{C})$ şi $YA = AY$, atunci există $a, b, c \in \mathbb{C}$, astfel încât $Y=\begin{pmatrix}a&0&0\\0&b&0\\0&0&c\end{pmatrix}$.

d) Se consideră matricea $Z=\begin{pmatrix}a&0&0\\0&b&0\\0&0&c\end{pmatrix}$, cu $a, b, c \in \mathbb{C}$. Să se arate, utilizând metoda inducției matematice, că $Z^n=\begin{pmatrix}a^n&0&0\\0&b^n&0\\0&0&c^n\end{pmatrix}$, $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$.

Partea

a 2-a

# Analiză matematică

*Limite de funcții*

*Continuitate*

*Derivabilitate*

*Grafice de funcții*

# Capitolul 1

# LIMITE DE FUNCŢII

## 1.1. Noțiuni elementare despre mulțimi de puncte pe dreapta reală: intervale, mărginire, vecinătăți, dreapta încheiată, simbolurile + ∞ şi – ∞

### Mulțimea numerelor reale (preliminarii)

Numerele reale au fost cunoscute încă din antichitate, fiind utilizate în mod curent în anumite evaluări cu caracter matematic sau practic, însă definiția riguroasă a noțiunii de număr real a fost dată abia în a doua jumătate a secolului al XIX-lea prin contribuția decisivă a marilor matematicieni K. Weierstrass (1815-1897), R. Dedekind (1831-1916), G. Cantor (1845-1918).

Conceptul de număr real şi funcție reală de variabilă reală stau la baza analizei matematice. În procesul de învățare şi însuşire a noțiunii de număr s-a procedat în mod etapizat făcându-se cunoştință cu noțiunea de număr natural, apoi de număr întreg şi apoi cu numerele raționale şi ulterior cu cele reale.

S-au definit mulțimile: $\mathbb{N}$ (mulțimea numerelor naturale), $\mathbb{Z}$ (mulțimea numerelor întregi), $\mathbb{Q}$ (mulțimea numerelor raționale), $\mathbb{R}$ (mulțimea numerelor reale) şi incluziunile $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$. De asemenea, s-au definit principalele operații în fiecare din aceste mulțimi şi implicit proprietățile care stau la baza fiecărei mulțimi. Din necesități de ordin practic şi matematic, ca de exemplu: rezolvarea ecuației algebrice $x^2 = 2$, determinarea diagonalei unui cub când se cunoaşte lungimea muchiei, determinarea ariei şi lungimea unui cerc, ariei şi volumului corpurilor rotunde, s-a impus ca o necesitate extinderea mulțimii numerelor iraționale şi construirea mulțimii $\mathbb{R}$ a numerelor reale.

Fondatorii mulțimii numerelor reale au construit şi au pus bazele ştiințifice a mulțimii $\mathbb{R}$ urmând căi diferite. Astfel, K. Weierstrass a realizat construcția lui $\mathbb{R}$, utilizând fracțiile zecimale infinite, Dedekind a utilizat aşa-numitele *tăieturi Dedekind* în mulțimea $\mathbb{Q}$, metodă ce se studiază cu precădere în învățământul superior şi G. Cantor a utilizat metoda şirurilor. Dintre cele trei metode amintite, metoda lui K. Weierstrass este cea mai accesibilă pentru învățământul liceal, putând fi pusă în discuție la cercurile de elevi sau clasele de excelență.

Pentru clarificarea unor chestiuni din punct de vedere matematic, vom preciza că în construcția lui K. Weierstrass se consideră că dacă $x \in \mathbb{R}$, atunci $x = x_0, x_1 x_2 \ldots x_n \ldots,$ unde $x_0$ este partea întreagă a lui $x$, iar $0 \leq x_i \leq 9, \forall i \geq 1$, sunt cifrele din partea sa zecimală.

Dacă $x_0 > 0$, atunci $[x] = x_0$, iar dacă $x < 0$, atunci $[x] = x_0 - 1$.

## Mulțimea numerelor reale. Proprietăți

Pe mulțimea numerelor reale se definesc două operații de bază: *adunarea* notată cu semnul +, care asociază oricărei perechi $(x, y)$, $x, y \in \mathbb{R}$, elementul $x + y \in \mathbb{R}$, şi *înmulțirea* notată cu semnul ·, care asociază oricărei perechi $(x, x)$, $x, y \in \mathbb{R}$, elementul $x \cdot y$.

**1.** Proprietățile operației de *adunare:*

a) este asociativă: $(x + y) + z = x + (y + z), \forall x, y, z \in \mathbb{R}$.

b) este comutativă: $x + y = y + x, \forall x, y \in \mathbb{R}$.

c) există elementul neutru notat cu „0”, astfel încât $x + 0 = 0 + x, \forall x \in \mathbb{R}$.

d) orice număr real are un element simetric (opus): pentru orice $x \in \mathbb{R}$ există $(-x) \in \mathbb{R}$ astfel încât $x + (-x) = (-x) + x = 0$.

Utilizând aceste proprietăți se poate arăta că elementul neutru „0” este unic; fiecărui element $x \in \mathbb{R}$ îi corespunde un singur element opus $-x \in \mathbb{R}$; din $x + y = 0$ rezultă $y = -x$ şi $x - y \overset{\text{def}}{=} x + (-y)$ (operația de scădere); orice ecuație de forma $x + a = b$, cu $a, b \in \mathbb{R}$, are soluție unică $x = b + (-a)$, $x = b - a$.

Demonstrațiile acestor afirmații se propun ca temă.

**2.** Proprietățile operației de *înmulțire:*

a) este asociativă: $(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z), \forall x, y, z \in \mathbb{R}$;

b) este comutativă: $x \cdot y = y \cdot x, \forall x, y \in \mathbb{R}$;

c) admite element neutru, notat cu „1” astfel încât $x \cdot 1 = 1 \cdot x = x, \forall x \in \mathbb{R}$;

d) oricărui element $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ îi corespunde elementul simetric (invers), notat cu $\frac{1}{x}$ astfel încât $x \cdot \frac{1}{x} = \frac{1}{x} \cdot x = 1, \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Urmare a acestor proprietăți se poate demonstra că elementul neutru este unic, elementul simetric este unic, se poate defini $\frac{x}{y} = x \cdot \frac{1}{y}, \forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$; orice ecuație de forma $ax = b$, cu $a \neq 0$, are soluția unică $x = \frac{b}{a} \in \mathbb{R}$.

**3.** Înmulțirea şi adunarea sunt legate prin operația de *distributivitate*:

$$x \cdot (y + z) = xy + xz, \forall x, y, z \in \mathbb{R}.$$

În consecință avem:

• $x(y - z) = x[y + (-z)] = xy + x \cdot (-z) = xy - xz$;

$x(-y) = -xy; (-x)(-y) = xy, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$;

• $xy = 0 \Rightarrow x = 0$ sau $y = 0$; $xy \neq 0 \Rightarrow x \neq 0$ şi $y \neq 0$;

• $xy = xz$ şi $x \neq 0 \Rightarrow y = z$ (simplificare la stânga);

$yx = zx$ şi $x \neq 0 \Rightarrow y = z$ (simplificare la dreapta).

Proprietățile enunțate mai înainte îi conferă mulțimii $\mathbb{R}$ o structură algebrică de *corp comutativ* (*).

**4.** Structura de ordine pe $\mathbb{R}$

Pe mulțimea $\mathbb{R}$ se defineşte o relație numită *relație de ordine* notată cu semnul „$\geq$” sau „$\leq$” cu următoarele proprietăți:

a) reflexivitatea: $x \leq x, \forall x \in \mathbb{R}$;

b) antisimetria: $(x \leq y$ şi $y \leq x) \Rightarrow x = y, \forall x, y \in \mathbb{R}$;

c) tranzitivitatea: $(x \leq y$ şi $y \leq z) \Rightarrow x \leq z, \forall x, y, z \in \mathbb{R}$;

d) pentru orice $x, y \in \mathbb{R}$, avem $x \leq y$ sau $x \geq y$.

În baza proprietăților *a*, *b*, *c*, *d* spunem că pe mulțimea $\mathbb{R}$ relația de ordine este *totală.* În modul acesta mulțimea $\mathbb{R}$ devine un *corp* comutativ *complet ordonat* (**).

**Relația de compatibilitate între operațiile de adunare, înmulțire și relația de ordine pe $\mathbb{R}$**

a) Dacă $x \le y$, atunci $x + z \le y + z$, $\forall z \in \mathbb{R}$.

b) Dacă $x \le y$ şi $z \in \mathbb{R}_+$, atunci $xz \le yz$.

c) Între mulțimile $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, există relațiile: $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$.

**Observații:**

i) Toate operațiile şi proprietățile enunțate mai sus stau la baza calculului algebric.

ii) Toate operațiile şi proprietățile enunțate mai sus sunt adevărate şi în mulțimea $\mathbb{Q}$ a numerelor raționale.

iii) Pentru (*) şi (**) se vor face precizările necesare în clasa a XII-a la cursul de algebră.

Să prezentăm metoda de construire a numerelor reale de către Weierstrass, cu ajutorul fracțiilor zecimale infinite.

Dacă $a \in \mathbb{R}$, atunci acesta poate fi reprezentat sub forma: $a = a_0, a_1 a_2 \ldots a_n \ldots$, unde $a_0$ este partea întreagă a lui $a$ (se notează cu $[a]$) şi $0, a_1 a_2 \ldots a_n \ldots$ este partea fracționară a lui $a$ (se notează cu $\{a\}$).

Orice număr real $x \in \mathbb{R}$, se poate scrie sub forma $x = [x] + \{x\}$, unde $0 \le \{x\} < 1$ şi se poate arăta că această scriere este unică.

În legătură cu partea întreagă a unui număr real, există următoarea:

| | |
|---|---|
| **Axiomă (Arhimede)** | Pentru orice $x \in \mathbb{R}$, există în mod unic un număr întreg $k \in \mathbb{Z}$, astfel încât $k \le x < k + 1$. |

Numărul $k$ este partea întreagă a lui $x$ şi se notează cu $[x]$. Putem scrie $[x] \le x < [x] + 1$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

***Exemple***

Să se pună în evidență partea întreagă şi partea fracționară, pentru următoarele numere reale:

a) $x = 4{,}15$; b) $x = 15{,}35$; c) $x = -25{,}15$; d) $x = -0{,}575$.

*Soluții*

a) $x = 4{,}15 = 4 + 0{,}15 \Rightarrow [x] = 4$ şi $\{x\} = 0{,}15$.

b) $x = 15{,}35 = 15 + 0{,}35 \Rightarrow [x] = 15$ şi $\{x\} = 0{,}35$.

c) $x = -25{,}15 = -26 + 0{,}85 \Rightarrow [x] = -26$ şi $\{x\} = 0{,}85$.

d) $x = -0{,}575 = -1 + (1 - 0{,}575) = -1 + 0{,}425 \Rightarrow [x] = -1$ şi $\{x\} = 0{,}425$.

Partea întreagă are următoarele proprietăți:

1. $x = [x] \Rightarrow \{x\} = 0, \forall x \in \mathbb{R}$.
2. $x \le y \Rightarrow [x] \le [y]$.
3. $[x + y] \ge [x] + [y]$.
4. dacă $x \in \mathbb{R}$ şi $k \in \mathbb{Z}$, atunci: $[x + k] = [x] + k$ şi $\{x + k\} = \{x\}$.

Mulțimea numerelor reale se poate reprezenta ca o reuniune infinită de intervale disjuncte având extremitățile numere întregi consecutive:

$$\mathbb{R} = \bigcup_{n\in\mathbb{Z}} [n, n + 1).$$

Evident numărul real $x$ aparține unui singur interval de forma $[n, n + 1)$, $n \in \mathbb{Z}$, unde în virtutea axiomei lui Arhimede, $n = [x]$. Notația $\bigcup\limits_{n\in\mathbb{Z}}$ ne indică faptul că operația de reuniune se face după toate numerele întregi $n$.

## Exerciții propuse

**1.** Să se rezolve ecuația: $[x + 1] = 3$.

**2.** Să se demonstreze identitatea: $[2x] - [x] = \left[x + \dfrac{1}{2}\right]$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

**3.** Să se rezolve ecuația: $\left[\dfrac{x}{2}\right] + 1 = x$.

**4.** Să se rezolve ecuația: $[x]+\left[\dfrac{x+1}{2}\right]=2.$

**5.** Să se construiască graficele funcțiilor:
$f(x) = [x]$ şi $g(x) = \{x\}$, pentru $x \in [-3, 3]$.

**6.** Să se rezolve ecuația: $\left[\dfrac{x+3}{4}\right]=\dfrac{x-2}{3}.$

**7.** Să se calculeze suma: $S=\left[\sqrt{1}\right]+\left[\sqrt{2}\right]+\ldots+\left[\sqrt{n}\right]$, $n \in \mathbb{N}^*$.

**8.** Să se rezolve sistemul: $x + [y] = 9{,}3$; $[x] + 3y = 4{,}9$.

## Intervale

Pe lângă mulțimile clasice de numere $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, un rol deosebit îl au submulțimile de numere reale, numite intervale.

| | |
|---|---|
| **Definiție** | Fie $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Submulțimile de numere reale definite în cele ce urmează se numesc intervale:<br>1. $[a,b] \overset{def}{=} \{x \in \mathbb{R} \mid a \le x \le b\}$, numit *interval închis şi mărginit*.<br>2. $[a,b) \overset{def}{=} \{x \in \mathbb{R} \mid a \le x < b\}$, numit *interval mărginit închis la stânga şi deschis la dreapta*.<br>3. $(a,b] \overset{def}{=} \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \le b\}$, numit *interval mărginit deschis la stânga şi închis la dreapta*.<br>4. $(a, b) \overset{def}{=} \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$, numit *interval deschis şi mărginit*.<br>5. $(-\infty, a] \overset{def}{=} \{x \in \mathbb{R} \mid x \le a\}$, numit *interval nemărginit închis la dreapta*.<br>6. $(-\infty, a) \overset{def}{=} \{x \in \mathbb{R} \mid x < a\}$, numit *interval nemărginit deschis la dreapta*.<br>7. $[b,+\infty) \overset{def}{=} \{x \in \mathbb{R} \mid x \ge b\}$, numit *interval nemărginit închis la stânga*.<br>8. $(b,+\infty) \overset{def}{=} \{x \in \mathbb{R} \mid x > b\}$, numit *interval nemărginit deschis la stânga*. |

**Observații:**
1. $a$ şi $b$ se numesc capetele (extremitățile) intervalului.
2. Când $a$ şi $b$ sunt finite, se defineşte noțiunea de lungime $L$ a intervalului $[a, b]$, prin $L \overset{def}{=} b - a$.

Astfel, pentru intervalele $[a, b]$, $[a, b)$, $(a, b]$, $(a,b)$ lungimea intervalelor este egală cu $b - a$.

3. Fie $a \in \mathbb{R}$. Intervalele de forma $[-a, a]$ sau $(-a, a)$ se numesc intervale simetrice sau centrate în zero.

## Exerciții rezolvate

Să se calculeze:

**1.** $[0, 1] \cup [-1, +\infty]$;

**2.** $[-1,+\infty) \cup [0, 1] \cup \left[\frac{1}{2}, 3\right]$;

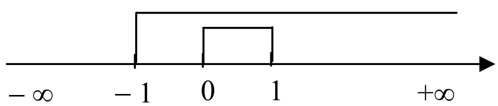
**3.** $\left\{(-\infty, 1] \cup \left[\frac{1}{2}, +\infty\right]\right\} \cap (0, 1)$;

**4.** $\{(-\infty, 3] \cap [2, 4]\} \cup \left[\frac{1}{2}, +\infty\right]$;

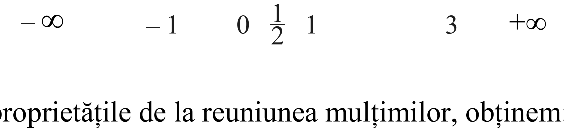
**5.** $[0, a] \cap \left[\frac{1}{a}, 1\right]$, unde $a \in \mathbb{R}$, $a > 1$.

*Soluții*

**1.** Reprezentăm pe axa numerelor reale intervalele şi obținem:
$[0,1] \cup [-1, +\infty) = [-1, +\infty)$.




**2.** Reprezentăm pe axa numerelor reale intervalele şi obținem:



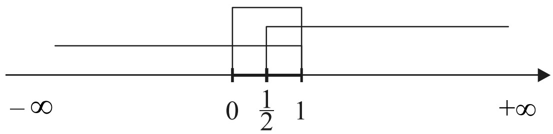

Aplicând proprietățile de la reuniunea mulțimilor, obținem:

i) $[-1,+\infty) \cup [0,1] = [-1,+\infty)$, deoarece $[0,1] \subset [-1,+\infty)$;

ii) $[-1,+\infty) \cup \left[\frac{1}{2}, 3\right] = [-1,+\infty)$, deoarece $\left[\frac{1}{2}, 3\right] \subset [-1,+\infty)$;

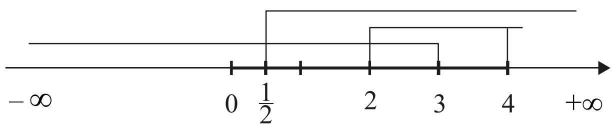
**3.** $\left\{(-\infty, 1] \cup \left[\frac{1}{2}, +\infty\right]\right\} \cap (0,1) =$

$= \{(-\infty,1] \cap (0,1)\} \cup \left\{\left[\frac{1}{2},+\infty\right] \cap (0, 1)\right\} = (0,1) \cup \left[\frac{1}{2},1\right) = (0,1)$




**4.** Avem $(-\infty,3] \cap [2, 4] = [2, 3]$.

$[2,3] \cup \left[\frac{1}{2},+\infty\right) = \left[\frac{1}{2},+\infty\right)$.




**5.** $[0, a] \cap \left[\frac{1}{a}, 1\right] = [0, a]$, deoarece $\left[\frac{1}{a}, 1\right] \subset [0, a]$.

## Exerciții propuse

**1.** Fie $a > 0$. Să se calculeze: $(-\infty, -a) \cap [a, +\infty)$; $\left(a, \frac{1}{a}\right) \cap [a^2, +\infty)$.

**2.** Fie $a$ şi b numere reale strict pozitive. Să se efectueze:

i) $(-\infty, -a] \cap [b, +\infty)$;

ii) $(-\infty, -a] \cap (b, +\infty)$;

iii) $(0, a) \cap \left[\frac{1}{b}, 1\right]$; discuție după $a, b > 0$.

**3.** Să se arate că o mulțime finită de numere este un interval, dacă şi numai dacă se reduce la un punct.

**4.** Intersecția a două intervale deschise este un interval deschis sau mulțimea vidă.

**5.** Se dau intervalele $I_1 = (-\infty, 1]$ şi $I_2 = [-1, +\infty)$, Să se efectueze:

$$I_1 \setminus I_2;\ \ I_2 \setminus I_1;\ \ \mathrm{C}_{I_2} I_1;\ \mathrm{C}_{I_1} I_2;\ \ (\mathrm{C}_{I_2} I_1 \setminus \{0\}) \cap (I_2 \setminus \{1\}).$$

**6.** Fie $a \in \mathbb{R}$. Să se efectueze: $[0,1] \cup [-a, a]$; $[a, 1] \cup [0, a^2]$.

*Comentariu*

Există o bijecție între axa numerelor reale şi mulțimea numerelor reale. Oricărui punct $M$ situat pe axa reală i se asociază în mod unic un număr real $x_M \in \mathbb{R}$, numit abscisa punctului $M$ (se notează $M(x_M)$) şi oricărui număr real $x$ îi corespunde un punct $M$ pe axa numerelor reale, notat $M(x)$.

Mulțimea $\mathbb{R}$ se mai numeşte şi dreapta reală, iar numerele reale se mai numesc puncte.

Fie $M(x_m)$ şi $N(x_N)$ două puncte distincte situate pe dreapta reală; atunci putem defini $d(M, N)$ distanța dintre cele două puncte, notată cu $d(M,N) \stackrel{\text{def}}{=} |x_M - x_N|$
.

Distanță dintre două puncte are următoarele proprietăți:

**1.** $d(M,N) \geq 0$ şi $d(M, N) = 0 \Leftrightarrow M \equiv N$.

**2.** $d(M,N) = d(N, M)$.

**3.** $d(M,N) \leq d(M,P) + d(P, N)$, oricare ar fi punctul $P$ situat pe dreapta reală. Acestea se bazează pe proprietăți ale modulului numerelor reale.

Reamintim: dacă $x \in \mathbb{R}$, atunci se defineşte modulul numărului $x$:

$|x| \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$, cu următoarele proprietăți mai importante, care au fost prezentate în clasele anterioare:

| | |
|---|---|
| **1.** $\lvert x\rvert \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$ şi $\lvert x\rvert = 0 \Leftrightarrow x = 0$; | **2.** $\lvert x + y\rvert \leq \lvert x\rvert + \lvert y\rvert, \forall x, y \in \mathbb{R}$; |
| **3.** $\lvert x \cdot y\rvert = \lvert x\rvert \cdot \lvert y\rvert, \forall x, y \in \mathbb{R}$; | **4.** $\left\lvert \frac{x}{y} \right\rvert = \frac{\lvert x\rvert}{\lvert y\rvert}$, $\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}^*$; |
| **5.** Pentru $a > 0$: $\lvert x\rvert \leq a \Leftrightarrow -a \leq x \leq a$; | **6.** Pentru $a \geq 0$: $\lvert x\rvert \geq a \Leftrightarrow x \in (-\infty, -a] \cup [a, +\infty)$; |
| **7.** $\lvert\lvert x\rvert - \lvert y\rvert\rvert \leq \lvert x - y\rvert, \forall x, y \in \mathbb{R}$; | **8.** $x \leq \lvert x\rvert, \forall x \in \mathbb{R}$. |

Cu ajutorul modulului numerelor reale se mai definesc *maximul* sau *minimul* dintre două numere reale: dacă $a, b \in \mathbb{R}$, atunci

$$\max(a, b) = \frac{|a+b|+|a-b|}{2}; \quad \min(a,b) = \frac{|a+b|-|a-b|}{2};$$

## Exerciții propuse

**1.** Fie $a, b \in \mathbb{R}$; atunci $\max(a, b) = \min(a, b) \Leftrightarrow a = b$.

**2.** Fie a, $b, c \in \mathbb{R}$ şi $\max(a,b,c) = \begin{cases} a, & a \geq b, \quad a \geq c \\ b, & b > a, \quad b \geq c \\ c, & c > b, \quad c > a \end{cases}$.

Să se determine $x \in \mathbb{R}$, astfel încât $\max(1, x, x^2) = 1 + x + x^2$.

**3.** Să se rezolve inecuația: $|x - 1| < |x|$.

**4.** Să se rezolve inecuația: $||x - 1| - 1| \leq x$.

**5.** Să se determine $x \in \mathbb{R}$, astfel ca $d(-1, 1) = d(1 - x, 1 + x)$.

**6.** Fie $I_1 = [1, x]$ şi $I_2 = \left[\frac{1}{x}, x\right]$. Să se determine $x \in \mathbb{R}$ astfel ca $I_1 \subset I_2$.

**7.** Dacă $\max(a, b, c) = \min(a, b, c)$, atunci $a = b = c$?

**8.** Să se rezolve ecuația: $|2^x - 1| + \left(\frac{1}{2}\right)^x = 1{,}9$.

**9.** Să se rezolve ecuația: $\left|x + \frac{1}{x}\right| = \left|x^2 - \frac{1}{x^2}\right|$.

### Mulțimi mărginite

| | |
|---|---|
| **Definiție** | • O mulțime $A$ de numere reale se numeşte mărginită inferior sau *minorată* dacă există un număr $m$ astfel încât pentru $\forall x \in A$ să avem $x \geq m$.<br>Numărul $m$ poate să aparțină sau nu mulțimii $A$. Numărul $m$ cu această proprietate se numeşte *minorant* al mulțimii A.<br>• Orice număr $m' \leq m$ este de asemenea un minorant al mulțimii $A$.<br>Cel mai mare minorant al mulțimii $A$, dacă există, se numeşte *margine inferioară* şi se notează: $\inf A$ sau $\inf\limits_{x \in A} x$ şi se citeşte infimum al mulțimii $A$. |

### Exemple

**1.** Fie mulțimea $A = \left\{\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots\right\}$; evident $\inf A = 0 \notin A$.

**2.** Pentru $\mathbb{N}^* = \{1, 2, 3, \ldots, n, \ldots\}$, evident $\inf \mathbb{N}^* = 1 \in \mathbb{N}^*$.

| **Definiție** | • O mulțime $A$ de numere reale se numeşte mărginită superior sau *majorată*, dacă există un număr $M$ astfel încât pentru orice $x \in A$ să avem $x \leq M$. Numărul $M$ cu această proprietate se numeşte *majorant* al mulțimii $A$.<br>• Orice număr $M' \geq M$ este de asemenea un majorant al mulțimii $A$. Cel mai mic majorant al mulțimii $A$, dacă există, se numeşte *margine superioară* a mulțimii $A$ şi se notează $\sup\limits_{x \in A} A$ sau $\sup\limits_{x \in A} x$ şi se citeşte supremum al mulțimii $A$. |
|---|---|

### Exemple

**1.** Fie $A = \left\{-\frac{1}{1}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{3} \ldots, -\frac{1}{n}, \ldots\right\}$; evident $\sup A = 0 \notin A$.

**2.** Fie $A = \{-n, -(n-1), \ldots, -2, -1\}$; evident $\sup A = -1 \in A$.

**3.** Fie $A = \left\{\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots\right\}$ ; evident $\sup A = 1 \in A$.

| **Definiție** | O mulțime se numeşte *mărginită* dacă este mărginită superior şi inferior. |
|---|---|

### Exemple

**1.** Orice interval mărginit este o mulțime mărginită;

**2.** Mulțimea $A = \left\{\frac{1}{n^2} \middle| n \in \mathbb{N}^*\right\}$ este mărginită superior şi inferior şi

$\sup A = 1 \in A$ şi $\inf A = 0 \notin A$;

**3.** Mulțimea $A = \left\{\frac{2n}{1+n^2} \middle| n \in \mathbb{N}\right\}$ este mărginită şi

$\sup A = 1 \in A$ şi $\inf A = 0 \in A$.

Prin definiție un interval *închis și mărginit* se numește *compact*. Putem conchide că o mulțime $A$ este mărginită dacă și numai dacă este inclusă într-un interval compact $[\alpha, \beta]$, $A \subset [\alpha, \beta]$.

O mulțime care nu este inclusă într-un interval compact nu este mărginită.

### Exemple

**1.** Mulțimea numerelor naturale și mulțimea numerelor întregi sunt mulțimi nemărginite.

**2.** Mulțimea numerelor raționale și mulțimea numerelor reale sunt mulțimi nemărginite.

> **Propoziție.** *O mulțime $A$ este mărginită dacă și numai dacă există un număr $\alpha > 0$, astfel ca $|x| \le \alpha$, pentru orice $x \in A$.*

*Demonstrație*

Dacă există $\alpha > 0$, astfel ca $|x| \le \alpha$ pentru orice $x \in A$, atunci rezultă $-\alpha \le x \le \alpha$ adică $x \in [-\alpha, \alpha]$ care este un interval compact, deci mulțimea este mărginită.

Reciproc, dacă $A$ este mărginită, există un interval mărginit $[a, b]$ care o conține, adică $a \le x \le b$, $\forall x \in A$.

Dacă considerăm $\alpha = \max\{|a|, |b|\}$, atunci $b \le |b| \le \alpha$ și $-a \le \alpha \Rightarrow$ $\Rightarrow -\alpha \le -|a| \le a$, adică $-\alpha \le a \le b \le \alpha$, de unde rezultă $-\alpha \le x \le \alpha$ sau $|x| \le \alpha$, pentru orice $x \in A$.

*Comentariu*

**1.** Dacă $\sup A \in A$, atunci $\sup A \overset{\text{def}}{=} \max\limits_{x \in A} A$ (maximul mulțimii $A$).

**2.** Dacă $\inf A \in A$, atunci $\inf A \overset{\text{def}}{=} \min\limits_{x \in A} A$ (minimul mulțimii $A$).

**3.** Orice mulțime finită $A = \{a_1, a_2, ..., a_n\}$ este o mulțime mărginită. Cel mai mic dintre numerele $a_i$ este margine inferioară și chiar minimul mulțimii, iar cel mai mare dintre numerele $a_i$ este margine superioară și chiar maximul mulțimii $A$.

**Exemplu**

Pentru $A = \left\{-\pi, -2, 0, \frac{1}{2}\right\}$, evident avem:

$\sup A = \max A = \frac{1}{2} \in A$, $\inf A = \min A = -\pi \in A$.

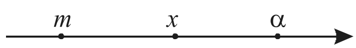
## Proprietăți de caracterizare a marginilor unei mulțimi

**Propoziția 1.** *Orice mulțime mărginită admite margine inferioară și margine superioară.*

**Propoziția 2.** • *Un număr m este margine inferioară a mulțimii A, dacă și numai dacă verifică următoarele două condiții:*

i) $x \geq m$, $\forall x \in A$ (*m este un minorant al mulțimii A*);

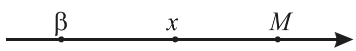
ii) *dacă* $\alpha > m$, *atunci există cel puțin un punct* $x \in A$ *astfel încât* $x < \alpha$.




• *Un număr M este margine superioară pentru mulțimea A dacă și numai dacă verifică următoarele două condiții:*

i) $x \leq M$, $x \in A$ (*M este un majorant al mulțimii A*);

ii) *dacă* $\beta < M$, *atunci există cel puțin un punct* $x \in A$ *astfel ca* $x > \beta$.




Se pune întrebarea firească ce proprietăți are mulțimea $\mathbb{R}$ pe care nu le are mulțimea $\mathbb{Q}$? Prin ce se deosebesc cele două mulțimi din punct de vedere al mărginirii?

Aici intervine un rezultat profund al analizei matematice, cunoscut sub denumirea de „axioma lui Cantor“!

Orice submulțime nevidă $A \subset \mathbb{R}$ *majorată* admite un cel mai mic majorant (margine superioară) aparținând mulțimii $\mathbb{R}$; $\sup A \in \mathbb{R}$.

Un rezultat asemănător avem şi pentru o mulțime nevidă minorată.

Dacă $B \subset \mathbb{R}$ este o mulțime nevidă minorată, atunci ea admite un cel mai mare minorant (margine inferioară); $\inf A \in \mathbb{R}$.

Submulțimile din $\mathbb{Q}$, în general, nu verifică axioma lui Cantor**,** în sensul că nu întotdeauna marginea superioară sau marginea inferioară aparține mulțimii $\mathbb{Q}$.

***Exemplu***

Fie mulțimile $A = \{x^2 \leq 2 \mid x \in \mathbb{Q}\}$ şi $A' = \{x^2 \leq 2 \mid x \in \mathbb{R}\}$. Evident ambele mulțimi sunt mărginite şi avem:

$\sup A = \sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$, $\inf A = -\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$

$\sup A' = \sqrt{2} \in \mathbb{R}$, $\inf A' = -\sqrt{2} \in \mathbb{R}$.

Se observă că $\sup A' = \max A'$ şi $\inf A' = \min A'$.

## Exerciții propuse

**1.** Fie $A \subset \mathbb{R}$ o mulțime mărginită. Să se arate că orice submulțime a lui $A$ este mărginită.

**2.** Fie $A$ şi $B$, două submulțimi mărginite ale lui $\mathbb{R}$. Să se decidă dacă:

i) $A \cup B$; ii) $A \cap B$; $A \setminus B$ sunt mulțimi mărginite?

**3.** Se consideră următoarele submulțimi ale dreptei reale:

a) $A = \left[-1, \frac{1}{2}\right]$; b) $A = [2, 3] \cup [2, 5]$; c) $A = \left\{\frac{n-2}{n} \mid n \in \mathbb{N}^*\right\}$;

d) $A = \{91, 92, 93\}$; e) $\left\{\frac{2^n+1}{3^n+1} \mid n \in \mathbb{N}^*\right\}$.

Să se decidă pentru fiecare submulțime în parte dacă este mărginită şi în caz afirmativ să se determine $\inf A$, $\sup A$, $\min A$, $\max A$.

**4.** Dacă $A$ este o submulțime nevidă $A \subseteq \mathbb{R}$, atunci $-A \stackrel{\text{def}}{=} \{-x \mid x \in A\}$.

a) Să se arate că $\sup(-A) = -\inf A$ şi $\inf(-A) = -\sup A$.

b) Dacă $A \subseteq B$; atunci $\sup A \leq \sup B$ şi $\inf A \geq \inf B$.

c) $\sup(A + B) = \sup A + \sup B$.

d) Fie $x \in \mathbb{R}$. Atunci au loc relațiile:

$\sup(x + A) = x + \sup A$ şi $\inf(x + A) = x + \inf A$.

**Propoziție:** *Pentru orice* $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, *atunci avem*:
$$[a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid x = (1-\lambda)a + \lambda b,\ 0 \le \lambda \le 1\}.$$

*Demonstrație*

Fie $x = (1-\lambda)a + \lambda b$, cu $0 \le \lambda \le 1$. Atunci $x = a + \lambda(b-a)$ şi cum $0 \le \lambda(b-a) \le b-a$ avem $a \le x \le b$ şi deci $x \in [a, b]$.

Reciproc, dacă $x \in [a, b]$, notăm $\lambda = \dfrac{x-a}{b-a}$; atunci $0 \le \lambda \le 1$, $1-\lambda = \dfrac{b-x}{b-a}$ şi avem $(1-\lambda)a + \lambda b = \dfrac{b-x}{b-a}\cdot a + \dfrac{x-a}{b-a}\cdot b = x$.

| | |
|---|---|
| **Definiție** | O mulțime $A \in \mathbb{R}$ se numeşte *convexă* dacă pentru orice $x, y \in A$ şi orice $0 \le \lambda \le 1$, $(1-\lambda)x + \lambda y \in A$. |

***Exemple***

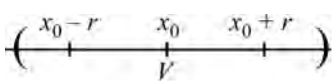
1. Intervalele $(-4, 2)$, $(-7, -1)$ şi $(0, 7)$ sunt mulțimi convexe.
2. Intervalele $[-5, -1]$, $[-2, 6]$ şi $[0, 4]$ sunt mulțimi convexe.

## Vecinătăți

Fie $x_0 \in \mathbb{R}$ un punct pe axa reală.

| | |
|---|---|
| **Definiție** | Vom numi *vecinătate* a punctului $x_0$ orice mulțime $E \subset \mathbb{R}$ care conține un interval deschis centrat în punctul $x_0$. |

Un interval deschis centrat în punctul $x_0$ este de forma $(x_0 - r, x_0 + r)$, unde $r > 0$. Un asemenea interval simetric se numeşte vecinătate simetrică a lui $x_0$. Deci există $r > 0$, astfel ca $(x_0 - r, x_0 + r) \subset V$.



Orice mulțime $V$ care conține un interval deschis $(a, b)$, conține şi o vecinătate simetrică, deci este suficient să considerăm fie vecinătăți de forma $(a, b)$ care conțin $x_0$, fie vecinătăți simetrice ale lui $x_0$.

Vecinătățile unui punct $x_0$ au următoarele proprietăți:

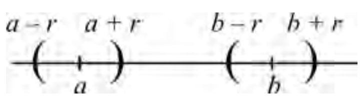
1. Orice mulțime $U$ care conține o vecinătate $V$ a lui $x_0$ este de asemenea o vecinătate a lui $x_0$.
2. Intersecția a două vecinătăți a punctului $x_0$ este de asemenea o vecinătate a punctului $x_0$.
3. Orice vecinătate a lui $x_0$ conține punctul $x_0$.
4. Pentru orice vecinătate $V$ a lui $x_0$ există o vecinătate $W = (a, b)$ a lui $x_0$ astfel încât $V$ este o vecinătate a oricărui punct din $W = (a, b)$.

**Propoziție.** *Fie a, b două puncte reale distincte ($a \neq b$). Atunci există o vecinătate U a lui a şi o vecinătate V a punctului b astfel încât $U \cap V = \varnothing$ (vecinătăți disjuncte).*

*Demonstrație*

Fie $a < b$ şi $r = \dfrac{b-a}{3}$.

Atunci considerăm vecinătățile simetrice $U = (a - r, a + r)$ pentru punctul $a$ şi $V = (b - r, b + r)$ pentru punctul $b$.




Datorită faptului că $a + r < b - r$ rezultă că $U \cap V = \varnothing$ şi deci există vecinătăți disjuncte.

**Observație:** Proprietatea enunțată în această propoziție se exprimă spunând că dreapta reală este un *spațiu separat.*

***Exemple***

**1.** Fie intervalele $I_1 = (-3, 3)$, $I_2 = (-1, 2)$, $I_3 = (-2, +\infty)$.

Intervalele $I_1$, $I_2$, $I_3$ sunt vecinătăți ale originii. Evident toate intervalele includ intervalul $(-1, 1)$ care conține originea.

**2.** Mulțimea numerelor reale pozitive nu este vecinătate a originii deoarece nu conține originea.

**3.** Fie $I = (a, b)$. Acest interval este vecinătate a oricărui punct $x$ pentru care $a < x < b$.

**4.** Fie $I = [a, b]$. $I$ nu este vecinătate a punctelor $a$ *şi* $b$, dar este vecinătate pentru orice punct $x$, $a < x < b$.

**Observație:** Prin alegerea vecinătăților pentru fiecare punct de pe dreapta reală înzestrăm dreapta cu o nouă structură numită *structură topologică* sau *topologie*.

## Dreapta încheiată. Simbolurile $+\infty$ şi $-\infty$

În general când ne referim la elemente $x \in \mathbb{R}$, înțelegem că $x$ este un număr real finit. Necesitatea formulării unitare a unor propoziții din analiza matematică, face ca pe lângă numerele finite din $\mathbb{R}$ să introducem două simboluri $+\infty$ şi $-\infty$ numite *numere infinite*.

| | |
|---|---|
| **Definiție** | Mulțimea formată din toate numerele reale împreună cu simbolurile $+\infty$ şi $-\infty$ se numeşte dreaptă reală încheiată, notată cu: $\overline{\mathbb{R}} \overset{\text{def}}{=} \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$. |

Pe dreapta reală încheiată se introduc:

**1.** relația de ordine prin $-\infty < +\infty$; $\forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow -\infty < x < +\infty$;

**2.** intervalele de forma: $[-\infty, a) = \{x \in \overline{\mathbb{R}} \mid -\infty \le x < a\}$;
$(a, +\infty] = \{x \in \overline{\mathbb{R}} \mid a < x \le +\infty\}$; $[-\infty, +\infty] = \{x \in \overline{\mathbb{R}} \mid -\infty \le x \le +\infty\}$.

**3.** $\sup A = +\infty$, dacă mulțimea $A$ nu este majorată.

**4.** $\inf A = -\infty$, dacă mulțimea $A$ nu este minorată.

De exemplu: sup $\mathbb{N} = +\infty$, inf $\mathbb{Z} = -\infty$, sup $\mathbb{Z} = +\infty$, sup $\mathbb{Q} = +\infty$, sup $\mathbb{R} = +\infty$, inf $\mathbb{Q} = -\infty$, inf $\mathbb{R} = -\infty$.

**5.** Vecinătățile pentru $+\infty$ sau $-\infty$ sunt definite astfel:

i) se numește vecinătate a lui $+\infty$, orice mulțime $V \subset \mathbb{R}$, care conține un interval de forma $(a, +\infty)$, $a \in \mathbb{R}$;

ii) se numește vecinătate a lui $-\infty$, orice mulțime $W \subset \mathbb{R}$, care conține un interval de forma $(-\infty, b)$, $b \in \mathbb{R}$.

**Observație:** Din convenția $x < +\infty$, $\forall x \in \mathbb{R}$, rezultă în particular că $0 < +\infty$, ceea ce ne determină să scriem $\infty$ în loc de $+\infty$;

*Comentariu*

Elementele $-\infty$ și $+\infty$ nu sunt numere reale, ele fiind doar simboluri matematice, care nu verifică toate proprietățile din mulțimea numerelor reale $\mathbb{R}$.

În matematică nu se poate da un sens direct expresiilor de forma: $\infty - \infty$; $0 \cdot \infty$; $\frac{\infty}{\infty}$; $\frac{0}{0}$; $1^{\infty}$; $0^0$; $\infty^0$, ele fiind cunoscute în analiza matematică ca forme *nedeterminate*.

În $\overline{\mathbb{R}}$ se dă un sens următoarelor reguli de calcul, cu simbolurile $-\infty$ și $+\infty$:

**1.** $+\infty + \infty = +\infty$;

**2.** $(-\infty) + (-\infty) = -\infty$;

**3.** $a + \infty = +\infty$, $\forall a \in \mathbb{R}$;

**4.** $a + (-\infty) = -\infty$, $\forall a \in \mathbb{R}$;

**5.** $a \cdot (+\infty) = \begin{cases} +\infty \text{ dacă } a > 0 \\ -\infty \text{ dacă } a < 0 \end{cases}$;

**6.** $a \cdot (-\infty) = \begin{cases} -\infty, \text{ dacă } \quad a > 0 \\ +\infty, \text{ dacă } \quad a < 0 \end{cases}$;

**7.** $(+\infty) \cdot (+\infty) = (-\infty) \cdot (-\infty) = +\infty$;

**8.** $(+\infty) \cdot (-\infty) = (-\infty) \cdot (+\infty) = -\infty$;

**9.** $\frac{1}{+0} = +\infty$;

**10.** $\frac{1}{-0} = -\infty$.

## Exerciţii propuse

**1.** Care din submulţimile de mai jos sunt vecinătăţi ale originii:
$V = (-2, 3)$; $V = (-3, 1)\ (2, +\infty)$; $V = [0, +\infty)$; $V = \varnothing$?

**2.** Care din submulţimile următoare sunt vecinătăţi pentru $-\infty$ sau $+\infty$:
a) $[0, +\infty]$; b) $[-\infty, 1)$; c) $[-\infty, 1) \cup (2, +\infty]$; d) $\mathbb{Z}$; e) $\mathbb{Q}$?

# 1.2. Funcţii reale de variabilă reală: funcţia polinomială, funcţia raţională, funcţia putere, funcţia radical, funcţia logaritm, funcţia exponenţială, funcţii trigonometrice directe şi inverse

### Principalele proprietăţi ale unei funcţii. Recapitulare şi sistematizare (definiţii, lecturi grafice)

În acest capitol vom recapitula pe scurt principalele proprietăţi ale funcţiilor studiate în clasele a IX-a şi a X-a, punând un accent deosebit pe aspectul intuitiv şi pe reprezentări grafice.

Pentru o înţelegere mai bună considerăm util să reamintim principalele proprietăţi algebrice ale funcţiilor.

| | |
|---|---|
| **Definiţie** | Se numeşte *funcţie* sau *aplicaţie*, un triplet format dintr-o mulţime $A$ numită domeniu de definiţie, o mulţime nevidă $B$ numită codomeniu sau mulţimea în care funcţia ia valori şi un procedeu (lege, corespondenţă), care asociază fiecărui element $x \in A$ un element unic $y \in B$.<br>Schematic se scrie $f: A \to B$ sau $A \xrightarrow{f} B$ sau $x \to f(x)$; $x$ se numeşte variabilă independentă sau argument şi $y = f(x)$ se numeşte imaginea elementului $x$ prin funcţia $f$ sau valoarea funcţiei $f$ în punctul $x$. |

Mulțimea $f(A) = \{y \mid y = f(x), x \in A\}$ se numeşte mulțimea valorilor funcției $f$ sau imaginea funcției $f$, notată $\text{Im } f = \{f(x) \mid x \in A\}$.

Fie funcțiile $f_1 : A_1 \to B_1$ şi $f_2 : A_2 \to B_2$. Avem $f_1 = f_2$ dacă sunt simultan îndeplinite următoarele condiții: $A_1 = A_2$, $B_1 = B_2$ şi $\forall a \in A_1$, $f_1(a) = f_2(a)$.

**Observație:** Se poate considera că o funcție este un triplet $(f, A, B)$, unde $A$ este domeniul de definiție, $f$ este legea de corespondență, iar $B$ este mulțimea în care funcția ia valori (codomeniul).

**Monotonia unei funcții numerice**

Fie funcția $f: A \to B$, cu $A, B \subset \mathbb{R}$.

| | |
|---|---|
| **Definiție** | • Funcția $f$ este *crescătoare* (respectiv *strict crescătoare*) pe $A$, dacă $\forall x_1, x_2 \in A$, cu $x_1 < x_2$, avem $f(x_1) \leq f(x_2)$ (respectiv $f(x_1) < f(x_2)$).<br>• Funcția $f$ este *descrescătoare* (*strict descrescătoare*) pe $A$, dacă $\forall x_1, x_2 \in A$, cu $x_1 < x_2$, avem $f(x_1) \geq f(x_2)$ ($f(x_1) > f(x_2)$). |

**Observații:** 1. O funcție nu poate fi simultan strict crescătoare şi strict descrescătoare.
2. Dacă funcția $f$ este crescătoare şi descrescătoare atunci $f$ este funcția constantă.

**Maximul şi minimul unei funcții numerice**

| | |
|---|---|
| **Definiție** | Funcția $f$ este *mărginită* pe mulțimea $A$ dacă imaginea funcției este o mulțime mărginită. |

Altfel spus funcția $f : A \to B$ este mărginită dacă există numerele reale $a, b$, $a < b$ astfel încât să avem $a \leq f(x) \leq b$, $\forall x \in A$. Dacă are loc doar una din inegalități, de exemplu $f(x) \geq a$ sau $f(x) \leq b$, $\forall x \in A$, atunci funcția $f$ este mărginită inferior sau, respectiv, mărginită superior.

Facem şi aici precizarea că funcția $f : A \to B$ este mărginită, dacă există un număr real $k \geq 0$, pentru care avem $|f(x)| \leq k$, $(-k \leq f(x) \leq k)$, $\forall x \in A$.

| | |
|---|---|
| **Definiție** | • $M \in \mathbb{R}$ este valoarea maximă pentru funcția $f$ definită pe mulțimea $A$, dacă există $x_0 \in A$ astfel încât $f(x_0) = M$ şi $f(x) \le M$, $\forall x \in A$.<br>• $m \in \mathbb{R}$ este valoarea minimă pentru funcția $f$ definită pe mulțimea $A$, dacă există $x_1 \in A$ astfel încât $f(x_1) = m$ şi $f(x) \ge m$, $\forall x \in A$. |

**Observație:** Pe grafice se vor ilustra valorile de maxim, respectiv de minim pentru funcțiile *elementare*.

**Funcții pare şi funcții impare**

Fie $A \subseteq \mathbb{R}$ o mulțime nevidă.

| | |
|---|---|
| **Definiție** | Mulțimea $A$ se numeşte *simetrică* dacă $x \in A \Rightarrow -x \in A$, $\forall x \in A$. |

***Exemple***

**1.** $A = [-a, a]$ este simetrică, $\forall a \in \mathbb{R}$, $a > 0$.

**2.** Mulțimile $A_1 = [a, +\infty)$, $a > 0$ şi $A_2 = (-\infty, a]$, $a < 0$, nu sunt simetrice.

| | |
|---|---|
| **Definiție** | Fie $A$ o mulțime simetrică şi funcția $f : A \to B$.<br>• Funcția $f$ este *impară* pe mulțimea $A$ dacă $f(-x) = -f(x)$, $\forall x \in A$.<br>• Funcția $f$ este *pară* pe mulțimea $A$ dacă $f(-x) = f(x)$, $\forall x \in A$. |

Observăm că dacă o funcție este pară, atunci graficul ei este simetric față de axa $y'y$ şi dacă o funcție este impară, atunci graficul este simetric față de originea axelor de coordonate.

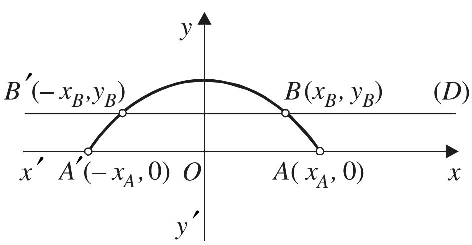



**Figura 1.** Oricare ar fi dreapta $D \parallel xx'$, punctele $B$ şi $B'$ sunt simetrice față de axa $yy'$.

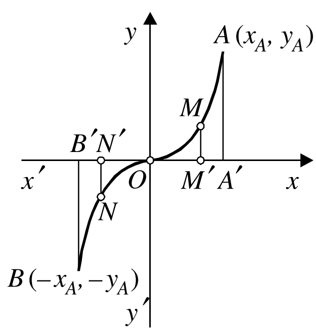



**Figura 2.** Graficul funcției este simetric față de originea axelor de coordonate.

**Funcții injective, surjective, bijective**

Fie funcția $f : A \to B$.

| | |
|---|---|
| **Definiție** | Funcția $f$ este *injectivă* (injecție) dacă pentru orice $x_1, x_2 \in A$, $x_1 \neq x_2$, avem $f(x_1) \neq f(x_2)$. |

Afirmația din definiția de mai sus este echivalentă cu condiția: $f : A \to B$ este injectivă dacă pentru orice $x_1, x_2 \in A$ cu proprietatea $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$.

Intuitiv, o funcție este injectivă dacă o paralelă oarecare $D$ dusă prin punctele codomeniului la axa $Ox$ intersectează graficul funcției $G_f$ în cel mult un punct. Aceasta înseamnă că dreapta $D$ poate să intersecteze graficul într-un singur punct sau poate să nu intersecteze graficul.

În figura 3 este reprezentat graficul unei funcții injective, iar în figura 4 este reprezentat graficul unei funcții neinjective (dreapta $D$ intersectează graficul funcției $f$ în două puncte distincte).

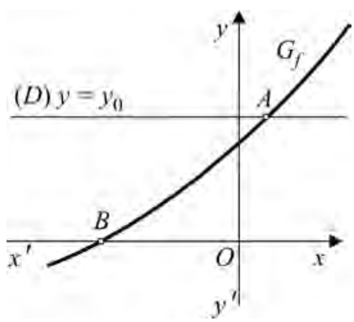



**Figura 3.** Funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ este injectivă

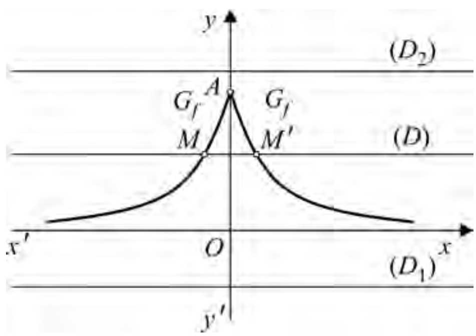



**Figura 4**. Funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ nu este injectivă

| | |
|---|---|
| **Definiție** | Funcția $f : A \to B$ este *surjectivă* (surjecție) dacă oricare ar fi $y \in B$, există cel puțin un $x \in A$, astfel încât să avem $f(x) = y$. |

Altfel exprimat, o funcție este *surjectivă* când mulțimea valorilor funcției (imaginea funcției) coincide cu codomeniul funcției, adică $f(A) = B$.

Intuitiv, o funcție este surjectivă dacă o dreaptă paralelă la axa $Ox$ dusă prin punctele codomeniului intersectează graficul în cel puțin un punct.

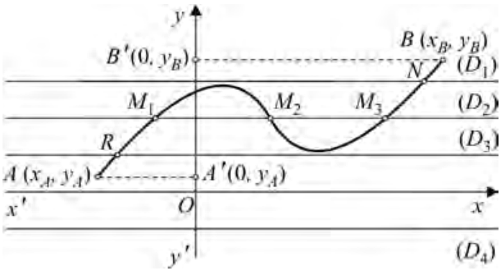



**Figura 5**

Funcția $f : [x_A, x_B] \to [y_A, y_B]$ este surjectivă. Dreapta $D_1$ intersectează graficul într-un singur punct $N$. Dreapta $D_2$ intersectează graficul în trei puncte distincte $M_1$, $M_2$, $M_3$. Dreapta $D_3$ intersectează graficul într-un singur punct $R$. Observăm că dreapta $D_4$ nu intersectează graficul în nici un punct, dar nu poate fi luată în considerare, deoarece nu este dusă prin puncte care aparțin codomeniului.

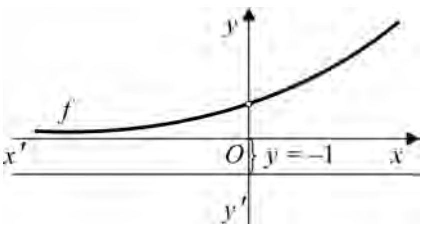



**Figura 6**

Funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ nu este surjectivă. Dreapta $D$ de ecuație $y = -1$ dusă prin-un punct ce aparține codomeniului nu intersectează graficul funcției

| **Definiție** | Funcția $f : A \to B$ este *bijectivă* (bijecție) dacă este injectivă și surjectivă. |
|---|---|

Intuitiv, o funcție este bijectivă dacă orice paralelă la axa $Ox$ dusă prin punctele codomeniului intersectează graficul funcției într-un singur punct.

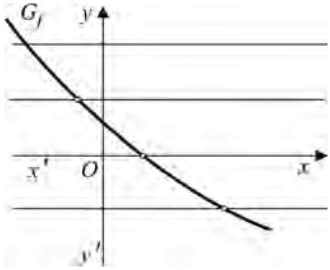



**Figura 7.** Funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ este bijectivă

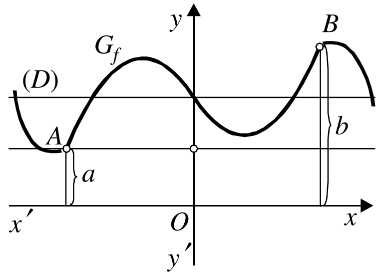



**Figura 8.** Funcția $f : \mathbb{R} \to [a, b]$ nu este bijectivă, deoarece nu este injectivă

Propunem ca exercițiu următoarea propoziție:

**Propoziție.** *Dacă funcția $f : A \to B$ este strict monotonă, atunci ea este injectivă.*

**Funcții inversabile**

| | |
|---|---|
| **Definiție** | O funcție $f : A \to B$ este *inversabilă* pe mulțimea $A$ dacă există o funcție $g : B \to A$, astfel încât $g \circ f = 1_A$ şi $f \circ g = 1_B$ (unde $1_A : A \to A$, $1_A(x) = x$, $\forall x \in A$ şi $1_B : B \to B$, $1_B(y) = y$, $\forall y \in B$).<br>Funcția $g$ cu această proprietate se numeşte *inversa* funcției $f$ şi se notează $f^{-1} : B \to A$. |

Avem următoarea proprietate:

**Teoremă.** *Funcția $f : A \to B$ este inversabilă dacă şi numai dacă este bijectivă.*

Geometric, graficele funcțiilor directă şi inversă sunt simetrice față de prima bisectoare a axelor de coordonate.

În figura 9 este reprezentat graficul unei funcții inversabile, iar în figura 10 este reprezentat graficul unei funcții care nu este inversabilă.

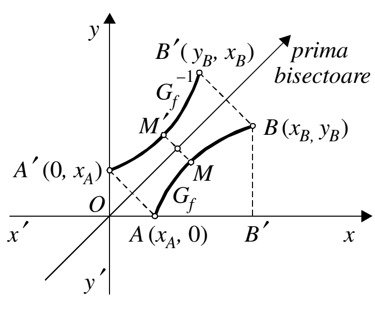



**Figura 9.** Funcția $f : [x_A, x_B] \to \mathbb{R}$ este bijectivă, admite inversă, iar graficul funcției inverse $G_{f^{-1}}$, este simetric față de prima bisectoare a axelor de coordonate.

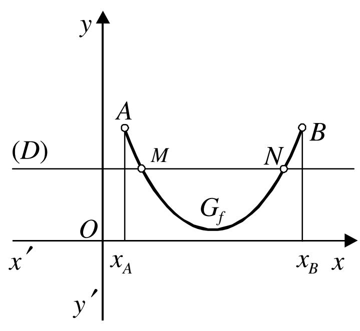



**Figura 10.** Funcția $f : [x_A, x_B] \to \mathbb{R}$ nu este inversabilă, deoarece nu este injectivă, dreapta $D$ intersectând graficul în două puncte distincte $M$ şi $N$.

**Funcții periodice**

| | |
|---|---|
| **Definiție** | Fie $I \subseteq \mathbb{R}$ şi funcţia $f: I \to \mathbb{R}$. Funcţia $f$ se numeşte *periodică* de perioadă $T$, $T \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, dacă $f(x+T) = f(x)$ pentru orice $x \in I$ pentru care $x + T \in I$ şi $x - T \in I$. |

*Consecințe imediate*

Fie $f: I \to \mathbb{R}$ o funcție periodică.

**1.** Dacă $T$ este o perioadă a funcției şi $n \in \mathbb{Z}^*$, atunci şi $nT$ este o perioadă a funcției, adică $f(x + nT) = f(x)$, $\forall x \in I$ (exercițiu).

**2.** Cea mai mică perioadă strict pozitivă $T_0$, dacă există, se numeşte perioada principală a funcției. În acest caz este suficient să reprezentăm graficul funcției pe un interval de lungime egală cu perioada principală, adică pe intervalul $[0, T_0]$.

**3.** Există funcții periodice care nu admit perioadă principală. Exemplu, funcția

$$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q} \\ 0, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases} \quad \text{(funcția lui Dirichlet).}$$

Se constată că orice număr rațional este perioadă pentru funcția $f$, însă $f$ nu admite perioadă principală.

Cele mai ilustrative exemple de funcții periodice sunt oferite de studiul funcțiilor trigonometrice, care se va face ulterior.

**Funcții convexe şi funcții concave**

Reamintim definiția noțiunii de funcție convexă, respectiv funcție concavă, învățate în clasa a X-a.

| | |
|---|---|
| **Definiția 1** | Fie $I \subset \mathbb{R}$ un interval. Funcția $f: I \to \mathbb{R}$ este *convexă* dacă $\forall x_1, x_2 \in I$ şi $\forall \lambda \in [0, 1]$, avem: $$f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \le \lambda f(x_1) + (1-\lambda) f(x_2).$$ |

Intuitiv vom spune că graficul funcției $f$ „ține apa“

| | |
|---|---|
| **Definiția 2** | Fie $I \subset \mathbb{R}$ un interval. Funcția $f: I \to \mathbb{R}$ este *concavă* dacă $\forall x_1, x_2 \in I$ şi $\forall \lambda \in [0, 1]$, avem: $$f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \ge \lambda f(x_1) + (1-\lambda) f(x_2).$$ |

Intuitiv vom spune că graficul funcției $f$ „nu ține apa“

Cu ajutorul acestor definiții şi ținând cont de natura graficelor, vom determina intervalele de convexitate (respectiv concavitate) pentru funcțiile elementare studiate în clasele a IX-a şi a X-a.

## Principalele tipuri de funcții

### A. Funcția polinomială de gradul întâi

| **Definiție** | O funcție $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n$, unde $a_i \in \mathbb{R}$, se numeşte funcție polinominală. |
|---|---|

*Cazuri particulare*

**1.** Dacă toți coeficienții $a_i$ sunt nuli, atunci funcția polinomială este funcția nulă.

**2.** Dacă $a_0 \neq 0$ şi $n = 1$, atunci funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = a_0x + a_1$, se numeşte funcție de gradul întâi.

**3.** Dacă $a_0 \neq 0$, $n = 2$, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = a_0x^2 + a_1x + a_2$, se numeşte funcție polinomială de gradul doi sau trinom de gradul doi.

**4.** Dacă $a_0 \neq 0$ şi $n \in \mathbb{N}^*$, vom spune că $f$ are gradul $n$.

*Comentariu*

Ca metodă generală pentru punerea în evidență a proprietăților funcțiilor elementare, vom întocmi tabelul de valori, vom uni punctele importante obținute printr-o linie continuă şi vom obține alura graficului funcției, care ne va ajuta să punem în evidență şi principalele proprietăți, care au fost studiate în clasele anterioare.

**a) Funcția liniară:** $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = ax$, $a \in \mathbb{R}^*$.

Vom distinge două cazuri după semnul lui $a$:

*Cazul $a > 0$*

*Tabelul de valori:*

| $x$ | $-\infty$ | | $-1$ | | $0$ | | $1$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | $-\infty$ | $\nearrow$ | $-a$ | $\nearrow$ | $0$ | $\nearrow$ | $a$ | $+\infty$ |

*Caracteristici importante ale funcției liniare*

**1.** Graficul funcției este o dreaptă care trece prin originea axelor de coordonate.

**2.** Funcția este strict crescătoare pe $\mathbb{R}$.

**3.** Pentru $x \geq 0$, avem $f(x) \geq 0$ şi pentru $x \leq 0$, avem $f(x) \leq 0$.

**4.** Funcția este impară: $f(-x) = -f(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

**5.** Funcția este bijectivă pe $\mathbb{R}$.

**6.** Funcția este inversabilă pe $\mathbb{R}$ şi inversa $f^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x = f^{-1}(y) = \frac{1}{a} y$.

**7.** Funcția nu este periodică.

**8.** Funcția nu este mărginită.

**9.** Funcția nu este nici strict convexă şi nici strict concavă pe $\mathbb{R}$.

**10.** Verifică ecuația funcțională $f(x + y) = f(x) + f(y)$, $\forall\, x, y \in \mathbb{R}$.

*Cazul* $a < 0$

Un raționament asemănător se va face pentru cazul $a < 0$ (pe care îl propunem ca exercițiu independent).

**b) Funcția de gradul întâi: $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = ax + b$ ($a \neq 0$)**

**1.** Graficul funcției este o dreaptă care intersectează axa $Ox$ în punctul $A = \left(-\frac{b}{a}, 0\right)$ şi axa $Oy$ în punctul $B(0, b)$.

**2.** Funcția este strict crescătoare dacă $a > 0$ şi strict descrescătoare dacă $a < 0$.

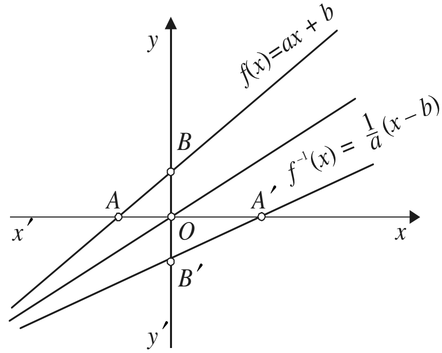



**Figura 11**

**3.** Funcția este bijectivă şi deci inversabilă; funcția inversă este $f^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. $f^{-1}(y) = \frac{1}{a}(y - b)$, cu graficul dat în fig. 11, care intersectează axa $Ox$ în punctul $A'(b,0)$ şi axa $Oy$ în $B'\left(0, -\frac{b}{a}\right)$.

**4.** Funcția nu este periodică.

**5.** Funcția nu este mărginită pe $\mathbb{R}$.

**6.** Funcția nu este nici strict convexă şi nici strict concavă pe $\mathbb{R}$.

**7.** $|f(x)| = |ax + b| = \begin{cases} ax + b, & x \geq -\frac{b}{a} \\ -(ax + b), & x < -\frac{b}{a} \end{cases}$.

**8.** Verifică ecuația funcțională $f(x + y) - f(x) - f(y) = -b$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

### c) Funcția de gradul al doilea

| | |
|---|---|
| **Definiție** | O funcție $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definită prin formula $f(x) = ax^2 + bx + c$, unde $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, se numeşte funcție de gradul al doilea cu coeficienți $a, b, c$. |

Caracteristici importante ale funcției de gradul al doilea:

**1.** Dreapta de ecuație $x = -\frac{b}{2a}$ este axă de simetrie, adică:

$$f\left(-\frac{b}{2a} + x\right) = f\left(-\frac{b}{2a} - x\right),\ \forall x \in \mathbb{R}.$$

**2.** Graficul este o parabolă, iar punctul $V = \left(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a}\right)$ aparține graficului funcției şi se numeşte vârful parabolei.

**3.** Funcția de gradul al doilea admite un maxim pentru $a < 0$ şi un minim pentru $a > 0$, astfel:

dacă: $a > 0 \Rightarrow \forall x \in \mathbb{R},\ f(x) \geq -\frac{\Delta}{4a}$ şi dacă $a < 0 \Rightarrow \forall x \in \mathbb{R},\ f(x) \leq -\frac{\Delta}{4a}$.

**4.** Pentru $a > 0$ funcția este convexă pe $\mathbb{R}$ şi pentru $a < 0$ funcția este concavă pe $\mathbb{R}$.

**5.** Graficul intersectează axa $Oy$ în punctul $A(0, c)$.

**6.** Intersecția graficului funcției cu axa absciselor depinde de semnul lui $\Delta = b^2 - 4ac$ (discriminatul ecuației $ax^2 + bx + c = 0$)

a) $\Delta > 0$, graficul intersectează axa absciselor în două puncte distincte;

b) $\Delta = 0$, graficul intersectează axa absciselor într-un singur punct $x_0$ (numit punct dublu, deoarece $x_1 = x_2$) şi este tangent la axa absciselor în punctul $x_0$;

c) $\Delta < 0$, graficul nu intersectează axa absciselor fiind situat în întregime fie în semiplanul pozitiv ($y > 0$), fie în semiplanul negativ ($y < 0$).

**7.** Funcția de gradul al doilea nu este nici injectivă, nici surjectivă, nici bijectivă. Acest lucru se poate ilustra grafic cu o dreaptă variabilă paralelă cu axa $x'x$.

**8.** Funcția de gradul al doilea nu este monotonă pe $\mathbb{R}$. În funcție de semnul lui $a$ vom pune în evidență intervale de monotonie (strictă monotonie).

Astfel:

i) Dacă $a > 0$, atunci funcția $f$ este strict descrescătoare pe $\left(-\infty, -\frac{b}{2a}\right]$ şi strict crescătoare pe $\left[-\frac{b}{2a}, +\infty\right)$.

ii) Dacă $a < 0$, atunci funcția $f$ este strict crescătoare pe $\left(-\infty, -\frac{b}{2a}\right]$ şi strict descrescătoare pe $\left[-\frac{b}{2a}, +\infty\right)$.

**9.** Funcția de gradul al doilea nu este mărginită pe $\mathbb{R}$.

Pentru $a < 0$ este mărginită superior şi avem:

$-\infty < f(x) \leq -\frac{\Delta}{4a}$, iar $\sup\limits_{x\in\mathbb{R}} f(x) = \max\limits_{x\in\mathbb{R}} f(x) = -\frac{\Delta}{4a}$ şi $\inf\limits_{x\in\mathbb{R}} f(x) = -\infty$.

Pentru $a > 0$, este mărginită inferior şi avem:

$+\infty > f(x) \geq -\frac{\Delta}{4a}$, iar $\sup\limits_{x\in\mathbb{R}} f(x) = +\infty$ şi $\inf\limits_{x\in\mathbb{R}} f(x) = \min\limits_{x\in\mathbb{R}} f(x) = -\frac{\Delta}{4a}$ .

**10.** Funcția de gradul al doilea pe $\mathbb{R}$ *nu este inversabilă.*

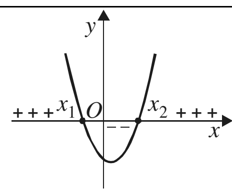
Pe intervalele de *strictă monotonie* funcția este bijectivă, deci este inversabilă.

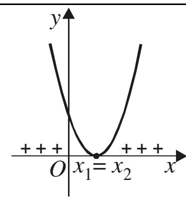
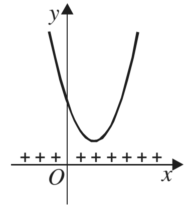
**11.** Semnul funcției depinde de semnul lui $a$ şi $\Delta$ şi vom distinge următoarele cazuri:

Vom prezenta în continuare interpretarea geometrică a semnului funcției de gradul doi şi rezolvarea grafică a unor inecuații de gradul al doilea.

Considerăm funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = ax^2 + bx + c$ şi ecuația $ax^2 + bx + c = 0$.

i) **Cazul $a > 0$**

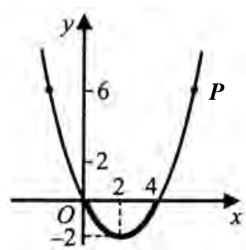
| **Semnul lui Δ** | **Semnul funcției** | **Interpretare geometrică** |
|---|---|---|
| $\Delta > 0$ | $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$ , $\forall x \in \mathbb{R}$ <br> $x$: $-\infty$ … $x_1$ … $x_2$ … $+\infty$ <br> $f(x)$: + + 0 – – 0 + + |  |

| | | |
|---|---|---|
| $\Delta = 0$ | $f(x) = a(x - x_1)^2, \forall x \in \mathbb{R}$ <br> $\begin{array}{c\|ccccccc} x & -\infty & & & x_1 = x_2 & & & +\infty \\ \hline f(x) & + & + & + & 0 & + & + & + \end{array}$ |   |
| $\Delta < 0$ | $f(x) = a\left(x + \dfrac{b}{2a}\right)^2 + \dfrac{-\Delta}{4a}, \forall x \in \mathbb{R}$ <br> $\begin{array}{c\|ccccccc} x & -\infty & & & & & & +\infty \\ \hline f(x) & + & + & + & + & + & + & + \end{array}$ |   |

ii) Să se alcătuiască un tabel asemănător şi pentru $a < 0$.

## *Test de evaluare*

Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 2x$ şi $P$ reprezentarea ei grafică.




($2p$) a) Indicați mulțimea soluțiilor inecuației

$$\frac{1}{2}x^2 - 2x \geq 0.$$

($2p$) b) Care este mulțimea soluțiilor inecuației

$$\frac{1}{2}x^2 - 2x < 0?$$

($2p$) c) Regăsiți rezultatele de la a) şi b) alcătuind tabelul semnelor funcției:

$$f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 2x.$$

($2p$) d) Rezolvați inecuația $f(x) \geq x$.

*Timp de lucru: 30 de minute.*

## Probleme propuse

**1.** Fie funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 4x + 6$.

a) Să se reprezinte grafic funcția într-un sistem de axe ortogonale.

b) Să se indice pe grafic mulțimea soluțiilor inecuațiilor $f(x) \geq 0$ şi $f(x) < 0$.

**2.** Să se rezolve inecuațiile:

a) $6x^2 + x - 1 \leq 0$; b) $-2x^2 + 3x - 1 > 0$;

c) $x^2 - x - 1 \leq 0$; d) $-5x^2 - 3x - 2 \geq 0$.

**3.** Fie inecuația $x^2 - 4x + 4m^2 > 0$. Să se determine valoarea parametrului real $m$, astfel încât mulțimea soluțiilor inecuației să fie mulțimea numerelor reale.

**4.** Fie inecuația: $-x^2 + 2x + m < 0$. Să se determine valoarea parametrului real $m$, astfel încât mulțimea soluțiilor inecuației să fie mulțimea numerelor reale.

**5.** Determinați funcția de gradul al doilea care trece prin punctele $A$ (0, 1); $B$ (1, 2); $C$ (3, 10).

**6.** Determinați funcția de gradul al doilea al cărei grafic trece prin punctul $A$ (0, 3), iar punctul de extrem al graficului este $V$ (−2, −1). Reprezentați grafic funcția obținută.

**7.** Să se reprezinte grafic funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = |x^2 - 4x + 3|$.

**8.** Se consideră familia de funcții de gradul al doilea $f_m : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_m(x) = x^2 - 2(m - 2)x + m - 2$, unde $m \in \mathbb{R}$.

1) Să se arate că vârfurile parabolelor asociate acestor funcții se găsesc pe o parabolă.

2) Pentru ce valori ale lui $m \in \mathbb{R}$, parabola asociată funcției $f_m$ are vârful sub axa $Ox$?

**9.** Fie funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$). Să se arate că dacă ecuația $f(x) = x$ nu are rădăcini reale, atunci nici ecuația $f(f(x)) = x$, nu are rădăcini reale.

## B. Funcția rațională

| **Definiție** | O funcție rațională este o funcție $f : I \to \mathbb{R}$, de forma: $$f(x)=\frac{a_0x^p+a_1x^{p-1}+\ldots+a_p}{b_0x^q+b_1x^{q-1}+\ldots+b_q},$$ unde $b_0x^q + b_1x^{q-1} + \ldots + b_q \neq 0$, $\forall x \in I$, $p, q \in \mathbb{N}^*$. |
|---|---|

**Observație:** Dacă $b_0x^q + b_1x^{q-1} + \ldots + b_q \neq 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$, atunci funcția rațională este definită pe întreaga axă a numerelor reale.

***Exemple***

**1.** $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{x+1}{x^2+1}$, este funcție rațională pe $\mathbb{R}$.

**2.** $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{x^2+1}{x^2+1}$, este de asemenea o funcție rațională pe $\mathbb{R}$.

**3.** $f : I \to \mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{x}{x^2-1}$, nu poate fi definită pe $\mathbb{R}$, deoarece pentru $x = -1$ şi $x = 1$ numitorul se anulează; în acest caz $I = \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$.

**4.** $f : \mathbb{R} \setminus \left\{\dfrac{-d}{c}\right\} \to \mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{ax+b}{cx+d}$, unde $c \neq 0$ şi $ad - bc \neq 0$; $f$ se numeşte funcție omografică.

Pentru anumite valori particulare date coeficienților reali $a$, $b$, $c$, $d$ obținem funcții particulare.

Vom prezenta în continuare principalele proprietăți ale funcției $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}^*$, $f(x) = \dfrac{1}{x}$:

| **Funcția/Domeniu de definiție** | **−∞ 0** | **+∞** |
|---|---|---|
| 1. semn | − − − − − − − − − − − − − − − | + + + + + + + + + + + + + + |
| 2. monotonie | strict descrescătoare | strict descrescătoare |
| 3. concavitate/convexitate | concavă | convexă |
| 4. periodicitate | nu este periodică | nu este periodică |
| 5. funcția inversă | $f : (-\infty, 0) \to (-\infty, 0)$ este bijectivă, admite inversă şi $f^{-1} : (-\infty, 0) \to (-\infty, 0)$, $x = f^{-1}(y) = \dfrac{1}{y}$ | $f : (0, +\infty) \to (0, +\infty)$ este bijectivă, admite inversă şi $f^{-1} : (0, +\infty) \to (0, +\infty)$, $x = f^{-1}(y) = \dfrac{1}{y}$ |

Tabelul de variație şi graficul funcției $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}^*,\ f(x) = \dfrac{1}{x}$:

| $x$ | $-\infty$ | | $-2$ | | $-1$ | | $0$ | | $1$ | | $2$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | $0$ | $\searrow$ | $-\frac{1}{2}$ | $\searrow$ | $-1$ | $\searrow$ | $-\infty \mid \infty$ | $\searrow$ | $1$ | $\searrow$ | $\frac{1}{2}$ | $0$ |

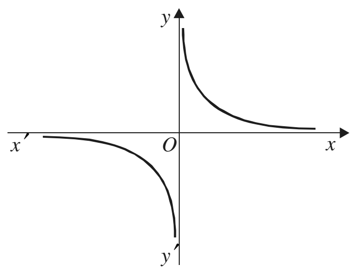



**Figura 12**

*Justificări*

a) semnul funcției: pentru $x > 0 \Rightarrow \dfrac{1}{x} > 0$ şi pentru $x < 0 \Rightarrow \dfrac{1}{x} < 0$;

b) monotonia:

– pentru $x \in (-\infty, 0)$;

Fie $0 > x_1 > x_2 \Rightarrow \dfrac{1}{x_1} < \dfrac{1}{x_2} \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$ (strict descrescătoare);

– pentru $x \in (0, +\infty)$;

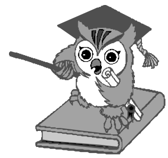
Fie $x_1 > x_2 > 0 \Rightarrow \dfrac{1}{x_1} < \dfrac{1}{x_2} \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$ (strict descrescătoare);

c) mărginirea:

$x \in (-\infty, 0) \Rightarrow f(x) < 0$; funcția este mărginită superior;

$x \in (0, +\infty) \Rightarrow f(x) > 0$; funcția este mărginită inferior.

# *Test de evaluare*



(*2p*) **1.** Construiți graficul funcției $f:\mathbb{R}\setminus\{0\}\to\mathbb{R},\ f(x)=-\dfrac{1}{x}$;

(*2p*) **2.** Se dau funcțiile: $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\dfrac{1}{x^2+1}$ şi $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ g(x)=x+1$.

Să se calculeze: $f\circ g$ şi $g\circ f$.

(*2p*) **3.** Să se discute după valorile parametrului $m$, semnul funcției

$$f_m:\mathbb{R}\setminus\{0,1\}\to\mathbb{R},\ f_m(x)=\frac{x^2+mx}{x^2-x}.$$

(*2p*) **4.** Să se calculeze $\operatorname{Im} f$, unde $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\dfrac{x^2-2x-3}{x^2+x+1}$.

*Timp de lucru: 45 de minute.*

## Exerciții propuse

**1.** Se consideră funcțiile:

$f_1:\mathbb{R}\setminus\{0\}\to\mathbb{R}\setminus\{0\},\ f_1(x)=x,\ f_2:\mathbb{R}\setminus\{0\}\to\mathbb{R}\setminus\{0\},\ f_2(x)=x,\ f_2(x)=\dfrac{1}{x}$,

$f_3:\mathbb{R}\setminus\{0\}\to\mathbb{R}\setminus\{0\},\ f_3(x)=-x,\ f_4:\mathbb{R}\setminus\{0\}\to\mathbb{R}\setminus\{0\},\ f_4(x)=-\dfrac{1}{x}$, şi mulțimea $M=\{f_1,f_2,f_3,f_4\}$.

a) Să se arate că dacă compunem oricare două funcții din $M$, funcția obținută este tot o funcție care aparține mulțimii $M$.

b) Să se reprezinte grafic în acelaşi sistem de axe de coordonate, funcțiile $f_1$, $f_2, f_3, f_4$.

**2.** Fie mulțimea $H=\mathbb{R}\setminus\{0,1\}$ şi funcțiile $f_i:H\to H\ \left(i=\overline{1,6}\right)$;

$f_1(x)=x,\ f_2(x)=\dfrac{1}{1-x},\ f_3(x)=\dfrac{x-1}{x},\ f_4(x)=\dfrac{1}{x}, f_5(x)=1-x,\ f_6(x)=\dfrac{x}{x-1},\ \forall x\in H.$

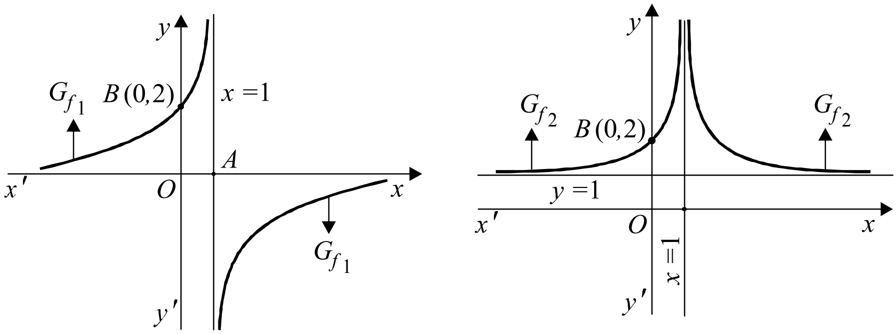
a) Să se arate că pentru oricare două funcții din $M$, funcția compusă este o funcție care aparține mulțimii $M=\{f_1,f_2,f_3,f_4,f_5,f_6\}$.

b) Să se reprezinte grafic funcțiile în acelaşi sistem de axe de coordonate.

c) Să se pună în evidență principalele proprietăți pentru funcțiile $f_2, f_3, f_5, f_6$.

**3.** Se consideră funcția $f$: $(0, +\infty) \to (0, +\infty)$, $f(x) = \dfrac{x+a}{1+ax}$. Să se determine $a \in [0, +\infty)$, astfel încât $(f \circ f)(x) = x$, $\forall x \in (0, +\infty)$.

**4.** Puneți în evidență principalele proprietăți ale funcțiilor numerice $f_1, f_2 : \mathbb{R} \setminus \{1\} \to \mathbb{R}$ ale căror grafice sunt trasate în figurile de mai jos.




**a)** **b)**

**Figura 13**

## C. Funcția putere cu exponent număr natural

| | |
|---|---|
| **Definiție** | Fie $n \in \mathbb{N}^*$. Funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = x^n$ se numeşte funcția putere de gradul $n$. |

**Observații:** 1) Funcția putere este o funcție numerică.

2) Pentru $n = 1$, se obține funcția liniară $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x$, iar pentru $n = 2$, se obține funcția de gradul doi $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$.

**Proprietățile funcției putere**

1. *Monotonia*

a) dacă $n$ este un număr par, funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^n$ este strict descrescătoare pe intervalul $(-\infty, 0]$ şi strict crescătoare pe intervalul $[0, +\infty)$;

b) dacă $n$ este un număr impar, funcția putere este strict crescătoare pe $\mathbb{R}$.

2. *Paritatea*

a) dacă $n$ este un număr par, atunci funcția putere este funcție pară, adică $f(-x) = f(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$;

b) dacă $n$ este un număr impar, atunci funcția putere este funcție impară, adică $f(-x) = -f(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

3. *Bijectivitatea*

a) Pentru *n impar*, funcția este bijectivă şi deci este inversabilă;

b) Pentru *n par*, funcția nu este bijectivă şi deci nu este inversabilă.

4. *Mărginirea*

a) Pentru $n$ impar, funcția este nemărginită:

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} f(x) = +\infty \text{ şi } \inf_{x\in\mathbb{R}} f(x) = -\infty;$$

b) Pentru $n$ par, funcția este mărginită inferior şi nu este mărginită superior; $\inf\limits_{x\in\mathbb{R}} f(x) = \min\limits_{x\in\mathbb{R}} f(x) = 0$; $\sup\limits_{x\in\mathbb{R}} f(x) = +\infty$.

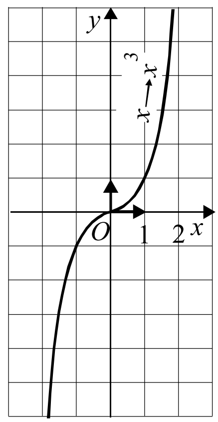



**Figura 14**

5. *Graficul*

Graficul se construieşte prin puncte, care se unesc printr-o linie continuă.

a) În figura 14 este prezentat graficul funcției $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^3$.

• Domeniul de definiție: $\mathbb{R}$.

• Tabelul de valori asociat

| $x$ | $-\infty$ | ... | $-2$ | $-1$ | $0$ | $1$ | $2$ | ... | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x^3$ | $-\infty$ | ... | $-8$ | $-1$ | $0$ | $1$ | $8$ | ... | $+\infty$ |

• Proprietățile graficului

– trece prin originea axelor $O$;

– ramura din dreapta a graficului se găseşte deasupra axei $Ox$, iar ramura din stânga se găseşte sub axa $Ox$;

– admite pe $O$ centru de simetrie (funcția este impară: $(-x)^3 = -x^3$.

**Observație:** Graficul funcției $f(x) = x^{2k+1}$ ($k \in \mathbb{N}$) are o comportare asemănătoare cu graficul funcției $f(x) = x^3$.

*Comentariu*

Funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^3$ este o funcție inversabilă (fiind bijectivă), a cărei funcție inversă este $f^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x}$, numită funcția radical de ordinul 3 (care va fi studiată în următorul paragraf) (fig. 15).

În general, dacă $n = 2k + 1$, $k \in \mathbb{N}$, funcția $f(x) = x^n$ este inversabilă cu inversa $f^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f^{-1}(x) = \sqrt[n]{x}$, numită funcția *radical de ordinul n*.

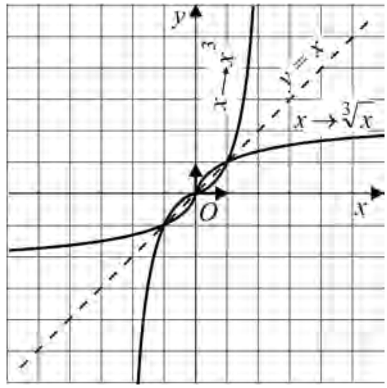



**Figura 15**

b) În figura 16 este prezentat graficul funcției $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^4$

• Domeniul de definiție: $\mathbb{R}$

• Tabelul de valori asociat

| $x$ | $-\infty$ | ... | $-2$ | $-1$ | $0$ | $1$ | $2$ | ... | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x^4$ | $+\infty$ | ... | $16$ | $1$ | $0$ | $1$ | $8$ | ... | $+\infty$ |

• Proprietățile graficului:

– trece prin originea axelor;

– se găseşte deasupra axei $Ox$;

– axa $Ox$ este axă de simetrie (funcția este pară: $(-x)^4 = x^4$);

– graficul „ține apa” (funcția este convexă).

Trasarea graficului funcției $f(x) = x^4$ se face prin puncte.

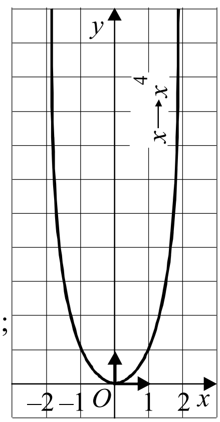



**Figura 16**

**Observație:** Graficul funcției $f(x) = x^{2k}$ ($k \geq 1$) are o comportare asemănătoare cu graficul funcției $f(x) = x^4$.

*Comentariu*

Restricția $f: [0,\infty) \to [0,\infty), f(x) = x^4$ este o funcție inversabilă cu funcția inversă $f^{-1}: [0, \infty) \to [0, \infty)$, $f^{-1}(x) = \sqrt[4]{x}$ numită funcția radical de ordinul 4.

În general, restricția $f: [0,\infty) \to [0,\infty), f(x) = x^{2k}$ reprezintă o funcție inversabilă, cu funcția inversă $f^{-1}: [0, \infty) \to [0, \infty)$, $f^{-1}(x) = \sqrt[2k]{x}$ numită funcția *radical de ordinul 2k.*

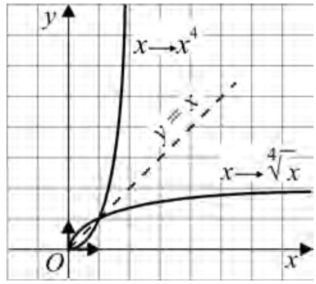



**Figura 17**

Funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = x^{2k}$ este convexă pe $\mathbb{R}$.

## Exercițiu rezolvat

Fie $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = x^4$. Să se arate că pentru orice $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ avem:

$$f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) \leq \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2}.$$

*Soluție:*

**Metoda 1**

Inegalitatea se scrie succesiv:

$$\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right)^4 \leq \frac{x_1^4 + x_2^4}{2} \Leftrightarrow (x_1 + x_2)^4 \leq 8x_1^4 + 8x_2^4 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 7x_1^4 + 7x_2^4 - 6x_1^2x_2^2 - 4x_1^3x_2 - 4x_1x_2^3 \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x_1 - x_2)^2\left(7x_1^2 + 7x_2^2 + 10x_1x_2\right) \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x_1 - x_2)^2\left(2x_1^2 + 2x_2^2 + 5(x_1 + x_2)^2\right) \geq 0.$$

**Metoda 2**

Deoarece funcția $f$ este convexă, avem:

$f[tx_1 + (1 - t)x^2] \leq tf(x_1) + (1 - t)f(x_2)$, $\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ și $\forall t \in [0, 1]$.

Dacă considerăm $t = \frac{1}{2}$, obținem inegalitatea cerută.

## Exerciţii propuse

**1.** Să se studieze şi să se reprezinte grafic următoarele funcţii:

a) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=x^3+1$, b) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=(x+1)^3$,

c) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=x^4-1$, d) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=|x^3+1|$.

**2.** Să se arate că funcţiile următoare sunt crescătoare:

a) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=x^3+x+10$, b) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=x^{33}+x^3+3$.

**3.** Fie funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=x^3$,

a) Să se arate că dacă $x_1, x_2\in[0,\infty)$, atunci:

$$f\left(\frac{x_1+2x_2}{3}\right)\le\frac{f(x_1)+2f(x_2)}{3}.$$

b) Să se arate că dacă $x_1, x_2\in(-\infty,0)$, atunci:

$$f\left(\frac{x_1+3x_2}{4}\right)\le\frac{f(x_1)+3f(x_2)}{4}.$$

## D. Funcţia radical

| **Definiţie** | Fie $n\in\mathbb{N}^*$, $n\ge 2$ ($n$ par). Funcţia $f:[0,+\infty)\to[0,+\infty)$, $f(x)=\sqrt[n]{x}$, se numeşte funcţie *radical* de indice par. |
|---|---|

*Proprietăţile funcţiei radical de indice par*

**1.** Funcţia radical este strict crescătoare pe $[0,+\infty)$.

**2.** Funcţia radical este bijectivă, deci este inversabilă şi funcţia inversă $f^{-1}:[0,+\infty)\to[0,+\infty)$, $f(x)=x^n$.

**3.** Mărginirea: $\inf\limits_{x\in[0,+\infty)}f(x)=\min\limits_{x\in[0,+\infty)}f(x)=0$ şi $\sup\limits_{x\in[0,+\infty)}f(x)=+\infty$.

**4.** Funcţia este concavă.

| **Definiţie** | Fie $n\in\mathbb{N}^*$, $n>2$ ($n$ impar). Funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\sqrt[n]{x}$, se numeşte funcţie *radical* de indice impar. |
|---|---|

*Proprietățile funcției radical de indice impar*

**1.** Funcția este strict crescătoare pe $\mathbb{R}$.

**2.** Funcția este inversabilă pe $\mathbb{R}$ şi funcția inversă este $f^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = x^n$ ($n$ impar)

**3.** Funcția radical de indice impar este nemărginită:

$\inf\limits_{x \in \mathbb{R}} f(x) = -\infty$ şi $\sup\limits_{x \in \mathbb{R}} f(x) = +\infty$.

**4.** Pentru $x \in (-\infty, 0)$ funcția este convexă şi pentru $x \in (0, +\infty)$, concavă.

**5.** Graficul se face prin puncte, care se unesc printr-o linie continuă.

În figura 18 este reprezentat graficul funcției $f : [0, \infty) \to [0, \infty)$, $f(x) = \sqrt{x}$, iar în figura 19 este reprezentat graficul funcției $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt[3]{x}$.

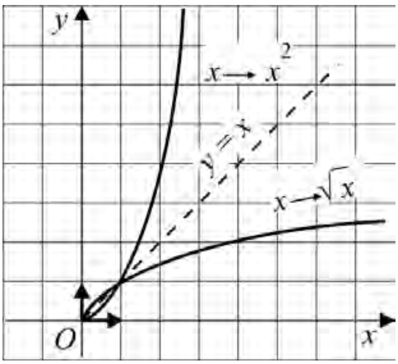



**Figura 18**

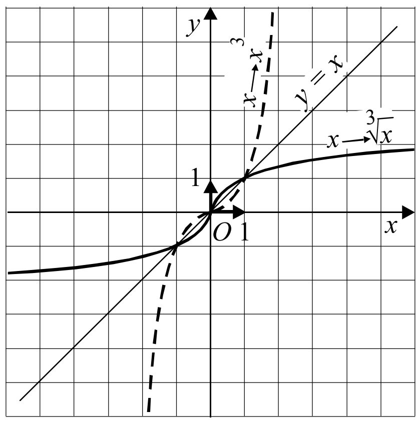



**Figura 19**

## *Test de evaluare*

Fie funcțiile:

$$f : [0, +\infty) \to [1, +\infty),\ f(x) = \sqrt{x} + 1;$$

$$g : [1, +\infty) \to [0, +\infty),\ g(x) = \sqrt{x-1};$$

$$h : [-1, +\infty) \to [-1, +\infty),\ h(x) = \sqrt{x+1};$$

(*2p*) a) Să se reprezinte grafic funcțiile date.

(*2p*) b) Să se studieze paritatea, monotonia şi convexitatea funcțiilor (pe grafic).

(*2p*) c) Care din funcțiile de mai sus sunt injective, surjective, bijective?

(*2p*) d) Calculați inversele pentru funcțiile bijective şi construiți graficele corespunzătoare.

*Timp de lucru: 40 de minute.*

## Probleme propuse

**1.** Construiți graficul funcției $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x)=\sqrt{(x-1)^2}+\sqrt{(x+2)^2}$ şi studiați convexitatea funcției.

**2.** Fie funcțiile:

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = \sqrt[3]{x+1};$$
$$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ g(x) = \sqrt[3]{x}-1;$$
$$h : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ h(x) = \sqrt[3]{|x|}.$$

a) Să se reprezinte grafic funcțiile date.

b) Să se studieze paritatea, monotonia şi convexitatea funcțiilor.

c) Care din funcțiile de mai sus sunt injective, surjective, bijective?

Calculați inversele pentru funcțiile bijective şi construiți graficele corespunzătoare.

**3.** Să se arate că $f : [1, \infty) \to [1, \infty)$, $f(x)=\sqrt{x+\sqrt{x^2-1}}$ este bijectivă şi să se determine $f^{-1}(x)$.

**4.** Fie funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x)=\sqrt{x^2+1}-x$

a) Să se studieze semnul funcției.

b) Să se studieze monotonia funcției.

**5.** Se dau funcțiile: $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ şi $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x)=\sqrt{x^2+1}$ şi $g(x)=\sqrt{x^2+2}$.

a) Să se compare $f \circ g$ şi $g \circ f$.

b) Să se determine intervalele pe care funcțiile sunt bijective şi determinați inversele corespunzătoare.

**6.** Se consideră funcția $f : (1, +\infty) \to (0, +\infty)$, $f(x)=\sqrt{\dfrac{x+1}{x-1}}$.

a) Să se studieze monotonia funcției.

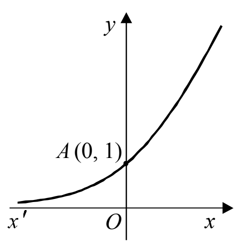
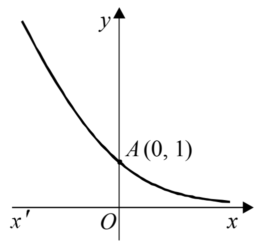
b) Să se determine intervalele de convexitate (concavitate).

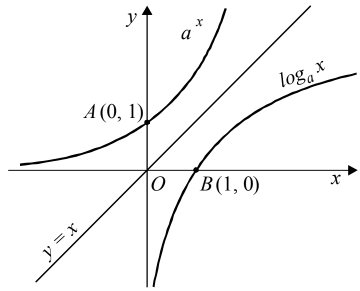
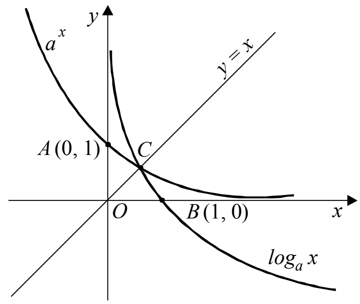
c) Să se studieze bijectivitatea funcției.

## E. Funcția exponențială

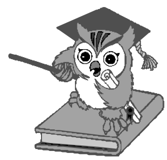
| | |
|---|---|
| **Definiție** | Fie $a \in (0, +\infty) \setminus \{1\}$. Funcția $f : \mathbb{R} \to (0, +\infty)$, $f(x) = a^x$, se numeşte funcție *exponențială*. |

Pentru a pune în evidență principalele proprietăți şi graficul funcției vom lua în considerație existența a două cazuri ținând seama de poziția lui $a$ față de 1. Vom alcătui următoarea schemă centralizatoare.

| $f(x) = a^x$ | ***Cazul* 1. $a > 1$** | ***Cazul* 2. $0 < a < 1$** |
|---|---|---|
| **1.** domeniul de definiție | $\mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$ | $\mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$ |
| **2.** mulțimea valorilor | $f(\mathbb{R}) = (0, +\infty)$ | $f(\mathbb{R}) = (0, +\infty)$ |
| **3.** semn | $f(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R}$ | $f(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R}$ |
| **4.** monotonie | strict crescătoare pe $\mathbb{R}$ | strict descrescătoare pe $\mathbb{R}$ |
| **5.** bijectivitate | bijectivă pe $\mathbb{R}$ | bijectivă pe $\mathbb{R}$ |
| **6.** convexitate, concavitate | convexă pe $\mathbb{R}$ | convexă pe $\mathbb{R}$ |
| **7.** inversabilitate | $\exists f^{-1} : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$, $x = f^{-1}(y) = \log_a y$ | $\exists f^{-1} : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$, $x = f^{-1}(y) = \log_a y$ |
| **8.** mărginire | $0 < f(x) < +\infty$ este mărginită inferior, dar nu este mărginită superior: $\inf\limits_{x\in\mathbb{R}} f(x) = 0$ şi $\sup\limits_{x\in\mathbb{R}} f(x) = +\infty$ | $0 < f(x) < +\infty$ este mărginită inferior, dar nu este mărginită superior: $\inf\limits_{x\in\mathbb{R}} f(x) = 0$ şi $\sup\limits_{x\in\mathbb{R}} f(x) = +\infty$ |
| **9.** periodicitate, paritate | nu este periodică, nu este pară şi nici impară | nu este periodică, nu este pară şi nici impară |
| **10.** Graficul | Intersectează axa $Oy$ în punctul $A(0, 1)$ şi se apropie de semiaxa negativă a axei absciselor fără să o atingă.   | Intersectează axa $Oy$ în punctul $A(0, 1)$ şi se apropie de semiaxa pozitivă a axei absciselor fără să o atingă.   |

| $f(x) = a^x$ | ***Cazul* 1. $a > 1$** | ***Cazul* 2. $0 < a < 1$** |
|---|---|---|
| **11.** Graficul funcției inverse | Intersectează axa $Ox$ în punctul $B(1, 0)$. Se apropie de semiaxa negativă a axei ordonatelor fără să o atingă<br> | Intersectează axa $Ox$ în punctul $B(1, 0)$. Se apropie de semiaxa pozitivă a axei ordonatelor fără să o atingă<br> |

## *Test de evaluare*



(*2p*) **1.** Să se construiască graficele următoarelor funcții:

(*2p*) a) $f(x) = 2^{x+1}$; b) $f(x) = 3^{x-1}$; c) $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^{x-1}$.

(*2p*) **2.** Să se rezolve următoarele ecuații: $2^x + 3^x = 5^x$; $\frac{1}{2^x} + \frac{1}{3^x} = \left(\frac{5}{6}\right)^x$.

(*2p*) **3.** Să se determine $x \in \mathbb{R}$, pentru care are sens $\sqrt{2^x - 3^x}$.

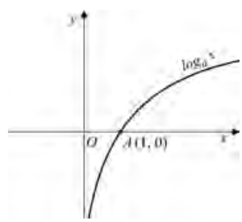
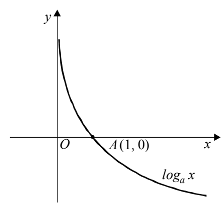
(*2p*) **4.** Să se determine $x \in \mathbb{R}$, astfel ca $\left(2^{2x}\right)^{2^x} = \left(4^x\right)^{4^x}$.

*Timp de lucru: 40 de minute.*

### F. Funcția logaritmică

| **Definiție** | Fie $a \in (0, +\infty) \setminus \{1\}$. Funcția $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \log_a x$, se numeşte funcție *logaritmică* de bază $a$. |
|---|---|

Ca şi la funcția exponențială vom lua în considerație cele două cazuri, ținând seama de poziționarea lui $a$ față de 1.

| $f(x) = \log_a x$ | *Cazul* **1.** $a > 1$ | *Cazul* **2.** $0 < a < 1$ |
|---|---|---|
| **1.** domeniul de definiție $D$ | $D = (0, +\infty)$ | $D = (0, +\infty)$ |
| **2.** mulțimea valorilor | $f(0, +\infty) = (-\infty, +\infty) = \mathbb{R}$ | $f(0, +\infty) = (-\infty, +\infty) = \mathbb{R}$ |
| **3.** semn | $x \in (0, 1) \Rightarrow f(x) \le 0$<br>$x > 1 \Rightarrow f(x) > 0$ | $x \in (0, 1) \Rightarrow f(x) \ge 0$<br>$x > 1 \Rightarrow f(x) < 0$ |
| **4.** monotonie | strict crescătoare | strict descrescătoare |
| **5.** bijectivitate | bijectivă pe $(0, +\infty)$ | bijectivă pe $(0, +\infty)$ |
| **6.** convexitate | concavă | convexă |
| **7.** inversabilitate | $\exists f^{-1} : \mathbb{R} \to (0, \infty)$,<br>$x = f^{-1}(y) = a^y$ | $\exists f^{-1} : \mathbb{R} \to (0, \infty)$,<br>$x = f^{-1}(y) = a^y$ |
| **8.** mărginire | nu este mărginită | nu este mărginită |
| **9.** periodicitate, simetrie, paritate | nu este periodică, nu este pară sau impară | nu este periodică, nu este pară sau impară |
| **10.** Graficul: | Intersectează axa $Ox$ în punctul $A(1, 0)$. Se apropie de semiaxa negativă a axei ordonatelor fără să o atingă   | Intersectează axa $Ox$ în punctul $A(1, 0)$. Se apropie de semiaxa pozitivă a axei ordonatelor fără să o atingă   |

## Test de evaluare

(*2p*) **1.** Să se construiască graficele funcțiilor următoare:

a) $f(x) = \log_2 x$; b) $f(x) = \log_{\frac{1}{2}} x$; c) $f(x) = \log_3 (x + 1)$.

($2p$) **2.** Să se rezolve următoarele ecuații:

a) $\log_2 x + \log_3 x = 0$; b) $\log_2 x + \log_{\frac{1}{2}} x = 0$;

c) $\log_3 (\log_2 x) = 0$; d) $|\log_2 x| + \left|\log_{\frac{1}{4}} x\right| = 1$.

($2p$) **3.** Să se determine valorile lui $x \in \mathbb{R}$, pentru care are sens $\sqrt{\log_2 x + \log_3 x}$.

($2p$) **4.** Se consideră funcția $f: (0, +\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \log_2 x + \log_{\frac{1}{2}} x$.

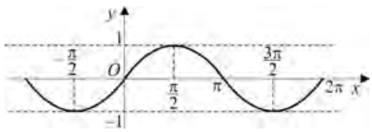
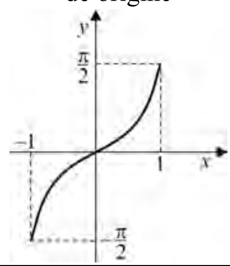
a) Să se studieze monotonia funcției; b) Să se studieze mărginirea funcției.

*Timp de lucru: 50 de minute.*

## G. Tabele cu proprietățile funcțiilor trigonometrice directe şi inverse

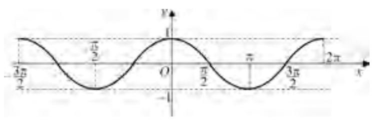
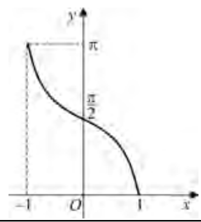
În tabelul următor vom sintetiza principalele proprietăți ale funcțiilor *sinus* şi *arcsinus*.

| | **sin : $\mathbb{R} \to [-1, 1]$** | **arcsin : $[-1, 1] \to \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$** |
|---|---|---|
| **1.** domeniul de definiție | $D = \mathbb{R}$ | $D = [-1, 1]$ |
| **2.** periodicitate | funcție periodică de perioadă principală $t_0 = 2\pi$ (poate fi studiată pe intervalul $[0, 2\pi)$) | funcția nu este periodică |
| **3.** paritate | $\sin(-x) = -\sin x$ (funcție impară) | $\arcsin(-x) = -\arcsin x$ (funcție impară) |
| **4.** monotonie | • pentru $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$ sau $x \in [\frac{3\pi}{2}, 2\pi)$, funcția este strict crescătoare • pentru $x \in (\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2})$, funcția este strict descrescătoare | funcție strict crescătoare |
| **5.** convexitate | pentru $x \in [0, \pi)$, funcția este concavă, iar pentru $x \in [\pi, 2\pi)$, funcția este convexă | pentru $x \in [-1, 0)$, funcția este concavă, iar pentru $x \in [0, 1]$, funcția este convexă |
| **6.** semn | $\sin x \geq 0$ pentru $x \in [0, \pi]$ $\sin x \leq 0$ pentru $x \in [\pi, 2\pi]$ | $\arcsin x < 0$ pentru $x \in [-1, 0)$ $\arcsin x \geq 0$ pentru $x \in [0, 1]$ |

| | | |
|---|---|---|
| **7.** mărginire | $-1 \le \sin x \le 1, \forall x \in \mathbb{R}$ | $-\frac{\pi}{2} \le \arcsin x \le \frac{\pi}{2}$, $\forall x \in [-1, 1]$ |
| **8.** bijectivitate și inversabilitate | pentru $x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, funcția este bijectivă, deci inversabilă pe acest interval | funcție bijectivă, deci inversabilă |
| **9.** reprezentare grafică și simetrii | graficul intersectează axa $Ox$ în punctele de abscisă $k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, și este simetric față de origine   | graficul intersectează axa $Ox$ în origine și este simetric față de origine   |

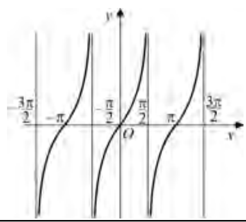
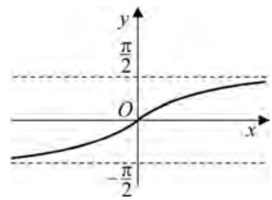
În tabelul următor vom sintetiza principalele proprietăți ale funcțiilor *cosinus* și *arccosinus*.

| | **cos : ℝ → [–1, 1]** | **arccos : [–1, 1] → [0, π]** |
|---|---|---|
| **1.** domeniul de definiție | $D = \mathbb{R}$ | $D = [-1, 1]$ |
| **2.** periodicitate | funcție periodică de perioadă principală $t_0 = 2\pi$ (poate fi studiată pe intervalul $[0, 2\pi)$) | funcția nu este periodică |
| **3.** paritate | $\cos(-x) = \cos x$ (funcție pară) | $\arccos(-x) = \pi - \arccos x$ funcția nu este nici pară nici impară |
| **4.** monotonie | • pentru $x \in [0,\pi]$ funcția este strict descrescătoare • pentru $x \in [\pi, 2\pi)$, funcția este strict crescătoare | funcție strict descrescătoare |
| **5.** convexitate | pentru $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$ și $x \in [\frac{3\pi}{2}, 2\pi]$, funcția este concavă, iar pentru $x \in [\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$ funcția este convexă | pentru $x \in [-1, 0]$, funcția este convexă, iar pentru $x \in [0, 1]$, funcția este concavă |

| | | |
|---|---|---|
| **6.** semn | $\cos x \geq 0$ pentru $x \in [0, \frac{\pi}{2}] \cup [\frac{3\pi}{2}, 2\pi)$<br>$\cos x \leq 0$ pentru $x \in [\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$ | $\arccos x \geq 0$ pentru $x \in [-1, 1]$ |
| **7.** mărginire | $-1 \leq \cos x \leq 1, \forall x \in \mathbb{R}$ | $0 \leq \arccos x \leq \pi$,<br>$\forall x \in [-1, 1]$ |
| **8.** bijectivitate şi inversabilitate | pentru $x \in [0, \pi]$ funcţia este bijectivă, deci inversabilă pe acest interval | funcţie bijectivă, deci inversabilă |
| **9.** reprezentare grafică şi simetrii | graficul intersectează axa $Ox$ în punctele de abscisă $(2k+1)\frac{\pi}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$, şi este simetric faţă de $Oy$<br> | graficul intersectează axa $Oy$ în $B\,(0, \frac{\pi}{2})$<br> |

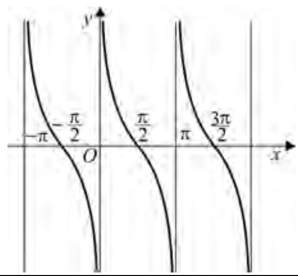
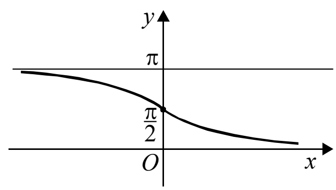
În tabelul următor vom sintetiza principalele proprietăţi ale funcţiilor *tangentă* şi *arctangentă.*

| | $\mathbf{tg} : \mathbb{R} \setminus \{(2k+1)\frac{\pi}{2} \mid k \in \mathbb{Z}\} \to \mathbb{R}$ | $\mathbf{arctg} : \mathbb{R} \to \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ |
|---|---|---|
| **1.** domeniul de definiţie | $D = \mathbb{R} \setminus \{(2k+1)\frac{\pi}{2} \mid k \in \mathbb{Z}\} \to \mathbb{R}$ | $D = \mathbb{R}$ |
| **2.** periodicitate | funcţie periodică de perioadă principală $t_0 = \pi$ (poate fi studiată pe intervalul $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ | funcţia nu este periodică |
| **3.** paritate | $\text{tg}(-x) = -\text{tg}\, x$<br>(funcţie impară) | $\text{arctg}(-x) = -\text{arctg}\, x$<br>(funcţie impară) |
| **4.** monotonie | funcţia este strict crescătoare pe $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ | funcţie strict crescătoare |
| **5.** convexitate | pentru $x \in [-\frac{\pi}{2}, 0]$, funcţia este concavă, iar pentru $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$, funcţia este convexă | pentru $x \leq 0$, funcţia este convexă, iar pentru $x > 0$, funcţia este concavă |

| | | |
|---|---|---|
| **6.** semn | tg $x \geq 0$ pentru $x \in [0, \frac{\pi}{2})$<br>tg $x < 0$ pentru $x \in [-\frac{\pi}{2}, 0)$ | arctg $x \geq 0$, pentru $x \geq 0$<br>arctg $x < 0$, pentru $x < 0$ |
| **7.** mărginire | funcție nemărginită | $-\frac{\pi}{2} < \operatorname{arctg} x < \frac{\pi}{2}, \forall x \in \mathbb{R}$ |
| **8.** bijectivitate şi inversabilitate | pentru $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, funcția este bijectivă, deci inversabilă pe acest interval | funcție bijectivă, deci inversabilă |
| **9.** reprezentare grafică şi simetrii | graficul intersectează axa $Ox$ în punctele de abscisă $k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, şi axa $Oy$ în origine  | intersectează axele de coordonate în origine  |

În tabelul următor vom sintetiza principalele proprietăți ale funcțiilor *cotangentă* şi *arccotangentă.*

| | **ctg : $\mathbb{R} \setminus \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\} \to \mathbb{R}$** | **arcctg : $\mathbb{R} \to (0, \pi)$** |
|---|---|---|
| **1.** domeniul de definiție | $D = \mathbb{R} \setminus \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\} \to \mathbb{R}$ | $D = \mathbb{R}$ |
| **2.** periodicitate | funcție periodică de perioadă principală $t_0 = \pi$ (poate fi studiată pe intervalul $(0, \pi)$) | funcția nu este periodică |
| **3.** paritate | ctg $(-x) = -$ ctg $x$ (funcție impară) | arcctg $(-x) = \pi -$ arcctg $x$ funcția nu este nici pară nici impară |
| **4.** monotonie | pentru $x \in (0,\pi)$ funcția este strict descrescătoare | funcție strict descrescătoare |
| **5.** convexitate | pentru $x \in (0, \frac{\pi}{2})$, funcția este convexă, iar pentru $x \in [\frac{\pi}{2}, \pi)$, funcția este concavă | pentru $x \leq 0$, funcția este concavă, iar pentru $x > 0$, funcția este convexă |

| | | |
|---|---|---|
| **6.** semn | ctg $x \geq 0$ pentru $x \in (0, \frac{\pi}{2}]$<br>ctg $x < 0$ pentru $x \in (\frac{\pi}{2}, \pi)$ | arcctg $x > 0, \forall x \in \mathbb{R}$ |
| **7.** mărginire | funcție nemărginită | $0 <$ arctg $x < \pi, \forall\, x \in \mathbb{R}$ |
| **8.** bijectivitate şi inversabilitate | pentru $x \in (0, \pi)$, funcția este bijectivă, deci inversabilă pe acest interval | funcție bijectivă, deci inversabilă |
| **9.** reprezentare grafică şi simetrii | intersectează axa $Ox$ în punctele de abscisă $(2k+1)\frac{\pi}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$, şi nu intersectează axa $Oy$<br> | nu intersectează axa $Ox$, iar axa $Oy$ o intersectează în punctul $A\,(0, \frac{\pi}{2})$<br> |

## Exerciții propuse

**1.** Să se alcătuiască un tabel asemănător şi să se pună în evidență principalele proprietăți pentru funcțiile:

$f : \mathbb{R} \to [-1, 1]$, $f(x) = -\sin x$; $g : \mathbb{R} \to [-1, 1]$, $f(x) = -\cos x$.

**2.** Să se construiască graficele următoarelor funcții pe intervalele unde admit perioada principală:

$$f(x) = \sin 2x,\ f(x) = \sin \frac{x}{2},\ f(x) = |\sin x|,\ f(x) = \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right),\ f(x) = \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right).$$

**3.** Se consideră funcția $f : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \sqrt{(\sin x - \cos x)^2} + \sqrt{(\sin x + \cos x)^2}$$

a) Să se construiască graficul funcției $f$.

b) Să se pună în evidență intervalele de monotonie.

c) Să se studieze mărginirea funcției şi în cazul în care admite extreme (maxim sau minim) să se determine coordonatele punctelor de extrem.

**4.** Să se studieze monotonia următoarelor funcții:

a) $f : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}$, $f(x) = 2^{\sin x}$; b) $g : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}$, $f(x) = 2^{-\cos x}$;

c) $h : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}$, $h(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^{-\sin x}$; d) $l : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}$, $l(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^{\cos x}$.

**5.** Să se rezolve pe cale grafică ecuațiile următoare:

a) $\sin x = x$; b) $|\sin x| = x$; c) $\log_2(x + 2) = 2^x$;

d) $5^x + 7^x = 2^{1-x}$; e) $\left(\frac{1}{5}\right)^x + \left(\frac{1}{7}\right)^x = 2^{1+x}$.

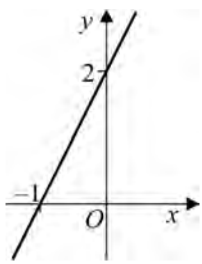
**6.** Să se rezolve ecuațiile $4^x + 4^{\frac{1}{x}} = 18$; $2^x + 2^{2x} = 2^{\frac{3x+2}{2}}$.

**7.** Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \to (0, +\infty)$, $f(x) = 2^x + \left(\frac{1}{2}\right)^x$.

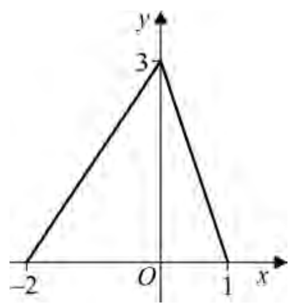
a) Să se determine intervalele de monotonie.

b) Să se rezolve ecuația $f(x) = f(1)$.

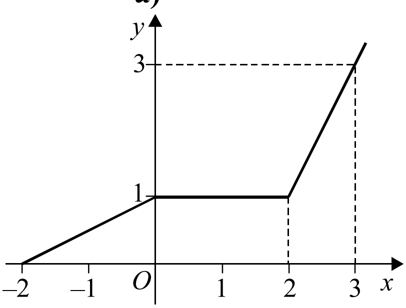
**8.** Să se determine funcțiile $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, pentru fiecare dintre reprezentările grafice de mai jos:



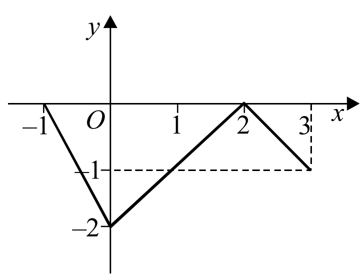

**a)**




**b)**




**c)**




**d)**

**9.** Se consideră funcțiile $f : A \to B$ şi $g : B \to C$. Să se arate că:

a) dacă $f$ şi $g$ sunt bijective, atunci $g \circ f$ este bijectivă;

b) dacă $g \circ f$ este bijectivă, atunci $g$ este surjectivă şi $f$ injectivă;

c) dacă funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ are proprietatea că $f \circ f$ este bijectivă, atunci $f$ este bijectivă?

**10.** a) Se consideră o funcție $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, astfel încât $(f \circ f)(x) = x$. Este funcția $f$ bijectivă? Dar dacă $(f \circ f)(x) = x^2$, atunci $f$ este bijectivă?

b) Să se determine o funcție $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, astfel încât avem $(f \circ f)(x) = x + 2$.

**11.** Se consideră funcția $f : (0, +\infty) \to (0, +\infty)$, $f(x) = \sqrt{x}$.

a) Să se arate plecând de la definiția funcției, că $f$ este concavă.

b) Să se arate că $\forall x_1, x_2 \in (0, +\infty)$, avem

$$f\left(\frac{x_1 + 3x_2}{4}\right) \geq \frac{f(x_1) + 3f(x_2)}{4}.$$

**12.** Să se rezolve ecuația $3^x + 4^x + 5^x = 6^x$.

**13.** Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} x - 1, & x \leq 2 \\ \log_2 x, & x > 2 \end{cases}$

a) Să se construiască graficul funcției $f$.

b) Să se arate că funcția $f$ este bijectivă, să se afle funcția inversă $f^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ şi să se construiască graficul ei.

c) Să se rezolve ecuația $f(x) = 2 - 2^x$.

**14**. Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} 3^x, & x \in \mathbb{Q} \\ 4^x, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$.

a) Să se arate că funcția este injectivă.

b) Să se arate că funcția nu este strict monotonă.

c) Se poate construi graficul funcției $f$?

# 1.3. Limita unui şir utilizând vecinătăți, proprietăți

## Definiția şirurilor

Fie $k$ un număr natural. Vom nota cu $\mathbb{N}_k = \{n \in \mathbb{N} \mid n \geq k\}$.

| | |
|---|---|
| **Definiție** | O funcție reală definită pe $\mathbb{N}_k$, $n \to a_n$, se numeşte un *şir de numere reale*, sau, mai simplu, *şir*. Vom folosi notația $(a_n)_{n\geq k}$, sau pe scurt $(a_n)$. În general vom considera şiruri $(a_n)_{n\geq 1}$. |

Scrierea obişnuită a unui şir este: $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$

Numerele $a_1, a_2, a_3, \ldots$ se numesc *termenii şirului*, mai precis $a_n$ este *termenul de rang n*.

Două şiruri $(a_n)$ şi $(b_n)$ sunt *egale* dacă şi numai dacă termenii corespunzători sunt egali:

$$a_1 = b_1,\ a_2 = b_2, \ldots,\ a_n = b_n, \ldots$$

Un şir este constant, dacă există $a \in \mathbb{R}$, astfel încât $a_n = a$, $\forall n \geq k$.

## Operații cu şiruri

Fie $(a_n)_{n\geq 1}$ şi $(b_n)_{n\geq 1}$ două şiruri. Conform definiției operațiilor cu funcții, se obțin formulele operațiilor cu şiruri:

**1.** $(a_n) + (b_n) = (a_n + b_n) : a_1 + b_1, a_2 + b_2, \ldots, a_n + b_n, \ldots$

**2.** $\lambda(a_n) = (\lambda a_n) : \lambda a_1, \lambda a_2, \ldots, \lambda a_n, \ldots$, pentru orice $\lambda \in \mathbb{R}$;

**3.** $(a_n)(b_n) = (a_n b_n) : a_1 b_1,\ a_2 b_2, \ldots, a_n b_n, \ldots$

**4.** $\dfrac{(a_n)}{(b_n)} = \left(\dfrac{a_n}{b_n}\right) : \dfrac{a_1}{b_1}, \dfrac{a_2}{b_2}, \ldots, \dfrac{a_n}{b_n}, \ldots$, unde $b_n \neq 0$ pentru orice $n \geq 1$;

**5.** $(a_n)^{(b_n)} = \left(a_n^{b_n}\right) : a_1^{b_1}, a_2^{b_2}, \ldots, a_n^{b_n}, \ldots$, unde $a_n > 0$ pentru orice $n \geq 1$.

**Observații:** 1. Operațiile de adunare şi înmulțire se pot extinde la un număr finit de şiruri.

2. Pentru $\lambda = -1$, obținem şirul $-(a_n) = (-a_n) : -a_1, -a_2, \ldots, -a_n, \ldots$

3. Putem defini şi diferența şirurilor $(a_n)$ şi $(b_n)$ prin:

$(a_n) - (b_n) = (a_n - b_n) : a_1 - b_1, a_2 - b_2, \ldots, a_n - b_n, \ldots$

### Exemple

**1.** Fie şirurile $(a_n)$ şi $(b_n)$, definite prin $a_n = \frac{2}{n+1}$, $b_n = \frac{n}{n+1}$, pentru orice $n \geq 0$. Atunci

$$a_n + b_n = \frac{2}{n+1} + \frac{n}{n+1} = \frac{n+2}{n+1},\ \forall n \geq 0.$$

**2.** Fie şirurile $(a_n)$, $(b_n)$ şi $(c_n)$ cu termenii generali $a_n = \frac{1}{n}$, $b_n = \frac{3}{n}$, respectiv $c_n = \frac{4}{n}$, $\forall n \geq 1$. Avem:

i) $a_n + b_n - c_n = \frac{1+3-4}{n} = 0,\ \forall n \geq 1$;

ii) $a_n \cdot b_n \cdot c_n = \frac{12}{n^3},\ \forall n \geq 1$;

iii) $\frac{a_n}{b_n} + \frac{b_n}{c_n} + \frac{c_n}{a_n} = \frac{1}{n} \cdot \frac{n}{3} + \frac{3}{n} \cdot \frac{n}{4} + \frac{4}{n} \cdot \frac{n}{1} = \frac{1}{3} + \frac{3}{4} + 4 = \frac{61}{12},\ \forall n \geq 1$;

iv) $2a_n + 3b_n + 4c_n = \frac{2+9+16}{n} = \frac{27}{n},\ \forall n \geq 1$;

v) $a_n b_n + b_n c_n - a_n c_n = \frac{3}{n^2} + \frac{12}{n^2} - \frac{4}{n^2} = \frac{11}{n^2},\ \forall n \geq 1$.

## Test de evaluare

**1.** Fie şirurile:

$(a_n)_{n \geq 1}$, $a_1 = \frac{1}{2}$, $a_2 = \frac{2}{3}$, $a_3 = \frac{3}{4}$ ,…, şi $(b_n)_{n \geq 1}$, $b_1 = 2$, $b_2 = \frac{3}{2}$, $b_3 = \frac{4}{3}$ ….

(2*p*) a) Să se determine expresia termenului general pentru fiecare şir în parte.

(2*p*) b) Să se calculeze: $a_n + b_n$, $a_n - b_n$, $a_n \cdot b_n$, $\frac{a_n}{b_n}$.

**2.** Fie şirul $(a_n)_{n \geq 1}$, $a_n = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)}$.

(2*p*) a) Să se verifice egalitatea $\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$;

(2*p*) b) Să se determine expresia termenului general al şirului.

*Timp de lucru: 20 de minute.*

## Şiruri mărginite

| | |
|---|---|
| **Definiție** | • Un şir $(a_n)_{n\geq 1}$ este *mărginit inferior* (respectiv *superior*) dacă există $m \in \mathbb{R}$ (respectiv $M \in \mathbb{R}$) astfel încât $m \leq a_n$, (respectiv $a_n \leq M$) pentru orice $n \geq 1$.<br>• Un şir $(a_n)_{n\geq 1}$ este *mărginit* dacă este mărginit inferior şi superior, deci există $m, M \in \mathbb{R}$ astfel încât $m \leq a_n \leq M$, pentru orice $n \geq 1$. |

Din definiția şirurilor mărginite, deducem următorul:

**Corolar.** *Un şir $(a_n)_{n\geq 1}$ este mărginit dacă şi numai dacă există un număr real $A > 0$ astfel încât $|a_n| \leq A$, pentru orice $n \geq 1$.*

Pentru ca un şir să fie mărginit, este suficient ca inegalitatea de mai sus să fie adevărată începând de la un anumit rang $n_0$, adică $|a_n| \leq A$, pentru orice $n \geq n_0$.

Într-adevăr, notând $B = \max\{|a_1|, \ldots, |a_{n_0}|, A\}$, avem $|a_n| \leq B$, pentru orice $n \geq 1$.

Menționăm următoarele proprietăți:

i) dacă două şiruri $(a_n)$ şi $(b_n)$ sunt mărginite, atunci şirurile $(a_n + b_n)$, $(\lambda a_n)$ şi $(a_n b_n)$ sunt de asemenea mărginite ($\lambda \in \mathbb{R}$).

ii) dacă şirul $(a_n)$ este mărginit superior (respectiv inferior), atunci şirul $(-a_n)$ este mărginit inferior (respectiv superior).

iii) dacă şirul $(a_n)$ cu toți termenii strict pozitivi este mărginit superior (respectiv inferior), atunci şirul $\left(\frac{1}{a_n}\right)$ este mărginit inferior (respectiv superior).

**Observație:** Şirul $(a_n)_{n\geq 1}$ este mărginit dacă şi numai dacă mulțimea valorilor sale $\{a_n | \, n \geq 1\}$ este mărginită.

Şirurile care nu sunt mărginite se numesc *nemărginite*. Deci un şir $(a_n)$ este nemărginit, dacă şi numai dacă oricare ar fi numărul $A > 0$, există un termen $a_n$ astfel încât $|a_n| > A$.

Echivalent, un şir $(a_n)$ este nemărginit dacă oricare ar fi numerele reale $m < M$, există un termen $a_n \notin (m, M)$.

Un şir este nemărginit dacă se realizează una din următoarele situaţii: nu este majorat (exemplu: $a_n = n$), nu este minorat (exemplu: $a_n = -n$), nu este nici majorat şi nici minorat (exemplu: $a_n = (-1)^{n+1}n$).

## Exerciţii rezolvate

Să se studieze mărginirea următoarele şiruri $(a_n)_{n\geq 1}$, date prin termenul general:

**1.** $a_n = \dfrac{n}{n+1}$;

**2.** $a_n = \dfrac{n^2}{n+1}$;

**3.** $a_n = \dfrac{1}{1} + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} + \ldots + \dfrac{1}{n}$;

**4.** $a_n = \dfrac{1}{n+1} + \dfrac{1}{n+2} + \ldots + \dfrac{1}{2n}$;

**5.** $a_n = \dfrac{1\cdot 3\cdot 5\ldots(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\ldots(2n)}$;

**6.** $a_n = \dfrac{2^n+1}{2^n-1}$;

**7.** $a_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$;

**8.** $a_n = \dfrac{2^n}{n!}$;

**9.** $a_n = \dfrac{1\cdot 2 + 2\cdot 3 + \ldots + n(n+1)}{n^3}$;

**10.** $a_n = \dfrac{2^n+1}{C_n^0 + C_n^1 + \ldots + C_n^n}$.

*Soluţii:*

**1.** $0 < \dfrac{n}{n+1} < 1$, pentru orice $n \geq 1$, deci şirul $(a_n)$ este mărginit.

**2.** $a_n = \dfrac{n^2}{n+1} = \dfrac{n^2-1+1}{n+1} = n-1+\dfrac{1}{n+1} > n-1$, pentru orice $n \geq 1$, deci şirul $(a_n)$ este nemărginit.

**3.** Dacă $n = 2^k$, atunci

$$a_n = a_{2^k} = 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{2^{k-1}+1} + \ldots + \frac{1}{2^k}\right) >$$

$$> 1 + \frac{1}{2} + 2\frac{1}{4} + 4\frac{1}{8} + \ldots + 2^{k-1}\frac{1}{2^k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{2} = 1 + \frac{k}{2}.$$

Prin urmare şirul $(a_n)$ este nemărginit.

**4.** $$\frac{1}{2} = \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n} + \ldots + \frac{1}{2n} < a_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{2n} <$$

$$< \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+1} + \ldots + \frac{1}{n+1} = \frac{n}{n+1} < 1.$$

Deci şirul $(a_n)$ este mărginit.

**5.** Evident $0 < a_n < 1$, pentru orice $n \geq 1$, deci şirul $(a_n)$ este mărginit.

**6.** Evident $a_n > 1$. Pe de altă parte, avem:

$$a_n = \frac{2^n+1}{2^n-1} = \frac{2^n-1+2}{2^n-1} = 1 + \frac{2}{2^n-1} \le 1+2 = 3,\ \forall n \ge 1.$$

Deci şirul $(a_n)$ este mărginit.

**7.** $a_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \dfrac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} \in (0,1)$, pentru orice $n \ge 1$, adică $(a_n)$ este mărginit.

**8.** $0 < a_n = \dfrac{2^n}{n!} = \dfrac{2\cdot 2\cdot 2\cdot \ldots \cdot 2}{1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots \cdot n} < 2\cdot\left(\dfrac{2}{3}\right)^{n-2} < 2$, pentru orice $n > 2$, deci şirul $(a_n)$ este mărginit.

**9.** Putem scrie

$$a_n = \frac{1\cdot 2 + 2\cdot 3 + \ldots + n(n+1)}{n^3} = \frac{\sum_{k=1}^{n} k(k+1)}{n^3} = \frac{\sum_{k=1}^{n} k^2 + \sum_{k=1}^{n} k}{n^3} =$$

$$= \frac{\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{n(n+1)}{2}}{n^3} = \frac{(n+1)(n+2)}{3n^2} =$$

$$= \frac{n^2+3n+2}{3n^2} \le \frac{n^2+3n^2+2n^2}{3n^2} = 2.$$

Observăm că $\dfrac{1}{3} < a_n \le 2,\ \forall n \ge 1$. Deci şirul $(a_n)$ este mărginit.

**10.** Se ştie că:

$$C_n^0 + C_n^1 + \ldots + C_n^n = (1+1)^n = 2^n.$$

Atunci $a_n = \dfrac{2^n+1}{2^n} > 0$. De asemenea, avem $a_n = 1 + \dfrac{1}{2^n} \le 1 + \dfrac{1}{2} = \dfrac{3}{2}$, pentru orice $n \ge 1$. Deci şirul $(a_n)$ este mărginit.

## Test de evaluare

**1.** Să se studieze mărginirea următoarelor şiruri:

(*2p*) a) $(a_n)_{n\ge 1}$, $a_n = \dfrac{2n+1}{3n-5}$; (*2p*) b) $a_n = \sqrt{n+2} - \sqrt{n+1}$.

**2.** Sunt adevărate echivalenţele pentru un şir $(a_n)_{n\ge 1}$:

(*2p*) a) $(a_n^2)$ mărginit $\Leftrightarrow$ $(a_n)$ mărginit;

(*2p*) b) $([a_n])$ mărginit $\Leftrightarrow$ $(a_n)$ mărginit?

*Timp de lucru: 30 de minute.*

## Exerciții propuse

Să se studieze mărginirea următoarelor şiruri date prin termenul general:

**1.** $a_n = \dfrac{n+1}{3n+7}$; **2.** $a_n = \dfrac{n^2}{2n^2+1}$;

**3.** $a_n = \dfrac{n^2}{n^3+1}$; **4.** $a_n = \dfrac{1}{1^2}+\dfrac{1}{2^2}+\dfrac{1}{3^2}+\ldots+\dfrac{1}{n^2}$;

**5.** $a_n = \dfrac{1}{1\cdot 2}+\dfrac{1}{2\cdot 3}+\ldots+\dfrac{1}{n(n+1)}$; **6.** $a_n = \sqrt[3]{n+1}-\sqrt[3]{n}$;

**7.** $a_n = \dfrac{n^2}{n!}$; **8.** $a_n = \dfrac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\dfrac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\ldots+\dfrac{1}{\sqrt{n^2+n}}$;

**9.** $a_n = \dfrac{1}{1}+\dfrac{1}{\sqrt{2}}+\ldots+\dfrac{1}{\sqrt{n}}$; **10.** $a_n = \dfrac{\alpha^n}{(1+\alpha)(1+\alpha^2)\ldots(1+\alpha^n)}$, $\alpha > 0$.

### Şiruri monotone

Definiția monotoniei unei funcții implică noțiunea de şir monoton.

| | |
|---|---|
| **Definiție** | • Un şir $(a_n)_{n\geq 1}$ se numeşte *crescător*, dacă $a_n \leq a_{n+1}$, pentru orice $n \geq 1$.<br>• Un şir $(a_n)_{n\geq 1}$ se numeşte *descrescător*, dacă $a_n \geq a_{n+1}$, pentru orice $n \geq 1$.<br>• Un şir este *monoton*, dacă este crescător sau descrescător. |

Analog definim monotonia strictă.

| | |
|---|---|
| **Definiție** | • Un şir $(a_n)_{n\geq 1}$ se numeşte *strict crescător*, dacă $a_n < a_{n+1}$, pentru orice $n \geq 1$.<br>• Un şir $(a_n)_{n\geq 1}$ se numeşte *strict descrescător*, dacă $a_n > a_{n+1}$, pentru orice $n \geq 1$.<br>• Un şir este *strict monoton*, dacă este strict crescător sau strict descrescător. |

Să observăm că orice şir strict monoton este monoton.

Avem următoarele proprietăți:

i) dacă şirurile $(a_n)$ şi $(b_n)$ sunt crescătoare (respectiv strict crescătoare) şi $\lambda > 0$, atunci şirurile $(a_n + b_n)$, $(\lambda a_n)$ sunt crescătoare (respectiv strict crescătoare).

ii) dacă şirul $(a_n)$ este crescător (respectiv strict crescător), atunci şirul $(-a_n)$ este descrescător (respectiv strict descrescător).

iii) dacă şirul de numere strict pozitive $(a_n)$ este crescător (respectiv strict crescător), atunci şirul $(\frac{1}{a_n})$ este descrescător (respectiv strict descrescător).

Analog se obțin proprietăți corespunzătoare pentru şiruri descrescătoare (respectiv strict descrescătoare).

Pentru a studia monotonia unui şir $(a_n)$, vom folosi, în general, următoarele metode:

i) Dacă $a_{n+1} - a_n > 0$ (respectiv $\geq 0$), pentru orice $n \geq 1$, atunci şirul $(a_n)_{n\geq 1}$ este strict crescător (respectiv crescător).

ii) Dacă $a_{n+1} - a_n < 0$ (respectiv $\leq 0$), pentru orice $n \geq 1$, atunci şirul $(a_n)_{n\geq 1}$ este strict descrescător (respectiv descrescător).

iii) Dacă $a_n > 0$ şi $\frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$ (respectiv $\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1$), pentru orice $n \geq 1$, atunci şirul $(a_n)_{n\geq 1}$ este strict crescător (respectiv crescător).

iv) Dacă $a_n > 0$ şi $\frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$ (respectiv $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq 1$), pentru orice $n \geq 1$, atunci şirul $(a_n)_{n\geq 1}$ este strict descrescător (respectiv descrescător).

**Observație:** Există şi şiruri care nu sunt monotone. Exemple:

a) şirurile oscilante: $a_n = (-1)^n$, $b_n = (-1)^n n$, $c_n = 1 + (-1)^n$, pentru orice $n \geq 1$.

b) şirurile periodice: $a_n = \sin n\pi$, $b_n = \cos n\pi$, pentru orice $n \geq 1$.

## Exerciţii rezolvate

Să se studieze monotonia şirurilor analizate la paragraful *şiruri mărginite* (pag. 162).

*Soluţii:*

**1.** Avem $a_n = \dfrac{n}{n+1}$, deci $a_{n+1} = \dfrac{n+1}{n+2}$ şi

$$a_{n+1} - a_n = \frac{n+1}{n+2} - \frac{n}{n+1} = \frac{(n+1)^2 - n(n+2)}{(n+1)(n+2)} = \frac{1}{(n+1)(n+2)} > 0,$$

adică şirul $(a_n)$ este strict crescător.

**2.** Avem $a_n = \dfrac{n^2}{n+1}$, deci

$$a_{n+1} - a_n = \frac{(n+1)^2}{n+2} - \frac{n^2}{n+1} = \frac{(n+1)^3 - n^2(n+2)}{(n+1)(n+2)} = \frac{n^2+3n+1}{(n+1)(n+2)} > 0,$$

adică şirul $(a_n)$ este strict crescător.

**3.** Avem $a_n = \dfrac{1}{1} + \dfrac{1}{2} + \ldots + \dfrac{1}{n}$, deci

$a_{n+1} - a_n = \dfrac{1}{n+1} > 0$, deci şirul $(a_n)$ este strict crescător.

**4.** Avem $a_n = \dfrac{1}{n+1} + \dfrac{1}{n+2} + \ldots + \dfrac{1}{2n}$, de unde

$a_{n+1} = \dfrac{1}{n+2} + \dfrac{1}{n+3} + \ldots + \dfrac{1}{2n} + \dfrac{1}{2n+1} + \dfrac{1}{2n+2}$, deci

$a_{n+1} - a_n = \dfrac{1}{2n+1} + \dfrac{1}{2n+2} - \dfrac{1}{n+1} > 0$, adică şirul $(a_n)$ este strict crescător.

**5.** Avem $a_n = \dfrac{1\cdot 3\cdot 5\cdot\ldots\cdot(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdot\ldots\cdot(2n)}$, deci $a_{n+1} = \dfrac{1\cdot 3\cdot 5\ldots(2n-1)(2n+1)}{2\cdot 4\cdot 6\ldots 2n(2n+2)}$ şi atunci

$\dfrac{a_{n+1}}{a_n} = \dfrac{2n+1}{2n+2} < 1$, adică şirul $(a_n)$ este strict descrescător.

**6.** Observăm că $a_n = \dfrac{2^n+1}{2^n-1} = 1 + \dfrac{2}{2^n-1}$, deci $a_{n+1} = 1 + \dfrac{2}{2^{n+1}-1}$ şi

$a_{n+1} - a_n = -\dfrac{2^{n+1}}{(2^n-1)(2^{n+1}-1)} < 0$, adică şirul $(a_n)$ este strict descrescător.

**7.** Observăm că $a_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \dfrac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$. Atunci

$a_{n+1} = \dfrac{1}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n+1}}$. Evident $a_{n+1} < a_n$, deci şirul $(a_n)$ este strict descrescător.

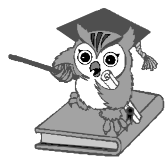
**8.** Avem $a_n = \dfrac{2^n}{n!}$ şi $a_{n+1} = \dfrac{2^{n+1}}{(n+1)!}$. Atunci $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} = \dfrac{2^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \dfrac{n!}{2^n} = \dfrac{2}{n+1} \le 1$, deci şirul $(a_n)$ este strict descrescător.

**9.** Avem $a_n = \dfrac{1\cdot 2\cdot + 2\cdot 3 + \ldots + n(n+1)}{n^3}$ şi s-a arătat că $a_n = \dfrac{(n+1)(n+2)}{3n^2}$.

Atunci $a_{n+1} = \dfrac{(n+2)(n+3)}{3(n+1)^2}$ şi $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} = \dfrac{n^2(n+3)}{(n+1)^3} < 1$, deci şirul $(a_n)$ este strict descrescător.

**10.** Am văzut că $a_n = \dfrac{2^n+1}{2^n} = 1 + \dfrac{1}{2^n}$. Evident $a_{n+1} = 1 + \dfrac{1}{2^{n+1}} < a_n$, deci şirul $(a_n)$ este strict descrescător.

## *Test de evaluare*



**1.** Să se studieze monotonia următoarelor şiruri $(a_n)_{n\ge 1}$:

(*2p*) a) $a_n = \dfrac{2n-1}{5n+7}$; (*2p*) b) $a_n = \sqrt{n^2+n} - \sqrt{n^2+1}$.

**2.** Sunt adevărate echivalențele pentru un şir $(a_n)_{n\ge 1}$:

(*2p*) a) $(a_n^2)$ strict crescător $\Leftrightarrow$ $(a_n)$ strict crescător;

(*2p*) b) $(na_n)$ strict crescător $\Leftrightarrow$ $(a_n)$ strict crescător?

*Timp de lucru: 40 de minute.*

## Exerciții propuse

Să se studieze monotonia următoarelor şiruri, date prin termenul general:

**1.** $a_n = \dfrac{2n}{3n+2}$;

**2.** $a_n = \dfrac{2n^2}{3n^2+1}$;

**3.** $a_n = \dfrac{1}{1\cdot 2} + \dfrac{1}{2\cdot 3} + \ldots + \dfrac{1}{n(n+1)}$;

**4.** $a_n = \dfrac{1^3+2^3+\ldots+n^3}{n^4}$;

**5.** $a_n = \dfrac{2n^2}{3n^2+1}$;

**6.** $a_n = \dfrac{1}{\sqrt{n}} - \dfrac{1}{\sqrt{n+1}}$;

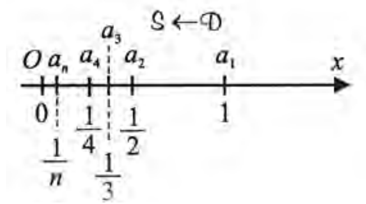
**7.** $a_n = \sum_{k=1}^{n} \log_{\frac{1}{2}} \frac{k(k+2)}{(k+1)^2}$; **8.** $a_n = \frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \ldots \cdot 2n}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (2n+1)}$;

**9.** $a_n = \frac{5}{4} \cdot \frac{7}{7} \cdot \frac{9}{10} \cdot \ldots \cdot \frac{5+2(n-1)}{4+3(n-1)}$.

## Limita unui şir. Şiruri convergente

Vom analiza următoarele exemple:

**1.** Să considerăm şirul $(a_n)_{n\geq 1}$, cu termenul general $a_n = \frac{1}{n}$. Reprezentăm termenii şirului pe axa numerelor reale.




Se observă că pe măsură ce $n$ creşte, termenii şirului se apropie din ce în ce mai mult de 0, iar când rangul $n$ este foarte mare, toţi termenii şirului începând de la acest rang se „îngrămădesc“ de la dreapta la stânga către 0.

Vom alege o vecinătate $V$ oarecare a lui 0 care conţine vecinătatea simetrică $V' = (-\varepsilon, \varepsilon)$, cu $\varepsilon > 0$. Avem $a_n \in (-\varepsilon, \varepsilon) \Rightarrow \frac{1}{n} < \varepsilon \Rightarrow n > \frac{1}{\varepsilon}$ şi $n_\varepsilon = \left[\frac{1}{\varepsilon}\right] + 1$.

Începând cu $n_\varepsilon$, toţi termenii şirului sunt mai mici decât $\varepsilon$, deci

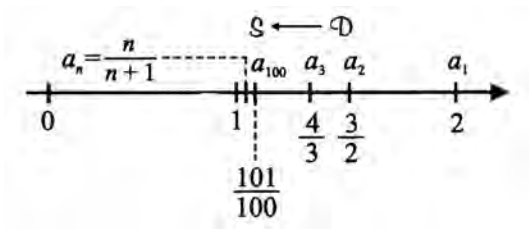
$$a_n \in (0, \varepsilon) \subset V' \subset V \Rightarrow a_n \in V.$$

Deci şirul $a_n = \frac{1}{n}$ tinde către 0 şi vom scrie $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0.$

**2.** Considerăm şirul $b_n = \frac{1}{n^k}$, unde $k \in \mathbb{N}^*$ este un număr natural diferit de 1. Deoarece $b_n = a_{n^k}$ (din exemplul 1), în orice vecinătate $V$ a lui 0 se găsesc toţi termenii şirului $(b_n)_{n\geq 1}$, cu excepţia unui număr finit.

**3.** Considerăm şirul $(a_n)_{n\geq 1}$, cu termenul general $a_n = \frac{n+1}{n}$ şi reprezentăm termenii şirului pe axa numerelor reale.

Intuitiv se observă că pe măsură ce $n$ creşte (rangul creşte), termenii şirului se apropie din ce în ce mai mult de 1, iar atunci când $n$ este suficient de mare, toţi termenii şirului începând de la acest rang se „îngrămădesc“ de la dreapta la stânga către 1.




Vom alege o vecinătate $V$ oricare a lui 1 şi vom arăta că există un rang începând de la care toți termenii şirului se află în această vecinătate a lui 1.

Cunoaştem că în vecinătatea $V$ se află o vecinătate simetrică $V' = (1 - \varepsilon, 1 + \varepsilon)$, cu $\varepsilon > 0$. Pe de altă parte, faptul că $a_n \in V'$ implică $a_n \in (1 - \varepsilon, 1 + \varepsilon) \Leftrightarrow |a_n - 1| < \varepsilon \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow \left|\frac{n+1}{n} - 1\right| < \varepsilon \Leftrightarrow \frac{1}{n} > \varepsilon \Leftrightarrow n > \frac{1}{\varepsilon}$. Conform axiomei lui Arhimede, există $n_\varepsilon = \left[\frac{1}{\varepsilon}\right] + 1$ natural. Evident, pentru $n \geq n_\varepsilon$, avem $n > \frac{1}{\varepsilon}$. Deci rangul căutat este $n_\varepsilon = \left[\frac{1}{\varepsilon}\right] + 1$.

Pentru orice $n \geq n_\varepsilon$, avem $n > \frac{1}{\varepsilon} \Rightarrow \frac{1}{n} < \varepsilon \Rightarrow a_n \in (1 - \varepsilon, 1 + \varepsilon) \Rightarrow a_n \in V' \subset V$.

**Observație:** Rangul căutat depinde de alegerea lui $\varepsilon$ şi, implicit, de alegerea vecinătăților simetrice $(1 - \varepsilon, 1 + \varepsilon)$ şi de vecinătatea $V$ considerată. Cu cât $\varepsilon$ este mai mic, cu atât în afara vecinătății $V'$ se află un număr mai mare de termini ai şirului. Cu cât lungimea intervalului $(1 - \varepsilon, 1 + \varepsilon)$ este mai mare, cu atât în afara intervalului se va afla un număr mai mic de termeni ai şirului sau intervalul poate să conțină toți termenii şirului.

***Exemplu***

Pentru $\varepsilon = \frac{1}{2}$, avem $V' = \left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$ care conține toți termenii şirului în afară de primul, adică $\frac{1}{2} \leq \frac{n+1}{n} \leq \frac{3}{2}$, relație care este adevărată pentru $n \geq 2$.

Pentru $\varepsilon = \frac{1}{10}$, avem $V' = \left(\frac{9}{10}, \frac{11}{10}\right)$. Se observă că termenii $\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \ldots, \frac{11}{10} \notin V'$, deci în afara vecinătăţii se află primii 10 termeni ai şirului.

Din analiza exemplului 3, considerăm că fiecare vecinătate $V$ a lui 1 conţine toţi termenii şirului $a_n = \frac{n+1}{n}$ de la un anumit rang, cu excepţia (eventual) a unui număr finit de termeni care se află în afara vecinătăţii. Aceasta constituie, în fond, exprimarea matematică riguroasă a faptului că toţi termenii şirului se apropie din ce în ce mai mult de 1, fapt intuit chiar de la început.

Din punct de vedere matematic, spunem că şirul $(a_n)_{n\geq 1}$, cu $a_n = \frac{n+1}{n}$, are limita 1 sau că $a_n$ tinde către 1 şi scriem: $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = \frac{n+1}{n} = 1$ sau $a_n \to 1$.

**4.** Fie şirul de termeni general $d_n = n$. Observăm că pentru orice număr real $M > 0$, avem $d_n > M$, pentru orice $n \geq [M] + 1$.

Pornind de la exemplele analizate, vom introduce noţiunea de limită a unui şir.

| | |
|---|---|
| **Definiţie** | • Fie un şir $(a_n)$ şi $a \in \overline{\mathbb{R}}$. Vom spune că $a$ este *limita* şirului $(a_n)$ dacă orice vecinătate a lui $a$ conţine toţi termenii şirului $(a_n)$, cu excepţia unui număr finit de termeni.<br>*Notaţie:* $\lim a_n = a$ sau $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ sau $a_n \to a$.<br>• Dacă $a$ este finit, atunci şirul $(a_n)$ se numeşte *convergent*.<br>• Un şir care nu este convergent se numeşte *divergent*. |

Distingem două clase de şiruri divergente:

a) şiruri care au limita $\pm\infty$;

b) şiruri care nu au limită.

## Exerciţiu rezolvat

Se consideră şirul $(a_n)_{n\geq 1}$, cu $a_n = \frac{n}{n^2+1}$. Să se arate că $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 0$.

*Rezolvare*

Fie $V$ o vecinătate a lui 0 şi $\varepsilon > 0$ astfel că $V' = (-\varepsilon, \varepsilon) \subset V$. Conform axiomei lui Arhimede, există $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ astfel încât $n_\varepsilon > \frac{1}{\varepsilon}$ (vezi exemplele anterioare). Pentru orice $n \geq n_\varepsilon$, avem $n + \frac{1}{n} > n > n_\varepsilon \geq \frac{1}{\varepsilon}$ şi deci $\frac{n^2+1}{n} > \frac{1}{\varepsilon} \Rightarrow \frac{n}{n^2+1} < \varepsilon \Rightarrow a_n \in V' \subset V$. Deci $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 0$.

### *Exemple*

**1.** Şirul $a_n = \dfrac{1}{n}$ este convergent şi $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

**2.** Şirul $a_n = \dfrac{1}{n^k}$, cu $k \in \mathbb{N}^*$, este convergent şi $\lim a_n = 0$.

**3.** Şirul $a_n = n$ este divergent şi $\lim a_n = +\infty$.

**4.** Şirul $a_n = (-1)^n$ este divergent şi nu există $\lim a_n$.

## Proprietăți ale limitelor de şiruri

**Propoziția 1.** *Un şir convergent are o singură limită.*

*Demonstrație*

Fie $(a_n)$ un şir convergent cu $\lim a_n = a$. Dacă $a' \neq a$, există o vecinătate $V$ a lui $a$ şi o vecinătate $V'$ a lui $a'$ astfel încât $V \cap V' = \varnothing$. Deoarece $a_n \to a$, vecinătatea $V$ conține toți termenii şirului cu excepția unui număr finit. Deci în vecinătatea $V'$ a lui $a'$ se află numai un număr finit de termeni ai şirului $(a_n)$. Prin urmare $a'$ nu poate fi limita şirului $(a_n)$.

**Propoziția 2.** *Dacă* $(a_n)$ *este un şir convergent, atunci şirul* $(|a_n|)$ *este convergent şi*

$$\lim |a_n| = |\lim a_n|.$$

**Observație:** Reciproca, în general, nu este adevărată.
De exemplu: $a_n = (-1)^n$ şi $|a_n| = 1$.

**Propoziția 3.** *Orice şir convergent este mărginit.*

*Demonstrație*

Fie $(a_n)$ un şir convergent şi $\lim a_n = a$. Notând $M = |a| + 1$, intervalul $(-M, M)$ este o vecinătate a lui $a$. Din definiția limitei, rezultă că în afara acestei vecinătăți se află un număr finit de termeni, adică există $n_0 \geq 1$ astfel încât $|a_n| \leq M$, pentru orice $n \geq n_0$.

Deci şirul $(a_n)$ este mărginit.

**Corolar.** *Orice şir nemărginit este divergent.*

**Propoziția 4.** *Dacă şirul* $(a_n)$ *este convergent şi există* $n_0 \geq 1$ *astfel încât:*

$$m \leq a_n \leq M, \text{ pentru orice } n \geq n_0, \text{ atunci}$$

$$m \leq \lim a_n \leq M$$

*Demonstrație*

Fie $\lim a_n = a$. Făcând acelaşi raționament ca în demonstrația propozitiei 3, obținem ca $m \leq a \leq M$.

În particular, avem:

**Corolar.** i) *Dacă şirul* $(a_n)$ *este convergent şi* $a_n \geq 0$, *pentru orice* $n \geq n_0$, *atunci*

$$\lim a_n \geq 0.$$

ii) *Dacă şirul* $(a_n)$ *este convergent şi* $a_n \leq 0$, *pentru orice* $n \geq n_0$, *atunci*

$$\lim a_n \leq 0.$$

**Observație:** Dacă în enunțurile precedente termenii şirului verifică inegalități stricte, nu rezultă că limitele verifică inegalități stricte.

*Contraexemplu*

Considerăm şirul $a_n = \dfrac{1}{n}$, pentru $n \geq 1$. Observăm că $a_n > 0$, dar $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

***Exemplu***

Se consideră şirul $(a_n)_{n\geq 1}$, $a_n = 0$. Să se arate că şirul este divergent şi $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} n = +\infty$.

*Soluție*

Vom arăta că nici un număr real nu este limită a acestui şir.

Într-adevăr, fie $a \in \mathbb{R}$ şi $V_a = \left(a - \dfrac{1}{2}, a + \dfrac{1}{2}\right)$, o vecinătate simetrică lui $a$ de lungime 1. Dacă $a > \dfrac{1}{2}$, atunci în vecinătatea lui $V_a$ se află un singur număr natural, iar dacă $a \leq \dfrac{1}{2}$ în vecinătatea $V_a$ nu se află nici un număr natural şi deci toate numerele naturale se află în afara vecinătății $V_a$. Deci $a$ nu este limită a şirului numerelor naturale, iar cum $a$ a fost ales arbitrar, rezultă că nici un număr finit nu poate fi limita şirului numerelor naturale şi deci şirul este divergent şi vom scrie simbolic $\lim\limits_{n\to\infty} n = +\infty$ ($+\infty$ fiind singurul punct de acumulare a mulțimii numerelor naturale.

# 1.4. Şiruri convergente: intuitiv, comportarea valorilor unei funcții cu grafic continuu când argumentul se apropie de o valoare dată, şiruri convergente: exemple semnificative: $(a^n)_n$, $(n^\alpha)_n$, $((1 + 1/n)^n)_n$, operații cu şiruri convergente, convergența şirurilor utilizând proprietatea Weierstrass. Numărul e; limita şirului $\left((1+u_n)^{1/u_n}\right)_n$; $u_n \to 0$

În cazul funcțiilor cu grafic continuu, vom analiza mai întâi funcțiile elementare, urmând ca pentru celelalte să se procedeze analog.

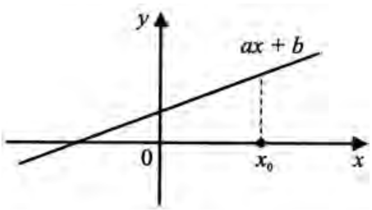


**Figura 20**

Funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = ax + b$, cu $a, b \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, are graficul o dreaptă. Fie $x_0 \in \mathbb{R}$. Dacă avem şirul $(x_n)_{n\geq 1}$ cu $x_n \in \mathbb{R}$ şi $x_n \to x_0$, atunci $f(x_n) = ax_n + b$, iar şirul $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ este convergent la $ax_0 + b$.

**Observație:**
- Pentru a putea studia comportarea funcției $f : D \to \mathbb{R}$ în jurul lui $x_0$, trebuie să existe cel puțin un şir $(x_n)_n$, cu $x_n \in D$, $x_n \neq x_0$, astfel încât $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = x_0$ şi $\lim\limits_{n\to+\infty} f(x_n) = l$.
- Punctul $x_0$ cu această proprietate se numeşte *punct de acumulare* al mulțimii $D$.

Condiția de mai sus este îndeplinită dacă domeniul de definiție $D$ al funcției este un interval (care nu se reduce la un punct) mărginit sau nemărginit ori o reuniune finită de astfel de intervale, iar $x_0$ aparține intervalului sau este o extremitate a sa. Pentru funcțiile elementare (cu grafic continuu) problema limitei se pune atât în puncte ce aparțin intervalului cât şi în capetele intervalului.

**Observație:** În cazul când avem $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, domeniul de definiție fiind mulțimea numerelor naturale, problema se reduce la compararea valorilor $a_n = f(n) \in \mathbb{R}$, când $n$ se apropie necontenit de $x_0 = +\infty$, care este singurul punct de acumulare al lui $\mathbb{N}$, astfel suntem conduşi la studiul limitei şirului $(a_n)_{n\geq 0}$, $a_n = f(n)$.

| | |
|---|---|
| **Definiție** | Pentru orice şir $(a_n)_{n\geq k}$ de numere reale vom numi *graficul şirului* submulțimea $G \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ definită prin $G = \{(n, a_n) \mid n \in \mathbb{N}_k\} = \{(n, f(n)) \mid n \in \mathbb{N}_k\}$, unde $\mathbb{N}_k = \{k, k+1, k+2, ...\}, k \in \mathbb{N}$. |

Pentru a înțelege problema pusă în discuție să analizăm câteva exemple de funcții elementare.

***Exemple***

**1.** Fie funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dată prin $f(x) = x$ şi fie $x_0 = 1$.

Să studiem comportarea funcției în jurul punctului $x_0 = 1$. Considerăm şiruri particulare convergente la 1: de exemplu, $(x_n)_{n\geq 1}$, cu $x_n = 1 + \frac{1}{n}$, $\forall n \geq 1$, şi $(x'_n)_{n\geq 1}$, cu $x'_n = 1 - \frac{1}{n}$, $\forall n \geq 1$, $x_n \to 1$, $x'_n \to 1$. Atunci avem:

$f(x_n) = f\left(1 + \frac{1}{n}\right) = 1 + \frac{1}{n}$, iar şirul $(f(x_n))_{n\geq 1}$ obținut va fi:

$1 + \frac{1}{1},\ 1 + \frac{1}{2},\ 1 + \frac{1}{3}, \ldots,\ 1 + \frac{1}{n}, \ldots$ (fig. 21), care este convergent la 1;

$f(x'_n) = 1 - \frac{1}{n}$, iar şirul $(f(x'_n))_{n\geq 1}$ obținut va fi:

$1 - \frac{1}{1},\ 1 - \frac{1}{2},\ 1 - \frac{1}{3}, \ldots,\ 1 - \frac{1}{n}$ (fig. 22), care este convergent la 1.

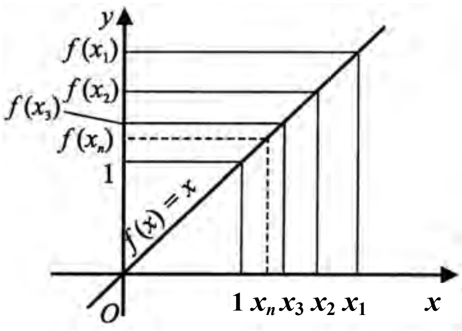



Figura 21

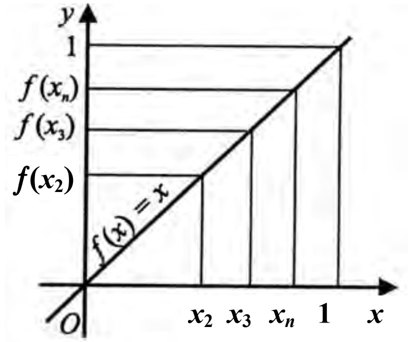



Figura 22

Din figurile 21, 22 se observă că şirurile $(f(x_n))_{n\geq1}$ şi $(f(x_n'))_{n\geq1}$ converg la 1.

În general, dacă vom considera şirul $(x_n)_{n\geq1}$, cu $x_n = 1 + \alpha_n$, $\alpha_n \in \mathbb{R}^*$, când $\alpha_n \to 0$, vom avea că $f(x_n) = f(1 + \alpha_n) \to 1$, când $n \to +\infty$.

**2.** Fie funcția $f : \mathbb{R} \to (0, +\infty)$, dată prin $f(x) = 2^x$ şi $x_0 = 0$.

Să studiem comportarea funcției $f$ în jurul punctului 0.

Considerăm şirul $(x_n)_{n\geq1}$, $x_n \neq 0$, $x_n = \dfrac{1}{n}$ şi $x_n \to 0$.

Atunci $f(x_n) = 2^{\frac{1}{n}}$, iar şirul $(f(x_n))_{n\geq1}$ se prezintă sub forma:

$2^{\frac{1}{1}}, 2^{\frac{1}{2}}, 2^{\frac{1}{3}}, \ldots, 2^{\frac{1}{n}}, \ldots$ (fig. 23).

Se poate observa că limita şirului $2, \sqrt{2}, \sqrt[3]{2}, \ldots, \sqrt[n]{2}, \ldots$ este 1 şi deci

$\lim\limits_{x\to0} 2^x = 1.$

Fie $x_0 = -\infty$ şi fie şirul $(x_n)_{n\geq1}$, cu $x_n = -n$. Atunci $f(x_n) = 2^{-n}$, iar şirul $(f(x_n))_{n\geq1}$ va fi de forma: $2^{-1}, 2^{-2}, 2^{-3}, \ldots, 2^{-n}, \ldots$ (fig. 24).

Se constată că şirul $(f(x_n))_{n\geq1}$ este convergent şi $\lim\limits_{n\to+\infty} f(x_n) = 0$. Aşadar putem spune că: $\lim\limits_{x\to-\infty} 2^x = 0$.

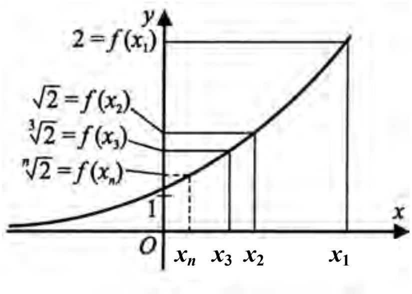



**Figura 23**

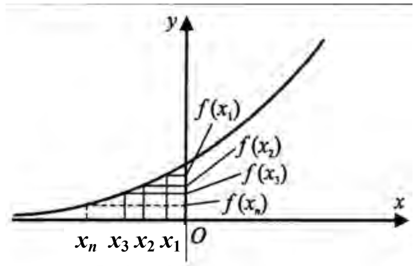



**Figura 24**

**3.** Fie funcţia $f : \mathbb{R} \to [-1, 1]$, dată prin $f(x) = \sin x$ şi $x_0 = \dfrac{\pi}{2}$.

Considerăm şirul $(x_n)_{n\geq 1}$, cu $x_n \neq \dfrac{\pi}{2}$, $x_n = \dfrac{\pi}{2} + \dfrac{\pi}{n}$ şi $x_n \to \dfrac{\pi}{2}$. Atunci

$$f(x_n) = f\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{n}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{n}\right) = \cos\frac{\pi}{n}.$$

Dând valori lui $n \in \mathbb{N}^*$; obţinem şirul $(f(x_n))_{n\geq 1} = \left(\cos\dfrac{\pi}{n}\right)_{n\geq 1}$ de forma:

$\cos \pi, \cos\dfrac{\pi}{2}, \cos\dfrac{\pi}{3}, \ldots, \cos\dfrac{\pi}{n}, \ldots$ (fig. 25).

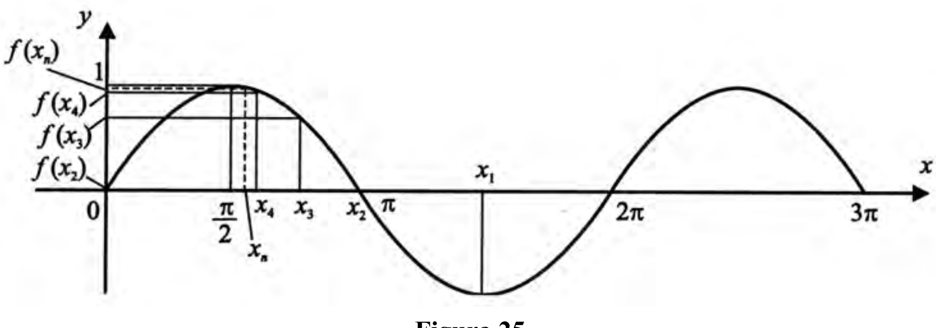



**Figura 25**

Se observă că şirul $\cos \pi, \cos\dfrac{\pi}{2}, \cos\dfrac{\pi}{3}, \ldots, \cos\dfrac{\pi}{n}, \ldots$ se apropie de 1 şi deci

$\lim\limits_{n\to+\infty} \cos\dfrac{\pi}{n} = 1$ şi $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \sin x = 1.$

## Exerciții propuse

Să se determine comportarea valorilor următoarelor funcții când argumentul se apropie de fiecare dintre punctele $x_0$ specificate:

**1.** $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, cu $f(x) = 2^{-x}$ şi $x_0 = 1$;

**2.** $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, cu $f(x) = \cos x$ şi $x_0 = \frac{\pi}{2}$;

**3.** $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, cu $f(x) = -x^3$ şi $x_0 = -1$;

**4.** $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$, cu $f(x) = \log_2 x$ şi $x_0 = 1$;

**5.** $f : \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \to \mathbb{R}$, cu $f(x) = \operatorname{tg} x$ şi $x_0 = \frac{\pi}{4}$;

**6.** $f : (-1, 1) \to \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, cu $f(x) = \arcsin x$ şi $x_0 = \frac{1}{2}$.

## Operații cu şiruri convergente

Vom arată că proprietatea de convergență se păstrează la operații cu şiruri.

**Propoziția 1.** *Dacă şirurile* $(a_n)$ *şi* $(b_n)$ *sunt convergente şi* $\lambda \in \mathbb{R}$, *atunci şirurile* $(a_n + b_n)$, $(\lambda a_n)$ *şi* $(a_n b_n)$ *sunt convergente şi avem:*

i) $\lim (a_n + b_n) = \lim a_n + \lim b_n$;

ii) $\lim (\lambda a_n) = \lambda \lim a_n$;

iii) $\lim (a_n b_n) = \lim a_n \cdot \lim b_n$.

*Demonstrație*

Fie $\lim a_n = a$ şi $\lim b_n = b$.

i) Fie $V$ o vecinătate a lui $a + b$. Atunci există $\varepsilon > 0$, astfel încât: $(a + b - \varepsilon, a + b + \varepsilon) \subset V$.

Intervalul $(a - \frac{\varepsilon}{2}, a + \frac{\varepsilon}{2})$ este o vecinătate a lui $a$, deci există un rang $n_1$ astfel încât $a_n \in (a - \frac{\varepsilon}{2}, a + \frac{\varepsilon}{2})$, pentru orice $n \geq n_1$.

Analog există un rang $n_2$, astfel încât $b_n \in (b - \frac{\varepsilon}{2}, b + \frac{\varepsilon}{2})$, pentru orice $n \geq n_2$.

Atunci $a_n + b_n \in (a + b - \varepsilon, a + b + \varepsilon) \subset V$, pentru orice $n \geq \max\{n_1, n_2\}$. Deci $\lim (a_n + b_n) = a + b$.

ii) Dacă $\lambda = 0$ este evident.

Fie $\lambda \neq 0$. Avem $\lambda a_n - \lambda a = \lambda(a_n - a)$. Pentru orice vecinătate $V$ a lui $\lambda a$, există $\varepsilon > 0$, astfel încât $(\lambda a - \varepsilon, \lambda a + \varepsilon) \subset V$.

Intervalul $(a - \frac{\varepsilon}{|\lambda|}, a + \frac{\varepsilon}{|\lambda|})$ este o vecinătate a lui $a$, deci există un rang $n_1$ astfel încât $a_n \in (a - \frac{\varepsilon}{|\lambda|}, a + \frac{\varepsilon}{|\lambda|})$, pentru orice $n \geq n_1$.

Atunci, pentru orice $n \geq n_1$,

$$|\lambda(a_n - a)| = |\lambda||a_n - a| < |\lambda| \frac{\varepsilon}{|\lambda|} = \varepsilon,$$

sau echivalent, $\lambda a_n \in (\lambda a - \varepsilon, \lambda a + \varepsilon) \subset V$, pentru orice $n \geq n_1$.

iii) Notăm $a_n = a - \alpha_n$ *şi* $b_n - b = \beta_n$. Şirurile $(\alpha_n)$ şi $(\beta_n)$ au limita 0. Putem scrie $a_n b_n = ab + \alpha_n\beta_n + a\beta_n + b\alpha_n$.

Conform ii), $\lim a\beta_n = \lim b\alpha_n = 0$. Rămâne să demonstrăm că $\alpha_n\beta_n \to 0$.

Într-adevăr, fie $V$ o vecinătate a lui 0. Atunci există $\varepsilon > 0$, astfel încât $(-\varepsilon, \varepsilon) \subset V$. Putem presupune $\varepsilon < 1$.

Atunci există un rang $n_0$ astfel încât $\alpha_n$, $\beta_n \in (-\varepsilon, \varepsilon)$, pentru orice $n \geq n_0$. Deci $\alpha_n\beta_n \in (-\varepsilon^2, \varepsilon^2) \subset (-\varepsilon, \varepsilon) \subset V$, pentru orice $n \geq n_0$, adică $\lim \alpha_n\beta_n = 0$.

**Corolar 1.** Fie $k \geq 2$ *un număr natural şi şirurile* $(a_n^1)$, $(a_n^2)$, …$(a_n^k)$. *Dacă acestea sunt convergente, atunci şirurile* $(a_n^1 + a_n^2 + \ldots + a_n^k)$ şi $(a_n^1\, a_n^2 \ldots a_n^k)$ *sunt convergente şi avem:*

i) $\lim (a_n^1 + a_n^2 + \ldots + a_n^k) = \lim a_n^1 + \lim a_n^2 + \ldots + \lim a_n^k$;

ii) $\lim (a_n^1 \cdot a_n^2 \cdot \ldots \cdot a_n^k) = \lim a_n^1 \cdot \lim a_n^2 \cdot \ldots \cdot \lim a_n^k$.

**Corolar 2.** *Dacă şirurile* $(a_n)$ şi $(b_n)$ *sunt convergente şi* $a_n > 0$, $\forall n \geq 1$, *atunci şirul* $(a_n^{b_n})$ este *convergent şi avem:*

$$\lim (a_n^{b_n}) = (\lim a_n)^{\lim b_n}$$

**Propoziția 2.** *Dacă şirurile* $(a_n)$ *şi* $(b_n)$ *sunt convergente şi* $\lim b_n \neq 0$, *atunci şirul* $\left(\frac{a_n}{b_n}\right)$ *este convergent şi*

$$\lim \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim a_n}{\lim b_n}$$

*Demonstrație*

Şirul $(b_n)$ este mărginit deoarece este convergent. Cum $\lim b_n \neq 0$, putem alege $m < M$ două numere reale astfel încât $0 \notin [m, M]$ şi $m \leq b_n \leq M,$ pentru orice $n \geq n_0$. Atunci şi şirul $\left(\frac{1}{b_n}\right)$ este mărginit.

Notând $\lim b_n = b$, putem scrie

$$\frac{1}{b_n}-\frac{1}{b}=\frac{1}{b_n}\frac{1}{b}(b-b_n)$$

Şirul $(b - b_n) \to 0$, deci $\lim\frac{1}{b_n}=\frac{1}{b}$

Pentru a încheia demonstrația, observăm că

$$\frac{a_n}{b_n}=a_n\frac{1}{b_n}\to a\frac{1}{b}=\frac{a}{b}.$$

**Observația 1.** Propozițiile de mai sus au loc şi pentru şiruri care au limită, dacă se fac următoarele convenții:

i) $a + (\pm\infty) = \pm\infty + a = \pm\infty$, pentru orice $a \in \mathbb{R}$;

ii) $a \cdot \infty = \infty \cdot a = \infty$, pentru orice $a > 0$;

$a \cdot \infty = \infty \cdot a = -\infty$, pentru orice $a < 0$;

$a \cdot (-\infty) = (-\infty) \cdot a = -\infty$, pentru orice $a > 0$;

$a \cdot (-\infty) = (-\infty) \cdot a = +\infty$, pentru orice $a < 0$;

iii) $\dfrac{a}{\pm\infty} = 0$, pentru orice $a \in \mathbb{R}$;

$\dfrac{\pm\infty}{a}=\pm\infty$, pentru orice $a > 0$;

$\dfrac{\pm\infty}{a}=\mp\infty$ pentru orice $a < 0$;

iv) $a^{+\infty} = +\infty$, pentru orice $a > 1$;

$a^{+\infty} = 0$, pentru orice $a \in (0,1)$;

$a^{-\infty} = 0$, pentru orice $a > 1$;

$a^{-\infty} = +\infty$, pentru orice $a \in (0,1)$.

**Observația 2.** Cazurile nemenționate se numesc *nedeterminări*. Acestea sunt următoarele:

i) Cazul $\frac{0}{0}$;

Prin această nedeterminare înțelegem: dacă șirurile $(a_n)$ și $(b_n)$ au limita 0, șirul $\left(\frac{a_n}{b_n}\right)$ poate avea limită finită, limită infinită sau să nu aibă limită.

***Exemple***

a) Fie $a \in \mathbb{R}$. Șirurile $a_n = \frac{a}{n}$ și $b_n = \frac{1}{n}$ au limita 0.

Evident $\lim \frac{a_n}{b_n} = a$.

b) Dacă $a_n = \frac{1}{n}$ și $b_n = \frac{1}{n^2}$, atunci $\frac{a_n}{b_n} = n \to +\infty$.

c) Dacă $a_n = \frac{(-1)^n}{n}$ și $b_n = \frac{1}{n}$, atunci $\frac{a_n}{b_n} = (-1)^n$ nu are limită.

ii) Cazul $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$;

iii) Cazul $\infty - \infty$;

iv) Cazul $0 \cdot (\pm\infty)$;

v) Cazurile $1^{\pm\infty}$, $0^0$, $(\pm\infty)0$.

Vom reveni asupra acestora la „Limite de funcții”.

Menționăm următoarea proprietate de trecere la limită în inegalități.

**Propoziția 3.** *Dacă șirurile* $(a_n)$ *și* $(b_n)$ *sunt convergente și* $a_n \leq b_n$*, pentru orice* $n \geq 1$*, atunci* $\lim a_n \leq \lim b_n$.

*Demonstrație*

Notăm $\lim a_n = a$ și $\lim b_n = b$. Șirul $(b_n - a_n)$ este convergent și are limita $b - a$. Dar $b_n - a_n \geq 0$, deci $b - a \geq 0$, adică $a \leq b$.

Avem următorul criteriu de convergență, cunoscut sub numele de *Teorema „cleștelui“*.

**Teoremă.** *Fie șirurile* $(a_n)$, $(b_n)$ *și* $(x_n)$ *care îndeplinesc condițiile* $a_n \leq x_n \leq b_n$, *pentru orice* $n \geq 1$.

*Dacă șirurile* $(a_n)$ *și* $(b_n)$ *sunt convergente și au aceeași limită, atunci șirul* $(x_n)$ *este convergent și are aceeași limită ca șirurile* $(a_n)$ *și* $(b_n)$.

*Demonstrație*

Din inegalitățile $a_n \le x_n \le b_n$, pentru orice $n \ge 1$, rezultă $0 \le x_n - a_n \le b_n - a_n \to 0$. Aplicând definiția limitei unui şir, rezultă că $x_n - a_n \to 0$, adică există $\lim x_n = \lim a_n$.

Menționăm că teorema cleştelui este adevărată şi pentru $\lim a_n = \lim b_n = \pm\infty$:

- dacă $x_n \ge a_n$, pentru $n \ge 1$ şi dacă $a_n \to +\infty$, atunci $x_n \to +\infty$;
- dacă $x_n \le b_n$, pentru $n \ge 1$ şi dacă $b_n \to -\infty$, atunci $x_n \to -\infty$.

## Exerciții rezolvate

Să se determine limitele următoarelor şiruri:

**1.** $(a_n)_{n\ge1},\ a_n = \dfrac{\sin n\frac{\pi}{2}}{n^2}$; **2.** $(a_n)_{n\ge1},\ a_n = (-1)^{n+1}\dfrac{1}{n+1}$;

**3.** $(a_n)_{n\ge1},\ a_n = \sqrt[n]{n}$; **4.** $(a_n)_{n\ge1},\ a_n = \dfrac{n^2}{n!}$.

**5.** $(a_n)_{n\ge1},\ a_n = \dfrac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \dfrac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \ldots + \dfrac{1}{\sqrt{n^2+n}}$;

**6.** $(a_n)_{n\ge1},\ a_n = \dfrac{\sin 1}{n^2+1} + \dfrac{\sin 2}{n^2+2} + \ldots + \dfrac{\sin n}{n^2+n}$;

**7.** $(a_n)_{n\ge1},\ a_n = \dfrac{1^2+1}{n^3+1} + \dfrac{2^2+2}{n^3+2} + \ldots + \dfrac{n^2+n}{n^3+n}$;

*Soluții:*

**1.** Cum $\left|\sin n\frac{\pi}{2}\right| \le 1$ pentru $\forall n \in \mathbb{N}$, atunci $|a_n| = \left|\dfrac{\sin n\frac{\pi}{2}}{n^2}\right| \le \dfrac{1}{n^2} \to 0$

**2.** $|a_n| = \left|(-1)^{n+1}\dfrac{1}{n+1}\right| = \dfrac{1}{n+1} \to 0$

**3.** Notând $b_n = \sqrt[n]{n} - 1$, avem $\sqrt[n]{n} = 1 + b_n$ şi $n = (1 + b_n)^n$, de unde

$n = 1 + C_n^1 b_n + C_n^2 b_n^2 + \ldots$; obținem $b_n < \sqrt{\dfrac{2}{n-1}}$, $\forall n \ge 2$.

Dar $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$ şi deci $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt[n]{n} - 1\right) = 0$, deci $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n} = 1$.

**4.** $\dfrac{n^2}{n!} = \dfrac{n^2}{1\cdot2\cdot3\ldots n} < \dfrac{n^2}{n(n-1)(n-2)}$, $\forall n \ge 3$.

Dar $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^2}{n(n-1)(n-2)} = 0$ şi deci $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

**5.** $\frac{n}{\sqrt{n^2+n}} \le a_n \le \frac{n}{\sqrt{n^2+1}}$. Avem $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{\sqrt{n^2+n}} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{\sqrt{n^2+1}} = 1$, şi deci conform teoremei „cleştelui" avem $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 1$.

**6.** Cum $-\frac{1}{n^2} \le \frac{\sin k}{n^2+k} \le \frac{1}{n^2}$. atunci $-\frac{n}{n^2} \le a_n \le \frac{n}{n^2}$. Deci, conform teoremei „cleştelui" avem $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

**7.** Cum $\frac{k^2+k}{n^3+n} \le \frac{k^2+k}{n^3+k} \le \frac{k^2+k}{n^3}$, atunci $\frac{\sum\limits_{k=1}^{n}(k^2+k)}{n^3+n} \le a_n \le \frac{\sum\limits_{k=1}^{n}\left(k^2+k\right)}{n^3}$.

Deoarece $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{\left(k^2+k\right)}{n^3+n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sum\limits_{k=1}^{n}\left(k^2+k\right)}{n^3} = \frac{1}{3}$, avem $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \frac{1}{3}$.

## Test de evaluare

Dacă şirurile $(a_n)_{n\ge1}$, $(b_n)_{n\ge1}$ îndeplinesc condiţiile specificate, să se verifice dacă sunt adevărate următoarele implicaţii:

(*2p*) a) $(a_n + b_n)$ convergent şi $(a_n - b_n)$ convergent $\Rightarrow$ $(a_n)$ şi $(b_n)$ convergent;

(*2p*) b) $(a_n + b_n)$ convergent şi $(a_n \cdot b_n)$ convergent $\Rightarrow$ $(a_n)$ şi $(b_n)$ convergent;

(*2p*) c) $(a_n^2)$ convergent $\Rightarrow$ $(a_n^3)$ convergent şi $(a_n)$ convergent;

(*2p*) d) $(na_n)$ convergent $\Rightarrow$ $(a_n)$ convergent.

*Timp de lucru: 30 de minute.*

## Exerciţii propuse

**I.** Să se calculeze limitele următoarelor şiruri de numere reale ($n \in \mathbb{N}^*$):

**1.** $a_n = \frac{(n+1)^2+(n-1)^2+2n}{n(n+1)}$; **2.** $a_n = \frac{n(1+2+\ldots+n)}{n^3+1}$;

**3.** $a_n = \frac{n(1^2+2^2+\ldots+n^2)}{n^4+1}$; **4.** $a_n = \frac{1\cdot2+2\cdot3+\ldots+n(n+1)}{1\cdot n+2\cdot(n-1)+\ldots+n\cdot1}$;

**5.** $a_n = \dfrac{1^2\cdot 2 + 2^2\cdot 3 + \ldots + n^2(n+1)}{1\cdot 2^2 + 2\cdot 3^3 + \ldots + n(n+1)^2}$; **6.** $a_n = \dfrac{2^n + 2^{-n}}{2^n + 2^{-n}}$;

**7.** $a_n = \dfrac{2^n\cdot 3^{-n} + 3^n\cdot 2^{-n}}{2^{n+1}\cdot 3^{-n} + 3^{n+1}\cdot 2^{-n}}$; **8.** $a_n = \dfrac{1\cdot 1! + 2\cdot 2! + \ldots + n\cdot n!}{(n+1)!}$;

**9.** $a_n = \dfrac{C_n^0 + C_n^1 + \ldots + C_n^n}{2^n + 1}$; **10.** $a_n = \dfrac{1 + x + x^2 + \ldots + x^n}{1 + y + y^2 + \ldots + y^n}$;

**11.** $a_n = 0,\underbrace{99\ldots 9}_{n \text{ cifre}}$; **12.** $a_n = \dfrac{1}{2!} + \dfrac{2}{3!} + \ldots + \dfrac{n}{(n+1)!}$

**13.** $a_n = \dfrac{4^n\cdot n^3 + 1}{4^{n+1}\cdot n + n^2}$; **14.** $a_n = \dfrac{2^2 + 4^2 + \ldots + (2n)^2}{1^2 + 3^2 + \ldots + (2n-1)^2}$

**15.** $a_n = \left(1 - \dfrac{1}{2^2}\right)\cdot\left(1 - \dfrac{1}{3^2}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1 - \dfrac{1}{n^2}\right)$ sau $a_n = \prod\limits_{k=1}^{n}\left(1 - \dfrac{1}{k^2}\right)$;

**16.** $a_n = \dfrac{1^2}{1\cdot 3} + \dfrac{2^2}{3\cdot 5} + \ldots + \dfrac{n^2}{(2n-1)(2n+1)}$ sau $a_n = \sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{k^2}{(2k-1)(2k+1)}$;

**17.** $a_n = \prod\limits_{k=2}^{n}\dfrac{k^3 - 1}{k^3 + 1}$; **18.** $a_n = \prod\limits_{k=2}^{n}\dfrac{k^2 + k - 2}{k(k+1)}$;

**19.** $a_n = \sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{3k^2 + 3k + 1}{k^3(k+1)^3}$; **20.** $a_n = \sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{4k^2 - 3k + 1}{2^k}$;

**21.** $a_n = \sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{k\sqrt{k+1} + (k+1)\sqrt{k}}$; **22.** $a_n = \sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{k}{2\cdot 3^{k-1}}$;

**23.** $a_n = \dfrac{1}{1\cdot 2\cdot 3} + \dfrac{1}{2\cdot 3\cdot 4} + \ldots + \dfrac{1}{n(n+1)(n+2)}$; **24.** $a_n = \sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{k^2}{2^k}$;

**25.** $a_n = \dfrac{1}{n}\left[\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^2 + \left(1 + \dfrac{2}{n}\right)^2 + \ldots + \left(1 + \dfrac{n-1}{n}\right)^2\right]$.

**II.** Să se calculeze limita următoarelor şiruri de numere reale ($n \in \mathbb{N}^*$):

**1.** $a_n = \sqrt{n+2} - \sqrt{n}$;

**2.** $a_n = \dfrac{\sqrt{5n^2 - 3n + 2}}{4n+1}$;

**3.** $a_n = \dfrac{\sqrt{n+3}}{\sqrt{n+4} + \sqrt{n+5}}$;

**4.** $a_n = \sqrt{n^2 + n + 1} - \sqrt{n^2 - n + 1}$;

**5.** $a_n = n\left(n - \sqrt{n^2 + k}\right)$, $k$ fixat;

**6.** $a_n = \dfrac{\sqrt{n^2 + n + 1} - 2\sqrt{n^2 - n + 1}}{n}$;

**7.** $a_n = \dfrac{\sqrt{n + \sqrt{n^2 + 1}}}{\sqrt{2n+1}}$;

**8.** $a_n = n^{\frac{1}{3}}\left[\sqrt[3]{(n+1)^2} - \sqrt[3]{(n-1)^2}\right]$;

**9.** $a_n = \sqrt{n+1} + 2\sqrt{n+2} - 3\sqrt{n+3}$;

**10.** $a_n = \sqrt{n}\left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right)$;

**11.** $a_n = \sqrt[3]{n}\left(\sqrt{n + \sqrt{n}} - \sqrt{n - \sqrt{n}}\right)$;

**12.** $a_n = n^3\left(\sqrt{n^3 + \sqrt{n^4 + 1}} - n\sqrt{2}\right)$;

**13.** $a_n = n\sqrt{n}\left(\sqrt{n+1} + \sqrt{n-1} - 2\sqrt{n}\right)$.

**III.**

**1.** Să se determine $a \in \mathbb{R}$, astfel încât

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2 + n + 1} + an\right) = \frac{1}{2}.$$

**2.** Să se determine $a$, $b$, $c \in \mathbb{R}$, astfel încât

$$\lim_{n\to\infty} n\left(n - \sqrt{an^2 + bn + c}\right) \text{ să fie finită.}$$

**3.** Să se calculeze: $\lim\limits_{n\to\infty}(a\sqrt{n+1} + b\sqrt{n+2} + c\sqrt{n+3})$, *a, b, c* $\in \mathbb{R}$.

**4.** Să se determine $x, y \in \mathbb{R}$ astfel încât

$$\lim_{n\to\infty}\left(xn - y - \sqrt[3]{n^3 - 1}\right) = 0.$$

**5.** Să se determine $\alpha \in \mathbb{R}$ astfel încât

$$\lim_{n\to\infty} n^{\alpha}\left(\sqrt{\frac{n+5}{n+2}} - \sqrt{\frac{n+1}{n+5}}\right) \in \mathbb{R}.$$

**6.** Să se calculeze $\lim\limits_{x\to\infty}\left(a\sqrt{n+1} - 2\sqrt{n} + b\sqrt{n+2}\right)$; discuție după $a$, $b \in \mathbb{R}$.

**IV.** Să se calculeze limita următoarelor şiruri de numere reale ($n \in \mathbb{N}^*$):

**1.** $a_n = \ln\dfrac{n+\sqrt{n}}{n+2\sqrt{n}}$;

**2.** $a_n = \sin 2\pi\sqrt{n^2+1}$;

**3.** $a_n = \sum\limits_{k+1}^{n}\log_{\frac{1}{2}}\dfrac{k(k+2)}{(k+1)^2}$;

**4.** $a_n = \sum\limits_{k=2}^{n}\log_{\frac{1}{3}}\left[1-\dfrac{2}{k(k+1)}\right]$;

**5.** $a_n = \ln n - \ln(n+1)$;

**6.** $a_n = \dfrac{e^{\frac{1}{n}}}{e^{\frac{2}{n}}}$;

**7.** $a_n = \sin^2\pi\sqrt{n^2+4}$;

**8.** $a_n = \dfrac{\ln(e^n+1)}{\ln(e^{2n}+1)}$;

**9.** $a_n = \arcsin\dfrac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\sqrt{n+2}-\sqrt{n+1}}$;

**10.** $a_n = \arccos\dfrac{\sqrt{n}}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}$;

**11.** $a_n = \dfrac{\ln(n^2+n+2)}{\ln(n^2+n+1)}$;

**12.** $a_n = \dfrac{a+\ln bn}{b+\ln an}$, $a, b > 0$;

**13.** $a_n = \dfrac{\sum\limits_{k=1}^{n}e^k}{\sum\limits_{k=1}^{n}\pi^k}$;

**14.** $a_n = \dfrac{\sin(n^3+n^2+1)}{n}$;

**15.** $a_n = \left(\dfrac{n+1}{2n+1}\right)^{n-\sqrt{n}}$;

**16.** $a_n = \left(\dfrac{2n+1}{n+1}\right)^{\sqrt{n}-n}$;

**17.** $a_n = \dfrac{\ln(1+2e^n+3e^{2n}+4e^{3n})}{\ln(1+3e^{5n}+5e^{7n})}$;

**18.** $a_n = \dfrac{2n}{n!}$;

**19.** $a_n = \dfrac{\alpha^n}{n!}(\alpha > 0)$;

**20.** $a_n = \dfrac{1!+2!+\ldots+n!}{(2n)!}$;

**21.** $a_n = \dfrac{[x]+[2^3x]+\ldots+[n^3x]}{n^4}$;

**22.** $a_n = n\alpha^n$, $|\alpha| < 1$;

**23.** $a_n = \left(\dfrac{1\cdot 3\cdot 5\ldots(2n-1)\cdot\sqrt{n}}{2\cdot 4\cdot 6\ldots 2n}\right)^n$;

**24.** $a_n = \dfrac{\sin 1}{n^3+1}+\dfrac{\sin 2}{n^3+2}+\cdots+\dfrac{\sin n}{n^3+n}$;

**25.** $a_n = \left(\dfrac{1}{\sqrt{n+1}}+\dfrac{1}{\sqrt{n+2}}+\ldots+\dfrac{1}{\sqrt{2n}}\right)\cdot\dfrac{1}{n}$;

**26.** $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{k^2+k}{n^3+k}$;

**27.** $a_n = (-1)^{n+1} \cdot \sin\frac{\pi}{2(n+1)} \cos\frac{\pi}{2^n} + \ln\frac{n+1}{n+2}$;

**28.** $a_n = \cos a \cos\frac{a}{2} \cos\frac{a}{2^2} \cdots \cos\frac{a}{2^n}$, $a$ fixat;

**29.** $a_n = \ln\left(1-\frac{1}{2^2}\right) + \ln\left(1-\frac{1}{3^2}\right) + \cdots + \ln\left(1-\frac{1}{n^2}\right)$.

## Convergența șirurilor utilizând proprietatea lui Weierstrass

Considerăm că un criteriu puternic de convergență este următoarea proprietate, datorată lui Weierstrass.

| |
|---|
| **Teoremă.** *Orice şir monoton şi mărginit este convergent.* |

*Demonstrație*

Fie $(a_n)$ un şir monoton şi mărginit. Pentru a face o alegere, presupunem că $(a_n)$ este crescător.

Notăm $\sup\{a_n \mid n \geq 1\} = a$. Vom demonstra că există $\lim a_n = a$.

Fie $V$ o vecinătate a lui $a$. Atunci există $\lambda \in \mathbb{R}$, astfel încât $\lambda < a$ şi $(\lambda, a) \subset V$. Cum $\lambda < a$, rezultă că $\lambda$ nu este majorant al mulțimii $\{a_n \mid n \geq 1\}$, deci există $n_V > 1$ astfel încât $\lambda < a_{n_V}$. Dar $(a_n)$ este crescător, prin urmare $\lambda < a_n < a$, pentru orice $n \geq n_V$. În concluzie, $a_n \in V$, pentru orice $n \geq n_V$, adică $\lim a_n = a$.

**Observație:** Menționăm că teorema lui Weierstrass furnizează o condiție suficientă de convergență. Evident această condiție nu este necesară. De exemplu, şirul cu termenul general $a_n = \frac{(-1)^n}{n}$ este convergent, dar nu este monoton.

Folosind rezultatele demonstrate până acum putem trage următoarele concluzii:

– dacă un şir este convergent, atunci el este mărginit;
– un şir convergent nu este obligatoriu monoton;
– un şir monoton are întotdeauna limită (finită sau infinită);
– un şir monoton şi mărginit este convergent (are limită finită);

– un şir crescător şi nemărginit este divergent la +∞, iar un şir descrescător şi nemărginit este divergent la –∞.

| | |
|---|---|
| **Teoremă (Cesàro)** | *Orice şir mărginit conține un subşir convergent. Sau altfel spus: din orice şir mărginit se poate extrage un subşir convergent.* |

*Demonstrație* (facultativ)

Fie un şir mărginit $(x_n)$. Atunci există $a$, $b \in \mathbb{R}$ astfel încât toți termenii şirului $(x_n)$ se află în intervalul $[a, b]$.

Considerăm intervalele $\left[a, \frac{a+b}{2}\right]$ şi $\left[\frac{a+b}{2}, b\right]$. În cel puțin unul din ele, notat $I_1$, se află o infinitate de termeni ai şirului $(x_n)$. Evident lungimea intervalului $I_1$ este $\frac{b-a}{2}$. Apoi împărțim intervalul $I_1$ în 2 subintervale închise de lungime $\frac{b-a}{2}$. Notăm cu $I_2$ acel subinterval care conține o infinitate de termeni ai şirului $(x_n)$.

Prin inducție construim un şir de intervale închise $I_n = [a_n, b_n]$ astfel încât $I_n$ conține o infinitate de termeni ai şirului $(x_n)$ şi $b_n - a_n = \frac{b-a}{2^n}$. Şirul $(a_n)$ este crescător şi şirul $(b_n)$ este descrescător. Atunci există $\lim a_n = \lim b_n = c$.

Pentru orice număr natural $n$, există un termen al şirului $(x_n)$, notat $x_{k_n}$, astfel încât $x_{k_n} \in I_n$. Aplicând teorema cleştelui, obținem că subşirul $(x_{k_n})$ este convergent către $c$.

Ca aplicații la proprietatea lui Weierstrass, vom calcula limitele unor şiruri semnificative.

***Exemple*** *(de şiruri semnificative)*

**1. Şirul $x_n = a^n$, $a > 0$.**

Fie $a > 0$ un număr real strict pozitiv. Considerăm şirul $(x_n)$, definit prin $x_n = a^n$. Atunci:

$$\lim a^n = \begin{cases} 0, & 0 < a < 1 \\ 1, & a = 1 \\ \infty, & a > 1 \end{cases}$$

*Soluție:*

Dacă $a = 1$, este evident.

Fie $0 < a < 1$. Şirul cu termenul general $x_n = a^n$ este strict descrescător şi mărginit, deci convergent (adică are o limită unică $l$). Fie $l = \lim x_n$.

Trecând la limită în relaţia de recurenţă $x_n = ax_{n-1}$, rezultă $l = al$, sau echivalent, $l = 0$.

Dacă $a > 1$, fie $b = \dfrac{1}{a} \in (0,1)$. Conform cazului anterior, $\lim b^n = 0$. În plus, $b_n > 0$, pentru orice $n \geq 1$, deci $a^n = \dfrac{1}{b^n} \to +\infty$.

**2. Şirul $x_n = n^a$, $a \in \mathbb{R}$**

Fie $a \in \mathbb{R}$ un număr real şi şirul $(x_n)$, definit prin $x_n = n^a$. Avem:

$$\lim n^a = \begin{cases} 0, & a < 0 \\ 1, & a = 0 \\ \infty, & a > 0 \end{cases}.$$

*Soluţie*

Dacă $a = 0$, este evident.

Pentru $a > 0$, şirul $n^a$ este strict crescător şi nemărginit, deci $\lim n^a = +\infty$.

Dacă $a < 0$, fie $b = -a > 0$. Conform cazului anterior, $n^b \to +\infty$. Atunci $n^a = \dfrac{1}{n^b} \to 0$.

**3.** Fie şirul $(x_n)$ cu termenul general $x_n = \dfrac{a_0 n^p + a_1 n^{p-1} + \ldots + a_{p-1} n + a_p}{b_0 n^q + b_1 n^{q-1} + \ldots + b_{q-1} n + b_q}$

unde $p, q \in \mathbb{N}^*$, $a_0 \neq 0$, $b_0 \neq 0$ şi $b_0 n^q + b_1 n^{q-1} + \ldots + b_{q-1} n + b_q \neq 0$.

Atunci: $$\lim x_n = \begin{cases} \dfrac{a_0}{b_0}, & p = q \\ +\infty, & p > q,\ a_0 b_0 > 0 \\ -\infty, & p > q,\ a_0 b_0 < 0 \\ 0, & p < q \end{cases}.$$

*Soluţie*

Prelucrăm convenabil termenul general şi obţinem

$$x_n = \frac{n^p\left(a_0 + \dfrac{a_1}{n} + \ldots + \dfrac{a_{p-1}}{n^{p-1}} + \dfrac{a_p}{n^p}\right)}{n^q\left(b_0 + \dfrac{b^1}{n} + \ldots + \dfrac{b_{q-1}}{n^{q-1}} + \dfrac{b_q}{n^q}\right)} = n^{p-q}\,\frac{a_0 + \dfrac{a_1}{n} + \ldots + \dfrac{a_{p-1}}{n^{p-1}} + \dfrac{a_p}{n^p}}{b_0 + \dfrac{b^1}{n} + \ldots + \dfrac{b_{q-1}}{n^{q-1}} + \dfrac{b_q}{n^q}}$$

Folosind operațiile cu şiruri care au limită, găsim

$$\lim x_n = \frac{a_0}{b_0} \lim n^{p-q} .$$

Cu ajutorul exemplului anterior, deducem:

1. dacă $p = q$, atunci $n^{p-q} = 1$;
2. dacă $p > q$, atunci $\lim n^{p-q} = +\infty$;
3. dacă $p < q$, atunci $\lim n^{p-q} = 0$.

În concluzie, găsim

$$\lim x_n = \begin{cases} \dfrac{a_0}{b_0}, & p = q \\ +\infty, & p > q, a_0 b_0 > 0 \\ -\infty, & p > q, a_0 b_0 < 0 \\ 0, & p < q \end{cases}$$

**4. Numărul e**

Şirul $x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ este convergent.

*Soluția 1* (facultativ): Dezvoltând după binomul lui Newton, avem:

$$x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 1 + C_n^1 \frac{1}{n} + C_n^2 \frac{1}{n^2} + \ldots + C_n^n \frac{1}{n^n} =$$

$$= 1 + 1 + \frac{n(n-1)}{2!} \cdot \frac{1}{n^2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!} \cdot \frac{1}{n^3} + \ldots + \frac{n(n-1) \cdot \ldots \cdot 1}{n!} \cdot \frac{1}{n^n} =$$

$$= 1 + 1 + \left(1 - \frac{1}{n}\right)\frac{1}{2!} + \left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right)\frac{1}{3!} + \ldots + \left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right)\ldots\left(1 - \frac{n-1}{n}\right)\frac{1}{n!} <$$

$$< 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots + \frac{1}{n!}, \qquad \forall n \geq 2.$$

Deoarece $n! \geq 2^{n-1}$, pentru orice $n \geq 2$, putem scrie

$$2 \leq a_n \leq 1 + \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{2^n}\right) < 1 + \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = 3 \text{ , deci } a_n \in [2, 3), \forall n \geq 2,$$

adică şirul $(a_n)$ este mărginit.

Conform calculului anterior, avem:

$$a_{n+1}=1+1+\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\frac{1}{2!}+\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\left(1-\frac{2}{n+1}\right)\frac{1}{3!}+\ldots$$
$$\ldots+\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\left(1-\frac{2}{n+1}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1-\frac{n}{n+1}\right)\frac{1}{(n+1)!}>1+1+\left(1-\frac{1}{n}\right)\frac{1}{2!}+\left(1-\frac{2}{n}\right)\frac{1}{3!}+\ldots$$
$$\ldots+\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\ldots\left(1-\frac{n-1}{n}\right)\frac{1}{n!}=a_n,\ \text{deci } a_{n+1}>a_n.$$

adică şirul $(a_n)$ este strict crescător.

Aplicând proprietatea lui Weierstrass, rezultă că şirul $(x_n)$ este convergent. Limita sa se notează cu *e*. Evident $2 < e < 3$.

*Soluția 2* (facultativ). Considerăm şirul $b_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$, pentru $n > 1$. Folosind inegalitatea $(1 + t)^n > 1 + nt$, pentru orice $t > -1$, $t \neq 0$, şi $n \in \mathbb{N}^*$, $n \neq 1$, obținem:

$$\frac{b_n}{b_{n+1}}=\frac{\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+1}}{\left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n+2}}=\left[\frac{(n+1)^2}{n^2+2n}\right]^{n+1}\cdot\frac{n+1}{n+2}=\left(1+\frac{1}{n^2+2n}\right)^{n+1}\cdot\frac{n+1}{n+2}>$$

$$>\left(1+\frac{n+1}{n^2+2n}\right)\cdot\frac{n+1}{n+2}=\frac{n(n+2)^2+1}{n(n+2)^2}>1,$$

deci şirul $(b_n)$ este strict descrescător. Cum $(b_n)$ este şi mărginit $(0 < b_n < b_1)$, deducem că $b_n$ este convergent.

Evident avem

$$0<b_n-a_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\frac{1}{n}<\frac{b_n}{n}\leq\frac{b_1}{n}\to 0.$$

Prin urmare $\lim a_n = \lim b_n$.

**Observație:** Numărul *e* este irațional. Valoarea sa aproximativă este 2,7182818... Mai mult, se poate arăta că *e* este un număr transcendent.

**Corolar.** *Dacă şirul* $(u_n)$ *este convergent şi are limita* 0, *atunci* $\lim\,(1+u_n)^{\frac{1}{u_n}}=e$.

*Demonstrație*

Observăm ca $u_n \neq 0$, pentru orice $n \geq 1$ (în caz contrar nu are sens şirul în discuție).

Întâi presupunem că $u_n > 0$, pentru orice $n \geq 1$ (eventual cu excepția unui număr finit de termeni ai şirului). Notăm cu $v_n = \dfrac{1}{u_n}$ şi $z_n = [v_n]$ (partea întreagă a lui $v_n$), $n \geq 1$. Evident avem $z_n \leq v_n < z_n + 1$, sau echivalent

$$\frac{1}{z_n+1} < u_n \leq \frac{1}{z_n}, \text{ deoarece } u_n > 0 \text{ şi } z_n > 0.$$

Atunci

$$\left(1+\frac{1}{z_n+1}\right)^{z_n} < (1+u_n)^{z_n} \leq (1+u_n)^{\frac{1}{u_n}} < (1+u_n)^{z_n+1} \leq \left(1+\frac{1}{z_n}\right)^{z_n+1}$$

Evident $z_n \to +\infty$. Folosind un rezultat demonstrat anterior, avem

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{z_n+1}\right)^{z_n} = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{z_n}\right)^{z_n+1} = e.$$

Aplicând teorema cleştelui, obținem $\lim (1+u_n)^{\frac{1}{u_n}} = e$.

Cazul $u_n < 0$, pentru orice $n \geq 1$ (eventual cu excepția unui număr finit de termeni ai şirului) se tratează analog.

Pentru un şir arbitrar $u_n \to 0$, se aplică raționamentul de mai sus, pentru subşirurile cu termeni pozitivi, respectiv negativi.

## Exerciții rezolvate

**I.** Să se studieze convergența următoarelor şiruri (care au fost analizate la şiruri monotone şi la şiruri mărginite):

**1.** $(a_n)_{n\geq 1}$, $a_n = \dfrac{n}{n+1}$

*Soluție:*

Şirul este monoton crescător şi mărginit superior, deci şirul este convergent şi $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 1$.

**2.** $(a_n)_{n\geq 1}$, $a_n=\dfrac{n^2}{n+1}$.

*Soluție:*

Şirul este monoton crescător şi nemărginit superior, deci nu este convergent, adică este divergent şi $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=+\infty$.

**3.** $(a_n)_{n\geq 1}$, $a_n=\dfrac{1}{1}+\dfrac{1}{2}+\ldots+\dfrac{1}{n}$.

*Soluție:*

Şirul este monoton crescător, nemărginit superior, deci este divergent şi $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=+\infty$.

**4.** $(a_n)_{n\geq 1}$, $a_n=\dfrac{1}{n+1}+\dfrac{1}{n+2}+\ldots+\dfrac{1}{2n}$.

*Soluție:*

Şirul este strict crescător şi mărginit superior de 1, deci este convergent.

**5.** $(a_n)_{n\geq 1}$, $a_n=\dfrac{1\cdot 3\cdot 5\cdot\ldots\cdot(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdot\ldots\cdot(2n)}$.

*Soluție*

Şirul este strict descrescător, mărginit şi deci este convergent.

Pentru a calcula $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$, utilizăm inegalitatea

$\dfrac{1\cdot 3\cdot 5\cdot\ldots\cdot(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdot\ldots\cdot 2n}<\dfrac{1}{\sqrt{2n+1}}$ şi evident $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=0$.

**6.** $(a_n)_{n\geq 1}$, $a_n=\dfrac{2^n+1}{2^n-1}$.

*Soluție:*

Şirul este strict descrescător şi mărginit inferior de 1, deci este convergent.

$$\lim_{n\to\infty} a_n=\lim_{n\to\infty}\frac{2^n+1}{2^n-1}=\lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{1}{2^n}}{1-\frac{1}{2^n}}=1.$$

**7.** $(a_n)_{n\geq 1}$, $a_n=\sqrt{n+1}-\sqrt{n}$.

*Soluție:*

Şirul este mărginit $a_n\in(0,1)$ şi strict descrescător, deci este convergent.

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}=0.$$

**8.** $(a_n)_{n\geq 1},\ a_n = \dfrac{2^n}{n!}$.

*Soluție:*

Șirul este mărginit: $a_n \in (0, 2]$ și strict descrescător, deci este convergent;

$$a_n < 2\left(\frac{2}{3}\right)^{n-2} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_{n_1} = 0.$$

**9.** $(a_n)_{n\geq 1},\ a_n = \dfrac{1\cdot 2\cdot + 2\cdot 3 + \ldots + n(n+1)}{n^3}$.

*Soluție:*

Șirul este mărginit $a_n \in \left(\dfrac{1}{3}, 2\right]$ și monoton descrescător.

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1\cdot 2\cdot + 2\cdot 3 + \ldots + n(n+1)}{n^3} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)(n+2)}{3n^2} = \frac{1}{3}.$$

**10.** $(a_n)_{n\geq 1},\ a_n = \dfrac{2^n + 1}{C_n^0 + C_n^1 + \ldots + C_n^n} = \dfrac{2^n + 1}{2^n}$.

*Soluție:*

Șirul este descrescător, mărginit ($1 \leq a_n \leq 2$), deci este convergent.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2^n + 1}{2^n} = 1$$

**II.** Să se calculeze următoarele limite:

**1.** $\lim\limits_{n\to\infty} n(\sqrt[n]{3} - 1)$.

*Soluție:*

Avem nedeterminarea $\infty \cdot 0$. Prelucrăm și obținem:

$$n(\sqrt[n]{3} - 1) = n\left(3^{\frac{1}{n}} - 1\right) = \frac{3^{\frac{1}{n}} - 1}{\frac{1}{n}} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} n(\sqrt[n]{3} - 1) = \lim_{n\to\infty} \frac{3^{\frac{1}{n}} - 1}{\frac{1}{n}}.$$

Notăm $3^{\frac{1}{n}} - 1 = x_n$.

Atunci $3^{\frac{1}{n}} = 1 + x_n \Rightarrow \ln 3^{\frac{1}{n}} = \ln(1 + x_n) \Rightarrow \dfrac{1}{n} = \dfrac{\ln(1 + x_n)}{\ln 3}$.

Cum $n \to \infty$, atunci $x_n \to \ 3^{\frac{1}{\infty}} - 1 = 0$. Înlocuind în limita inițială, obținem:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3^{\frac{1}{n}}-1}{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{\ln(1+x_n)}\cdot\ln 3 = \ln 3\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\frac{1}{x_n}\ln(1+x_n)} = \ln 3\cdot\frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\ln(1+x_n)^{\frac{1}{x_n}}} =$$

$$= \ln 3\cdot\frac{1}{\ln\lim\limits_{n\to\infty}(1+x_n)^{\frac{1}{x_n}}} = \ln 3\cdot\frac{1}{\ln e} = \ln 3.$$

**2.** $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)^{\sqrt{n+3}}$.

*Soluție:*

Notăm $x_n = \sqrt{n+1}-\sqrt{n} = \dfrac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$; evident $x_n \to 0$.

Atunci

$$\left(1+\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)^{\sqrt{n+3}} = \left[\left(1+\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}\right)^{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}\right]^{\frac{\sqrt{n+3}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty}\left(1+\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)^{\sqrt{n+3}} = \lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}\right)^{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}\right]^{\frac{\sqrt{n+3}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}} =$$

$$= e^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n+3}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}} = e^{\frac{1}{2}} = \sqrt{e}.$$

**3.** $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n+2}{n+1}\right)^{2n-\sqrt{n}}$.

*Soluție:*

Avem nedeterminarea $1^{\infty}$. Prelucrăm în mod convenabil şi obținem:

$$\left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{2n-\sqrt{n}} = \left[\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}\right]^{\frac{2n-\sqrt{n}}{n+1}} \Rightarrow \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{2n-\sqrt{n}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}\right]^{\frac{2n-\sqrt{n}}{n+1}} = e^{\lim\limits_{n\to}\frac{2n-\sqrt{n}}{n+1}} = e^{2}.$$

**4.** $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{\sqrt[n]{a_1}+\sqrt[n]{a_2}}{2}\right)^n$, unde $a_1, a_2 > 0$.

*Soluție:*

Deoarece $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_1}=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_2}=1$, avem nedeterminarea $1^\infty$.

Prelucrăm convenabil şirul dat şi obținem:

$$\left(\frac{\sqrt[n]{a_1}+\sqrt[n]{a_2}}{2}\right)^n=\left(1+\frac{\sqrt[n]{a_1}+\sqrt[n]{a_2}-2}{2}\right)^n=(1+\alpha_n)^n,$$

unde $\alpha_n\dfrac{\sqrt[n]{a_1}+\sqrt[n]{a_2}-2}{2}\Rightarrow(1+\alpha_n)^n=e^{\lim\limits_{n\to\infty}n\alpha_n}$.

Calculăm separat

$$\lim_{n\to\infty}n\alpha_n=\lim_{n\to\infty}n\frac{\sqrt[n]{a_1}+\sqrt[n]{a_2}-2}{2}=\lim_{n\to\infty}\left[\frac{\sqrt[n]{a_1}-1}{\frac{1}{n}}+\frac{\sqrt[n]{a_2}-1}{\frac{1}{n}}\right]\frac{1}{2}=$$

$$=\frac{1}{2}\left[\lim_{n\to\infty}\frac{a_1^{\frac{1}{n}}-1}{\frac{1}{n}}+\lim_{n\to\infty}\frac{a_2^{\frac{1}{n}}-1}{\frac{1}{n}}\right]=\frac{1}{2}[\ln a_1+\ln a_2]=\ln\sqrt{a_1a_2},$$

iar valoarea limitei este: $e^{\ln\sqrt{a_1a_2}}=\sqrt{a_1a_2}$.

**Notă:** Exercițiul se poate generaliza sub forma:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\sqrt[n]{a_1}+\sqrt[n]{a_2}+\ldots+\sqrt[n]{a_k}}{k}\right)^n=\sqrt[k]{a_1a_2\ldots a_k}$$, unde $a_k > 0$ şi $k\in\mathbb{N}^*$.

**5.** $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{\ln(n+1)}{\ln n}\right)^n$.

*Soluție:*

Prelucrăm convenabil termenul şirului şi obținem:

$$\left(\frac{\ln(n+1)}{\ln n}\right)^n=\left(\frac{\ln n\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\ln n}\right)^n=\left(1+\frac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\ln n}\right)^n.$$

Fie $x_n = \dfrac{\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)}{\ln n}$ şi observăm că $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0.$ Atunci

$$\lim_{n\to\infty}(1+x_n)^n = e^{\lim\limits_{n\to\infty} nx_n} = e^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}{\ln n}} = e^0 = 1.$$

**6.** $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\dfrac{(n+a_1)(n+a_2)\dots(n+a_k)}{(n+b_1)(n+b_2)\dots(n+b_k)}\right]^n.$

Prelucrăm termenul general al şirului şi obţinem:

$$\left[\frac{(n+a_1)(n+a_2)\dots(n+a_k)}{(n+b_1)(n+b_2)\dots(n+b_k)}\right]^n = \left(\frac{n+a_1}{n+b_1}\right)^n\cdot\left(\frac{n+a_2}{n+b_2}\right)^n\cdot\ldots\cdot\left(\frac{n+a_k}{n+b_k}\right)^n.$$

Calculăm

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+\alpha}{n+\beta}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{n+\alpha-n-\beta}{n+\beta}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{\alpha-\beta}{n+\beta}\right)^n =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{\alpha-\beta}{n+\beta}\right)^{\frac{n+\beta}{\alpha-\beta}}\right]^{\frac{(\alpha-\beta)n}{n+\beta}} = e^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(\alpha-\beta)}{n+\beta}} = e^{\alpha-\beta}.$$

Atunci limita şirului este $e^{(a_1+a_2+\ldots+a_k)-(b_1+b_2+\ldots+b_k)}.$

**7.** $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{2n}x_n\right)^n$, unde $x_n = \sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{(2k-1)(2k+1)}.$

*Soluţie:*

Calculăm

$$x_n = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{2k+1}\right) = \frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{5}+\ldots+\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right) = \frac{n}{2n+1};$$

$\dfrac{1}{2n}x_n = \dfrac{1}{2(2n+1)}.$ Înlocuind obţinem:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2n}x_n\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{2(2n+1)}\right)^{2(2n+1)}\right]^{\frac{n}{2(2n+1)}} = e^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{e}.$$

**8.** $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{1!}+\dfrac{1}{2!}+\dfrac{1}{3!}+\ldots+\dfrac{1}{n!}\right).$

*Soluție*

Considerăm şirurile $(a_n)$ şi $(x_n)$, definite prin $a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ şi

$x_n = 1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\ldots+\frac{1}{n!},\quad \forall n \geq 1.$

Evident şirul $(x_n)$ este strict crescător.

Am demonstrat anterior că $a_n < x_n$, pentru orice $n \geq 2$.

Pe de altă parte, pentru orice numere naturale $k \geq 2$ fixat şi $n > k$, avem:

$1+n\cdot\frac{1}{n}+\frac{n(n-1)}{2!}\frac{1}{n^2}+\ldots+\frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{k!}\frac{1}{n^k} < a_n.$

Trecând la limită după $n \to \infty$, găsim $x_k = 1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\ldots+\frac{1}{k!} \leq e.$

Deci şirul $(x_n)$ este şi mărginit, deci convergent, şi avem $a_n < x_n < e$. Aplicând teorema cleştelui, rezultă $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = e$.

**9.** Să se arate că şirul $(c_n)$, definit prin $c_n = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}-\ln n$, pentru orice $n \geq 1$, este convergent.

*Soluție:* Am văzut că

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < e < \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}, \forall n \geq 1.$$

Logaritmând, găsim

$$n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) < 1 < (n+1)\ln\left(1+\frac{1}{n}\right), \qquad (*)$$

sau echivalent,

$$\frac{1}{n+1} < \ln(n+1)-\ln n < \frac{1}{n}, \quad \forall n \geq 1.$$

Atunci însumând termenii dublei inegalități după $k \in \mathbb{N}^*$, obținem:

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k+1} < \sum_{k=1}^{n}[\ln(k+1)-\ln k] < \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}.$$

Deci

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k+1} < \ln(n+1) < \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}.$$

Prin urmare

$$0 < \ln(n+1) - \ln n < \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} - \ln n = c_n < 1,$$

adică şirul $(c_n)$ este mărginit.

Pe de altă parte, din prima inegalitate (*), avem

$$c_{n+1} - c_n = \frac{1}{n+1} - [\ln(n+1) - \ln n] < 0, \quad \forall n \geq 1,$$

adică şirul $(c_n)$ este strict crescător.

În concluzie, şirul $(c_n)$ este convergent şi limita sa, notată $c \in (0, 1)$. Numărul $c$ se numeşte constanta lui Euler.

**Observaţie:** Nu se cunoaşte dacă $c$ este raţional, algebric sau transcendent. Se poate arăta că $c \approx 0{,}5772156619...$

*Aplicaţii*

1. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}}{\ln n} = 1$

*Soluţie:*

$$\frac{1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}}{\ln n} = \frac{1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n} - \ln n}{\ln n} + \frac{\ln n}{\ln n} \to \frac{c}{+\infty} + 1 = 1.$$

2. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{n+1} + \dfrac{1}{n+2} + \ldots + \dfrac{1}{kn}\right) = \ln k, \quad \forall k \geq 2,\ k \in \mathbb{N}.$

*Soluție:*

Putem scrie

$$\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{kn}=\left(1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{kn}-\ln kn\right)-$$

$$-\left(1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}-\ln n\right)+\ln k \to c-c+\ln k=\ln k.$$

**III.** Să se studieze convergența următoarelor şiruri date prin relații de recurență:

**1.** $(a_n)_{n\geq 1}$, $a_{n+1} = \alpha a_n$, unde condiția inițială este $a_1 = 1$, $0 < \alpha < 1$.

*Soluție:*

*Monotonia*: $\frac{a_{n+1}}{a_n}=\alpha<1$, deci şirul este descrescător.

*Mărginirea*: Din relația de recurență deducem

$a_n = \alpha^{n-1} \cdot a_1 = \alpha^{n-1}$ şi cum $0 < \alpha < 1 \Rightarrow 0 < \alpha^{n-1} < 1$, şirul este mărginit.

Deoarece şirul este monoton şi mărginit, el este convergent, deci se poate trece la limită în relația de recurență.

În relația $a_{n+1} = \alpha a_n$, trecem la limită şi obținem:

$$\lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to\infty}(\alpha a_n) = \alpha \lim_{n\to\infty} a_n .$$

Cum şirul este convergent, limita sa nu se modifică, dacă adunăm sau dacă scădem un număr finit de termeni. Astfel

$\lim\limits_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim\limits_{n\to\infty} a_n = l$ şi deci avem $l(1-\alpha) = 0 \Rightarrow l = 0 \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

**2.** $(a_n)_{n\geq 0}$, $a_0 = 2$, $a_{n-1} - a_n = \frac{n}{(n+1)!}$.

*Soluție:*

Din relația de recurență rezultă $a_n = a_0 + \frac{1}{(n+1)!} - 1 = 1 + \frac{1}{(n+1)!}$.

*Monotonia:* $a_{n+1} = 1 + \dfrac{1}{(n+2)!}$; $a_{n+1} < a_n$, deci şirul este monoton descrescător.

*Mărginirea:* Deoarece $a_n > 1$, şirul este mărginit inferior. Deci este convergent.

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{(n+1)!}\right) = 1.$$

**3.** $(a_n)_{n\geq 1}$, $a_1 = \sqrt{2}$, $a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n}$, $\forall n \geq 1$.

*Soluţie:*

*Mărginirea*: Evident $a_n > 0$, $\forall n \geq 1$ şi se demonstrează prin inducţie folosind relaţia $a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n}$ că $a_n < 2$, $\forall n \geq 1$. Deci $0 < a_n < 2$.

*Monotonia*:

$$a_{n+1} - a_n = \sqrt{2 + a_n} - a_n = \frac{2 + a - a_n^2}{\sqrt{2 + a_n} + a_n} =$$

$$= -\frac{a_n^2 - a_n - 2}{\sqrt{2 + a_n} + a_n} = -\frac{(a_n - 2)(a_n + 1)}{\sqrt{2 + a_n} + a_n} > 0,$$

deci şirul este monoton crescător; rezultă că şirul este convergent.

Fie $\lim\limits_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim\limits_{n\to\infty} a_n = l.$

Trecând la limită în relaţia de recurenţă, obţinem ecuaţia:

$l = \sqrt{2 + l} \Rightarrow l_1 = 2,\ l_2 = -1$. Deoarece toţi termenii sunt pozitivi şi limita este unică, rezultă $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 2.$

**4.** $(a_n)_{n\geq 1}$, $a_1 = 1$, $a_{n+1} = \sqrt{1 + a_n^2}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

*Soluţie:*

Din relaţia de recurenţă se deduce uşor că $a_n = \sqrt{n}$, care este un şir crescător, nemărginit superior, cu limita $+\infty$.

**5.** $(a_n)_{n\geq 1}$, $a_1 = 1$ şi $2a_{n+1} - 2a_n = 1$.

*Soluţie:*

Din relaţia de recurenţă va rezulta cu uşurinţă că $a_n = \dfrac{n+1}{2}$; evident şirul este crescător şi nemărginit superior, deci $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty.$

**6.** $(x_n)_{n\geq 0}$, $x_0 = 0$, $x_{n+1} = -\frac{1}{2}x_n + 1$, $\forall n \geq 0$.

*Soluție:*

Din relația de recurență obținem formula pentru termenul general al şirului:

$$x_n = \left(-\frac{1}{2}\right)^n \cdot \left(-\frac{2}{3}\right) + \frac{2}{3},\ \forall n \geq 0,$$

şi evident $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \frac{2}{3}$.

**7.** $(x_n)_{n\geq 1}$, $x_1 = 1$, $x_{n+1} = x_n^2 - 2x_n + 2$ .

*Soluție:*

*Mărginirea*: $x_{n+1} = (x_n - 1)^2 + 1 \geq 1$.

Pornind de la egalitatea: $x_{n+1} - 2 = x_n(x_n - 2)$, se arată prin inducție că $x_n < 2$, pentru orice $n \geq 1$. Deci şirul este mărginit: $x_n \in [1, 2]$.

*Monotonia*: $x_{n+1} - x_n = x_n^2 - 2x_n + 2 - x_n = x_n^2 - 3x_n + 2 = (x_n - 1)(x_n - 2) < 0$, deci şirul este strict descrescător.

Din faptul că şirul este strict descrescător şi mărginit inferior, deducem că el este convergent, deci admite o limită unică; trecând la limită în relația de recurență, avem:

$l = l^2 - 2l + 2 \Rightarrow l^2 - 3l + 2 = 0$. Soluția convenabilă este $l = 1$.

**8.** Să se studieze natura şirului $(x_n)_{n\geq 0}$, $x_0 > 0$, $x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{a}{x_n}\right)$, $a > 0$.

*Soluție*

Se observă foarte uşor ca toți termenii şirului sunt pozitivi.

Observăm că $x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{a}{x_n}\right) \geq \sqrt{x_n \cdot \frac{a}{x_n}} = \sqrt{a}$ ($(x_n)$ este mărginit inferior).

Deoarece: $x_{n+1} - x_n = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{a}{x_n}\right) - x_n = \frac{1}{2} \cdot \frac{a - x_n^2}{x_n} = \frac{(\sqrt{a} + x_n)(\sqrt{a} - x_n)}{2x_n} < 0$

deducem că şirul este strict descrescător şi mărginit inferior, deci este convergent.

Notăm $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = l$ şi trecem la limită în relația de recurență obținând:

$l = \frac{1}{2}\left(l + \frac{a}{l}\right)$. Soluția acceptată este $l = \sqrt{a}$ .

**9.** $(x_n)_{n\geq 0}$, $x_0 = 1$, $x_{n+1} = \dfrac{2ax_n}{x_n + a}$, unde $a > 1$.

*Soluție:*

*Mărginirea*: Din faptul că $x_0 = 1$ şi $a > 0$ rezultă că toți termenii sunt pozitivi. Pornind de la egalitatea $x_{n+1} - a = a\dfrac{x_n - a}{x_n + a}$, se arată prin inducție că $x_n < a$, $\forall n \geq 0$. Deci şirul este mărginit: $0 < x_n < a$.

*Monotonia*: $x_{n+1} - x_n = \dfrac{2ax_n}{x_n + a} - x_n = \dfrac{2ax_n - x_n^2 - ax_n}{x_n + a} = \dfrac{ax_n - x_n^2}{x_n + a} = x_n\dfrac{a - x_n}{x_n + a}$ .

Deoarece $x_n < a$, deducem $x_{n+1} - x_n > 0$, deci şirul este strict crescător.

Fiind strict crescător şi mărginit superior, rezultă că este convergent. Fie $l = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$. Trecând la limită în relația de recurență se obține:

$$l = \frac{2al}{l + a} \Rightarrow l^2 + al = 2al \Rightarrow l^2 = al \Rightarrow l = a \text{ sau } l = 0.$$

Cum toți termenii şirului sunt strict pozitivi, iar $(x_n)$ este crescător, rezultă că $l = a$.

**10.** Să se studieze convergența şirului $(x_n)_{n\geq 0}$, $x_0 \in (0, 1)$, $x_{n+1} = x_n(1 - x_n)$.

*Soluție:*

*Mărginirea*: Se demonstrează prin inducție că $x_n \in (0, 1)$.

*Monotonia*: $x_{n+1} - x_n = -x_n^2 < 0 \Rightarrow x_{n+1} < x_n$, deci şirul este strict descrescător.

Fiind mărginit şi monoton este convergent. Trecând la limită în relația de recurență, rezultă:

$$l = l(1 - l) \Rightarrow l = 0.$$

**11.** Să se studieze convergența şirului $(x_n)_{n\geq 1}$, $x_1 > 1$, $x_{n+1} = \dfrac{x_n^2}{x_n - 1}$

*Soluție:*

*Mărginirea*: $x_1 > 1, x_2 > 1, \ldots, x_n > 1 \Rightarrow x_{n+1} - 1 = \dfrac{x_n^2}{x_n - 1} - 1 = \dfrac{x_n^2 - x_n + 1}{x_n - 1} > 0$ .

*Monotonia*: $x_{n+1} - x_n = \dfrac{x_n^2}{x_n - 1} - x_n = \dfrac{x_n}{x_n - 1} > 0$, deci şirul este strict crescător.

*Convergența*: şirul este strict crescător, dar nu are limită finită şi deci $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$ .

## Exerciții propuse

**1.** Se consideră şirul $(a_n)_{n\geq 1}$ dat de relația de recurență:

$\dfrac{1}{\sqrt[n+1]{a_{n+1}}-1}-\dfrac{1}{\sqrt[n]{a_n}-1}=1$, pentru $n \geq 2$ şi de condiția inițială $a_1 = 2$.

Să se determine $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

**2.** Să se calculeze limita şirului $(a_n)_{n\geq 1}$, $a_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \operatorname{arctg} \dfrac{1}{k^2+k+1}$.

**3.** Dacă $\left(2+\sqrt{3}\right)^n = a_n + b_n\sqrt{3}$, $n \in \mathbb{N}^*$, să se calculeze: $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n}$.

**4.** Să se studieze convergența şirului $(a_n)_{n\geq 1}$, dat de relația de recurență:

$a_{n+1} = \dfrac{a_n^2 - a_n + 1}{a_n}$ şi de condiția inițială $a_1 = \dfrac{3}{2}$.

**5.** Se consideră şirul $(a_n)_{n\geq 0}$, dat de relația de recurență:

$a_{n+2} = \sqrt{a_n \cdot a_{n+1}}$ şi de condițiile inițiale $a_0 = 1$ şi $a_1 = 2$.

Să se studieze convergența şirului.

**6.** Să se studieze convergența şirului $(a_n)_{n\geq 0}$, dat prin relația de recurență:

$a_{n+1} = \dfrac{2a_n}{a_n+1}$ şi de condiția inițială $a_0 = 1$.

**7.** Să se calculeze limita şirului $(a_n)_{n\geq 2}$,

$a_n = \dfrac{2^3-1}{2^3+1} \cdot \dfrac{3^3-1}{3^3+1} \cdot \ldots \cdot \dfrac{n^3-1}{n^3+1}$.

**8.** Să se determine limita şirului $(x_n)_{n\geq 2}$, unde

$x_n = n\left(\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n+1]{b}-1\right)$, unde $a$, $b > 0$.

**9.** Să se determine $\lim\limits_{n\to\infty} n\left(\sqrt[n]{\ln n}-1\right)$.

**10.** Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\left(\sqrt{1+\dfrac{k}{n^2}}-1\right)$.

**11.** Să se calculeze:

i) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n^2}\right)\left(1+\dfrac{2}{n^2}\right)\ldots\left(1+\dfrac{n}{n^2}\right)$; ii) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1^2}{n^3}\right)\left(1+\dfrac{2^2}{n^3}\right)\ldots\left(1+\dfrac{n^2}{n^3}\right)$.

**12.** Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} n-\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{k^2+4k+1}{k^2+4k-13}$.

**13.** Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{k\sqrt{k+1}+(k+1)\sqrt{k}}$, $n\in\mathbb{N}^*$.

**14.** Fie numerele reale $a_1, a_2, \ldots, a_k$. Să se calculeze:

$\lim\limits_{n\to\infty}\left(a_1\sqrt{n+1}+a_2\sqrt{n+2}+\ldots+a_k\sqrt{n+k}\right)$.

**15.** Se consideră şirul cu termen general

$a_n=\dfrac{8n-3}{8n+1}$ şi se formează şirul $b_n = a_1\cdot a_2\cdot\ldots\cdot a_n$.

Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} b_n$.

**16.** Se consideră şirul $(x_n)_{n\geq 0}$, dat prin relația de recurență:

$x_n = nx_{n-2}$, $n\geq 2$ şi de condițiile inițiale $x_0 = 1$, $x_1 = 2$.

Să se studieze convergența şirului.

**17.** Să se calculeze limita şirului $(x_n)_{n\geq 1}$

$x_n = ac+(a+ab)c^2+(a+ab+ab^2)c^3+\ldots+(a+ab+\ldots+ab^n)c^{n+1}$,

unde $a$, $b$, $c$ sunt numere reale astfel încât $|c| < 1$, $b\neq 1$ şi $bc < 1$.

**18.** Fie şirul $(a_n)_{n\geq 1}$ dat prin relația:

$$a_n = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{3\cdot 4} + \ldots + \frac{1}{(2n-1)2n}$$

a) Să se studieze monotonia şi mărginirea şirului.

b) Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$

**19.** Fie $a \in \mathbb{N}$ şi şirul $(a_n)_{n\geq 0}$, $a_n = \left[\dfrac{(a+n)!}{n!n^a}\right]^n$, $a < n$.

a) Să se calculeze limita şirului $(a_n)_{n\geq 0}$.

b) Dacă notăm $f(a) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$, să se demonstreze că:

$$f(1)\cdot f(2)\ldots f(a) = \sqrt[3]{[f(a)]^{a+2}}\ .$$

**20.** Se consideră şirul $(x_n)_{n\geq 0}$, definit prin relațiile: $x_0 = a > 1$, $x_{n+1} = e^{-1+x_n}$.

a) Să se arate că şirul este monoton crescător.

b) Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

**21.** Fie $(x_n)_{n\geq 0}$ un şir de numere reale care verifică relația de recurență:

$$x_{n+1} = x_n - x_n^2 + x_n^3 - x_n^4,\ \ 0 < x_0 < 1.$$

a) Să se studieze convergența şirului; b) Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

**22.** Fie $a < b$ două numere reale. Se consideră şirul $(x_n)_{n\geq 1}$ pentru care sunt îndeplinite următoarele condiții:

a) $a < x_n < b$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$; b) $(b-x_n)(x_{n+1}-a) \geq \dfrac{(b-a)^2}{4}$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

i) Să se arate că şirul este convergent.

ii) Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

**23.** Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} \sin^2 \pi \sqrt[3]{n^3 + n^2 + n + 1}$.

**24.** Fie şirul $(a_n)_{n\geq 1}$ cu $a_1 = M > 0$ şi $a_{n+1} = \frac{1}{3}\left(2a_n + \frac{M}{a_n^2}\right)$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

Calculați: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

**25.** Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} n^{\alpha}\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^n - \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^n\right]$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

**26.** Să se calculeze limitele următoarelor şiruri:

a) $a_n = \left\{\sqrt{n^2+n}\right\}$; b) $a_n = \left\{\sqrt{n^2+3n}\right\}$;

c) $\lim\limits_{n\to\infty}\{(2+\sqrt{3})^n\}$; d) $\lim\limits_{n\to\infty} n\sin(2\pi e n!)$.

**27.** Se consideră şirul $(a_n)_{n\geq 0}$, $a_{n+1} = \frac{a_n^2 - a_n + 1}{a_n}$ şi $a_1 = \frac{3}{2}$.

a) Să se arate că şirul este mărginit şi monoton descrescător.

b) Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

**28.** Fie $(a_n)_{n\geq 1}$ un şir de numere reale astfel încât $a_{n+1} + a_{n-1} = \sqrt{2}\cdot a_n$, $\forall n\in\mathbb{N}^*$. Să se arate că şirul nu este convergent.

**29.** Să se demonstreze că dacă şirul de numere reale $(a_n)_{n\geq 1}$ verifică condițiile: $a_{n+1}^2 < a_n^2$ şi $a_{n+1} + a_n > 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$, atunci şirul este convergent.

## Test de aprofundare

**1.** Fie $x_0 \in \mathbb{R}$. Se consideră şirul $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definit prin recurență:

$$x_{n+1} = \begin{cases} \sqrt{1+x_n}, & x_n \in \mathbb{Q} \\ 0, & x_n \notin \mathbb{Q} \end{cases}.$$

Să se arate că şirul $(x_n)_{n\geq 1}$ este mărginit.

**2.** Să se arate că şirul $a_n = n|\sin n|$ nu are limită.

**3.** Se consideră şirul $(a_n)_{n\geq 1}$, definit prin relația de recurență:

$$a_n \cdot a_{n+1} = n,\ \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Să se arate că $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$.

**4.** Se consideră şirul $(a_n)_{n\geq 1}$, pentru care

$a_{n+1} - 2a_n + a_{n-1} = a, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq 2$ şi $a \in \mathbb{R}$.

Să se studieze convergenţa şirului $b_n = \dfrac{a_n}{n^2}$.

**5.** Şirul $(a_n)_{n\geq 1}$, este dat prin relaţia de recurenţă:

$a_{n+1} = \left(\sqrt{2}\right)^{a_n}$ şi $a_1 = \sqrt{2}$.

a) Să se studieze convergenţa şirului $(a_n)_{n\geq 1}$.

b) Ştiind că limita sa este un număr întreg, să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

**6.** Se dă $a_k = a^{k(k+1)}$ şi $b_n = \prod\limits_{k=1}^{n} a_k,\ a > 1.$

a) Să se studieze convergenţa şirului $(b_n)_{n\geq 1}$.

b) Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} b_n$.

**7.** Se dă şirul $(a_n)_{n\geq 0}$ definit prin relaţia:

$a_n = \sqrt{a_{n-1}} + k,\ \ (a_0 > 0,\ k > 0)$

a) Să se arate că şirul $(a_n)_{n\geq 1}$ este convergent.

b) Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

**8.** Să se arate că un şir $(a_n)_{n\geq 0}$ de numere reale care verifică relaţia:

$(n + 1)x_{n+2} - nx_{n+1} - x_n = 0, \forall n \geq 0$ este convergent.

**9.** Fie şirul $(a_n)_{n\geq 1}$, dat de $a_n = a_1 + (n - 1)r$, unde $n \in \mathbb{N}^*$ şi $a_1 > 0$, $r > 0$ sunt fixate.

Să se calculeze:

a) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\dfrac{r^2}{a_2^2}\right)\cdot\left(1-\dfrac{r^2}{a_3^2}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1-\dfrac{r^2}{a_{n+1}^2}\right).$

b) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_2^3-r^3}{a_2^3+r^3}\cdot\dfrac{a_2^3-r^3}{a_3^3+r^3}\cdot\ldots\cdot\dfrac{a_{n+1}^3-r^3}{a_{n+1}^3+r^3}.$

# 1.5. Limite de funcții. Interpretarea grafică a limitei unei funcții într-un punct utilizând vecinătăți, calculul limitelor laterale

## Puncte de acumulare

| | |
|---|---|
| **Definiție** | Un punct $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ se numește *punct de acumulare* al mulțimii $D$ dacă orice vecinătate $V$ a lui $x_0$ conține cel puțin un punct din $D$ diferit de $x_0$, adică $V \cap D \setminus \{x_0\} \neq \emptyset$. |

Observăm că $x_0$ nu aparține neapărat lui $D$. Mai mult, $x_0$ poate fi $+\infty$ sau $-\infty$.

| | |
|---|---|
| **Definiție** | Un punct din mulțimea $D$ care nu este punct de acumulare al lui $D$ se numește punct *izolat* al lui $D$. |

Evident toate punctele unei mulțimi finite sunt izolate.

Remarcăm că $x_0$ este punct de acumulare al mulțimii $D$, dacă şi numai dacă există un şir cu elemente din $D \setminus \{x_0\}$ cu limita $x_0$.

Dacă mulțimea $D$ nu este majorată, ea are punctul $+\infty$ ca punct de acumulare, deci putem studia comportarea lui $f$ în jurul lui $+\infty$. Analog, dacă $D$ nu este minorată, putem studia comportarea lui $f$ în jurul lui $-\infty$.

Dacă $D$ este o submulțime a lui $\mathbb{R}$, vom nota cu $D'$ mulțimea punctelor de acumulare ale lui $D$ şi cu $D_0$ mulțimea punctelor izolate ale lui $D$.

***Exemple***

**1.** Fie mulțimea $D = [0, 1]$. Orice punct $x_0 \in [0, 1]$ este punct de acumulare al mulțimii $D$ şi $D' = [0, 1]$.

**2.** Fie mulțimea $D = (0, 1)$. Orice punct $x_0 \in [0, 1]$ este punct de acumulare al mulțimii $D$ şi $D' = [0, 1]$.

**3.** Fie mulțimea $D = (-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$. Orice punct $x_0 \in D$ este punct de acumulare al mulțimii $D$; $D' = \overline{\mathbb{R}} = [-\infty, +\infty]$.

**4.** Dacă $D = \mathbb{N}$, atunci $D' = \{+\infty\}$.

Dacă $D = \mathbb{Z}$, atunci $D' = \{-\infty, +\infty\}$.

**5.** Dacă $D = \mathbb{Q}$ sau $D = \mathbb{R}$, atunci $D' = \overline{\mathbb{R}}$.

**6.** Dacă $D = \{0, 1, 2, 3\}$, atunci $D' = \varnothing$. Evident, orice mulțime finită nu are puncte de acumulare.

**7.** Pentru mulțimea $D = (1, 2) \cup \{5\}$, punctul $x_0 = 5$ este punct izolat.

**8.** Pentru mulțimea $D = (2, 7) \cup \{0, 9, 10\}$, punctele 0, 9 şi 10 sunt puncte izolate.

## Noțiunea de limită a unei funcții într-un punct

Considerăm următoarea problemă: fie $f : D \to \mathbb{R}$ o funcție reală de variabilă reală şi vrem să studiem comportarea sa în jurul unui punct $x_0$. Mai precis, ce putem spune despre valorile funcției $f(x)$ când variabila $x$ se apropie de $x_0$? Există un număr $l$ (finit sau infinit) astfel încât $f(x)$ să fie situat în vecinătatea lui $l$ când $x$ se află în vecinătatea lui $x_0$?

Comportarea funcției $f$ în jurul lui $x_0$ se referă la valorile $f(x)$ pentru $x \neq x_0$ în vecinătatea lui $x_0$. Deoarece valoarea funcției $f(x_0)$ în punctul $x_0$ nu ne interesează, nu este necesar ca funcția să fie definită în punctul $x_0$.

Dar funcția trebuie să fie definită pentru puncte suficient de apropiate de $x_0$, adică $x_0$ trebuie să fie un punct de acumulare al mulțimii $D$.

Suntem astfel conduşi la definiția noțiunii de limită a unei funcții într-un punct de acumulare.

| | |
|---|---|
| **Definiție** | Fie $D \subset \mathbb{R}$, $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ un punct de acumulare al mulțimii $D$ şi $f : D \to \mathbb{R}$ o funcție reală definită pe $D$.<br>Atunci funcția $f$ are *limita* $l \in \overline{\mathbb{R}}$ în punctul $x_0$, dacă pentru orice vecinătate $V$ a lui $l$, există o vecinătate $U$ a lui $x_0$, astfel încât $f(x) \in V$, pentru orice $x \in U \cap D \setminus \{x_0\}$.<br>Numărul $l$ se numeşte *limita* funcției $f$ în punctul $x_0$ şi se notează cu $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ (mai putem scrie $f(x) \to l$ când $x \to x_0$). |

**Observație:** Folosind definiția limitei unui şir, putem formula o condiție echivalentă (datorată lui Heine) cu definiția limitei unei funcții într-un punct de acumulare.

**Teoremă.** *Funcția $f : D \to \mathbb{R}$ are limita $l \in \overline{\mathbb{R}}$ în punctul de acumulare $x_0$ al mulțimii $D$, dacă şi numai dacă pentru orice şir $x_n \to x_0$, $x_n \in D$, $x_n \neq x_0$, şirul $f(x_n) \to l$.*

*Demonstrație*

Presupunem că $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = l$. Fie $V$ o vecinătate arbitrară a lui $l$. Atunci există o vecinătate $U$ a lui $x_0$, astfel încât $f(x) \in V$, pentru orice $x \in U \cap D \setminus \{x_0\}$.

Fie $(x_n)$ un şir din $D$, cu $x_n \neq x_0$ şi $x_n \to x_0$. Din definiția limitei unui şir, rezultă că există un număr natural $n_0$ astfel încât $x_n \in U$, pentru orice $n \geq n_0$. Atunci $f(x_n) \in V$, pentru orice $n \geq n_0$. Prin urmare $\lim f(x_n) = l$.

Reciproc, presupunem că pentru orice şir $x_n \to x_0$, $x_n \in D$, $x_n \neq x_0$, şirul $f(x_n) \to l$.

Folosind metoda reducerii la absurd, presupunem că $l$ nu ar fi $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$.

Aceasta implică existența unei vecinătăți $V_0$ a lui $l$, cu proprietatea că oricare ar fi vecinătatea $U$ a lui $x_0$, există un punct $x_U \in U \cap D$, $x_U \neq x_0$, astfel încât $f(x_U) \notin V_0$.

După natura punctului $x_0$ putem considera un şir de vecinătăți $(U_n)$ ale lui $x_0$ convenabil alese, de forma:

a) $U_n = \left(x_0 - \dfrac{1}{n}, x_0 + \dfrac{1}{n}\right)$, dacă $x_0 \in \mathbb{R}$; $\quad \forall n \in \mathbb{N}^*$

b) $U_n = (n, +\infty)$, dacă $x_0 = +\infty$; $\quad \forall n \in \mathbb{N}^*$

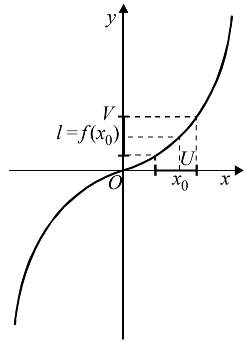
c) $U_n = (-\infty, -n)$, dacă $x_0 = -\infty$. $\quad \forall n \in \mathbb{N}^*$

Deci în orice vecinătate $U_n$ există un punct $x_n \in D$, $x_n \neq x_0$, astfel încât $f(x_n) \notin V_0$, pentru orice $n \geq 1$. Am obținut astfel un şir $(x_n)$ de puncte din $D \setminus \{x_0\}$ cu limita $x_0$. Faptul că $f(x_n) \notin V_0$ contrazice ipoteza ($f(x_n) \to l$).

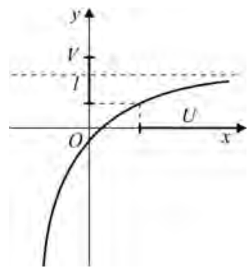
**Observație:** Datorită echivalenței este mai convenabil să utilizăm, atât în demonstrații, cât şi în aplicații, definiția limitei cu ajutorul şirurilor, care au fost studiate anterior.

Ilustrăm grafic toate cazurile posibile pentru punctul de acumulare $x_0$ şi $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$.

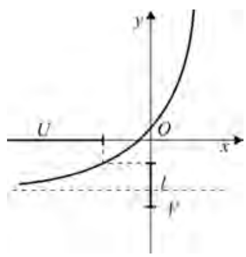
**Cazul I:** $x_0 \in \mathbb{R},\ \lim\limits_{x \to x_0} f(x) = l \in \mathbb{R}$.



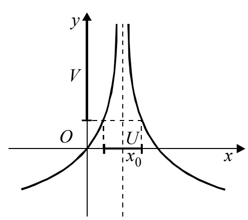

**Cazul II:** $x_0 = +\infty,\ \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = l \in \mathbb{R}$.



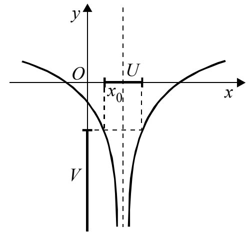

**Cazul III:** $x_0 = -\infty,\ \lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = l \in \mathbb{R}$.



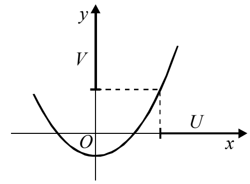

**Cazul IV:** $x_0 \in \mathbb{R},\ \lim\limits_{x \to x_0} f(x) = +\infty$.



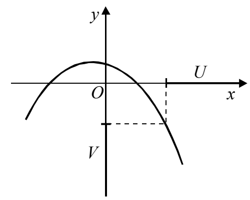
**Cazul V:** $x_0 \in \mathbb{R}$, $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = -\infty$.



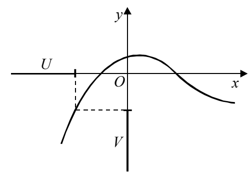

**Cazul VI:** $x_0 = +\infty$, $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.



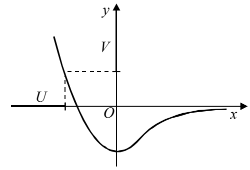

**Cazul VII:** $x_0 = +\infty$, $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$.




**Cazul VIII:** $x_0 = -\infty$, $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$.




**Cazul IX:** $x_0 = -\infty$, $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$.




Cu ajutorul teoremei lui Heine şi utilizând proprietățile şirurilor care au limită, putem calcula limitele unor funcții elementare studiate.

***Exemple***

**1.** Fie funcția constantă $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = c \in \mathbb{R}$ şi $x_0 \in \mathbb{R}$.

Avem $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = c$.

**2.** Fie funcția identitate $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = x$.

Vom arăta că: $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = x_0$, unde $x_0 \in \mathbb{R}$.

*Soluție:* Fie $x_0 \in \mathbb{R}$ şi $V$ o vecinătate a lui $f(x_0) = x_0$. Evident, pentru orice $x \in V, f(x) = x \in V$ (fig. 26). Deci $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = x_0 = f(x_0)$.

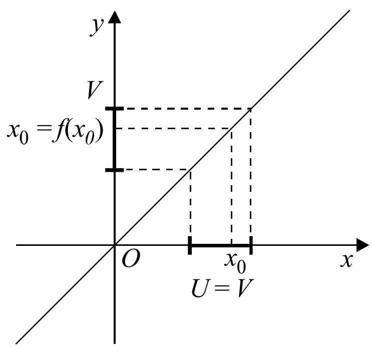



**Figura 26**

**Observație:** Printr-un raționament asemănător se arată că:

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = +\infty \text{ şi } \lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$$

**3.** Fie funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^k$, $k \in \mathbb{N}^*$ şi $x_0 \in \mathbb{R}$. Atunci $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = x_0^k$.

Vom ilustra cazul $k = 2$ (fig. 27). Fie $x_0 \in \mathbb{R}$ şi $V$ o vecinătate a lui $f(x_0) = x_0^2$.

Atunci există $\varepsilon \in (0, 1)$, astfel încât $(x_0^2 - \varepsilon,\ x_0^2 + \varepsilon) \subset V$. Alegem $\delta = \dfrac{\varepsilon}{1 + 2|x_0|}$ şi $U = (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$.

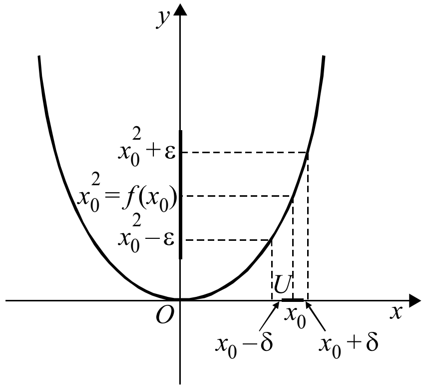



**Figura 27**

Atunci, pentru orice $x \in U$, avem

$$|f(x)-f(x_0)|=\left|x^2-x_0^2\right|=|x-x_0||x+x_0|<\delta(|x|+|x_0|)\le\delta(2|x_0|+\delta)<\delta(1+2|x_0|)=\varepsilon,$$

adică $f(x) \in V$.

**4.** Fie funcția $f:\mathbb{R}\setminus\{0\}\to\mathbb{R}, f(x)=\dfrac{1}{x^2}$. Să arătăm cu ajutorul vecinătăților că $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = +\infty$.

*Soluție*: Fie $V_{+\infty}$ o vecinătate oarecare a lui $+\infty$ şi $\varepsilon > 0$ astfel încât $(\varepsilon, +\infty) \subset V_{+\infty}$. Fie $U_0=\left(-\dfrac{1}{\sqrt{\varepsilon}},\dfrac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\right)$ o vecinătate a lui 0. Să arătăm că dacă $x \in U_0$, $x \neq 0$ atunci $f(x) \in V_{+\infty}$.

Din $x\in\left(-\dfrac{1}{\sqrt{\varepsilon}},\dfrac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\right)\Rightarrow x^2<\dfrac{1}{\varepsilon}\Rightarrow\dfrac{1}{x^2}=f(x)>\varepsilon\Rightarrow f(x)\in V_{+\infty}$.

**Observație:** Printr-un raționament asemănător se arată că, dacă $x_0 \neq 0$, atunci

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=\frac{1}{x_0^2}.$$

## Calculul limitelor laterale

| | |
|---|---|
| **Definiție** | Fie $f : D \to \mathbb{R}$ o funcție reală definită pe $D$.<br>• Dacă $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ este un punct de acumulare al mulțimii $D \cap (-\infty, x_0)$, atunci funcția $f$ are *limită la stânga* în punctul $x_0$ egală cu $l_s \in \overline{\mathbb{R}}$, dacă pentru orice vecinătate $V$ a lui $l_s$ există o vecinătate $U$ a lui $x_0$ astfel încât $f(x) \in V$, pentru orice $x < x_0$ din $U \cap D$.<br>• Dacă $x_0$ este un punct de acumulare al mulțimii $D \cap (x_0, +\infty)$, atunci funcția $f$ are *limită la dreapta* în punctul $x_0$ egală cu $l_d \in \overline{\mathbb{R}}$, dacă pentru orice vecinătate $V$ a lui $l_d$, există o vecinătate $U$ a lui $x_0$ astfel încât $f(x) \in V$, pentru orice $x > x_0$ din $U \cap D$. |

Se folosesc notațiile:

$l_s = \lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x < x_0}} f(x) = f(x_0 - 0)$ şi $l_d = \lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x > x_0}} f(x) = f(x_0 + 0)$.

Cele două tipuri de limite definite mai sus (limita la stânga şi limita la dreapta) se numesc *limite laterale*.

Avem următoarele condiții echivalente:

**Propoziție.** *Funcția $f : D \to \mathbb{R}$ are limită la stânga în punctul $x_0$ egală cu $l_s \in \overline{\mathbb{R}}$ dacă şi numai dacă pentru orice şir $x_n \to x_0$, $x_n \in D$, $x_n < x_0$, şirul $f(x_n) \to l_s$.*
*Funcția $f : D \to \mathbb{R}$ are limita la dreapta în punctul $x_0$ egală cu $l_d \in \overline{\mathbb{R}}$ dacă şi numai dacă pentru orice şir $x_n \to x_0$, $x_n \in D$, $x_n > x_0$, şirul $f(x_n) \to l_d$.*

*Demonstrație*

Presupunem că $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x < x_0}} f(x) = l_s$. Fie $V$ o vecinătate arbitrară a lui $l_s$.

Atunci există $U$ o vecinătate a lui $x_0$ astfel încât $f(x) \in V$, pentru orice $x \in D \cap U$, $x < x_0$. Fie $(x_n)$ un şir din $D$, cu $x_n < x_0$ şi $x_n \to x_0$. Deci există un număr natural $n_0$ astfel încât $x_n \in U$, pentru orice $n \geq n_0$. Atunci $f(x_n) \in V$, $\forall n \geq n_0$. Prin urmare $\lim f(x_n) = l_s$.

Reciproc se demonstrează prin reducere la absurd, analog cu demonstrația teoremei lui Heine.

Pentru limită la dreapta se procedează similar.

Legătura dintre limita într-un punct şi limitele laterale în acel punct este dată de următoarea:

**Teoremă.** *Funcţia $f : D \to \mathbb{R}$ are limită în punctul $x_0$ dacă şi numai dacă are limite laterale egale în $x_0$. În acest caz*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0 - 0) = f(x_0 + 0).$$

*Demonstraţie*

Dacă există $\lim_{x \to x_0} f(x) = l$, atunci evident există limitele laterale şi $f(x_0 - 0) = f(x_0 + 0) = l$.

Reciproc, presupunem că $f$ are limite laterale egale în $x_0$, $f(x_0 - 0) = f(x_0 + 0) = l$.

Fie $V$ o vecinătate a lui $l$. Faptul că $f(x_0 - 0) = l$, implică existenţa unei vecinătăţi $U_1$ a lui $x_0$ astfel încât $f(x) \in V$ pentru orice $x \in D \cap U_1$ şi $x < x_0$. Analog, $f(x_0 + 0) = l$ implică existenţa unei vecinătăţi $U_2$ a lui $x_0$, astfel încât $f(x) \in V$, pentru orice $x \in D \cap U_2$ şi $x > x_0$.

Notăm $U = U_1 \cap U_2$. Pentru orice $x \in U \cap D \setminus \{x_0\}$, avem $f(x) \in V$. Prin urmare există $\lim_{x \to x_0} f(x) = l$.

**Observaţie:** Există funcţii care nu au limite laterale în nici un punct; de exemplu, funcţia lui Dirichlet definită pe $\mathbb{R}$ prin

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q} \\ 0, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}.$$

Într-adevăr, fie $x_0 \in \mathbb{R}$ şi două şiruri $(x_n)$ şi $(y_n)$ convergente la $x_0$ cu $x_n \in \mathbb{Q}$, $y_n \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ şi $x_n, y_n < x_0$. Atunci $f(x_n) = 1$ şi $f(y_n) = 0$, pentru orice $n \geq 1$. Deci $f$ nu are limită la stânga în $x_0$.

Analog $f$ nu are nici limită la dreapta în $x_0$.

O condiție suficientă pentru existența limitelor laterale este dată de următoarea propoziție:

**Propoziție.** *O funcție monotonă $f : D \to \mathbb{R}$ are limite laterale în orice punct de acumulare al mulțimii D.*

*Demonstrație*

Presupunem că $f$ este crescătoare pe $D$. Fie $x_0$ un punct de acumulare al mulțimii $D \cap (-\infty, x_0)$. Vom demonstra că există $f(x_0 - 0)$.

Fie un şir $(x_n)$, cu $x_n \to x_0$ şi $x_n < x_0$. Schimbând eventual ordinea termenilor, putem presupune că şirul $(x_n)$ este crescător. Rezultă că şirul $(f(x_n))$ este de asemenea crescător, deci are limita $l_s$ (finită sau infinită). Evident $l_s$ nu depinde de şirul $(x_n)$. În concluzie $f(x_0 - 0) = l_s$.

Analog se arată că există $f(x_0 + 0)$.

Cazul în care funcția $f$ este descrescătoare se demonstrează analog.

Limitele de funcții au unele proprietăți asemănătoare cu limitele de şiruri, care sunt des utilizate în aplicații.

**Propoziții** • *Dacă există limita funcției f în punctul $x_0$, atunci ea este unică.*

• *Dacă funcțiile $f, g : D \to \mathbb{R}$ au limite în punctul $x_0$ şi $f(x) \le g(x)$, pentru orice $x \ne x_0$ într-o vecinătate U a lui $x_0$, atunci*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) \le \lim_{x \to x_0} g(x).$$

• *Dacă funcțiile $f, h : D \to \mathbb{R}$ au limite egale în punctul $x_0$ şi dacă există o vecinătate U a lui $x_0$ astfel încât $f(x) \le g(x) \le h(x)$, pentru orice $x \ne x_0$ din $U \cap D$, atunci funcția $g : D \to \mathbb{R}$ are limită în $x_0$ şi*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} g(x) = \lim_{x \to x_0} h(x).$$

# 1.6. Calculul limitelor pentru funcțiile studiate

**1.** Fie α > 0 şi funcția $f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}, f(x) = x^{\alpha}$. Avem $\boxed{\lim\limits_{x \to x_0} x^{\alpha} = x_0^{\alpha}}$.

De asemenea, pentru funcția $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}, f(x) = \dfrac{1}{x^{\alpha}}$, avem:

$$\boxed{\lim_{x \to x_0} \frac{1}{x^{\alpha}} = \frac{1}{x_0^{\alpha}},}\ x_0 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

În plus, avem

$$\boxed{\lim_{x \to \infty} \frac{1}{x^{\alpha}} = 0} \text{ şi } \qquad .$$

**2.** Fie $a > 0$ şi funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = a^x$. Avem

$$\boxed{\lim_{x \to x_0} a^x = a^{x_0}}.$$

În particular, $\lim\limits_{x \to 0} a^x = 1$ şi $\lim\limits_{x \to 1} a^x = a$.

De asemenea, avem:

i) dacă $a > 1$, $\boxed{\lim\limits_{x \to -\infty} a^x = 0}$ şi $\boxed{\lim\limits_{x \to +\infty} a^x = +\infty}$;

ii) dacă $0 < a < 1$, $\boxed{\lim\limits_{x \to -\infty} a^x = +\infty}$ şi $\boxed{\lim\limits_{x \to +\infty} a^x = 0}$.

**3.** Pentru $a > 0$ şi $a \neq 1$, fie funcția $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \log_a x$. Avem

$$\boxed{\lim_{x \to x_0} \log_a x = \log_a x_0},\ x_0 \in (0, \infty)$$

În particular, $\lim\limits_{x \to a} \log_a x = 1$ şi $\lim\limits_{x \to 1} \log_a x = 0$.

În plus, avem:

i) dacă $a > 1$, $\boxed{\lim\limits_{x \to 0} \log_a x = -\infty}$ şi $\boxed{\lim\limits_{x \to +\infty} \log_a x = +\infty}$;

ii) dacă $0 < a < 1$, $\boxed{\lim\limits_{x \to 0} \log_a x = +\infty}$ şi $\boxed{\lim\limits_{x \to +\infty} \log_a x = -\infty}$.

**4.** Fie funcția $f : (-\infty, -1) \cup (0, +\infty) \to \mathbb{R}$, definită prin $f(x) = \left(1+\frac{1}{x}\right)^x$.

Avem $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = \lim\limits_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e}$.

**5.** Fie $f : \mathbb{R} \to [-1, 1]$, $f(x) = \sin x$ şi $x_0 \in \mathbb{R}$. Avem

$$|\sin x - \sin x_0| = 2\left|\cos\frac{x+x_0}{2}\right|\left|\sin\frac{x-x_0}{2}\right| \le$$
$$\le 2\left|\sin\frac{x-x_0}{2}\right| \le 2\frac{|x-x_0|}{2} = |x-x_0|,$$

deci $\boxed{\lim\limits_{x\to x_0}\sin x = \sin x_0}$.

**6.** Fie $f : \mathbb{R} \to [-1, 1]$, $f(x) = \cos x$ şi $x_0 \in \mathbb{R}$. Avem:

$$\lim_{x\to x_0}\cos x = \lim_{x\to x_0}\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right) = \sin\left(\lim_{x\to x_0}\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2}-x_0\right) = \cos x_0,$$

deci $\boxed{\lim\limits_{x\to x_0}\cos x = \cos x_0}$.

**Observație:** Funcțiile sinus şi cosinus nu au limită la $\pm\infty$. Justificarea este următoarea: considerând şirul $x_n = n\frac{\pi}{2} \to +\infty$, şirul $(\sin x_n)$ este

$$1, 0, -1, 0, 1, 0, -1, \ldots, 1, 0, -1, 0, \ldots$$

care fiind un şir oscilant nu are limită.

## Exerciții rezolvate

Să se determine punctele în care următoarele funcții admit limită şi în aceste puncte să se calculeze limita.

**1.** $f : \mathbb{R} \setminus \{0, 1\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{1}{x(x-1)}$.

**2.** $f : (1, 2) \cup \{3\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{(1-x)(2-x)}$.

**3.** $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{1+x^2}$.

**4.** $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\begin{cases} x, & x\in\mathbb{Q} \\ -x, & x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}\end{cases}$.

**5.** $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\begin{cases} x^2-1, & x\le 1 \\ 1-x, & x>1\end{cases}$.

*Soluții*

**1.** $D'=\mathbb{R}$;

a) $x_0$ finit, $x_0\notin\{0, 1\}$. Deci $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\dfrac{1}{x_0(x_0-1)}$.

b) $x_0=1$. Fie şirurile $x_n^{'}=1+\dfrac{1}{n}$ şi $x_n^{''}=1-\dfrac{1}{n}$. Atunci

$$f\left(x_n^{'}\right)=\frac{1}{x_n^{'}\left(1-x_n^{'}\right)}=\frac{1}{1+\frac{1}{n}}\cdot\frac{1}{1-1-\frac{1}{n}}=-\frac{n}{n+1}\cdot n=-\frac{n^2}{n+1}\Rightarrow\lim_{n\to\infty} f\left(x_n^{'}\right)=-\infty.$$

$$f\left(x_n^{''}\right)=\frac{n^2}{n+1}\Rightarrow\lim_{n\to\infty} f\left(x_n^{''}\right)=+\infty.$$

Nu există limita funcției în punctul de acumulare $x_0=1$.

c) $x_0=0$; se arată analog că funcția $f$ nu admite limită în punctul de acumulare $x_0=0$.

d) $x_0=+\infty$; fie $x_n^{'}\to\infty\Rightarrow f\left(x_n^{'}\right)=\dfrac{1}{x_n(x_n-1)}\to 0$ şi $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=0$.

e) $x_0=-\infty$; fie $x_n^{''}\to-\infty\Rightarrow f\left(x_n^{''}\right)=-\dfrac{1}{x_n(x_n-1)}\to 0$ şi $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=0$.

**2.** Punctul $x=3$ este izolat; $D'=[1, 2]$.

$x_0\in[1, 2]\Rightarrow\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\sqrt{(1-x_0)(2-x_0)}$.

**3.** $D'=\mathbb{R}$; $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\sqrt{1+x_0^2}$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$.

**4.** Fie $x_0\in\mathbb{R}$ un punct de acumulare fixat ($x_0\in\mathbb{Q}$ sau $x_0\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$).

Considerăm un şir $\left(x_n^{'}\right)_{n\ge 0}$, $x_n^{'}\in\mathbb{Q}$ cu $x_n^{'}\to x_0$ şi un şir $\left(x_n^{''}\right)_{n\ge 0}$, $x_n^{''}\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$, cu $x_n^{''}\to x_0$.

$\lim\limits_{n\to\infty} f\left(x_n^{'}\right)=x_n^{'}\to x_0$, $\lim\limits_{n\to\infty} f\left(x_n^{''}\right)=-x_n^{''}\to -x_0$.

Funcția admite limită în $x_0$, dacă $x_0 = -x_0 \Rightarrow x_0 = 0$, deci singurul punct de acumulare în care funcția admite limită este $x_0 = 0$.

**5.** $D' = \mathbb{R}$ şi avem:

$\lim\limits_{x\to 1} f(x) = 0,\ \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty,\ \lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$.

## 1.7. Operații cu limite de funcții; cazuri exceptate la calculul limitelor de funcții $\frac{0}{0}$; $\frac{\infty}{\infty}$; $\infty - \infty$, $1^\infty$, $\infty^0$, $0^0$

**Teoremă.** *Fie* $D \subset \mathbb{R}$, $x_0$ *un punct de acumulare al mulțimii* $D$ *şi două funcții* $f, g : D \to \mathbb{R}$ *care au limite (finite sau infinite) în punctul* $x_0$. *Atunci:*

i) *dacă suma limitelor are sens, funcția* $f + g$ *are limită în* $x_0$ *şi*

$$\lim_{x\to x_0}(f(x)+g(x)) = \lim_{x\to x_0} f(x) + \lim_{x\to x_0} g(x);$$

ii) *pentru orice* $\lambda \in \mathbb{R}$, *funcția* $\lambda f$ *are limita în* $x_0$ *şi*

$$\lim_{x\to x_0} \lambda f(x) = \begin{cases} \lambda \lim\limits_{x\to x_0} f(x), \lambda \neq 0, \\ 0, \lambda = 0; \end{cases}$$

iii) *dacă produsul limitelor are sens, funcția* $f\,g$ *are limită în* $x_0$ *şi*

$$\lim_{x\to x_0} f(x)\cdot g(x) = \lim_{x\to x_0} f(x) \cdot \lim_{x\to x_0} g(x);$$

iv) *dacă câtul limitelor are sens, funcția* $\frac{f}{g}$ *are limită în* $x_0$ *şi*

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim\limits_{x\to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x\to x_0} g(x)};$$

v) *dacă* $f > 0$ *şi are sens* $\left(\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\right)^{\lim\limits_{x\to x_0} g(x)}$, *funcția* $f^g$ *are limită în* $x_0$ *şi*

$$\lim_{x\to x_0} [f(x)]^{g(x)} = \left(\lim_{x\to x_0} f(x)\right)^{\lim\limits_{x\to x_0} g(x)}.$$

*Demonstrație*

Fie $x_0$ un punct de acumulare al mulțimii $D$ şi notăm $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=l_1$ şi $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=l_2$.

Fie $(x_n)$ un şir de elemente din $D \setminus \{x_0\}$ cu $x_n \to x_0$. Atunci $f(x_n) \to l_1$; $g(x_n) \to l_2$ şi avem:

i) $f((x_n) + g(x_n)) \to l_1 + l_2$, deci $\lim\limits_{x\to x_0} (f(x)+g(x))=l_1+l_2$.

ii) $\lambda f(x_n) \to \lambda l_1$, deci $\lim\limits_{x\to x_0} \lambda f(x)=\lambda l_1$.

iii) $(f(x_n)\, g(x_n)) \to l_1 l_2$, deci $\lim\limits_{x\to x_0} (f(x)g(x))=l_1 l_2$.

iv) $\left(\dfrac{f(x_n)}{g(x_n)}\right)\to\dfrac{l_1}{l_2}$, deci $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{l_1}{l_2}$.

Observăm că $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)\neq 0$ implică existența unei vecinătăți $V$ a lui $x_0$, astfel încât $g(x) \neq 0$ pe $D \cap V \setminus \{x_0\}$.

v) $\left([f(x_n)]^{g(x_n)}\right)\to l_1^{l_2}$, deci $\lim\limits_{x\to x_0} [f(x)]^{g(x)}=l_1^{l_2}$.

Rezultatele i) şi iii) se pot extinde la un număr finit de funcții:

Fie $f_1, f_2, \ldots, f_k : D \to \mathbb{R}$ care au limită în punctul de acumulare $x_0$ a lui $D$. Avem:

a) $\lim\limits_{x\to x_0} (f_1(x)+f_2(x)+\ldots+f_k(x))=\lim\limits_{x\to x_0} f_1(x)+\lim\limits_{x\to x_0} f_2(x)+\ldots+\lim\limits_{x\to x_0} f_k(x)$

sau

$$\lim_{x\to x_0}\left(\sum_{i=1}^{k} f_i(x)\right)=\sum_{i=1}^{k}\left(\lim_{x\to x_0} f_i(x)\right);$$

b) $\lim\limits_{x\to x_0} (f_1(x)\cdot f_2(x)\cdot\ldots\cdot f_k(x))=\lim\limits_{x\to x_0} f_1(x)\cdot\lim\limits_{x\to x_0} f_2(x)\cdot\ldots\cdot\lim\limits_{x\to x_0} f_k(x)$

sau

$$\lim_{x\to x_0}\left(\prod_{i=1}^{k} f_i(x)\right)=\prod_{i=1}^{k}\left(\lim_{x\to x_0} f_i(x)\right).$$

*Cazurile exceptate* (de teorema de mai sus)

**1.** Cazul $+\infty-\infty$

$$\lim_{x\to x_0}(f(x)+g(x)),\text{ când } \lim_{x\to x_0} f(x)=+\infty,\ \lim_{x\to x_0} g(x)=-\infty.$$

**2.** Cazul $0\cdot(\pm\infty)$

$$\lim_{x\to x_0} f(x)g(x),\text{ când } \lim_{x\to x_0} f(x)=0,\ \lim_{x\to x_0}|g(x)|=+\infty.$$

**3.** Cazul $\dfrac{0}{0}$

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)},\text{ când } \lim_{x\to x_0} f(x)=\lim_{x\to x_0} g(x)=0.$$

**4.** Cazul $\dfrac{\pm\infty}{\pm\infty}$,

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)},\text{ când } \lim_{x\to x_0}|f(x)|=\lim_{x\to x_0}|g(x)|=+\infty.$$

**5.** Cazul $1^\infty$

$$\lim_{x\to x_0}|f(x)|^{g(x)},\text{ când } \lim_{x\to x_0} f(x)=1,\ \lim_{x\to x_0} g(x)=+\infty.$$

**6.** Cazul $(\pm\infty)^0$

$$\lim_{x\to x_0}\left[f(x)\right]^{g(x)},\text{ când } \lim_{x\to x_0}|f(x)|=+\infty,\ \lim_{x\to x_0} g(x)=0.$$

**7.** Cazul $0^0$

$$\lim_{x\to x_0}[f(x)]^{g(x)},\text{ când } \lim_{x\to x_0} f(x)=\lim_{x\to x_0} g(x)=0.$$

Calculul unor anumite limite de funcții în cazurile de nedeterminare constituie probleme dificile de Analiză Matematică, pentru care nu există algoritmi de calcul, ci doar unele metode posibile, pe care le vom detalia mai târziu.

În continuare vom calcula limitele unor funcții elementare într-un punct $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$.

**1.** Funcția polinomială $P : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n$.

Funcția are limită în orice $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ şi avem:

$$\lim_{x \to x_0} P(x) = P(x_0),\ x_0 \in \mathbb{R}.$$

$$\lim_{x \to +\infty} P(x) = \begin{cases} +\infty, a_0 > 0, \\ -\infty, a_0 < 0. \end{cases}$$

$$\lim_{x \to -\infty} P(x) = \begin{cases} +\infty, a_0 > 0, n = \text{par}, \\ -\infty, a_0 > 0, n = \text{impar}, \\ -\infty, a_0 < 0, n = \text{par}, \\ +\infty, a_0 < 0, n = \text{impar}. \end{cases}$$

**2.** Funcția rațională $R(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$

**Caz 1** $x_0 \in \mathbb{R}$, $Q(x_0) \neq 0$

$$\lim_{x \to x_0} \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(x_0)}{Q(x_0)}.$$

**Caz 2** $x_0 = \pm\infty$

Dacă $P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n$ şi $Q(x) = b_0x^m + b_1x^{m-1} + \ldots b_m$, atunci:

a) $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} = \lim_{x \to -\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} = 0$, dacă $n < m$.

b) $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} = \lim_{x \to -\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{a_0}{b_0}$, dacă $n = m$.

c) $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} = \operatorname{sgn}\left(\frac{a_0}{b_0}\right)\infty$, dacă $n > m$.

d) $\displaystyle\lim_{x \to -\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} = (-1)^{n-m} \operatorname{sgn}\left(\frac{a_0}{b_0}\right)\infty$, dacă $n > m$,

unde funcția sgn : $\mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$ este dată de $\operatorname{sgn} x = \begin{cases} 1, x > 0, \\ -1, x < 0. \end{cases}$

**Caz 3** $x_0 \in \mathbb{R}$, $Q(x_0) = 0$

Dacă $x_0$ este o rădăcină a polinomului $Q(x)$, simplificând eventual cu o putere a lui $x - x_0$, putem presupune că $P(x_0) \neq 0$ şi $Q(x) = (x - x_0)^k Q_1(x)$, cu $Q_1(x_0) \neq 0$.

• Dacă $k$ este par, atunci

$$\lim_{x \to x_0} \frac{P(x)}{Q(x)} = +\infty \cdot \operatorname{sgn}\left(\frac{P(x_0)}{Q_1(x_0)}\right),$$

• Dacă $k$ este impar, avem

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x < x_0}} \frac{P(x)}{Q(x)} = -\infty \cdot \operatorname{sgn}\left(\frac{P(x_0)}{Q_1(x_0)}\right),$$

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x > x_0}} \frac{P(x)}{Q(x)} = +\infty \cdot \operatorname{sgn}\left(\frac{P(x_0)}{Q_1(x_0)}\right).$$

Deci în acest caz funcția $\frac{P}{Q}$ nu are limită în $x_0$.

**3.** Fie funcția $f : \mathbb{R} \setminus \left\{k\pi + \frac{\pi}{2} | k \in \mathbb{Z}\right\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \operatorname{tg} x$

**Caz 1** $x_0 \in \mathbb{R} \setminus \left\{k\pi + \frac{\pi}{2} | k \in \mathbb{Z}\right\}$

$$\lim_{x \to x_0} \operatorname{tg} x = \operatorname{tg} x_0.$$

**Caz 2** $x_0 = k\pi + \frac{\pi}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x < x_0}} \operatorname{tg}\, x = +\infty; \quad \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x > x_0}} \operatorname{tg}\, x = -\infty;$$

**Caz 3** În punctele de acumulare + ∞ şi – ∞ funcția tangentă nu are limită.

Într-adevăr, şirul $x_n = n\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4} \to +\infty$, dar şirul $(\operatorname{tg}\, x_n)_{n \geq 1}$ nu are limită, deoarece este un şir oscilant.

## Calculul limitei unei funcții compuse

**Teoremă.** *Fie $f : D \to E$ şi $g : E \to F$ două funcții reale de variabilă reală, $\varphi = g \circ f : D \to F$ şi $x_0$ un punct de acumulare al lui D. Dacă $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = l_1$, $f(x) \neq l_1$, pentru $x \neq x_0$ într-o vecinătate a lui $x_0$, $l_1$ este punct de acumulare al lui E şi $\lim\limits_{y\to l_1} g(x) = l_2$, atunci există $\lim\limits_{x\to x_0} \varphi(x) = l_2$.*

*Demonstrație*

Fie $x_n \to x_0$ un şir de puncte din $D$ cu $x_n \neq x_0$. Deoarece $f$ are limită în $x_0$, rezultă că $f(x_n) \to l_1$. Notăm $y_n = f(x_n)$.

Faptul că $\lim\limits_{y\to l_1} g(y) = l_2$ implică $g(y_n) \to l_2$, sau echivalent $\varphi(x_n) \to l_2$. Prin urmare, $\lim\limits_{x\to x_0} \varphi(x) = l_2$.

**Teoremă** *Fie $f : D \to E$ şi $g : E \to F$ două funcții reale de variabilă reală, $\varphi = g \circ f : D \to F$ şi $x_0$ un punct de acumulare al lui D. Dacă $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = l$, $l$ este punct de acumulare al lui E şi $\lim\limits_{y\to l} g(y) = g(l)$, atunci*

$$\lim_{x\to x_0} g(f(x)) = g(\lim_{x\to x_0} f(x)).$$

## Calculul unor limite importante

**I.** $\boxed{\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1}$.

*Demonstrație*

Fie un cerc de rază 1 şi unghiul la centru *AOM* de măsură $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

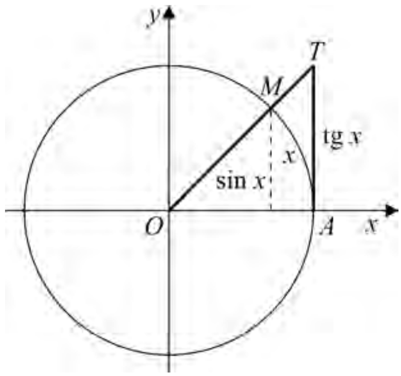



**Figura 28**

Evident avem $\mathscr{A}_{\Delta AOM} < \mathscr{A}_{\text{sector } AOM} < \mathscr{A}_{\Delta AOT}$. Deci

$$\frac{1}{2}\sin x < \frac{1}{2}x < \frac{1}{2}\operatorname{tg} x \Rightarrow \boxed{\sin x \le x \le \operatorname{tg} x};$$

pentru orice $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

Împărțind cu $\sin x$, găsim

$$1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x},$$

sau echivalent,

$$\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1,\ \forall x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right).$$

Aceste inegalități au loc şi pentru $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, 0\right)$, deoarece funcțiile de mai sus sunt pare. Deci

$$\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1,\ \forall x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \setminus \{0\}.$$

Cum $\lim\limits_{x \to 0} \cos x = 1$, rezultă $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$.

*Aplicații*

**1.** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\sin x}=1$; **2.** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg} x}{x}=1$; **3.** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin x}{x}=1$; **4.** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{arctg} x}{x}=1$.

*Demonstrații*

**1.** Folosim relația $\dfrac{x}{\sin x}=\dfrac{1}{\dfrac{\sin x}{x}}$.

**2.** Avem $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg} x}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\dfrac{\sin x}{\cos x}}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}\cdot\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{\cos x}=1$.

**3.** Notăm arcsin $x = y$. Atunci $x = \sin y$ și

$$\lim_{x\to 0}\frac{\arcsin x}{x}=\lim_{y\to 0}\frac{y}{\sin y}=1.$$

**4.** Notăm arctg $x = y$. Atunci $x = \operatorname{tg} y$ și

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{arctg} x}{x}=\lim_{y\to 0}\frac{y}{\operatorname{tg} y}=1.$$

**II.** $\boxed{\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e}$ și $\boxed{\lim\limits_{x\to x_0}(1+u(x))^{\frac{1}{u(x)}}=e,\ \text{dacă}\ \lim\limits_{x\to x_0}u(x)=0}$.

*Aplicații*

**1.** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)}{x}=1$; **2.** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{x}=1$.

**3.** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a^x-1}{x}=\ln a$, $a>0$; **4.** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)^{\alpha}-1}{x}=\alpha$, $\alpha\in\mathbb{R}$.

*Soluții:*

**1.** Aplicând teorema de mai sus, avem

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=\lim_{x\to 0}\ln(1+x)^{\frac{1}{x}}=\ln\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=\ln e=1.$$

**2.** Notând $e^x - 1 = t$, avem $x = \ln(1 + t)$. Atunci

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=\lim_{t\to 0}\frac{t}{\ln(1+t)}=\lim_{t\to 0}\frac{1}{\frac{1}{t}\ln(1+t)}=\lim_{t\to 0}\frac{1}{\ln(1+t)^{\frac{1}{t}}}=\frac{1}{\ln\lim\limits_{t\to 0}(1+t)^{\frac{1}{t}}}=\frac{1}{\ln e}=1 .$$

**3.** Dacă $a > 0$, atunci $a = e^{\ln a}$ şi

$$\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{e^{x\ln a}-1}{x\ln a}\cdot\ln a=\ln a .$$

**4.** Notând $1 + x = e^y$, avem

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^\alpha-1}{x}=\lim_{y\to 0}\frac{e^{\alpha y}-1}{e^y-1}=\lim_{y\to 0}\frac{\frac{e^{\alpha y}-1}{\alpha y}}{\frac{e^y-1}{y}}\cdot\alpha=\alpha .$$

## Exerciții rezolvate

### A. Limite de funcții raționale

Să se calculeze următoarele limite:

**1.** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2+x}{x^2-x}$;

**2.** $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-3x+2}{x^2-4x+3}$;

**3.** $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-1}{(x-1)^2}$;

**4.** $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}}\left(\dfrac{1}{1-x}-\dfrac{1}{1-x^2}\right)$;

**5.** $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^\alpha-1}{x^\beta-1}$, $\alpha, \beta\in\mathbb{N}^*$;

**6.** $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-x^2-x+1}{x^3-3x+2}$;

**7.** $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^n-1-n(x-1)}{(x-1)^2}$, $n\in\mathbb{N}^*$;

**8.** $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ x<2}}\left(\dfrac{1}{x-2}-\dfrac{4}{x^2-4}\right)$;

**9.** $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{x(x-1)(x-2)}{(1+x)(1+2x)}$;

**10.** $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{x(1-x)(x+2)}{(1+x)(2-x)}$.

*Soluții:*

**1.** Avem nedeterminarea $\frac{0}{0}$:

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2+x}{x^2-x}=\lim_{x\to 0}\frac{x(x+1)}{x(x-1)}=\lim_{x\to 0}\frac{x+1}{x-1}=-1;$$

**2.** Avem nedeterminarea $\frac{0}{0}$:

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-3x+2}{x^2-4x+3}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x-2)}{(x-1)(x-3)}=\lim_{x\to 1}\frac{x-2}{x-3}=\frac{1-2}{1-3}=\frac{1}{2}.$$

**3.** $\frac{x^3-1}{(x-1)^2}=\frac{(x-1)\left(x^2+x+1\right)}{(x-1)^2}=\frac{x^2+x+1}{x-1}$, deci

$\lim_{x\to 1}\frac{x^3-1}{(x-1)^2}=\lim_{x\to 1}\frac{x^2+x+1}{x-1}$, limită care nu există.

**4.** $\lim_{\substack{x\to 1\\ x<1}}\frac{1}{1-x}=+\infty$; $\lim_{\substack{x\to 1\\ x<1}}\frac{1}{1-x^2}=+\infty$. Avem nedeterminarea $\infty-\infty$.

Efectuând calculele obținem:

$\frac{1}{1-x}-\frac{1}{1-x^2}=\frac{1+x-1}{1-x^2}=\frac{x}{1-x^2}$ $(x\neq\pm 1)$. Atunci

$$\lim_{\substack{x\to 1\\ x<1}}\left(\frac{1}{1-x}-\frac{1}{1-x^2}\right)=\lim_{\substack{x\to 1\\ x<1}}\frac{x}{1-x^2}=+\infty.$$

**5.** Avem nedeterminarea $\frac{0}{0}$:

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^\alpha-1}{x^\beta-1}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)\left(x^{\alpha-1}+x^{\alpha-2}+\ldots+x+1\right)}{(x-1)\left(x^{\beta-1}+x^{\beta-2}+\ldots+x+1\right)}=\frac{\alpha}{\beta}.$$

**6.** Avem cazul de nedeterminare $\frac{0}{0}$, $x = 1$ reprezintă o rădăcină comună pentru funcțiile polinomiale de la numărător şi numitor. Descompunem separat:

$x^3-x^2-x+1=x^2(x-1)-(x-1)=(x-1)(x^2-1)=(x-1)^2(x+1)$ şi

$x^3-3x+2=x^3-x-2x+2=x(x^2-1)-2(x-1)=(x-1)(x^2+x-2)=$
$=(x-1)^2(x+2)$.

Înlocuind, obținem: $\dfrac{x^3-x^2-x+1}{x^3-3x+2}=\dfrac{(x-1)^2(x+1)}{(x-1)^2(x+2)}$; $x \neq 1$, $x \neq -2$ și

$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-x^2-x+1}{x^3-3x+2}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x+1}{x+2}=\dfrac{2}{3}$. Se observă că s-au efectuat toate calculele, apoi pe forma ireductibilă a expresiei inițiale, am calculat limita.

**7.** Avem nedeterminarea $\dfrac{0}{0}$. Descompunem numărătorul și obținem:

$$\begin{aligned} x^n-1-n(x-1) &= (x-1)(x^{n-1}+x^{n-2}+\ldots+x-n)= \\ &=(x-1)[(x^{n-1}-1)+(x^{n-2}-1)+\ldots+(x-1)]= \\ &=(x-1)^2[x^{n-2}+2x^{n-3}+\ldots+(n-1)]. \end{aligned}$$

$$\frac{x^{n-1}-n(x-1)}{(x-1)^2}=\frac{(x-1)^2\left[x^{n-2}+2x^{n-3}+\ldots+(n-1)\right]}{(x-1)^2}.$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^n-1-n(x-1)}{(x-1)^2}=\lim_{x\to 1}\frac{x^{n-2}+2x^{n-3}+\ldots+(n-1)}{1}=\frac{n(n-1)}{2}.$$

**8.** $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ x<2}}\dfrac{1}{x-2}=-\infty$; $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ x<2}}\dfrac{4}{x^2-4}=-\infty$. Avem nedeterminarea $\infty-\infty$.

Efectuăm calculele și obținem:

$$\frac{1}{x-2}-\frac{4}{x^2-4}=\frac{x+2-4}{x^2-4}=\frac{x-2}{(x-2)(x+2)}=\frac{1}{x+2}\quad (x\neq \pm 2) \text{ și}$$

$$\lim_{x\to 2}\left(\frac{1}{x-2}-\frac{4}{x^2-4}\right)=\lim_{\substack{x\to 2\\ x<2}}\frac{1}{x+2}=\frac{1}{4}.$$

**9.** $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x(x-1)(x-2)}{(x+1)(2x+1)}=+\infty$.

**10.** $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x(1-x)(x+2)}{(1+x)(2-x)}=-\infty$.

## B. Limite de funcții iraționale

Să se calculeze:

**1.** $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+1}}{x-1}$; **2.** $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+1}}{-x+1}$; **3.** $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+4}}$;

**4.** $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)$; **5.** $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)$, **6.** $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x+\sqrt{x^2+1}}{2x+\sqrt{x^2+4}}$;

**7.** $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x+2}-2\sqrt{x+1}+\sqrt{x}\right)$; **8.** $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt[3]{x+1}-\sqrt[3]{x}\right)$;

**9.** $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[4]{x^3}\right)$; **10.** $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x^2}+1}{\sqrt[3]{x}+\sqrt[4]{x^3}+1}$;

**11.** $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sqrt{x}-1}{\sqrt[3]{x}-1}$; **12.** $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}-2}{\sqrt{x}-1}$;

**13.** $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{(1+x)-\sqrt{x^2+1}}{(1-x)-\sqrt[3]{x^3+1}}$; **14.** $\lim\limits_{\substack{x\to1\\x>1}}\left(\dfrac{1}{\sqrt{x-1}}-\dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}\right)$;

**15.** $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sqrt{x^2+x+1}-\sqrt{3}}{\sqrt{x^2-x+1}-1}$; **16.** $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sqrt[m]{x}-1}{\sqrt[n]{x}-1}$.

*Soluții:*

**1.** Avem nedeterminarea $\dfrac{\infty}{\infty}$. Prelucrăm şi obținem:

$$\frac{\sqrt{x^2+1}}{x-1}=\frac{\sqrt{x^2\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}}{x=1}=\frac{x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}{x\left(1-\frac{1}{x}\right)}=\frac{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}{1-\frac{1}{x}}\quad \text{şi}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^2+1}}{x-1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}{1-\frac{1}{x}}=1.$$

**2.** Avem nedeterminarea $\frac{\infty}{\infty}$. Pentru $x < 0$, avem:

$$\frac{\sqrt{x^2+1}}{-x+1}=\frac{|x|\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}{x\left(-1+\frac{1}{x}\right)}=\frac{-x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}{x\left(-1+\frac{1}{x}\right)} \text{ şi } \lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2+1}}{-x+1}=\lim_{x\to-\infty}\frac{-\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}{-1+\frac{1}{x}}=1.$$

**3.** Avem nedeterminarea $\frac{\infty}{\infty}$. Prelucrăm fracția şi obținem:

$$\frac{\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+4}}=\frac{\sqrt{x^2\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}}{\sqrt{x^2\left(1+\frac{4}{x^2}\right)}}=\frac{|x|\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}{|x|\sqrt{1+\frac{4}{x^2}}} \text{ şi } \lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+4}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}{\sqrt{1+\frac{4}{x^2}}}=1.$$

**4.** Avem nedeterminarea $\infty-\infty$. Amplificăm cu conjugata şi obținem:

$$\sqrt{x^2+1}-x=\frac{x^2+1-x^2}{\sqrt{x^2+1}+x}=\frac{1}{\sqrt{x^2+1}+x} \text{ şi } \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{x^2+1}+x}=\frac{1}{\infty}=0.$$

**5.** Analog ca la 4).

**6.** Avem nedeterminarea $\frac{\infty}{\infty}$.

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x+\sqrt{x^2+1}}{2x+\sqrt{x^2+4}}=\lim_{x\to\infty}\frac{x\left(1+\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}\right)}{x\left(2+\sqrt{4+\frac{1}{x^2}}\right)}=\frac{1}{2}.$$

**7.** $\sqrt{x+2}-2\sqrt{x+1}+\sqrt{x}=\left(\sqrt{x+2}-\sqrt{x+1}\right)-\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x}\right)=$

$$=\frac{x+2-x-1}{\sqrt{x+2}+\sqrt{x+1}}-\frac{x+1-x}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}=\frac{1}{\sqrt{x+2}+\sqrt{x+1}}-\frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}\to 0,$$

când $x\to+\infty$.

**8.** Avem nedeterminarea $\infty-\infty$.

$$\sqrt[3]{x+1}-\sqrt[3]{x}=\frac{x+1-x}{\sqrt[3]{(x+1)2}+\sqrt[3]{x(x+1)}+\sqrt[3]{x^2}}=\frac{1}{\sqrt[3]{(x+1)^2}+\sqrt[3]{x(x+1)}+\sqrt[3]{x^2}}\to 0$$

**9.** Avem nedeterminarea $\infty-\infty$.

$$\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[4]{x^3}=x^{\frac{2}{3}}-x^{\frac{3}{4}}=x^{\frac{3}{4}}\left(x^{-\frac{1}{12}}-1\right)=x^{\frac{3}{4}}\left(\frac{1}{x^{\frac{1}{12}}}-1\right)\to-\infty,$$

când $x\to+\infty$.

**10.** Avem nedeterminarea $\frac{\infty}{\infty}$. Notăm $\sqrt[12]{x}=t$, deci $x = t^{12}$ şi când $x \to +\infty$ şi $t \to \infty$. Obţinem $\lim\limits_{t\to\infty}\frac{t^6+t^8+1}{t^4+t^9+1}=0$ (gradul numărătorului este mai mic decât gradul numitorului).

**11.** Avem nedeterminarea $\frac{0}{0}$.

$$\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt[3]{x}-1}=\frac{x-1}{\sqrt{x}+1}\cdot\frac{\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1}{x-1};\ \lim_{x\to1}\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt[3]{x}-1}=\lim_{x\to1}\frac{\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1}{\sqrt{x}+1}=\frac{3}{2}.$$

**12.** Avem nedeterminarea $\frac{0}{0}$.

Efectuăm schimbarea de variabilă $\sqrt[6]{x}=t,$ unde cel mai mic multiplu comun al indicilor radicalilor este 6. Cum $x \to 1$, atunci $t \to 1$. Astfel obţinem că:

$$\lim_{x\to1}\frac{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}-2}{\sqrt{x}-1}=\lim_{t\to1}\frac{t^3+t^2-2}{t^3-1}=\lim_{t\to1}\frac{(t-1)(t^2+2t+2)}{(t-1)(t^2+t+1)}=$$

$$=\lim_{t\to1}\frac{t^2+2t+2}{t^2+t+1}=\frac{5}{3}.$$

**13.** Avem nedeterminarea $\frac{0}{0}$. Amplificând cu conjugatele obţinem:

$$\frac{(1+x)-\sqrt{x^2+1}}{(1-x)-\sqrt[3]{x^3+1}}=\frac{(1+x)^2-\left(x^2+1\right)}{1+x+\sqrt{x^2+1}}\cdot\frac{(1-x)^2+(1-x)\sqrt{x^3+1}+\sqrt[3]{\left(x^3+1\right)^2}}{(1-x)^3-\left(x^3+1\right)}=$$

$$=\frac{\left(1+2x+x^2-x^2-1\right)\left[(1-x)^2+(1-x)\sqrt{x^3+1}+\sqrt[3]{\left(x^3+1\right)^2}\right]}{\left(1+x+\sqrt{x^2+1}\right)\left(1-3x+3x^2-x^3-x^3-1\right)}=$$

$$=\frac{2x\left[(1-x)^2+(1-x)\sqrt[3]{x^3+1}+\sqrt[3]{\left(x^3+1\right)^2}\right]}{x(-2x^2+3x-3)\left(1+x+\sqrt{x^2+1}\right)};\text{ deci }\lim_{x\to0}\frac{\left(1+x\right)-\sqrt{x^2+1}}{\left(1-x\right)-\sqrt[3]{x^3+1}}=-1.$$

**14.** $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}}\frac{1}{\sqrt{x-1}}=+\infty$; $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}}\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}=+\infty$, avem nedeterminarea $\infty-\infty$.

Se aduc fracțiile la același numitor şi se obține:

$$\frac{1}{\sqrt{x-1}}-\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}=\frac{\sqrt{x+1}-1}{\sqrt{x^2-1}}\to+\infty.$$

**15.** $$\frac{\sqrt{x^2+x+1}-\sqrt{3}}{\sqrt{x^2-x+1}-1}=\frac{x^2+x+1-3}{\sqrt{x^2+x+1}+\sqrt{3}}\cdot\frac{\sqrt{x^2-x+1}+1}{x^2-x+1-1}=$$

$$=\frac{x^2+x-2}{x(x-1)}\cdot\frac{\sqrt{x^2-x+1}+1}{\sqrt{x^2+x+1}+\sqrt{3}}=\frac{(x-1)(x+2)\left(\sqrt{x^2-x+1}+1\right)}{x(x-1)\left(\sqrt{x^2+x+1}+\sqrt{3}\right)}\to\sqrt{3},$$

când $x\to 1$.

**16.** Fie $\sqrt[mn]{x}=t$. Atunci $x\to 1\Rightarrow t\to 1$ şi obținem: $\lim\limits_{t\to 1}\frac{t^n-1}{t^m-1}=\frac{n}{m}$.

### C. Limite de funcții exponențiale şi logaritmice

Să se calculeze următoarele limite:

**1.** $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x^2}$;  **2.** $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(e^x-x\right)$;  **3.** $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^x+2e^{-x}}{e^x+3e^{-x}}$;

**4.** $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-1}{e^{2x}-1}$;  **5.** $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^x-3e^{2x}}{e^x+3e^{2x}}$;  **6.** $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{e^x-e^{-x}\cdot x}{e^x+e^{-x}\cdot x}$;

**7.** $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{ax}-e^{bx}}{x}$;  **8.** $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{ax}-e^{bx}}{e^{\alpha x}-e^{\beta x}}$ $(\alpha\neq\beta)$;  **9.** $\lim\limits_{x\to a}\frac{x^x-a^a}{x-a}(a>0)$;

**10.** $\lim\limits_{x\to a}\frac{x^a-a^a}{x-a}$;  **11.** $\lim\limits_{x\to a}\frac{x^x-a^a}{x^a-a^a}$;  **12.** $\lim\limits_{x\to\infty}x\ln\left(1+e^{-x}\right)$;

**13.** $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\ln\left(e^x+a\right)}{\ln\left(e^x+b\right)}$;  **14.** $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\ln\left(x^2+x+1\right)}{\ln\left(x^2-x+1\right)}$;  **15.** $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\ln\left(1+x+x^2\right)}{x}$;

**16.** $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{1}{x}\right)^x$  **17.** $\lim\limits_{x\to 0}\left(e^x+x\right)^{\frac{1}{x}}$  **18.** $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}}x^{\frac{1}{x}}$.

*Soluții:*

**1.** Vom calcula $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{x^a}$ ($a>0$). Folosind graficele funcțiilor $f(x)=e^x$ şi $g(x)=x$ avem că $e^x>x$ pentru orice $x>0$, vom avea:

$$\frac{e^x}{x^a}=\frac{\left(e^{\frac{x}{2a}}\right)^{2a}}{\left(x^{\frac{1}{2}}\right)^{2a}}=\left(\frac{e^{\frac{x}{2a}}}{\sqrt{x}}\right)^{2a}\geq\left(\frac{\frac{x}{2a}}{\sqrt{x}}\right)^{2a}>\left(\frac{1}{2a}\cdot\sqrt{x}\right)^{2a}\to+\infty,\text{ când } x\to+\infty.$$

Deci $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{x^2}=+\infty$.

**2.** $\infty-\infty$; $e^x-x=e^x\left(1-\dfrac{x}{e^x}\right)\to+\infty$, când $x\to+\infty$.

**3.** $\dfrac{\infty}{\infty}$; $\dfrac{e^x+2e^{-x}}{e^x+3e^{-x}}=\dfrac{e^{2x}+2}{e^{2x}+3}=\dfrac{e^{2x}\left(1+\frac{2}{e^{2x}}\right)}{e^{2x}\left(1+\frac{3}{e^{2x}}\right)}\to1$, când $x\to+\infty$.

**4.** $\dfrac{0}{0}$; $\dfrac{e^x-1}{e^{2x}-1}=\dfrac{\frac{e^x-1}{x}}{\frac{e^{2x}-1}{2x}}\cdot\dfrac{1}{2}\to\dfrac{1}{2}$, când $x\to0$.

**5.** $\dfrac{-\infty}{\infty}$; $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x-3e^{2x}}{e^x+3e^{2x}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^{2x}\left(\frac{1}{e^x}-3\right)}{e^{2x}\left(\frac{1}{e^x}+3\right)}=\dfrac{-3}{3}=-1$.

**6.** $\dfrac{+\infty}{-\infty}$; $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{e^x-e^{-x}\cdot x}{e^x+e^{-x}\cdot x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{e^{-x}(e^{2x}-x)}{e^{-x}(e^{2x}+x)}=-1$.

**7.** $\dfrac{0}{0}$; $\dfrac{e^{ax}-e^{bx}}{x}=e^{bx}\cdot\dfrac{e^{x(a-b)}-1}{x(a-b)}\cdot(a-b)\to a-b$, când $x\to0$.

**8.** $\dfrac{0}{0}$; $\dfrac{e^{ax}-e^{bx}}{e^{\alpha x}-e^{\beta x}}=\dfrac{\frac{e^{ax}-e^{bx}}{x}}{\frac{e^{\alpha x}-e^{\beta x}}{x}}\to\dfrac{a-b}{\alpha-\beta}$, când $x\to0$.

**9.** $\frac{0}{0}$; $\frac{x^x-a^a}{x-a}=\frac{e^{x\ln x}-e^{a\ln a}}{x-a}=e^{a\ln a}\cdot\frac{e^{x\ln x-a\ln a}-1}{x\ln x-a\ln a}\cdot\frac{x\ln x-a\ln a}{x-a}=$

$$=\frac{x\ln x-a\ln x+a\ln x-a\ln a}{x-a}=\ln x\frac{(x-a)}{x-a}+a\frac{\ln x-\ln a}{x-a}=$$

$$=\ln x+a\frac{\ln x-\ln a}{x-a}.$$

Avem de calculat $\lim\limits_{x\to a}\frac{\ln x-\ln a}{x-a}=\lim\limits_{x\to a}\frac{\ln\frac{x}{a}}{a\left(\frac{x}{a}-1\right)}=\frac{1}{a}\cdot\lim\limits_{x\to a}\frac{\ln\frac{x}{a}}{\frac{x}{a}-1}$.

Fie $\frac{x}{a}=t$; $x\to a\Rightarrow t\to 1$. Obținem $\lim\limits_{t\to 1}\frac{\ln t}{t-1}=\lim\limits_{t\to 1}\frac{\ln[1+(t-1)]}{t-1}=1$.

Atunci $\lim\limits_{x\to a}\frac{\ln x-\ln a}{x-a}=\frac{1}{a}$.

În final obținem: $\lim\limits_{x\to a}\frac{x^x-a^a}{x-a}=1+\ln a$.

**10.** $\frac{0}{0}$; $\lim\limits_{x\to a}\frac{x^a-a^a}{x-a}=\lim\limits_{x\to a}\frac{x^a\left[\left(\frac{x}{a}\right)^a-1\right]}{a\left[\left(\frac{x}{a}\right)-1\right]}=a^{a-1}\cdot\lim\limits_{x\to a}\frac{\left(\frac{x}{a}\right)^a-1}{\left(\frac{x}{a}\right)-1}$.

Dacă $\frac{x}{a}=t$, $x\to a\Rightarrow t\to 1$şi avem $\lim\limits_{t\to 1}\frac{t^\alpha-1}{t-1}=\alpha$; deci $\lim\limits_{x\to a}\frac{x^a-a^a}{x-a}=a^a$.

**11.** $\frac{0}{0}$; $\lim\limits_{x\to a}\frac{x^x-a^a}{x^a-a^a}=\lim\limits_{x\to a}\frac{\frac{x^x-a^a}{x-a}}{\frac{x^a-a^a}{x-a}}$ şi folosim rezultatele de la exercițiile 9 şi 10.

**12.** $\infty\cdot 0$; $x\ln\left(1+e^{-x}\right)=\frac{x}{e^x}\left[\ln\left(1+\frac{1}{e^x}\right)^{e^x}\right]=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x}{e^x}=0$.

**13.** $\frac{\infty}{\infty}$; $\frac{\ln\left(e^x+a\right)}{\ln\left(e^x+b\right)}=\frac{\ln e^x+\ln\left(1+\frac{a}{e^x}\right)}{\ln e^x+\ln\left(1+\frac{b}{e^x}\right)}=\frac{x+\ln\left(1+\frac{a}{e^x}\right)}{x+\ln\left(1+\frac{b}{e^x}\right)}=$

$$=\frac{x\left[1+\dfrac{\ln\left(1+\dfrac{a}{e^x}\right)}{x}\right]}{x\left[1+\dfrac{\ln\left(1+\dfrac{b}{e^x}\right)}{x}\right]}\to 1\text{, deoarece }\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln\left(1+\dfrac{a}{e^x}\right)}{x}=0.$$

**14.** $\dfrac{\infty}{\infty}$; $\dfrac{\ln\left(x^2+x+1\right)}{\ln\left(x^2-x+1\right)}=\dfrac{\ln x^2\left(1+\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}\right)}{\ln x^2\left(1-\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}\right)}=$

$$=\frac{2\ln x+\ln\left(1+\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}\right)}{2\ln x+\ln\left(1-\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}\right)}=\frac{\ln x\left[2+\dfrac{\ln\left(1+\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}\right)}{\ln x}\right]}{\ln x\left[2+\dfrac{\ln\left(1-\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}\right)}{\ln x}\right]}\to 1\text{, când } x\to+\infty.$$

**15.** Se procedează ca la exercițiul 14.

**16.** $0^0$; $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{1}{x}\right)^x=\lim\limits_{\substack{t\to0\\t>0}}t^{\frac{1}{t}}=0$

**17.** $1^\infty$; $\lim\limits_{x\to0}\left(e^x+x\right)^{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to0}\left\{\left[1+\left(e^x+x-1\right)\right]^{\frac{1}{e^x+x-1}}\right\}^{\frac{e^x+x-1}{x}}=e^L.$

$$L=\lim_{x\to0}\frac{e^x+x-1}{x}=\lim_{x\to0}\left(\frac{e^x-1}{x}+1\right)=2,\text{ deci }\lim_{x\to0}\left(e^x+x\right)^{\frac{1}{x}}=e^2.$$

**18.** $0^0$; $x^{\frac{1}{x}}=e^{\frac{1}{x}\ln x}$ $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}}\dfrac{\ln x}{x}=-\infty$ şi $\lim\limits_{x\to0}x^{\frac{1}{x}}=0$.

## D. Limite de funcții trigonometrice directe şi inverse

Să se calculeze următoarele limite:

**1.** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}$; **2.** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x-\cos 2x}{x^2}$; **3.** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\sqrt{\cos x}}{x^2}$;

**4.** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\sqrt{\cos x}}{1-\sqrt{\cos^2 x}}$; **5.** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x-\sqrt{\cos x}}{x\operatorname{tg}x}$; **6.** $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{\cos x}{x-\frac{\pi}{2}}$;

**7.** $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\dfrac{1-\operatorname{tg}x}{1-\operatorname{ctg}x}$; **8.** $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\dfrac{1-\operatorname{tg}x\sqrt{\operatorname{ctg}x}}{1-\operatorname{ctg}x\sqrt{\operatorname{tg}x}}$; **9.** $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sin\left(x^2-1\right)}{x^2-3x+2}$;

**10.** $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sin\left(x^3-1\right)}{\sin\left(x^2-1\right)}$; **11.** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{\sin x}-1}{x}$; **12.** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{\sin x}-1}{\operatorname{tg}x}$;

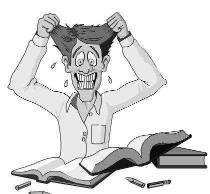
**13.** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{2\sin x}-1}{e^{3\operatorname{tg}x}-1}$; **14.** $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{x^2}}$; **15.** $\lim\limits_{x\to 0}\left(e^x+x\right)^{\frac{1}{\sin x}}$;

**16.** $\lim\limits_{x\to 0}(1+\operatorname{tg}x)^{\operatorname{ctg}x}$; **17.** $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}(\operatorname{tg}x)^{\operatorname{tg}2x}$;

**18.** a) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(\sin x)}{\operatorname{tg}(\operatorname{tg}x)}$; b) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\arcsin(x-1)}{x^2-1}$; c) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\arcsin\left(x^2-5x+4\right)}{\arcsin\left(x^2-3x+2\right)}$;

**19.** a) $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}}\dfrac{\arcsin x-\frac{\pi}{2}}{x-1}$; b) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin x-\arcsin 2x}{\arcsin 3x-\arcsin 4x}$; c) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}}(\sin x)^x$;

**20.** a); $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\cos 2x}{\cos x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$; b) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}}(1+\operatorname{tg}x+\sin x)^{\frac{1}{x^2}}$.



*Soluții:*

Pentru fiecare exercițiu se va înlătura nedeterminarea şi se vor utiliza următoarele limite fundamentale cunoscute:

dacă $\lim\limits_{x\to x_0}u(x)=0$, atunci

$$\lim_{x\to x_0}\frac{\sin u(x)}{u(x)}=1;\quad \lim_{x\to x_0}\frac{e^{u(x)}-1}{u(x)}=1;\quad \lim_{x\to x_0}\frac{\arcsin u(x)}{u(x)}=1.$$

**1.** $\frac{0}{0}$; $\frac{1-\cos x}{x^2}=\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{x^2}=\frac{\sin^2\frac{x}{2}}{\frac{x^2}{4}\cdot 2}=\left(\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)^2\cdot\frac{1}{2}\Rightarrow$

$$\Rightarrow\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\frac{1}{2}\cdot\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)^2=\frac{1}{2}.$$

**2.** $\frac{0}{0}$; $\frac{\cos x-\cos 2x}{x^2}=\frac{2\sin\frac{x}{2}\sin\frac{3x}{2}}{x^2}=2\left(\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)\cdot\left(\frac{\sin\frac{3x}{2}}{\frac{3x}{2}}\right)\cdot\frac{3}{4}\to\frac{3}{2}$, când $x\to 0$.

**3.** $\frac{0}{0}$; $\frac{1-\sqrt{\cos x}}{x^2}=\frac{1-\cos x}{x^2\left(1+\sqrt{\cos x}\right)}=\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{x^2\left(1+\sqrt{\cos x}\right)}=\frac{2\sin\frac{x}{2}}{4\frac{x^2}{4}}\cdot\frac{1}{1+\sqrt{\cos x}}\Rightarrow$

$$\Rightarrow\lim_{x\to 0}\frac{1-\sqrt{\cos x}}{x^2}=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)^2\cdot\lim_{x\to 0}\frac{1}{1+\sqrt{\cos x}}=\frac{1}{2}\cdot 1\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{4}.$$

**4.** $\frac{0}{0}$; $\frac{1-\sqrt{\cos x}}{1-\sqrt{\cos^2 x}}=\frac{1-\cos x}{1-\cos^2 x}\cdot\frac{1+\sqrt{\cos^2 x}}{1+\sqrt{\cos x}}=\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{\sin^2 x}\cdot\frac{1+\sqrt{\cos^2 x}}{1+\sqrt{\cos x}}\Rightarrow$

$$\Rightarrow\lim_{x\to 0}\frac{1-\sqrt{\cos x}}{1-\sqrt{\cos^2 x}}=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{4\sin^2\frac{x}{2}\cos^2\frac{x}{2}}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{1+\sqrt{\cos^2 x}}{1+\sqrt{\cos x}}=\frac{1}{2}.$$

**5.** $\frac{0}{0}$; $\frac{\cos x-\sqrt{\cos x}}{x\mathrm{tg}x}=\frac{\cos^2 x-\cos x}{x\mathrm{tg}x\left(\cos x+\sqrt{\cos x}\right)}=\frac{\cos x(\cos x-1)}{x\mathrm{tg}x\left(\cos x+\sqrt{\cos x}\right)}=$

$$=-\cos x\cdot\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{x\mathrm{tg}x}\cdot\frac{1}{\cos x+\sqrt{\cos x}}=-\cos x\cdot\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\cdot\frac{\sin\frac{x}{2}}{\mathrm{tg}x}\cdot\frac{1}{\cos x+\sqrt{\cos x}}=$$

$$=-\cos x\cdot\left(\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)\cdot\frac{\sin\frac{x}{2}}{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}\cdot\frac{\cos x}{\cos x+\sqrt{\cos x}}\to-\frac{1}{4}\text{, când } x\to 0.$$

**6.** $\frac{0}{0}$; $\frac{\cos x}{x-\frac{\pi}{2}}=\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}{x-\frac{\pi}{2}}=-\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}{\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}\Rightarrow$

$$\Rightarrow \lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{x-\frac{\pi}{2}}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}{-\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}=-1.$$

**7.** $\frac{0}{0}$; $\frac{1-\mathrm{tg}x}{1-\mathrm{ctg}x}=\frac{1-\mathrm{tg}x}{1-\frac{1}{\mathrm{tg}x}}=\mathrm{tg}x\cdot\frac{1-\mathrm{tg}x}{\mathrm{tg}x-1}=-\mathrm{tg}x\Rightarrow\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{1-\mathrm{tg}\,x}{1-\mathrm{ctg}\,x}=-1.$

**8.** $\frac{0}{0}$; $\frac{1-\mathrm{tg}x\sqrt{\mathrm{ctg}x}}{1-\mathrm{ctg}x\sqrt{\mathrm{tg}x}}=\frac{1-\sqrt{\mathrm{tg}^2x\cdot\mathrm{ctg}x}}{1-\sqrt{\mathrm{ctg}^2x\cdot\mathrm{tg}x}}=\frac{1-\sqrt{\mathrm{tg}x}}{1-\sqrt{\mathrm{ctg}x}}=\frac{1-\sqrt{\mathrm{tg}x}}{1-\frac{1}{\sqrt{\mathrm{tg}x}}}\to-1$, când $x\to\frac{\pi}{4}$.

**9.** $\frac{0}{0}$; $\frac{\sin(x^2-1)}{x^2-3x+2}=\frac{\sin(x^2-1)}{x^2-1}\cdot\frac{x^2-1}{x^2-3x+2}=$

$$=\frac{\sin(x^2-1)}{x^2-1}\cdot\frac{(x-1)(x+1)}{(x-1)(x-2)}\,(x\neq1,x\neq2).$$

$$\lim_{x\to1}\frac{\sin(x^2-1)}{x^2-3x+2}=\lim_{x\to1}\frac{\sin(x^2-1)}{x^2-1}\cdot\lim_{x\to1}\frac{x+1}{x-2}=1\cdot\frac{2}{-1}=-2.$$

**10.** Analog ca la exercițiul 9).

**11.** $\frac{0}{0}$; $\frac{e^{\sin x}-1}{x}=\frac{e^{\sin x}-1}{\sin x}\cdot\frac{\sin x}{x}\Rightarrow\lim_{x\to0}\frac{e^{\sin x}-1}{x}=\lim_{x\to0}\frac{e^{\sin x}-1}{\sin x}\cdot\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x}=1.$

**12.** $\frac{0}{0}$; $\frac{e^{\sin x}-1}{\mathrm{tg}x}=\frac{e^{\sin x}-1}{\sin x}\cdot\frac{\sin x}{\mathrm{tg}x}=\frac{e^{\sin x}-1}{\sin x}\cdot\cos x\to1.$

**13.** $\frac{0}{0}$; $\frac{e^{2\sin x}-1}{e^{3\mathrm{tg}x}-1}=\frac{\frac{e^{2\sin x}-1}{2\sin x}\cdot2\sin x}{\frac{e^{3\mathrm{tg}x}-1}{3\mathrm{tg}x}\cdot3\mathrm{tg}x}\to\frac{2}{3}$, când $x\to0$.

**14.** $1^\infty$; $(\cos x)^{\frac{1}{x^2}}=\left\{[1+(\cos x-1)]^{\frac{1}{\cos x-1}}\right\}^{\frac{\cos x-1}{x^2}}$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to 0} e^{\frac{\cos x - 1}{x^2}} = e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{-2\sin^2\frac{x}{2}}{x^2}} = e^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{e}}.$$

**15.** $1^{\infty}$; $\left(e^x + x\right)^{\frac{1}{\sin x}} = \left\{\left[1 + \left(e^x + x - 1\right)\right]^{\frac{1}{e^x + x - 1}}\right\}^{\frac{e^x + x - 1}{\sin x}} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0}\left(e^x + x\right)^{\frac{1}{\sin x}} = e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x + x - 1}{\sin x}} = e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{\sin x}\cdot\left(\frac{e^x - 1}{x} + \frac{x}{x}\right)} = e^2.$$

**16.** $1^{\infty}$; $\lim\limits_{x\to 0}(1 + \mathrm{tg}x)^{\mathrm{ctg}x} = \lim\limits_{x\to 0}(1 + \mathrm{tg}x)^{\frac{1}{\mathrm{tg}x}} = e$.

**17.** $1^{\infty}$; $(\mathrm{tg}x)^{\mathrm{tg}2x} = \left\{\left[1 + (\mathrm{tg}x - 1)\right]^{\frac{1}{\mathrm{tg}x - 1}}\right\}^{(\mathrm{tg}x - 1)\mathrm{tg}2x} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \lim_{x\to\frac{\pi}{4}}(\mathrm{tg}x)^{\mathrm{tg}2x} = e^{\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}(\mathrm{tg}x - 1)\mathrm{tg}2x} = e^{\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{2\mathrm{tg}x}{1 - \mathrm{tg}^2 x}(\mathrm{tg}x - 1)} = \frac{1}{e}.$$

**18.** a) $\frac{0}{0}$; $\frac{\sin(\sin x)}{\mathrm{tg}(\mathrm{tg}x)} = \frac{\sin(\sin x)}{\sin x}\cdot\frac{\mathrm{tg}\,x}{\mathrm{tg}(\mathrm{tg}x)}\cdot\frac{\sin x}{\mathrm{tg}x} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0}\frac{\sin(\sin x)}{\mathrm{tg}(\mathrm{tg}x)} = \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{\mathrm{tg}x} = 1.$$

b) $\frac{0}{0}$; $\frac{\arcsin(x-1)}{x^2 - 1} = \frac{\arcsin(x-1)}{x - 1}\cdot\frac{1}{x+1} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 1}\frac{\arcsin(x-1)}{x^2 - 1} = \lim_{x\to 1}\frac{\arcsin(x-1)}{(x-1)}\cdot\lim_{x\to 1}\frac{1}{x+1} = \frac{1}{2}.$$

c) $\frac{0}{0}$; $\frac{\arcsin\left(x^2 - 5x + 4\right)}{\arcsin\left(x^2 - 3x + 2\right)} = \frac{\frac{\arcsin\left(x^2 - 5x + 4\right)}{x^2 - 5x + 4}\cdot\left(x^2 - 5x + 4\right)}{\frac{\arcsin\left(x^2 - 3x + 2\right)}{x^2 - 3x + 2}\cdot\left(x^2 - 3x + 2\right)} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 1}\frac{x^2 - 5x + 4}{x^2 - 3x + 2} = \lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x-4)}{(x-2)(x-1)} = 3.$$

**19.** a) $\frac{0}{0}$; Fie $y = \arcsin x - \frac{\pi}{2} \Rightarrow \arcsin x = y + \frac{\pi}{2} \Rightarrow x = \sin\left(y+\frac{\pi}{2}\right)$, pentru $x \to 1$, avem $y \to 0$. Astfel, limita inițială devine echivalentă cu:

$$\lim_{\substack{y\to 0\\ y<0}}\frac{y}{\sin\left(y+\frac{\pi}{2}\right)-1} = \lim_{\substack{y\to 0\\ y<0}}\frac{y}{\cos y-1} = -\lim_{\substack{y\to 0\\ y<0}}\frac{y}{2\sin^2\frac{y}{2}} = -\lim_{\substack{y\to 0\\ y<0}}\frac{\frac{y^2}{4}}{\sin^2\frac{y}{2}}\cdot\frac{2}{y}$$

$$= -2\cdot 1^2\cdot\lim_{\substack{y\to 0\\ y<0}}\frac{1}{y} = -2\cdot 1^2\cdot(-\infty) = +\infty.$$

b) $\frac{0}{0}$; $\frac{\arcsin x - \arcsin 2x}{\arcsin 3x - \arcsin 4x} = \frac{\frac{\arcsin x}{x} - \frac{\arcsin 2x}{x}}{\frac{\arcsin 3x}{x} - \frac{\arcsin 4x}{x}} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0}\frac{\arcsin x - \arcsin 2x}{\arcsin 3x - \arcsin 4x} = \frac{1-2}{3-4} = 1.$$

c) $0^0$; $(\sin x)^x = e^{x\ln\sin x}$; vom calcula $\lim\limits_{x\to 0} x\ln\sin x$.

Cum $\ln\alpha < \alpha$, $\forall\alpha \in (1, +\infty)$ şi $|\sin x| \le x$, atunci $|x\ln(\sin x)| < |x\cdot\sin x| < |x|$.

Folosim teorema cleştelui şi obținem că $\lim\limits_{x\to 0} x\ln(\sin x) = 0$, deci valoarea limitei inițiale este $e^0 = 1$.

**20.** a) $1^\infty$; $\left(\frac{\cos 2x}{\cos x}\right)^{\frac{1}{x^2}} = \left\{\left[1+\left(\frac{\cos 2x}{\cos x}-1\right)\right]^{\frac{\cos x}{\cos 2x - \cos x}}\right\}^{\frac{\cos 2x-\cos x}{x^2}} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0}\left(\frac{\cos 2x}{\cos x}\right)^{\frac{1}{x^2}} = e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos 2x - \cos x}{x^2}} = e^{-\frac{3}{2}} \text{ (vezi exercițiul 2).}$$

b) $1^\infty$; $\left\{[1+(\text{tg}x+\sin x)]^{\frac{1}{\text{tg}x+\sin x}}\right\}^{\frac{\text{tg}x+\sin x}{x^2}} \Rightarrow \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}}(1+\text{tg}x+\sin x)^{\frac{1}{x^2}} =$

$$= e^{\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\frac{\text{tg}x+\sin x}{x^2}} = e^{\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{\frac{1}{\cos x}-1}{x}} = e^{\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\left(\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{1}{\cos x}\cdot\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{x}\right)} = e^{\infty} = \infty.$$

# 1.8. Asimptotele graficelor funcțiilor studiate: asimptote verticale, oblice

Fie $D \subset \mathbb{R}$ o reuniune de intervale şi $f : D \to \mathbb{R}$ o funcție reală definită pe $D$.

Dacă funcția $f$ este nemărginită sau domeniul său de definiție $D$ este nemărginit, graficul său este o mulțime nemărginită.

Dacă o ramură nemărginită a graficului se apropie de o anumită dreaptă, vom numi această dreaptă asimptotă la graficul lui $f$.

Asimptotele sunt de două tipuri: verticale (paralele cu axa $Oy$) şi oblice (neparalele cu axa $Oy$).

**I.** *Asimptote verticale*. Acestea se definesc pentru funcții nemărginite, chiar dacă domeniul de definiție este mărginit.

| | |
|---|---|
| **Definiție** | Dacă $x_0$ este un punct de acumulare finit al mulțimii $D$ şi cel puțin o limită laterală $f(x_0 - 0)$ sau $f(x_0 + 0)$ există şi este infinită, atunci dreapta $x = x_0$ se numeşte *asimptotă verticală* la graficul funcției $f$. |

***Exemple***

**1.** Funcția $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$, definită prin $f(x) = \dfrac{1}{x}$, are asimptota verticală $x = 0$, deoarece $f(0 - 0) = -\infty$ şi $f(0 + 0) = +\infty$.

**2.** Funcția $f : \mathbb{R} \setminus \{k\pi + \dfrac{\pi}{2} \mid k \in \mathbb{Z}\} \to \mathbb{R}, f(x) = \operatorname{tg} x$ are asimptota verticală $x = \dfrac{\pi}{2}$, deoarece

$$f\left(\frac{\pi}{2} - 0\right) = +\infty, \quad f\left(\frac{\pi}{2} + 0\right) = -\infty .$$

**3.** Funcția $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}, f(x) = \ln x$ are asimptota verticală $x = 0$, pentru că $f(0 + 0) = -\infty$.

**4.** Funcția $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$, admite dreapta de ecuație $x = 0$ asimptotă verticală şi la stânga şi la dreapta (fig. 29), deoarece:

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{1}{x^2} = \lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}} \frac{1}{x^2} = +\infty .$$

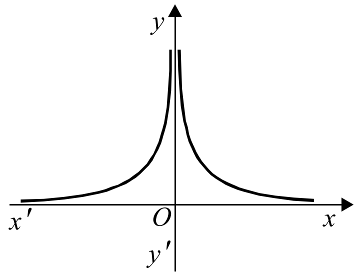



**Figura 29**

**II.** *Asimptote oblice*. Acestea se definesc pentru funcții definite pe mulțimi nemărginite.

Dacă mulțimea $D$ este nemărginită la dreapta (nemajorată), atunci $+\infty$ este punct de acumulare al mulțimii $D$.

În acest caz, dreapta $y = mx + n$ se numeşte *asimptotă oblică* spre $+\infty$ dacă

$$\lim_{x\to+\infty} [f(x) - mx - n] = 0 .$$

Analog, dacă mulțimea $D$ este nemărginită la stânga (neminorată), atunci dreapta $y = mx + n$ se numeşte *asimptotă oblică* spre $-\infty$ dacă

$$\lim_{x\to-\infty} [f(x) - mx - n] = 0 \text{ (fig. 30).}$$

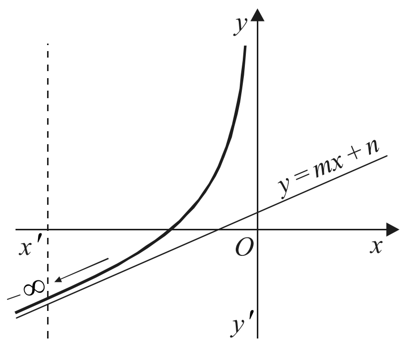



**Figura 30**

Dacă dreapta $y = mx + n$ este asimptotă oblică spre $+\infty$, avem

$$n = \lim_{x\to+\infty} [f(x) - mx] \text{ (fig. 31).}$$

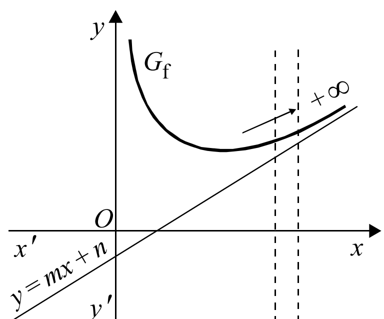



**Figura 31**

De asemenea putem scrie

$$\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{f(x)}{x}-m\right]=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)-mx}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{n}{x}=0.$$

Prin urmare,

$$m=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}.$$

Reciproc, dacă $m$ şi $n$ sunt date de formulele de mai sus, rezultă că

$$\lim_{x\to+\infty}\left[f(x)-mx-n\right]=0,$$

adică dreapta $y = mx + n$ este asimptotă spre $+\infty$.

Analog, dreapta $y = mx + n$ este asimptotă oblică spre $-\infty$ dacă şi numai dacă $m=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f(x)}{x}$, $n=\lim\limits_{x\to-\infty}[f(x)-mx]$.

**Observaţii:** 1. Dacă cel puţin una din limitele $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}$ sau $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)-mx\right]$ nu există sau este infinită, atunci graficul funcţiei $f$ nu are *asimptotă oblică* spre $+\infty$.

2. i) Dacă $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=a$ există şi este finită, atunci dreapta $y = a$ este asimptotă spre $+\infty$, paralelă cu axa $Ox$ (se mai numeşte *asimptotă orizontală*) (fig. 32).

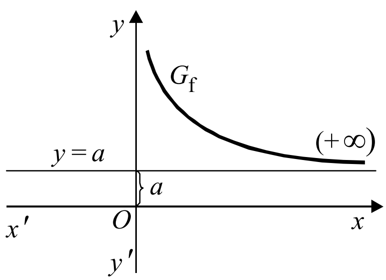



**Figura 32**

ii) Dacă $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=b$ există şi este finită, atunci dreapta de ecuaţie $y = b$ este *asimptotă orizontală* spre $-\infty$ (fig. 33).

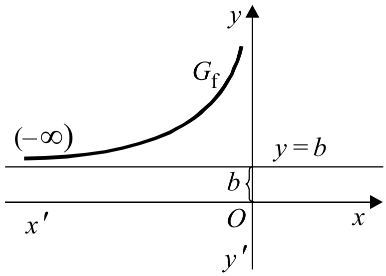



**Figura 33**

3. Dacă $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ nu există (nici finită, nici infinită), atunci graficul funcției *f* nu are asimptotă oblică spre + ∞.
4. Afirmațiile 1 – 3 sunt adevărate şi pentru asimptote oblice spre – ∞.
5. Nu are sens să se studieze existența asimptotelor orizontale şi oblice dacă domeniul de definiție al funcției este o mulțime mărginită.

## Exerciții rezolvate

Să se determine asimptotele pentru graficele următoarelor funcții:

**1.** $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = \dfrac{2x^3}{x^2+1}$;

**2.** $f : \mathbb{R} \setminus \{1\} \to \mathbb{R},\ f(x) = \dfrac{x+1}{x-1}$;

**3.** $f : \mathbb{R} \setminus \{-1, 0\} \to \mathbb{R},\ f(x) = \dfrac{x^2}{x+1} \cdot e^{\frac{1}{x}}$;

**4.** $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = 3\sqrt[3]{x^2} - 2x$.

*Soluție*

**1.** $m = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 2,\ n = \lim\limits_{x \to +\infty} (f(x) - 2x) = 0$, dreapta de ecuație $y = 2x$ este asimptotă oblică la $+\infty$. Se arată că dreapta $y = 2x$ este asimptotă oblică la $-\infty$. Nu mai avem alte tipuri de asimptote.

**2.** a) $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}} f(x) = -\infty$ şi $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}} f(x) = +\infty$. Rezultă că dreapta de ecuaţie $x = 1$ este asimptotă verticală.

b) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x+1}{x-1} = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x+1}{x-1} = 1$. Dreapta de ecuaţie $y = 1$ este asimptotă orizontală la $+\infty$ şi $-\infty$.

c) Deoarece există asimptotă orizontală nu există asimptote oblice.

**3.** a) Dreapta de ecuaţie $x = -1$ este asimptotă verticală la stânga şi la dreapta.

b) Dreapta $x = 0$ este asimptotă verticală la dreapta şi nu există asimptotă verticală la stânga.

c) $m = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 1,\ n = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x^2}{x+1}e^{\frac{1}{x}} - x\right) = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x^2}{x+1}e^{\frac{1}{x}} - 1\right) =$

$$= \lim_{y\to 0} \frac{\frac{1}{1+y}e^y - 1}{y} = \lim_{y\to 0}\left(\frac{e^y - y - 1}{y}\cdot\frac{1}{y+1}\right) = \lim_{y\to 0}\left(e^y - 1\right) = 0.$$

Rezultă că dreapta de ecuaţie $y = x$ este asimptotă oblică spre $+\infty$. Un calcul analog ne va arăta că $y = x$ este asimptotă oblică spre $-\infty$.

**4.** Nu există nici un fel de asimptote.

## Exerciţii propuse

**I.** Să se determine mulţimea punctelor de acumulare $A'$ pentru domeniile de definiţie ale funcţiilor următoare:

**1.** $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x) = \dfrac{1}{x^2-1}$; **2.** $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x) = \dfrac{1}{(x-1)(x+2)}$;

**3.** $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x) = \begin{cases} 2x-4, & x\le 2\\ 3x-6, & x>2\end{cases}$; **4.** $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x) = \sqrt{1-\cos x}$;

**5.** $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x) = \begin{cases} 1+x, & x\in\mathbb{Q}\\ 1-x, & x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}\end{cases}$; **6.** $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x) = \sqrt{1-\sin x}$.

**7.** $f:(2,3)\cup\{5\},\ f(x) = \sqrt{(x-2)(x+2)}$.

**II. 1.** Să se determine asimptotele graficelor pentru următoarele funcții:

a) $f : \mathbb{R} \setminus \{1\} \to \mathbb{R},\ f(x) = \dfrac{x^2}{x-1}$; b) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = \dfrac{x^2-1}{x^2+1}$;

c) $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R},\ f(x) = \dfrac{x^2+1}{x}$; d) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = \sqrt{1+x^2} - x$;

e) $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R},\ f(x) = e^{\frac{1}{x}}$; f) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = \sqrt[3]{x^3+1}$;

g) $f : (0, +\infty) \setminus \{e\} \to \mathbb{R},\ f(x) = \dfrac{\ln x}{\ln x - 1}$;

h) $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R},\ f(x) = \dfrac{\sqrt[3]{x^3-1}}{x}$.

**2.** Să se determine asimptotele graficelor pentru următoarele funcții:

a) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \sin x$; b) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = \cos x$;

c) $f : \mathbb{R} \setminus \{k\pi\} \to \mathbb{R}, f(x) = \operatorname{ctg} x$; d) $f : \mathbb{R} \to \left(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right), f(x) = \operatorname{arctg} x$;

e) $f : \mathbb{R} \to (0, \pi),\ f(x) = \operatorname{arcctg} x$.

**3.** Să se determine $a \in \mathbb{R}$, astfel încât graficul funcției $f : D \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \frac{1}{x^2 + ax + 1}$$

i) să admită o singură asimptotă;

ii) să admită două asimptote verticale;

iii) să nu admită asimptotă verticală.

**4.** Să se determine $a$, $b \in \mathbb{R}$, astfel ca graficul funcției $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{ax^2 + bx + 1}{x}$ să admită ca asimptotă oblică dreapta de ecuație $y = x + 1$.

**5.** Să se determine $a \in \mathbb{R}$, astfel ca dreapta de ecuație $x = 1$ să fie asimptotă verticală la graficul funcției $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{x}{ax^2 + x + a}$. Mai admite și alte tipuri de asimptote graficul funcției?

# Test de aprofundare

Să se calculeze următoarele limite:

**1.** $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n^2}\right)\left(1+\dfrac{2}{n^2}\right)\ldots\left(1+\dfrac{n}{n^2}\right)$;

**2.** $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{2n}\right)\left(1+\dfrac{2}{2n}\right)\ldots\left(1+\dfrac{2n}{2n}\right)$;

**3.** $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}(2-\operatorname{tg}x\sqrt{\operatorname{ctg}x})^{\frac{1}{\sin x-\cos x}}$;

**4.** a) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1-\sqrt{1-x^2}}{x}\right)^{\frac{1}{x}}$;

b) Pentru ce numere naturale $n$ există $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{1+x}+\sqrt[3]{1-x}-2}{x^n}$;

**5.** $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1-\cos x\cdot\cos 2x\ldots\cos nx}{x^2}$;

**6.** $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{nx(x^m-1)-mx(x^n-1)}{(x-1)^2}$;

**7.** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{acrtg}(1+x)-\operatorname{arctg}(1-x)}{\operatorname{tg}(1+x)-\operatorname{tg}(1-x)}$;

**8.** a) $\lim\limits_{\substack{x\to\pi\\ x<\pi}}\dfrac{\sin x}{\sqrt{\pi^3-x^3}}$; b) $\lim\limits_{x\to\infty}x^3\left(e^{\frac{1}{x}}-e^{\frac{1}{x+1}}\right)$;

**9.** $\lim\limits_{x\to 0}x^2\left[\left(\dfrac{1}{x^2}\right)+\left(\dfrac{2}{x^2}\right)+\ldots+\left(\dfrac{k}{x^2}\right)\right]$, $k\in\mathbb{N}^*$ fixat;

**10.** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x\cdot\cos^2 2x\ldots\cos^k kx}{x^2}$, $k\in\mathbb{N}^*$, fixat.

Capitolul **2**

# CONTINUITATE

## 2.1. Interpretarea grafică a continuității unei funcții; studiul continuității pentru funcțiile studiate; operații cu funcții continue

### Interpretarea grafică a continuității unei funcții

În capitolul precedent am studiat comportarea unei funcții $f$ în jurul unui punct de acumulare $x_0$ al domeniului de definiție $D$ al lui $f$, care nu aparține în mod necesar lui $D$.

În acest paragraf, considerăm o funcție $f : D \to \mathbb{R}$ și $x_0$ un punct din $D$. Vom studia dacă $f(x)$ se apropie de $f(x_0)$, când $x$ se apropie de $x_0$.

***Exemple***

Se consideră funcțiile:

**1.** $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = \begin{cases} x^2, & x \geq 0 \\ x, & x < 0 \end{cases};\quad x_0 = 0;$

**2.** $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = \begin{cases} 2^x, & x \geq 0 \\ \left(\frac{1}{2}\right)^x, & x < 0 \end{cases};\ x_0 = 0;$

**3.** $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = \begin{cases} x+1, & x > 0 \\ 0, & x = 0; \\ 1-x, & x < 0 \end{cases}\ x_0 = 0;$

**4.** $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = \begin{cases} x-1, & x \leq 1 \\ x, & x > 1 \end{cases};\ x_0 = 1.$

şi se cere:

a) să se reprezinte grafic fiecare funcție în parte;

b) să se studieze existența limitei în punctele specificate;

c) să se compare valoarea limitei cu valoarea funcției în punctul specificat;

d) să se decidă intuitiv în care puncte graficul fiecărei funcții admite sau nu întreruperi;

e) să se ilustreze acest lucru cu ajutorul vecinătăților.

*Răspunsuri*

**1.** a) Graficul se prezintă în figura alăturată;

b) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} f(x)=0;$

c) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x)=f(0)=0;$

d) graficul în punctul $x_0 = 0$ nu admite întrerupere;

e) se observă intuitiv (pe grafic) că oricare ar fi $V_0$ o vecinătate a lui $f(0) = 0$, există o vecinătate $U_0$ a lui $x_0 = 0$, astfel că $\forall x \in U_0 \Rightarrow f(x) \in V_0$.

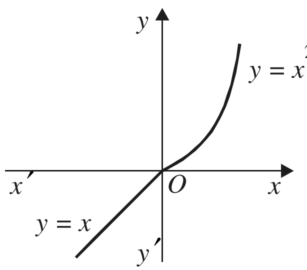



**Figura 1**

**2.** a) Graficul se prezintă în figura alăturată;

b) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} f(x)=1;$

c) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x)=f(0)=1;$

d) graficul în punctul $x_0 = 0$ nu admite întrerupere;

e) se observă intuitiv (pe grafic) că oricare ar fi $V_1$ o vecinătate a lui $f(0) = 1$, există o vecinătate $U_0$ a lui $x_0 = 0$, astfel încât $\forall x \in U_0 \Rightarrow f(x) \in V_1$.

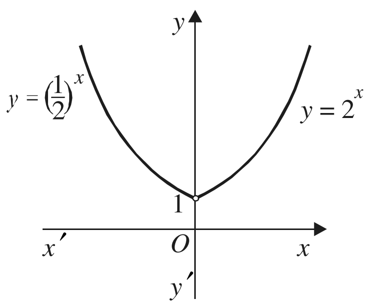



**Figura 2**

**3.** a) Graficul se prezintă în figura alăturată;

b) $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 1$;

c) $\lim\limits_{x\to 0} f(x) \neq f(0) = 0$;

d) graficul, în punctul $x_0 = 0$, are întrerupere;

e) se observă intuitiv (pe grafic) că pentru $V_0 = \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ o vecinătate a lui $f(0) = 0$, nu există nici o vecinătate $U_0$ a lui 0, astfel încât

$\forall\, x \in U_0 \Rightarrow f(x) \in V_0$.

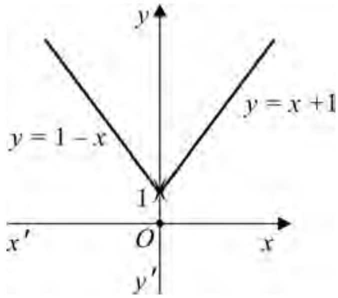



**Figura 3**

**4.** a) Graficul se prezintă în figura alăturată;

b) $\lim\limits_{\substack{x\to 1 \\ x<1}} f(x) = 0$

$\lim\limits_{\substack{x\to 1 \\ x>1}} f(x) = 1$ (nu există $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$);

c) $f(1) = 0$;

d) graficul prezintă întrerupere în punctul de abscisă $x = 1$;

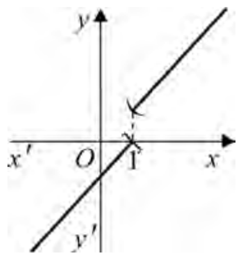



**Figura 4**

e) se observă intuitiv (pe grafic) că pentru vecinătatea $V_1 = \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ a lui $f(1)$, nu există nici o vecinătate $U_1$ a lui $x_0 = 1$, astfel încât $\forall\, x \in U_1 \Rightarrow f(x) \in V_1$.

Din exemplele analizate desprindem următoarea:

| | |
|---|---|
| **Definiție** | Funcția $f : D \to \mathbb{R}$ se numeşte *continuă* în punctul $x_0 \in D$ dacă pentru orice vecinătate $V$ a lui $f(x_0)$, există o vecinătate $U$ a lui $x_0$ astfel încât $f(x) \in V$, pentru orice $x \in U \cap D$. Dacă $f$ este continuă în $x_0$, vom spune că $x_0$ este *punct de continuitate* al funcției $f$. |

Problema continuității nu se pune în punctele în care funcția $f$ nu este definită. În particular nu putem vorbi de continuitate la $\pm\infty$.

*Interpretare grafică:* intuitiv, graficul unei funcții continue se poate trasa fără a ridica creionul de pe hârtie. Cu excepția punctelor izolate din domeniul de definiție, aceasta înseamnă că pentru orice două puncte $x_1$ şi $x_2$ din domeniul de definiție, orice punct situat între imaginile acestora este imaginea unui punct din domeniul de definiție, adică în intervalul de extremități $x_1$ şi $x_2$.

Astfel, prin metoda grafică, am exemplificat (intuitiv) noțiunea de funcție continuă într-un punct.

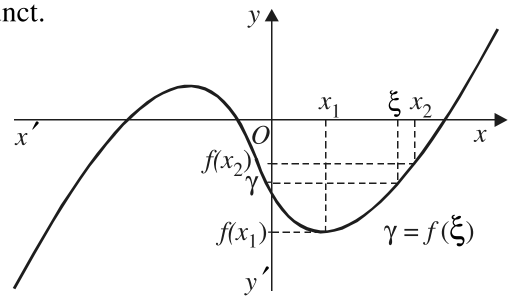



**Figura 5**

**Propoziția 1.** *O funcție $f : D \to \mathbb{R}$ este continuă în orice punct izolat al domeniului de definiție.*

*Demonstrație:* Fie $x_0$ un punct izolat. Atunci există o vecinătate $U$ a lui $x_0$ astfel încât $U \cap D = \{x_0\}$. Pentru orice $x \in U \cap D$, avem $f(x) = f(x_0)$, deci $f$ este continuă în $x_0$.

O funcție reală definită pe o mulțime finită sau numărabilă (în particular, un şir de numere reale) este continuă pe tot domeniul de definiție.

Stabilim o condiție echivalentă cu definiția continuității.

**Propoziția 2.** *Funcția $f : D \to \mathbb{R}$ este continuă în punctul $x_0 \in D$ dacă şi numai dacă pentru orice şir $x_n \to x_0$, $x_n \in D$, şirul $f(x_n) \to f(x_0)$.*

*Demonstrație:* Dacă $x_0$ este un punct izolat, rezultatul este evident.

În caz contrar, $x_0$ este un punct de acumulare. Se reface demonstrația teoremei corespunzătoare de la limite de funcții, înlocuind $l$ cu $f(x_0)$.

**Propoziția 3.** *O funcție $f : D \to \mathbb{R}$ este continuă într-un punct de acumulare $x_0 \in D$, dacă şi numai dacă funcția are limită în $x_0$ şi*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0).$$

*Demonstrație*

Presupunem că $f$ este continuă în punctul de acumulare $x_0$. Atunci pentru orice $x_n \to x_0$, $x_n \in D$, avem $f(x_n) \to f(x_0)$. În particular, pentru orice şir $x_n \to x_0$, $x_n \in D$, cu $x_n \neq x_0$, avem $f(x_n) \to f(x_0)$. În concluzie $f$ are limită în $x_0$ şi $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$.

Reciproc, dacă $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$, evident funcția $f$ este continuă în $x_0$.

• Vom spune că o funcție reală de variabilă reală $f : D \to \mathbb{R}$ este *continuă pe o submulțime* $A \subset D$, dacă este continuă în orice punct $x \in A$.

• Dacă $f$ este continuă pe tot domeniul său de definiție, vom spune că $f$ este *continuă*.

• Dacă funcția $f$ nu este continuă în punctul $x_0$, se spune că $f$ este *discontinuă* în $x_0$, iar $x_0$ se numeşte *punct de discontinuitate al lui f*.

Propoziția 1 implică faptul că un punct de discontinuitate al funcției $f$ este în mod necesar un punct de acumulare al domeniului de definiție al funcției $f$.

Stabilim următoarele condiții echivalente de discontinuitate a unei funcții într-un punct de abscisă $x_0$.

**Propoziția 4.** *Fie* $f : D \to \mathbb{R}$ *şi* $x_0 \in D$. *Următoarele afirmații sunt echivalente:*

i) *funcția f este discontinuă în* $x_0$;

ii) *există o vecinătate V a lui* $f(x_0)$ *astfel încât pentru orice vecinătate U a lui* $x_0$, *există* $x \in U \cap D$, *cu* $f(x) \notin V$;

iii) *există un şir* $x_n \to x_0$ *de puncte din D astfel încât şirul* $(f(x_n))$ *să nu aibă limita* $f(x_0)$;

iv) *nu există* $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ *sau există* $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) \neq f(x_0)$.

**Observație:** Condiția iii) se realizează dacă şirul $(f(x_n))$ nu are limită sau, dacă are limită, aceasta este diferită de $f(x_0)$.

Vom defini şi noțiunea de continuitate laterală.

| | |
|---|---|
| **Definiție** | Fie $f : D \to \mathbb{R}$ şi $x_0 \in D$. Atunci:<br>a) funcția $f$ se numeşte *continuă la stânga* în $x_0$ dacă restricția sa la mulțimea $\{x \in D \mid x \le x_0\}$ este continuă în $x_0$.<br>b) funcția $f$ se numeşte *continuă la dreapta* în $x_0$ dacă restricția sa la mulțimea $\{x \in D \mid x \ge x_0\}$ este continuă în $x_0$. |

**Corolar 1.** *Fie $f : D \to \mathbb{R}$ o funcție şi $x_0 \in D$. Următoarele afirmații sunt echivalente:*

i) *funcția f este continuă la stânga în $x_0$;*

ii) *pentru orice şir $x_n \to x_0$ de puncte din D cu $x_n \leq x_0$, şirul $(f(x_n))$ are limita $f(x_0)$;*

iii) *dacă $x_0$ este un punct de acumulare al mulțimii $\{x \in D \mid x \leq x_0\}$, atunci există limita laterală la stânga $f(x_0 - 0) = f(x_0)$.*

**Corolar 2.** *Fie $f : D \to \mathbb{R}$ o funcție şi $x_0 \in D$. Atunci sunt echivalente:*

i) *funcția f este continuă la dreapta în $x_0$;*

ii) *pentru orice şir $x_n \to x_0$ de puncte din D cu $x_n \geq x_0$, şirul $(f(x_n))$ are limita $f(x_0)$;*

iii) *dacă $x_0$ este un punct de acumulare al mulțimii $\{x \in D \mid x \geq x_0\}$, atunci există limita laterală la dreapta $f(x_0 + 0) = f(x_0)$.*

**Corolar 3.** *Funcția $f : D \to \mathbb{R}$ este continuă în punctul $x_0 \in D$, dacă şi numai dacă este continuă la stânga şi la dreapta în $x_0$.*

## Clasificarea discontinuităților unei funcții într-un punct

| | |
|---|---|
| **Definiție** | O funcție este *discontinuă* în punctul $x_0 \in D$ dacă nu este continuă în acest punct. Discontinuitățile unei funcții într-un punct $x_0$ pot fi de două tipuri:<br>a) discontinuități de *prima speță*, când funcția admite limite laterale finite în $x_0$;<br>b) discontinuități de *speța a doua*, în caz contrar. |

Considerăm funcția $f : [-1, 4] \to \mathbb{R}$, definită în modul următor:

$$f(x) = \begin{cases} x-1, & \text{dacă} \quad -1 \leq x \leq 1 \\ 1-x, & \text{dacă} \quad 1 < x < 3 \\ 2, & \text{dacă} \quad x = 3 \\ 1, & \text{dacă} \quad 3 < x \leq 4 \end{cases}$$

Funcția este definită pe un interval.

Graficul acestei funcții este prezentat în figura următoare.

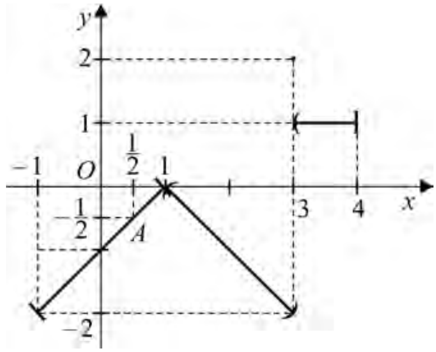



**Figura 6**

Observăm că acest grafic se întrerupe în dreptul punctului de abscisă 3 din domeniul de definiție.

Considerăm punctul $A\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$ situat pe grafic. În acest punct, graficul nu se întrerupe, fiind o linie continuă. Calculăm limita funcției în punctul $\frac{1}{2}$. Într-o vecinătate a punctului $\frac{1}{2}$, funcția are expresia $f(x) = x - 1$.

Deci $\lim\limits_{x \to \frac{1}{2}} f(x) = \lim\limits_{x \to \frac{1}{2}} (x-1) = -\frac{1}{2}$.

Din modul în care s-a definit funcția $f$, rezultă că valoarea sa în punctul $\frac{1}{2}$ este:

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} - 1 = -\frac{1}{2}.$$

Prin urmare, funcția are limită în punctul $\frac{1}{2}$ şi limita este egală cu valoarea funcției în acest punct: $\lim\limits_{x \to \frac{1}{2}} f(x) = f\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2}$.

Matematicianul P. L. Dirichlet (1805-1859) a dat exemplu de funcție al cărui grafic nu se poate realiza şi care este discontinuă în orice punct al domeniului de definiție. Această funcție se numeşte funcția lui Dirichlet şi este de forma:

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q} \\ 0, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}.$$

Am văzut în capitolul anterior că funcția lui Dirichlet nu are limite laterale în nici un punct din $\mathbb{R}$. Prin urmare toate punctele din $\mathbb{R}$ sunt puncte de discontinuitate de speța a doua.

Un alt exemplu celebru este funcția lui Riemann (1826-1866), definită astfel:

$$f : [0, 1] \to \mathbb{R},\ f(x) = \begin{cases} 0, & x \in ([0,1] \setminus \mathbb{Q}) \cup \{0\}, \\ \dfrac{1}{q}, & x = \dfrac{p}{q}, p, q \in \mathbb{N}^*, (p, q) = 1. \end{cases}$$

Vom arăta că:

a) $f$ este continuă în 0 şi în orice $x \in [0, 1] \setminus \mathbb{Q}$;

b) $f$ este discontinuă în orice punct din $\mathbb{Q} \setminus \{0\}$.

*Soluție*[*]

Fie $a, b \in \mathbb{R}$, cu $a < b$ fixați.

Atunci $\forall\ q \in \mathbb{N}^*$, există cel mult un număr finit de numere raționale ireductibile $\dfrac{p}{q}$ astfel încât $a < \dfrac{p}{q} < b$, deoarece există cel mult un număr finit de numere întregi $p$ cu $aq < p < bq$.

Fie $x_0 \in \mathbb{R}$. Vom demonstra că $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = 0$.

Fie $V$ o vecinătate a lui 0. Atunci $\exists\ \varepsilon > 0$ astfel încât $(-\varepsilon, \varepsilon) \subset V$. Fie $n_\varepsilon \geq 1$ maxim, astfel încât $\dfrac{1}{n_\varepsilon} < \varepsilon$.

Pentru orice $q \in \{1, \ldots, n_\varepsilon\}$, alegem $U_q$ un interval deschis cu centrul în $x_0$, astfel încât $U_q$ nu conține nici un număr rațional ireductibil $\dfrac{p}{q}$, cu excepția eventual a lui $x_0$.

Atunci $U = \bigcap\limits_{q=1}^{n_\varepsilon} U_q$ este un interval deschis cu centrul în $x_0$ cu proprietatea că $\forall\ r \in U \cap \mathbb{Q} \setminus \{x_0\},\ r = \dfrac{p}{q}$ ireductibil, cu $q > n_\varepsilon$.

Deci $f(r) = \dfrac{1}{q} < \dfrac{1}{n_\varepsilon} < \varepsilon$.

Pe de altă parte, $f(x) = 0$, $\forall\ x \in (U \setminus \mathbb{Q}) \cup \{0\}$.

[*] Se recomandă pentru clasele de excelență sau cercurile de elevi.

În concluzie, $f(x) < \varepsilon$, $\forall\, x \in U \setminus \{x_0\}$, deci $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = 0$.

Prin urmare $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$, $\forall\, x_0 \in ([0, 1] \setminus \mathbb{Q}) \cup \{0\}$, sau echivalent, $f$ este continuă pe $([0, 1] \setminus \mathbb{Q}) \cup \{0\}$, respectiv $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) \neq f(x_0)$, $\forall\, x_0 \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$, deci $f$ este discontinuă pe $\mathbb{Q} \setminus \{0\}$.

## Exerciții rezolvate

Să se cerceteze tipurile de discontinuități ale următoarelor funcții, în punctele specificate:

**1.** $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} x, & x < 0 \\ 1, & x = 0 \\ -x, & x > 0 \end{cases}$ în $x_0 = 0$;

**2.** $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} 1, & x < 0 \\ 0, & x = 0 \\ -1, & x > 0 \end{cases}$ în $x_0 = 0$;

**3.** $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x}, & x > 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases}$ în $x_0 = 0$;

**4.** $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x^3}, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ \dfrac{1}{x^2}, & x < 0 \end{cases}$ în $x_0 = 0$;

**5.** $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x}, & x \in (-\infty, 0) \cup (0, +\infty) \\ 1, & x = 0 \end{cases}$ în $x_0 = 0$;

**6.** $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = \begin{cases} \sin\frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$ în $x_0 = 0$;

**7.** $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = \begin{cases} \cos\frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$ în $x_0 = 0$.

*Răspunsuri:*

**1.** În punctul $x_0 = 0$, $f$ este discontinuă de speța întâi;

**2.** În punctul $x_0 = 0$, $f$ este discontinuă de speța întâi (există limite laterale şi sunt diferite);

**3.** $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(0) = +\infty$, deci funcția admite discontinuitate de speța a doua în punctul de abscisă $x_0 = 0$;

**4.** $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} f(x) = +\infty$, deci funcția admite discontinuitate de speța a doua în punctul $x_0 = 0$;

**5.** Nu există limite laterale finite în punctul de abscisă 0, deci funcția este discontinuă de speța a doua;

**6.** şi **7.** Funcțiile nu admit limite laterale în punctul de abscisă $x = 0$, deci admit discontinuități de speța a doua.

## Test de evaluare

Să se reprezinte grafic şi să se analizeze continuitatea următoarelor funcții:

(*2p*) **1.** $f : [0, 2] \to \mathbb{R},\ f(x) = \begin{cases} 1, & x \in [0, 1] \\ x, & x \in (1, 2] \end{cases}$;

(*2p*) **2.** $f:[-1,1]\to\mathbb{R},\ f(x)=\begin{cases}1+x, & x\in[-1,0]\\ 1-x^2, & x\in(0,1]\end{cases};$

(*2p*) **3.** $f:[-1,+\infty]\to\mathbb{R},\ f(x)=\begin{cases}x^2, & x\in[-1,1]\\ -1, & x\in(1,+\infty]\end{cases};$

(*2p*) **4.** $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\begin{cases}e^x, & x\in(-\infty,0)\\ 1-x, & x\in[0,1]\\ 1, & x\in(1,+\infty]\end{cases};$

*Timp de lucru: 30 de minute.*

## Exerciții propuse

Să se studieze continuitatea următoarelor funcții:

**1.** $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\begin{cases}\cos\dfrac{\pi x}{2}, & |x|\in[0,1]\\ |x-1|, & |x|\in(1,+\infty)\end{cases};$

**2.** $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\begin{cases}\sin\pi x, & x\in\mathbb{Q}\\ 0, & x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}\end{cases};$

**3.** $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\begin{cases}x^2\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases};$

**4.** $f:[0,\pi]\to\mathbb{R}$, $f(x)=\min(\sin x,\cos x)$;

**5.** $f:\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]\to\mathbb{R}$, $f(x)=\max(\sin x,\cos^2 x)$;

**6.** $f:[0,\dfrac{\pi}{2}]\to\mathbb{R},\ f(x)=\begin{cases}x^{\left[\frac{1}{x}\right]}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases};$

**7.** $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = \begin{cases} 4\arcsin\dfrac{2x}{1+x^2}, x \in (-\infty,-1] \cup [1,+\infty) \\ \sin\dfrac{(2x^2-1)\pi}{x^2-1},\ x \in (-1,1) \end{cases}$;

**8.** $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = \max(x^n, x^{n+1}, x)$, $n$ fixat, $n \in \mathbb{N}^*$;

**9.** $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = \dfrac{x(e^{nx}+1)}{e^{-nx}+1}$;

**10.** $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = \begin{cases} e^x + x - 1, & x \le 1 \\ x^{\frac{1}{x-1}}, & x > 1 \end{cases}$;

**11.** $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = \begin{cases} e^x \sin\dfrac{1}{x}, & x \ne 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$;

**12.** $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = \begin{cases} x^2, & x \in \mathbb{Q} \\ \dfrac{1}{x}, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$;

**13.** $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = \begin{cases} x^2\left[\dfrac{1}{x}\right], & x \ne 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases}$;

**14.** $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = \begin{cases} \operatorname{arctg}\dfrac{\pi}{1-x}, & x \ne 1 \\ 1, & x = 0 \end{cases}$;

**15.** i) $f: [0, 1] \to \mathbb{R},\ f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} (x^n + 1)$;

ii) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x^n + xe^{nx}}{1+e^{nx}}$;

iii) $f: [0,1] \to \mathbb{R},\ f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x}{1+x^n+x^{2n}}$.

**16.** Să se determine valorile parametrului real $a$, astfel încât următoarele funcții să fie continue:

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = \begin{cases} 2 - \dfrac{ax}{2}, & x < 1 \\ \sqrt{a^2x^2 - 2ax + 1}, & x \ge 1 \end{cases}$;

b) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} x \cdot \left[\dfrac{1}{x}\right], & x \neq 0 \\ a, & x = 0 \end{cases}$;

c) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin 5x - \sin 7x}{x}, & x \neq 0 \\ a, & x = 0 \end{cases}$;

d) $f : [0, 2] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} \operatorname{tg} \dfrac{a(x^2 - 1)}{x^3 - 1}, & 0 \le x \le 1 \\ \dfrac{\sin(x-1)}{x^2 - 1}, & 1 \le x \le 2 \end{cases}$.

## Operații cu funcții continue

Avem următoarele proprietăți ale continuității:

**Propoziție.** *Fie $D \subset \mathbb{R}$, $x_0 \in D$ şi $f$, $g : D \to \mathbb{R}$ două funcții reale. Atunci:*

*i) dacă $f$ şi $g$ sunt continue în $x_0$ (respectiv continue pe $D$), atunci funcția $f \pm g$ este continuă în $x_0$ (respectiv continuă pe $D$);*

*ii) dacă $f$ şi $g$ sunt continue în $x_0$ (respectiv continue pe $D$), atunci funcția $fg$ este continuă în $x_0$ (respectiv continuă pe $D$).*

*iii) dacă $f$ şi $g$ sunt continue în $x_0$ şi $g(x_0) \neq 0$ (respectiv continue pe $D$ şi $g(x) \neq 0$, $\forall x \in D$), atunci funcția $\dfrac{f}{g}$ este continuă în $x_0$ (respectiv continuă pe $D$).*

*iv dacă $f$ şi $g$ sunt continue în $x_0$ şi $f(x_0) > 0$ (respectiv continue pe $D$ şi $f(x) > 0$, pentru orice $x \in D$), atunci funcția $f^g$ este continuă în $x_0$ (respectiv continuă pe $D$).*

Demonstrația este analoagă cu demonstrația rezultatelor corespunzătoare de la limite de funcții.

**Corolar.** *Dacă funcția $f : D \to \mathbb{R}$ este continuă în $x_0 \in D$ (respectiv este continuă pe $D$), atunci funcția $| f |$ este continuă în $x_0$ (respectiv este continuă pe $D$).*

Reciproca nu este adevărată. Într-adevăr, fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definită prin

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q}, \\ -1, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Funcția $f$ este discontinuă în orice punct $x \in \mathbb{R}$, în schimb funcția $|f|$ este continuă pe $\mathbb{R}$.

## Proprietăți locale ale funcțiilor continue

**Propoziție.** *Dacă funcția $f : D \to \mathbb{R}$ este continuă într-un punct $x_0 \in D$ şi $\alpha < f(x_0) < \beta$, atunci există o vecinătate $U$ a lui $x_0$, astfel încât $\alpha < f(x) < \beta$, pentru orice $x \in U \cap D$.*

*Demonstrație*

Intervalul $(\alpha, \beta)$ este o vecinătate a lui $f(x_0)$. Deoarece funcția $f$ este continuă în $x_0$, există o vecinătate $U$ a lui $x_0$, astfel încât $f(x) \in V$, pentru orice $x \in U \cap D$, sau echivalent, $\alpha < f(x) < \beta$.

**Corolar 1.** *Dacă $f : D \to \mathbb{R}$ este continuă în $x_0 \in D$, atunci există $U$ o vecinătate a lui $x_0$ pe care funcția $f$ este mărginită.*

**Corolar 2.** *Dacă $f : D \to \mathbb{R}$ este continuă în $x_0 \in D$ şi $f(x_0) > 0$, atunci există o vecinătate $U$ a lui $x_0$, astfel încât $f(x) > 0$, pentru orice $x \in U \cap D$.*

**Corolar 3.** *Dacă $f : D \to \mathbb{R}$ este continuă în $x_0 \in D$ şi $f(x_0) < 0$, atunci există o vecinătate $U$ a lui $x_0$, astfel încât $f(x) < 0$, pentru orice $x \in U \cap D$.*

**Corolar 4.** *Dacă $f : D \to \mathbb{R}$ este continuă în $x_0 \in D$ şi $f(x_0) \neq 0$, atunci există o vecinătate $U$ a lui $x_0$, astfel încât $f(x) \neq 0$, pentru orice $x \in U \cap D$.*

**Observație:** Funcțiile elementare sunt definite pe intervale sau pe reuniuni de intervale, deci domeniile lor de definiție conțin numai puncte de acumulare. Pentru funcțiile elementare, avem $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$ (vezi tabelul din capitolul precedent).

În concluzie funcțiile elementare sunt continue pe tot domeniul lor de definiție.

# 2.2. Semnul unei funcții continue pe un interval. Proprietatea lui Darboux. Studiul existenței soluțiilor unor ecuații în $\mathbb{R}$

## Proprietatea lui Darboux

Funcțiile continue pe un interval au proprietatea importantă că nu pot trece de la o valoare la alta fără a trece prin toate valorile intermediare. Această proprietate este cunoscută ca *proprietatea lui Darboux*.

| | |
|---|---|
| **Definiție** | O funcție $f$ definită pe un interval $I$ are *proprietatea lui Darboux,* dacă oricare ar fi punctele $a$, $b \in I$, $a < b$ şi oricare ar fi numărul $\gamma$ cuprins între $f(a)$ şi $f(b)$, există cel puțin un punct $c \in (a, b)$, astfel încât $f(c) = \gamma$. |

***Exemple***

**1.** Considerăm funcția $f : [0, 2] \to \mathbb{R}$, dată prin:

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & 0 \le x \le 1 \\ -x+2, & 1 < x \le 2 \end{cases}.$$

Graficul funcției $f$ este prezentat în figura alăturată.

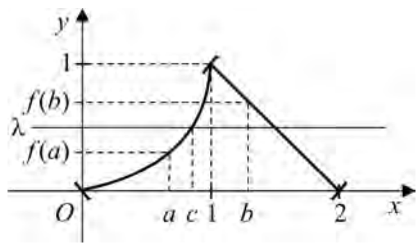



**Figura 7**

Observăm că pentru punctele arbitrare $a$, $b \in [0, 2]$, cu $a < b$, şi $\lambda$ un punct cuprins între $f(a)$ şi $f(b)$, găsim un punct $c \in (a, b)$, astfel încât $f(c) = \lambda$.

Mai mult, observăm că funcția $f$ transformă intervalul $[0, 2]$ în intervalul $[0, 1]$.

**2.** Să considerăm funcția $g : (-2, 2) \to \mathbb{R}$, definită prin:

$$g(x) = \begin{cases} -1, & -2 < x \le 0 \\ x+1, & 0 < x < 2 \end{cases}.$$

Graficul funcției $g$ este prezentat în figura alăturată.

Observăm că în $x = -1$ valoarea funcției este $g(-1) = -1$, iar punctul $x = 1$ este $g(1) = 2$.

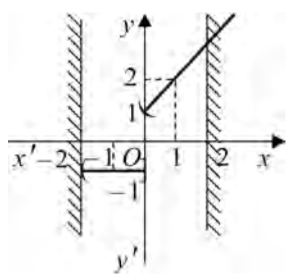



**Figura 8**

Când $x$ parcurge intervalul $[-2, 2]$, funcția $g$ nu ia toate valorile intermediare. De exemplu, nu există $x \in [-1,1]$ pentru care $g(x) = \frac{1}{2}$, adică $g$ nu ia niciodată valoarea $\frac{1}{2}$. Mai mult, nici un număr din intervalul $(-1, 1)$ nu este în imaginea lui $g$. Prin urmare, funcția $f$ nu are proprietatea lui Darboux.

Funcțiile continue pe un interval constituie o clasă importantă de funcții cu proprietatea lui Darboux.

**Teorema 1.** *Orice funcție continuă pe un interval are proprietatea lui Darboux.*

*Demonstrație*

Dacă $f(a) = f(b)$, este evident.

Presupunem că $f(a) < f(b)$. Notăm cu: $A = \{x \in [a, b] \mid f(x) \leq \gamma\}$.

Evident $a \in A \subset [a, b]$, deci $A$ este mulțime nevidă şi mărginită. Fie $c = \sup A$. Vom demonstra că $f(c) = \gamma$.

Într-adevăr, există un şir $x_n \to c$, cu $x_n \in A$. Deoarece $f$ este continuă, rezultă că $f(x_n) \to f(c)$. Prin urmare $f(c) \leq \gamma$.

Pe de altă parte, $f(b) > \gamma$ implică $c < b$. Fie $y \in (c, b)$. Atunci $f(y) > \gamma$. Considerând un şir $y_n \to c$, cu $y_n \in (c, b)$, continuitatea lui $f$ implică $f(y_n) \to f(c)$. Prin trecere la limită obținem $f(c) \geq \gamma$. În concluzie, $f(c) = \gamma$.

Cazul $f(a) > f(b)$ se demonstrează analog.

Condiția ca funcția $f$ să fie definită pe un interval este esențială.

**Contraexemplu.** Funcția $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$, definită prin $f(x) = \frac{x}{|x|}$, pentru orice $x \in \mathbb{R}^*$, este continuă şi imaginea lui $f$ este mulțimea $\{-1, 1\}$.

**Observație:** Proprietatea lui Darboux nu este caracteristică numai funcțiilor continue.

Un exemplu de funcție discontinuă care are proprietatea lui Darboux este dat de $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definită prin

$$f(x) = \begin{cases} \cos\frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}.$$

*Soluție:*

Evident $f$ este continuă pe $\mathbb{R}\setminus\{0\}$, deci are proprietatea lui Darboux pe $(-\infty, 0)$ şi pe $(0, +\infty)$.

Deci este suficient să demonstrăm că pentru orice $l \in [-1,1]$, există un şir $x_n \to 0$ astfel încât $f(x_n) = l$.

Definim şirurile $(y_n)$ şi $(x_n)$ astfel: $y_n = \arccos l + 2n\pi$, pentru orice $n \geq 1$ şi $x_n = \dfrac{1}{y_n}$, pentru orice $n \geq 1$.

Evident $x_n \to 0$ şi $f(x_n) = \cos\dfrac{1}{x_n} = \cos y_n = l$.

Menționăm că există şi funcții definite pe un interval care nu au proprietatea lui Darboux. Un exemplu simplu este funcția lui Dirichlet, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q} \\ 0. & x \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q} \end{cases}.$$

Punctul $\dfrac{1}{2}$ este situat între $f(0) = 1$ şi $f(\sqrt{2}) = 0$, dar nu există nici un punct $c \in (0, \sqrt{2})$, cu $f(c) = \dfrac{1}{2}$.

Faptul că funcțiile continue au proprietatea lui Darboux are aplicații importante: existența soluțiilor unor ecuații pe $\mathbb{R}$ şi semnul unei funcții continue.

## Semnul unei funcții continue pe un interval

| | |
|---|---|
| **Corolar 1. Cauchy-Balzano** | *Fie $a < b$ două numere reale şi funcția $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continuă. Dacă $f(a)\, f(b) < 0$, atunci există cel puțin un punct $c$ în intervalul $(a, b)$ în care funcția $f$ se anulează, adică $f(c) = 0$.* |

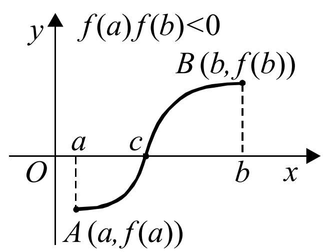



**Figura 9**

*Demonstrație*

Punctul 0 este situat între $f(a)$ şi $f(b)$. Atunci există $c \in (a, b)$ astfel încât $f(c) = 0$. În fig. 10, există punctele $c_1, c_2, c_3 \in (a, b)$ în care funcția se anulează.

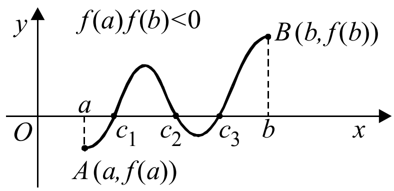



**Figura 10**

**Corolar 2.** *Dacă funcția $f : I \to \mathbb{R}$ continuă pe intervalul I nu se anulează în nici un punct din I, atunci f are semn constant pe intervalul I.*

*Demonstrație*

Presupunem că există $a, b \in I$, astfel încât $f(a)$ şi $f(b)$ au semne contrare. Corolarul 1 implică existența unui punct $c \in I$, în care funcția $f$ se anulează, ceea ce este o contradicție.

**Corolar. 3.** *O funcție $f : I \to \mathbb{R}$, continuă pe intervalul I, transformă orice interval $J \subset I$ într-un interval $f(J)$.*

**Corolar 4.** *Dacă funcția injectivă $f : I \to \mathbb{R}$, este continuă pe intervalul I, atunci f este strict monotonă.*

*Demonstrație*

Presupunem prin absurd că funcția $f$ nu este strict monotonă. Atunci există punctele $x_1 < x_2 < x_3$ din $I$ astfel încât $f(x_2)$ nu este cuprins între $f(x_1)$ şi $f(x_3)$.

Pentru a face o alegere, presupunem că $f(x_2) < f(x_1) < f(x_3)$. Funcția $f$ fiind continuă, are proprietatea lui Darboux. Deci există un punct $c \in (x_2, x_3)$ astfel încât $f(c) = f(x_1)$, ceea ce contrazice injectivitatea lui $f$.

Celelalte cazuri se tratează analog.

## Studiul existenței soluțiilor unor ecuații în $\mathbb{R}$

Fie $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ o funcție continuă. Am văzut că dacă $f(a)\, f(b) < 0$, atunci există cel puțin un punct $c \in (a, b)$ astfel încât $f(c) = 0$.

În particular, dacă $f$ este strict monotonă pe $[a, b]$, atunci $c$ este soluție unică a ecuației $f(x) = 0$ pe $[a, b]$.

***Exemple***

**1.** Existența radicalului: Fie $a \geq 0$ şi $n \geq 2$ un număr natural.

Vom arăta că ecuația $x^n = a$ admite o soluție pozitivă unică.

*Soluție*

Dacă $a = 0$, avem soluția unică 0.

Presupunem $a > 0$. Considerăm funcția: $f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$, definită prin $f(x) = x^n - a$. Evident $f(0) = - a < 0$.

Pe de altă parte, $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = + \infty$. Dacă $f(x) < 0$, pentru orice $x \in [0, +\infty)$, atunci $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) \leq 0$; contradicție.

Deci există $b \in (0, +\infty)$ astfel încât $f(b) > 0$.

Atunci $f(a)\ f(b) < 0$, prin urmare există $c > 0$ astfel încât $f(c) = 0$.

Punctul $c$ este unic, deoarece funcția $f$ este strict crescătoare.

**2.** Analog se demonstrează existența şi unicitatea soluției ecuației $a^x = b$, pentru orice $a, b > 0$ şi $a \neq 1$.

*Soluție*

Considerăm funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = a^x - b$.

i) Dacă $a > 1$, atunci:

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -b < 0 \Rightarrow \exists\, c \in \mathbb{R}_-$, astfel încât $f(c) < 0$;

$\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = +\infty \Rightarrow \exists\, d \in \mathbb{R}_+$, astfel încât $f(d) > 0$;

Deci $f(c) \cdot f(d) < 0 \Rightarrow \exists\, x_0 \in (c, d)$, astfel încât $f(x_0) = 0$.

Punctul $x_0$ este unic deoarece $f$ este strict crescătoare.

ii) Dacă $0 < a < 1$, atunci:

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty \Rightarrow \exists\, c \in \mathbb{R}_-$, astfel încât $f(c) > 0$;

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -b < 0 \Rightarrow \exists\, d \in \mathbb{R}_+$, astfel încât $f(d) < 0$;

Deci $f(c) \cdot f(d) < 0 \Rightarrow \exists\, x_0 \in (c, d)$, astfel încât $f(x_0) = 0$.

Punctul $x_0$ este unic deoarece $f$ este strict descrescătoare.

## Exerciții rezolvate

**1.** Să se precizeze care din funcțiile următoare au proprietatea lui Darboux.

a) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\operatorname{sgn}(x)$, unde $\operatorname{sgn}(x)=\begin{cases}-1, & x<0\\ 0, & x=0\\ 1, & x>0\end{cases}$;

b) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\begin{cases}x, & x\le 0\\ 1-x, & x>0\end{cases}$;

c) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\begin{cases}0, & x\in\mathbb{Q}\\ 1, & x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}\end{cases}$;

d) $f:[0,1]\to\mathbb{R},\ f(x)=\begin{cases}x, & x\in\mathbb{Q}\\ x^3, & x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}\end{cases}$.

*Soluție:*

a) $f[-1,1]=\{-1,0,1\}$, care nu este interval, deci $f$ nu are proprietatea lui Darboux;

b) $f\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]=f\left(\left[-\frac{1}{2},0\right]\cup\left(0,\frac{1}{2}\right]\right)=\left[-\frac{1}{2},0\right]\cup\left[\frac{1}{2},1\right]$, care nu este interval, deci $f$ nu are proprietatea lui Darboux;

c) $f[0,1]=\{0,1\}$, care nu este interval, deci $f$ nu are proprietatea lui Darboux;

d) Fie $I=\left[\frac{1}{3},\frac{1}{2}\right]$; $f[I\cap\mathbb{Q}]=A\subset\left[\frac{1}{3},\frac{1}{2}\right]$ şi $f[I\cap(\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q})]=B\subset\left[\frac{1}{27},\frac{1}{8}\right]$;

$f(I)=A\cup B$ care nu este interval, deci $f$ nu are proprietatea lui Darboux.

**Lemă.** *Suma sau produsul dintre o funcție care are proprietatea lui Darboux şi o funcție constantă are proprietatea lui Darboux.*

**Observație:** Se va reține (fără demonstrație) că rezultatul compunerii a două funcții cu proprietatea Darboux este o funcție cu proprietatea lui Darboux.

**2.** Se dă funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\begin{cases}\sin^2\frac{1}{x}, & x\ne 0\\ \alpha, & x=0\end{cases}$.

Să se arate că funcția $f$ are proprietatea lui Darboux dacă şi numai dacă $\alpha\in[0,1]$.

*Soluție:*

Funcția $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos\frac{2}{x}, & x\neq 0\\ \alpha, & x=0\end{cases}$ poate fi scrisă sub forma:

$$f(x)=\frac{1}{2}+g(x)\text{, unde}$$

$$g:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\quad g(x)=\begin{cases}-\frac{1}{2}\cos\frac{2}{x}, & x\neq 0\\ \alpha-\frac{1}{2}, & x=0\end{cases}.$$

Funcția $g$ are proprietatea lui Darboux dacă şi numai dacă $\alpha-\frac{1}{2}\in\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]\Rightarrow-\frac{1}{2}\leq\alpha-\frac{1}{2}\leq\frac{1}{2}\Rightarrow 0\leq\alpha\leq 1$. Deci $\alpha\in[0, 1]$.

**3.** Să se arate că următoarele funcții nu au proprietatea lui Darboux:

a) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases}\frac{\sin x}{x}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$; b) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases}\frac{\operatorname{tg} x}{x}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$;

c) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases}\cos\frac{1}{x}, & x\neq 0\\ 2, & x=0\end{cases}$; d) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{Z}$, $f(x)=[x]$.

*Soluție:*

a) $f(x)=\underbrace{\begin{cases}\frac{\sin x}{x}, & x\neq 0\\ 1, & x=0\end{cases}}_{f_1}+\underbrace{\begin{cases}0, & x\neq 0\\ -1, & x=0\end{cases}}_{f_2}$. Se observă că $f_1$ este continuă şi deci are proprietatea lui Darboux, iar $f_2$ nu are proprietatea lui Darboux; atunci funcția $f$ nu are proprietatea lui Darboux.

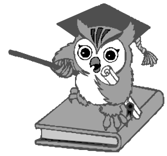
b) Se procedează ca la punctul a).

c) $f(x)=\begin{cases}\frac{1+\cos\frac{2}{x}}{2}, & x\neq 0\\ 2, & x=0\end{cases}=\underbrace{\begin{cases}\frac{1}{2}\cos\frac{2}{x}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}}_{f_1}+\underbrace{\begin{cases}\frac{1}{2}, & x\neq 0\\ 2, & x=0\end{cases}}_{f_2}$.

Se observă că $f_1$ are proprietatea lui Darboux, iar $f_2$ nu are proprietatea lui Darboux $\Rightarrow f$ nu are proprietatea lui Darboux.

d) Imaginea funcției nu este un interval.

# *Test de evaluare*



Care din următoarele funcții au proprietatea lui Darboux?

(*2p*) **1.** $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x + 2|x|$;

(*2p*) **2.** $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x - 2[x]$;

(*2p*) **3.** $f : (0, 2) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} 2x - 1, & x \in (0,1) \\ x^2 + x, & x \in [1, 2] \end{cases}$;

(*2p*) **4.** $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} \cos^2 \dfrac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$.

*Timp de lucru: 30 de minute.*

## Continuitatea compusei a două funcții continue

**Propoziția 1.** *Fie $f : D \to E$ şi $g : E \to F$ două funcții reale de variabilă reală şi $\varphi = g \circ f : D \to F$. Dacă funcția $f$ este continuă într-un punct $x_0 \in D$ şi funcția $g$ este continuă în $f(x_0)$, atunci $\varphi$ este continuă în $x_0$.*

*Demonstrație*

Fie $x_n \to x_0$ un şir de numere din $D$. Deoarece $f$ este continuă în $x_0$, rezultă că $f(x_n) \to f(x_0)$. Notăm $y_n = f(x_n)$ şi $y_0 = f(x_0)$. Din continuitatea funcției $g$ în $y_0$, rezultă că $g(y_n) \to g(y_0)$, sau echivalent, $\varphi(x_n) \to \varphi(x_0)$. Prin urmare, funcția $\varphi$ este continuă în $x_0$.

**Corolar.** *Dacă funcțiile $f : D \to E$ şi $g : E \to F$ sunt continue, atunci funcția $\varphi = g \circ f : D \to F$ este continuă, unde $D, E, F \subset \mathbb{R}$.*

## Inversa unei funcții continue

Pentru a demonstra continuitatea funcției inverse, vom enunța următoarea:

**Lemă.** *Fie $f : I \to \mathbb{R}$ o funcție monotonă astfel încât $I \subset \mathbb{R}$ şi $f(I)$ este un interval. Atunci funcția $f$ este continuă.*

*Demonstrație*

Considerăm cazul când funcția $f$ este crescătoare pe $I$. Fie $x_0 \in I$, $y_0 = f(x_0)$ şi $V$ o vecinătate a lui $y_0$. Distingem următoarele cazuri:

i) $y_0$ este punct interior al intervalului $f(I)$. Atunci există un interval închis şi mărginit $[\alpha, \beta] \subset f(I) \subset V$, cu $y_0 \in [\alpha, \beta]$. Deci există, $\alpha, \beta \in I$ astfel încât $f(a) = \alpha$ şi $f(b) = \beta$. Funcția $f$ fiind crescătoare, avem $x_0 \in (a, b)$, deci $U = (a, b)$ este o vecinătate a lui $x_0$.

Pentru orice $x \in U$, avem $\alpha = f(a) \le f(x) \le f(b) = \beta$, deci $f(x) \in [\alpha, \beta] \subset V$. Prin urmare funcția $f$ este continuă în $x_0$.

ii) $y_0$ este extremitatea stângă a lui $f(I)$, deci $y_0 \le f(x)$, pentru orice $x \in I$. Deoarece $f$ este o funcție crescătoare, pentru orice $x \in I$, $x < x_0$, avem $f(x) \le f(x_0) = y_0$, deci $f(x) = y_0$.

Fie $\beta \in f(I) \cap V$, cu $y_0 < \beta$. Există $b \in I$ astfel încât $f(b) = \beta$. Deoarece $f$ este o funcție crescătoare, rezultă $x_0 < b$. Pentru orice $a < x_0$, intervalul $U = (a, b)$ este o vecinătate a lui $x_0$.

Prin urmare, oricare ar fi $x \in U$, $y_0 \le f(x) \le \beta$, deci $f(x) \in V$. În concluzie, funcția $f$ este continuă în $x_0$.

iii) Dacă $y_0$ este extremitatea dreaptă a intervalului $f(I)$ demonstrația se face în mod analog.

În plus, dacă $f$ este o funcție descrescătoare, atunci $-f$ este o funcție crescătoare. Conform raționamentului de mai sus, $-f$ este continuă, deci $f = -(-f)$ este o funcție continuă.

**Propoziția 2.** *Fie $I \subset \mathbb{R}$ un interval şi $f : I \to \mathbb{R}$ o funcție continuă şi injectivă pe $I$. Atunci funcția inversă $f^{-1} : f(I) \to I$ este continuă.*

*Demonstrație*

Conform corolarului 4, $f$ este o funcție strict monotonă.

Atunci inversa sa $f^{-1} : f(I) \to I$ este de asemenea strict monotonă. Lema de mai sus încheie demonstrația.

*Aplicații*: Funcțiile trigonometrice inverse:

$$\arcsin : [-1, 1] \to \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]; \qquad \arccos : [-1, 1] \to [0, \pi];$$

$$\operatorname{arctg} : \mathbb{R} \to \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right); \qquad \operatorname{arcctg} : \mathbb{R} \to (0, \pi),$$

sunt continue.

## **Proprietăți de mărginire ale funcțiilor continue** (facultativ)

Funcțiile continue pe intervale compacte au proprietatea lui Weierstrass.

Proprietatea lui Weierstrass afirmă că orice funcție continuă $f$ are un minim $m$ şi un maxim $M$ pe orice interval închis şi mărginit $[a, b]$.

**Observație:** Proprietatea de mai sus nu este adevărată dacă intervalul $I$ nu este compact.
Contraexemplu: Fie $f : (0, 1) \to \mathbb{R}$, $f(x) = x$.

**Teorema 2.** *Fie $a < b$ două numere reale şi $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ o funcție continuă. Atunci $f$ este mărginită şi îşi atinge marginile.*

*Demonstrație*

I. Vom arăta că $f$ este mărginită.

Presupunem prin absurd că $f$ nu ar fi o funcție mărginită.

Dacă $f$ nu este mărginită superior, atunci există un şir $(x_n)$ de puncte din intervalul $[a, b]$ astfel încât $f(x_n) \to +\infty$. Şirul $(x_n)$ este mărginit. Aplicând lema lui Cesàro, rezultă că există un subşir convergent $\left(x_{k_n}\right)$. Notăm $\lim\limits_{n\to\infty} x_{k_n} = x_0 \in [a, b]$. Funcția $f$ fiind continuă în $x_0$, avem $\lim\limits_{n\to\infty} f\left(x_{k_n}\right) = f(x_0)$, ceea ce este o contradicție, şirul $\left(f\left(x_{k_n}\right)\right)$ fiind un subşir al şirului $(f(x_n))$, deci având limita $+\infty$.

Dacă $f$ nu este o funcție mărginită inferior, aplicăm cazul precedent funcției continue $-f$.

II. Vom arăta că funcția $f$ îşi atinge marginile.

Fie $m = \inf\{f(x) | x \in [a, b]\}$ şi $M = \sup\{f(x) | x \in [a, b]\}$.

Vom demonstra că există $c \in [a, b]$ astfel încât $f(c) = M$.

În caz contrar, considerăm funcția $g : [a, b] \to \mathbb{R}$, definită prin $g(x) = \dfrac{1}{M - f(x)}$. Evident $f$ este continuă şi pozitivă pe $[a, b]$. Conform demonstrației de mai sus, funcția $g$ este mărginită, deci există $A \in \mathbb{R}$ astfel încât $0 < g(x) \le A$, pentru orice $x \in [a, b]$ .

Deducem că:

$$0 < \frac{1}{M - f(x)} \leq A, \forall x \in [a, b].$$

Atunci $f(x) \leq M - \frac{1}{A}$, pentru orice $x \in [a, b]$, ceea ce contrazice faptul că $M = \sup\{f(x) | x \in [a, b]\}$.

Analog se arată că există $c' \in [a, b]$, astfel încât $f(c') = m$.

## Sinteză. Aplicațiile continuității

În încheierea acestui capitol, vom sintetiza aplicații importante ale continuității în rezolvarea unor probleme de matematică.

a) *Rezolvarea unor ecuații pe* $\mathbb{R}$

Am văzut că o funcție continuă $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ care are valori de semne contrare la capetele intervalului, adică $f(a)f(b) < 0$, se anulează cel puțin într-un punct $c \in (a, b)$.

Deci ecuația $f(x) = 0$ are cel puțin o soluție în intervalul $(a, b)$.

Pentru evaluarea soluției, căutăm un şir $(a_n)$ strict crescător cu $a_1 = a$ şi un şir strict descrescător $(b_n)$ cu $b_1 = b$, astfel încât $f(a_n)f(b_n) < 0$, pentru orice $n \geq 1$. Soluția ecuației $f(x) = 0$ se va afla în intervalul $(a_n, b_n)$, pentru orice $n \geq 1$.

b) *Semnul unei funcții continue*

Dacă $f : I \to \mathbb{R}$ este o funcție continuă pe un interval $I$ şi nu se anulează în nici un punct din $I$, atunci $f$ are semn constant pe $I$.

A studia semnul funcției $f$ înseamnă a determina intervalele pe care $f$ este pozitivă, respectiv negativă.

Fie $f : I \to \mathbb{R}$ o funcție continuă pe intervalul $I$.

Presupunem că toate soluțiile (reale) ale ecuației $f(x) = 0$ sunt $a_1 < a_2 < \ldots < a_n < \ldots$ (în număr finit sau infinit). Atunci pe orice interval $(a_i, a_{i+1})$ funcția $f$ are semn constant. Deci pentru a afla semnul funcției pe intervalul $(a_i, a_{i+1})$ este suficient să determinăm semnul funcției într-un singur punct din acest interval.

c) *Ecuații funcționale*

**1.** Să se determine toate funcțiile continue $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ care verifică ecuația funcțională $f(x + y) = f(x) + f(y)$, pentru orice $x, y \in \mathbb{R}$.

*Soluție*

Dacă $x = y = 0$, obținem $f(0) = 2f(0)$, deci $f(0) = 0$.

Dacă luăm $y = -x$, avem

$0 = f(0) = f(x - x) = f(x) + f(-x) \Leftrightarrow f(-x) = -f(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$, deci $f$ este o funcție impară.

Notăm $f(1) = a \in \mathbb{R}$.

Pentru $x = y = 1$, avem $f(2) = 2f(1) = 2a$. Prin inducție obținem că $f(n) = an$, pentru orice $n \in \mathbb{N}$.

Ținând cont de imparitatea funcției $f$, obținem $f(m) = am$, pentru orice $m \in \mathbb{Z}$.

Fie $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$, cu $p, q > 0$ și $(p, q) = 1$.

Avem $a = f(1) = f\Bigg(\underbrace{\frac{1}{q} + \frac{1}{q} + \ldots + \frac{1}{q}}_{\text{de } q \text{ ori}}\Bigg) = qf\left(\frac{1}{q}\right)$,

deci $f\left(\frac{1}{q}\right) = \frac{a}{q}$ și $f\left(\frac{p}{q}\right) = pf\left(\frac{1}{q}\right) = a\frac{p}{q}$.

Folosind imparitatea funcției $f$ deducem că $f(r) = ar$, pentru orice număr rațional $r$. Fie acum $\alpha$ un număr irațional. Alegem un șir $(x_n)$ de numere raționale convergent la $\alpha$. Funcția $f$ fiind continuă, putem scrie

$$f(\alpha) = f\left(\lim_{n \to +\infty} x_n\right) = \lim_{n \to +\infty} f(x_n) = \lim_{n \to +\infty} ax_n = a\alpha.$$

În concluzie $f(x) = ax$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$.

**2.** Să se determine toate funcțiile continue $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ care verifică ecuația funcțională $f(x + y) = f(x) \cdot f(y)$, pentru orice $x, y \in \mathbb{R}$.

*Soluție*

Dacă $f$ nu este identic nulă, considerăm funcția $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definită prin $g(x) = \ln f(x)$. Evident $g$ este continuă și satisface ecuația funcțională

$g(x + y) = \ln f(x + y) = \ln f(x) f(y) = \ln f(x) + \ln f(y) = g(x) + g(y)$, $\forall x, y \in \mathbb{R}$.

Conform aplicației anterioare, există $c \in \mathbb{R}$ astfel încât $g(x) = cx$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$. Atunci:

$f(x) = e^{\ln f(x)} = e^{g(x)} = e^{cx} = (e^c)^x = a^x$, $\forall x \in \mathbb{R}$, unde am notat $a = e^c$.

**3.** Să se determine toate funcțiile continue $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, care verifică ecuația funcțională $f(xy)=f(x)+f(y)$, pentru orice $x, y\in(0,+\infty)$.

*Soluție*

Considerăm funcția $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, definită prin $g(t)=f(e^t)$, pentru orice $t\in\mathbb{R}$. Avem $g(t+s)=f(e^{t+s})=f(e^t\cdot e^s)=f(e^t)+f(e^s)=g(t)+g(s)$, $\forall t, s\in\mathbb{R}$.

Conform exercițiului 1, rezultă că există $c\in\mathbb{R}$ astfel încât $g(t)=ct$, pentru orice $t\in\mathbb{R}$. Atunci:

$$f(x)=g(\ln x)=c\ln x,\ \forall x\in(0,+\infty).$$

Evident, dacă $c=0$, $f(x)=0$, pentru orice $x\in(0,+\infty)$.

Dacă $c\neq 0$, notând $a=e^{\frac{1}{c}}$, avem $f(x)=\log_a x$, pentru orice $x\in(0,+\infty)$.

## Exerciții rezolvate

**I.**

**1.** Fie funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases}\operatorname{tg} x\cdot\sin\dfrac{1}{x}, & x<0\\ 0, & x=0\\ \dfrac{\cos\frac{1}{x}}{e^{\frac{1}{x}}}, & x>0\end{cases}$

Să se cerceteze continuitatea funcției pe $\mathbb{R}$.

**2.** Să se determine $a, b\in\mathbb{R}$ astfel ca funcția:

$$f:\left(-\infty,\frac{\pi}{2}\right]\to\mathbb{R},\ f(x)=\begin{cases}x^2-x+1, & x\le 0\\ a\sin x+b\cos x, & x\in\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]\end{cases},$$

să fie tot continuă pe domeniul de definiție.

**3.** Se dă funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} 1 - x\sin\frac{2}{x}, & x \neq 0 \\ a, & x = 0 \end{cases}$.

Să se determine $a \in \mathbb{R}$, astfel încât funcția să fie continuă pe $\mathbb{R}$.

**4.** Să se studieze continuitatea funcției:

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{e^{nx} - e^{-nx}}{e^{nx} + e^{-nx}}$$

**5.** Să se determine mulțimea punctelor în care funcțiile următoare sunt continue:

$$f(x) = \begin{cases} x^3 - 3x^2, & x \in \mathbb{Q} \\ -2x, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}; \end{cases}$$

$$g(x) = \begin{cases} 2, & x \in \mathbb{Q} \\ x^2, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}. \end{cases}$$

**6.** Fie o funcție continuă $f : [a, b] \to \mathbb{R}$. Să se arate că există $c \in (a, b)$ astfel încât $f(c) = \frac{1}{a-c} + \frac{1}{b-c}$.

**7.** Fie funcțiile continue $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ pentru care $f(a) = g(b) = 0$, $f(b)\,g(a) > 0$ şi $k > 0$. Atunci există $c \in (a, b)$ astfel ca $f(c) = kg(c)$.

**8.** Fie o funcție continuă $f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$, pentru care $f(2^x) = f(3^x)$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$. Să se arate că funcția $f$ este constantă.

**9.** Fie funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ pentru care $f(x) = f\left(\frac{2x}{x^2+1}\right)$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$.

Să se arate că funcția $f$ este constantă.

**10.** Să se determine funcțiile continue $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, pentru care $f(2x)=f(x)+x,\ \forall\, x\in\mathbb{R}$.

*Soluții:*

**1.** $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} \operatorname{tg} x \sin\frac{1}{x}=0$; $\quad \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \dfrac{\cos\frac{1}{x}}{e^{\frac{1}{x}}}=0,\quad f(0)=0.$

Funcția este continuă pe $\mathbb{R}$.

**2.** $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}}(x^2-x+1)=1;\ \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}}(a\sin x+b\cos x)=b,$

$f(0)=1.$

Funcția este continuă pentru $b=1$ şi pentru orice $a\in\mathbb{R}$.

**3.** $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x)=\lim\limits_{x\to 0}\left(1-x\sin\frac{1}{x}\right)=1;\ f(0)=1=a.$

**4.** i) Pentru $x<0$ obținem că $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}}\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{e^{nx}-e^{-nx}}{e^{nx}+e^{-nx}}=-1$.

ii) Pentru $x>0$ obținem că $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}}\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{e^{nx}-e^{-nx}}{e^{nx}+e^{-nx}}=1$.

iii) Pentru $x=0$ obținem că $f(0)=0$. Funcția nu este continuă în punctul $x=0$.

**5.** i) Funcția este continuă în punctele care reprezintă soluțiile ecuației $x^3-3x^2=-2x\Leftrightarrow x\in\{0,1,2\}$.

ii) Funcția este continuă în punctele $\pm\sqrt{2}$.

**6.** Fie funcția $g(x)=(a-x)(b-x)f(x)-a-b+2x,\ x\in[a,b]$. Avem că:

$g(a)g(b)=-(a-b)^2<0$, deci există cel puțin un punct $c\in(a,b)$ astfel ca $g(c)=0$.

**7.** Fie funcția $h(x) = f(x) - kg(x)$, $x \in [a, b]$. Efectuăm calculele şi obținem că:
$h(a) = f(a) - kg(a)$ şi $h(b) = f(b) - kg(b)$ şi $h(a)\ h(b) = -\ kg(a)g(b) < 0$.

**8.** i) Fie $0 < x < 1$.

Construim şirul $x_1 = x$, $x_{n+1} = 3^{\log_2 x_n}$. Vom obține că:

$f(x_{n+1}) = f(3^{\log_2 x_n}) = f(x_n)$, $n \in \mathbb{N}^* \Rightarrow f(x_n) = f(x) \Rightarrow$

$f(x) = f(0)$, $\forall\, x \in [0, 1]$

ii) Fie $x > 1$. Construim şirul $x_1 = x$, $x_{n+1} = 2^{\log_3 x_n}$, $n \in \mathbb{N}^*$. Vom obține

că: $f(x_{n+1}) = f(2^{\log_3 x_n}) = f(x_n) \Rightarrow f(x_n) = f(x) \Rightarrow f(x) = f(1)$;

$f(0) = f(1) \Rightarrow f$ constantă.

**9.** Se observă că pentru $x \in \mathbb{R}^*$, $f\left(\frac{1}{x}\right) = f(x)$.

Putem presupune fără a restrânge generalitatea că $x \in (-1, 1)$.

Definim şirul $x_1 = x$, $x_{n+1} = \dfrac{2x_n}{x_n^2+1}$, $n \in \mathbb{N}^*$.

Se observă că $f(x_{n+1}) = f\left(\dfrac{2x_n}{1+x_n^2}\right) = f(x_n) \Rightarrow f(x_n) = f(x)$.

Şirul $(x_n)_{n \geq 1}$ este mărginit. Astfel obținem următoarele cazuri:

– pentru $x \in (-1, 0)$ avem că $f(x_n) = f(x) = f(-1)$.

– pentru $x \in (0, 1)$ avem că $f(x_n) = f(1)$.

Cum $f(-1) = f(0) = f(1) = k$, obținem că $f(x) = k$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$.

**10.** Înlocuind $x$ cu $\frac{x}{2}$ succesiv, se obține

$$f(x) = f\left(\frac{x}{2^n}\right) + x\left(1 - \frac{1}{2^n}\right) \Rightarrow f(x) = f\left(\lim_{n\to\infty} \frac{x}{2^n}\right) + x\left[\lim_{n\to\infty}\left(1 - \frac{1}{2^n}\right)\right] =$$

$= f(0) + x \Rightarrow f(x) = k + x.$ Verificăm ecuația:

$f(2^n) = 2x + 2k$, $f(x) = k + x$ şi obținem:

$2x + 2k = k + x + 2x \Rightarrow k = 0$ şi $f(x) = x$ este funcția căutată.

**II.** Să se arate că următoarele ecuații au cel puțin o rădăcină reală, în intervalul specificat:

**1.** $x^4 - 4x^3 + x^2 + 1 = 0$, $x \in [0, 1]$;

**2.** $2e^x + x^3 = 0$, $x \in [-1, 0]$;

**3.** $x \ln x - 1 = 0$, $x \in [1, 3]$;

**4.** $2(\sin^3 x + \cos^3 x) - 1 = 0$, $x \in [-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}]$;

**5.** $x + \ln x = 0$, $x \in (\frac{1}{e}, 1)$;

**6.** $\sin^3 x + x \cos x = 0$, $x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$;

**7.** $\cos^3 x + x \sin x = 0$, $x \in [0, \pi]$;

**8.** $(x - 1) \cdot e^x + x = 0$, $x \in [0, 1]$.

*Soluții:*

**1.** Funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^4 - 4x^3 + x^2 + 1$, este continuă și $f(0) \cdot f(1) < 0$, deci există $x_0 \in (0, 1)$ astfel încât $f(x_0) = 0$

**2.** Funcția $f : \mathrm{R} \to \mathrm{R}$, $f(x) = 2e^x + x^3$, este continuă și $f(-1) \cdot f(0) = (\frac{2}{e} - 1) \cdot 2 < 0$, deci există $x_0 \in (-1, 0)$ astfel încât $f(x_0) = 0$.

**3.** Funcția $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = x \ln x - 1$, este continuă și $f(1) \cdot f(3) = -1\ (3 \ln 3 - 1) < 0$, deci există $x_0 \in (1, 3)$ astfel încât $f(x_0) = 0$.

**4.** Funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 2(\sin^3 x + \cos^3 x) - 1$, este continuă și $f(-\frac{\pi}{4}) \cdot f(\frac{\pi}{4}) = -1 \cdot (\sqrt{2} - 1) < 0$, deci există $x_0 \in (-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4})$ astfel încât $f(x_0) = 0$.

**5.** Funcția $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = x + \ln x$, este continuă și $f(\frac{1}{e}) \cdot f(1) = (\frac{1}{e} - 1) \cdot 1 < 0$, deci există $x_0 \in (\frac{1}{e}, 1)$ astfel încât $f(x_0) = 0$.

**6.** Funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sin^3 x + x \cos x$, este continuă și $f(-\frac{\pi}{2}) \cdot f(\frac{\pi}{2}) = (-1) \cdot 1 < 0$, deci există $x_0 \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ astfel încât $f(x_0) = 0$; evident $x_0 = 0$.

**7.** Funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \cos^3 x + x \sin x$, este continuă şi $f(0) \cdot f(\pi) = 1 \cdot (-1) < 0$, deci există $x_0 \in (0, \pi)$ astfel încât $f(x_0) = 0$.

**8.** Funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = (x - 1) \cdot e^x + x$, este continuă şi $f(0) \cdot f(1) = (-1) \cdot 1 < 0$, deci există $x_0 \in (0, 1)$ astfel încât $f(x_0) = 0$.

**III.** Să se rezolve următoarele inecuații:

**1.** $x(x - 1)(x - 2)(x - 3) < 0$; **2.** $\frac{(x-1)(x-2)}{(x-3)(x-4)} \le 0$;

**3.** $\frac{(\ln x)^3 (x^3 - 1)}{x^5} \ge 0$; **4.** $\frac{1-\sqrt{x+1}}{2-\sqrt{x+2}} \le 0$;

**5.** $\frac{1-\log_3 x}{1-\log_9 x} \ge 0$; **6.** $\sin x \cdot \ln x \cdot (x^2 - 3x + 2) \le 0$, $x \in (0, 2\pi]$;

**7.** $(\sin^2 x - 3 \sin x + 2)^3 \cdot (\cos^2 x - 3 \cos x + 2)^3 \le 0$, $x \in [0, 2\pi]$;

**8.** $(x^2 - 7x + 12) \cdot \ln(x - 2) \cdot (2^{2x} - 12 \cdot 2^x + 32) \le 0$.

*Soluții:*

**1.** Fie funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x(x - 1)(x - 2)(x - 3)$, $f(x) = 0 \Leftrightarrow x \in \{0, 1, 2, 3\}$. Intervalele pe care funcția păstrează semn constant sunt: $(-\infty, 0)$, $(1, 2)$, $(2, 3)$ şi $(3, +\infty)$.

Realizăm următorul tabel de semne, dând o valoare particulară lui $x$ în fiecare interval.

| $x$ | $-\infty$ | | 0 | | 1 | | 2 | | 3 | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | | + | 0 | – | 0 | + | 0 | – | 0 | + | |

$x \in (0, 1) \cup (2, 3)$

**2.** $\frac{(x-1)(x-2)}{(x-3)(x-4)} = \frac{(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)}{[(x-3)(x-4)]^2} \le 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow (x-1)(x-2)(x-3)(x-4) \le 0$. Evident $x \ne 3$ şi $x \ne 4$.

Realizăm următorul tabel de semne:

| $x$ | $-\infty$ | | 1 | | 2 | | 3 | | 4 | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | | + | 0 | – | 0 | + | \| | – | \| | + | |

Procedăm ca la exercițiul 1 şi obținem: $x \in [1, 2] \cup (3, 4)$.

**3.** Fie funcția $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \frac{(\ln x)^3 (x^3 - 1)}{x^5} = \frac{(\ln x)^2}{x^4} \cdot \frac{(\ln x) \cdot (x^3 - 1)}{x} = \frac{(\ln x)^2 \cdot \ln x (x-1)(x^2+x+1)}{x^4 \cdot x} =$$

$= \frac{(\ln x)^2 (x^2 + x + 1)}{x^4} \cdot \frac{\ln x}{x}$. Semnul funcției $f$ se reduce la semnul funcției $g : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$, $g(x) = \frac{\ln x}{x}$; $g(x) \geq 0 \Leftrightarrow x \in (1, +\infty)$.

**4.** Fie funcția $f : [-1, +\infty] \setminus \{2\} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \frac{1 - \sqrt{x+1}}{2 - \sqrt{x+2}} = \frac{(1 - \sqrt{x+1})(2 - \sqrt{x+2})}{(2 - \sqrt{x+2})^2}.$$

Funcția este continuă şi alcătuim următorul tabel de semne pe intervalele: $(-1, 0)$, $(0, 2)$, $(2, +\infty)$.

| $x$ | $-1$ | | 0 | | 2 | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | | + | 0 | – | \| | + | |

Deci $x \in [0, 2)$.

**5.** Fie funcția $f : (0, +\infty) \setminus \{9\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1 - \log_3 x}{1 - \log_9 x} = \frac{(1 - \log_3 x)(1 - \log_9 x)}{(1 - \log_9 x)^2}$.

A studia semnul funcției $f$ se reduce la a studia semnul funcției $g : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$, $g(x) = (1 - \log_3 x)(1 - \log_9 x)$.

Alcătuim următorul tabel de semne pentru funcția $g$ pe intervalele: $(0, 3)$, $(3, 9)$, $(9, +\infty)$.

| $x$ | 0 | | 3 | | 9 | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | | + | 0 | – | 0 | + | |

Pentru funcția $f$ avem $f(x) \geq 0 \Leftrightarrow x \in (0, 3] \cup (9, +\infty)$.

**6.** Considerăm funcția $f : (0, 2\pi] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sin x \cdot \ln x \cdot (x^2 - 3x + 2)$.

Alcătuim următorul tabel de semne:

| $x$ | 0 | | 1 | | 2 | | $\pi$ | | $2\pi$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | \| | – | 0 | – | 0 | + | 0 | – | 0 |

$f(x) \le 0 \Rightarrow x \in (0, 2] \cup [\pi, 2\pi]$.

**7.** Considerăm funcția $f : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}$,

$f(x) = (\sin^2 x - 3 \sin x + 2)^3 \cdot (\cos^2 x - 3 \cos x + 2)^3 =$

$= (\sin^2 x - 3 \sin x + 2)^2(\cos^2 x - 3 \cos x + 2)^2(\sin^2 x - 3 \sin x + 2)(\cos^2 x - 3 \cos x + 2) =$

$= (\sin^2 x - 3 \sin x + 2)^2(\cos^2 x - 3 \cos x + 2)^2(\sin x - 1)(\sin x - 2)(\cos x - 1)(\cos x - 2)$.

Evident $\sin x - 2 < 0$ şi $\cos x - 2 < 0$. Inecuația se reduce la studiul semnului funcției $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = (\sin x - 1)(\cos x - 1)$.

| $x$ | 0 | | $\frac{\pi}{2}$ | | $2\pi$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | 0 | + | 0 | + | 0 | + | |

Deci $x \in \{0, \frac{\pi}{2}, 2\pi\}$ şi $f(x) = 0$.

**8.** Considerăm funcția continuă $f : (2, +\infty) \to \mathbb{R}$,

$f(x) = (x^2 - 7x + 12)\ \ln(x - 2) \cdot (2^{2x} - 12 \cdot 2^x + 32)$ pentru care realizăm următorul tabel de semne:

| $x$ | 2 | | 3 | | 4 | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | \| | + | 0 | – | 0 | + | |

Deci $x \in [3, 4]$.

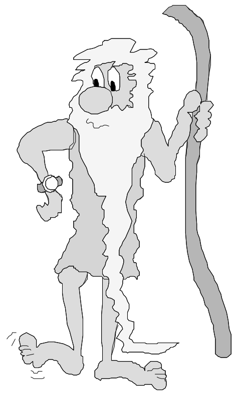
## Exerciții propuse

**I.** Să se studieze continuitatea următoarelor funcții:

**1.** $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{1 + 2^{\frac{1}{x+1}}}, & x \ne -1 \\ 0, & x = -1 \end{cases}$.

**2.** $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\begin{cases} e^{-\frac{1}{x^n}}, & x\neq 0 \\ 1, & x=0 \end{cases}.$

**3.** $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\begin{cases} \left(x+e^x\right)^{\frac{1}{x}}, & x\neq 0 \\ 1, & x=0 \end{cases}.$



**4.** $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\begin{cases} \dfrac{\sqrt{\sin x}-1}{x-\frac{\pi}{2}}, & x\neq \frac{\pi}{2} \\ 1, & x=\frac{\pi}{2} \end{cases}.$

**5.** $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\begin{cases} \dfrac{\sqrt[3]{x-2}-1}{x-3}, & x\neq 3 \\ 1, & x=3 \end{cases}.$

**6.** $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\begin{cases} x\left[\dfrac{1}{x}\right], & x\neq 0 \\ 1, & x=0 \end{cases}.$

unde $\left[\dfrac{1}{x}\right]$ reprezintă partea întreagă a numărului $\dfrac{1}{x}$.

**II. 1.** Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\begin{cases} x^2+ax+b, & x\in\mathbb{Q} \\ 0, & x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q} \end{cases}.$

i) Să se arate că funcţia are cel mult două puncte de continuitate

ii) Construiţi o funcţie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ continuă numai în punctele de abscise $x = 1$ şi $x = 2$.

**2.** Fie $f:[a, b]\to\mathbb{R}$ o funcţie continuă şi $\alpha, \beta > 0$. Să se arate că există $c\in[a, b]$ cu proprietatea $\alpha f(a)+\beta f(b)=(\alpha+\beta)\cdot f(c)$.

**3.** Să se determine toate funcţiile $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ continue, care verifică ecuaţia funcţională $f(x+y)=\dfrac{f(x)+f(y)}{1-f(x)\cdot f(y)},\ \forall\, x, y\in\mathbb{R}$.

**4.** Să se determine funcțiile continue $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ pentru care
$f(x+y) = f(x) + f(y) + 2xy - 1,\ \forall\, x, y \in \mathbb{R}$.

**5.** Să se determine funcția continuă $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, pentru care avem:
i) $f(x) - f(ax) = x,\ \forall\, x \in \mathbb{R}$ şi $a \in (0, 1)$ fixat.
ii) $f(0) = 0$.

## Test de aprofundare

**1.** Să se construiască:

a) două funcții care nu au proprietatea lui Darboux şi suma lor să fie o funcție care are proprietatea lui Darboux;

b) două funcții în care una are proprietatea lui Darboux şi cealaltă nu are proprietatea lui Darboux şi suma lor să îndeplinească condiția:

i) să aibă proprietatea lui Darboux;

ii) să nu aibă proprietatea lui Darboux;

c) două funcții care au proprietatea lui Darboux şi funcția produs să nu aibă proprietatea lui Darboux;

**2.** Dacă funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ are proprietatea că $f^2$ este o funcție continuă pe $\mathbb{R}$, rezultă că funcția $f$ este continuă pe $\mathbb{R}$?

**3.** Să se construiască două funcții care nu sunt continue pe $\mathbb{R}$, dar care au suma şi produsul funcții continue pe $\mathbb{R}$.

Capitolul 3

# DERIVABILITATE

## 3.1. Tangenta la o curbă, derivata unei funcții într-un punct, funcții derivabile, operații cu funcții care admit derivată, calculul derivatelor de ordinul I şi al II-lea pentru funcțiile studiate

### Tangenta la o curbă

Fie $I \subset \mathbb{R}$ un interval şi $f : I \to \mathbb{R}$ o funcție continuă. Vom nota cu $G_f$ graficul funcției $f$, adică

$$G_f = \{(x, f(x)) | x \in I\}.$$

Dacă $x_0 \in I$, fie punctul $M_0$ de coordonate $(x_0, f(x_0)) \in G_f$. Pentru un punct oarecare $x \in I$, $x \neq x_0$, considerăm punctul $M(x, f(x))$ aparținând graficului funcției. Panta dreptei $M_0M$ este

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \text{ (fig. 1)}$$

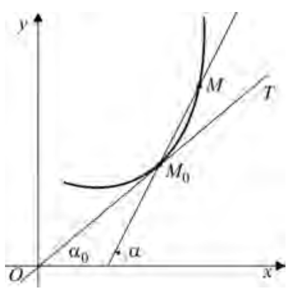



**Figura 1**

Pentru diferite poziții ale lui $x$, obținem secante diferite $M_0M$. Pentru $x$ suficient de aproape de $x_0$, punctul $M$ se apropie de $M_0$.

Panta secantei $M_0M$ devine

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Dacă această limită există şi este finită, vom spune că graficul $G_f$ admite tangentă în punctul de abscisă $x_0$. Tangenta are panta:

$$\text{tg } \alpha_0 = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \text{(fig. 1)}$$

Dacă limita de mai sus există şi este infinită, vom spune de asemenea că $G_f$ admite tangentă în punctul de abscisă $x_0$, aceasta fiind paralelă cu axa $Oy$ (fig. 2).

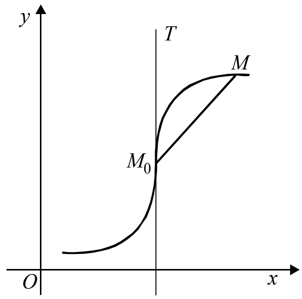



**Figura 2**

## Derivata unei funcţii într-un punct, funcţii derivabile

Fie $I$ un interval, $f$ o funcţie reală definită pe $I$ şi $x_0$ un punct din interiorul lui $I$.

| | |
|---|---|
| **Definiţie** | • Funcţia $f : I \to \mathbb{R}$ se numeşte *derivabilă în punctul* $x_0$, dacă $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ există şi este finită. Această limită se numeşte *derivata* funcţiei $f$ în punctul $x_0$ şi se notează $f'(x_0)$.<br>• Dacă funcţia $f$ este derivabilă în orice punct $x \in I$, vom spune că $f$ este *derivabilă* (pe $I$). |

Dacă limita de mai sus este infinită ($+\infty$ sau $-\infty$), vom spune că $f$ are derivata în punctul $x_0$, notată tot cu $f'(x_0)$.

Observăm că dacă funcţia $f$ are derivată în punctul $x_0$, atunci graficul său admite tangentă în punctul $M_0(x_0, f(x_0))$, panta acesteia fiind $f'(x_0)$.

Ecuaţia tangentei în punctul $(x_0, f(x_0))$ la graficul funcţiei $f$ are ecuaţia

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0).$$

În particular, dacă $f'(x_0) = \pm\infty$, tangenta la grafic este paralelă cu axa $Oy$.

**Observație:** • Noțiunea de derivată poate fi definită şi pentru funcții reale de variabilă reală $f: D \to \mathbb{R}$, cu mulțimea $D \subset \mathbb{R}$ nu neapărat un interval. În cazul general, $x_0 \in D$ trebuie să fie punct de acumulare al lui $D$.
De exemplu, funcția $f: \mathbb{R}\setminus\{0\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = |x|$, este derivabilă pe $D = \mathbb{R}\setminus\{0\}$.
• Ne-am restrâns la cazul când domeniul de definiție este un interval al dreptei reale deoarece în toate aplicațiile din acest manual domeniul de definiție este un interval sau, mai general, o reuniune de intervale.

Vom arăta că orice funcție derivabilă este continuă.

**Propoziție.** *Dacă funcția $f: I \to \mathbb{R}$ este derivabilă în punctul $x_0 \in I$, atunci $f$ este continuă în $x_0$.*

*Demonstrație*
Fie $x \in I$, $x \neq x_0$. Avem:

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}(x - x_0).$$

Trecând la limită în egalitatea de mai sus rezultă că:

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0) + \lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\cdot\lim_{x\to x_0}(x-x_0) =$$
$$= f(x_0) + f'(x_0)\cdot 0 = f(x_0),$$

adică $f$ este continuă în $x_0$.

**Corolar.** *Orice funcție derivabilă $f: I \to \mathbb{R}$ este continuă.*

**Observația 1.** Dacă $f'(x_0) = \pm\infty$, nu rezultă că $f$ este continuă în $x_0$.

De exemplu, funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definită prin

$$f(x) = \begin{cases} 1 + \sqrt{x}, & x \geq 0 \\ \sqrt{-x}, & x < 0 \end{cases},$$

este discontinuă în 0, dar $f'(0) = +\infty$.

Într-adevăr, avem:

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{\sqrt{x}}{x} = +\infty,$$

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}} \frac{\sqrt{-x}-1}{x} = +\infty,$$

deci $\lim_{x\to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = +\infty$, adică $f'(0) = +\infty$.

**Observația 2.** Reciproca nu este adevărată.

De exemplu, funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definită prin $f(x) = |x|$, este continuă pe $\mathbb{R}$, dar nu este derivabilă în 0.

## Exerciții rezolvate

Să se calculeze, plecând de la definiție, derivatele următoarele funcții în punctele specificate şi să se scrie ecuațiile tangentelor la graficele funcțiilor în punctele respective:

**.** $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$, $x_0 = 1$;

**2.** $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{x}$, $x_0 = 4$;

**3.** $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = e^x$, $x_0 = 0$;

**4.** $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt[3]{x}$, $x_0 = 27$;

**5.** $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{x^2+1}$, $x_0 = 0$;

**6.** $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sin x$, $x_0 = 0$.

**7.** Să se calculeze viteza unui mobil la momentul $t = t_0$, ştiind că legea de mişcare este dată de $S(t) = t^3 + 2t$, $\forall t \geq 0$.

**8.** Legea de mişcare a unui mobil pe o axă este $S(t) = t^2 - 2t + 1$, $\forall t \geq 0$. Să se calculeze viteza şi accelerația mobilului la momentul $t = 1$. Cum se explică rezultatul obținut?

**9.** Presupunem că la fiecare moment $t$ cantitatea de electricitate scursă printr-un conductor este $Q(t) = 2 \cos \pi t$.

Să se determine intensitatea curentului electric.

*Soluții:*

**1.** $f'(1)=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x-1)(x+1)}{(x-1)}=2;$

$x_0 = 1$, $y_0 = 1^2 = 1$, iar $M_0$ (1, 1);

Ecuația tangentei: $y-y_0=f'(1)(x-x_0) \Rightarrow y-1=2(x-1) \Rightarrow 2x-y-1=0.$

**2.** $f'(4)=\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{f(x)-f(4)}{x-4}=\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sqrt{x}-2}{x-4}=\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{(x-4)}{(x-4)(\sqrt{x}+2)}=\dfrac{1}{4};$

$x_0 = 4$, $y_0 = 2$, iar $M_0(4, 2)$;

Ecuația tangentei în punctul $M_0$ (4, 2) este: $y-y_0=f'(4)(x-x_0) \Rightarrow$

$y-2=\dfrac{1}{4}(x-4) \Rightarrow 4y-8=x-4 \Rightarrow x-4y+4=0.$

**3.** $f'(0)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-e^0}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{x}=1;$

$x_0 = 0 \Rightarrow y_0 = e^{x_0} = e^0 = 1$, iar $M_0$ (0, 1);

Ecuația tangentei: $y-y_0=f'(0)(x-x_0) \Rightarrow y-1=1\cdot x \Rightarrow x-y+1=0.$

**4.** $f'(27)=\lim\limits_{x\to 27}\dfrac{f(x)-f(27)}{x-27}=\lim\limits_{x\to 27}\dfrac{\sqrt[3]{x}-3}{x-27}=$

$=\lim\limits_{x\to 27}\dfrac{(x-27)}{(x-27)\left(\sqrt[3]{x^2}+3\sqrt[3]{x}+9\right)}=\dfrac{1}{27};$

$x_0 = 27$, $y_0 = \sqrt[3]{27} = 3$, iar $M_0$ (27, 3);

Ecuația tangentei: $y-3=f'(27)(x-27) \Rightarrow y-3=\dfrac{1}{27}(x-27)$.

**5.** $f'(0)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x^2+1}-1}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2+1-1}{x(\sqrt{x^2+1}-1)}=0;$

$x_0 = 0$, $y_0 = 1$, iar $M_0$ (0, 1);

Ecuația tangentei: $y-y_0=f'(0)(x-x_0) \Rightarrow y-1=0\cdot x \Rightarrow y=1.$

**6.** $f'(0)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x-\sin 0}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1;$

$x_0 = 0$, $y_0 = \sin 0 = 0$, iar $M_0$ (0, 0).

Ecuația tangentei în punctul $M_0$ este:

$y - y_0 = f'(0)(x - x_0) \Rightarrow y - 0 = 1(x - 0) \Rightarrow y = x.$

**7.** Viteza la momentul $t_0$ (viteza instantanee) este prin definiție:

$$\lim_{t \to t_0} \frac{S(t) - S(t_0)}{t - t_0} = S'(t_0) = 3t_0^2 + 2.$$

**8.** $V = S'(1) = 0$; $a(1) = V'(1) = 2$. Mişcarea mobilului este uniform accelerată.

**9.** Avem $I(t) \overset{\text{def}}{=} Q'(t) = -2\pi \sin \pi t$.

## Exerciții propuse

Plecând de la definiția derivatei unei funcții într-un punct, să se calculeze derivatele funcțiilor următoare, în punctele specificate şi să se scrie ecuațiile tangentelor la graficele funcțiilor în aceste puncte.

**1.** $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = x^3,\ x_0 = 1;$

**2.** $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = \dfrac{x^2}{x+1},\ x_0 = 0;$

**3.** $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = e^{x^2},\ x_0 = 0;$

**4.** $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = \ln(1 + x^2),\ x_0 = 0;$

**5.** $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = x \sin x,\ x_0 = \dfrac{\pi}{2};$

**6.** $f: (-1, 1) \to \mathbb{R},\ f(x) = \arcsin x,\ x_0 = 0;$

**7.** $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = \sqrt{1 + x + x^2},\ x_0 = 1;$

**8.** $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = x \cdot e^x,\ x_0 = 1;$

**9.** $f: (-1, 1) \to \mathbb{R},\ f(x) = \dfrac{\arcsin x}{\sqrt{1 - x^2}},\ x_0 = 0;$

**10.** $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = \cos x^2,\ x_0 = 0.$

**11.** Legea de mişcare a unui mobil pe axă este $S(t) = t^3 - 12t^2 + 4$. La ce moment accelerația sa este nulă?

**12.** Două mobile $M_1$ şi $M_2$ se mişcă pe axa $OX$ plecând în acelaşi timp din punctul 0. Spațiul parcurs de cele două mobile în funcție de timpul $t$ sunt:

$S_1(t) = t^3 - 6t^2 + 20t; \qquad S_2(t) = 2t + 6t^2 - t^3.$

Să se determine viteza cu care au plecat şi vitezele pe care le vor avea cele două mobile când se vor întâlni din nou.

**13.** Latura unui hexagon regulat este de 20 cm şi ea creşte dintr-o anumită cauză cu 2,5 cm pe oră. Cu ce viteză creşte aria hexagonului?

**14.** O sferă metalică se dilată sub influenţa căldurii astfel încât raza ei creşte uniform cu 0,0009 cm/sec. Cu ce viteză creşte volumul acestei sfere dacă raza ei este de 3 cm?

## Derivate laterale

Exemplul de la paragraful precedent ne arată că este posibil ca funcţia

$$F : I \setminus \{x_0\} \to \mathbb{R},\ F(x) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

să nu aibă limită în punctul $x_0$, dar să aibă limite laterale în acest punct.

| | |
|---|---|
| **Definiţie** | i) Vom spune că funcţia $f : I \to \mathbb{R}$ este *derivabilă la stânga* în punctul $x_0$ dacă $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x < x_0}} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ există şi este finită. Această limită se numeşte *derivata la stânga* a funcţiei $f$ în $x_0$ şi se notează cu $f_s'(x_0)$.<br>ii) Vom spune că funcţia $f : I \to \mathbb{R}$ este *derivabilă la dreapta* în punctul $x_0$ dacă $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x > x_0}} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ există şi este finită. Această limită se numeşte *derivata la dreapta* a funcţiei $f$ în $x_0$ şi se notează cu $f_d'(x_0)$. |

**Observaţie:** Dacă limitele de mai sus sunt infinite, vom spune că funcţia $f$ are derivată la stânga $f_s'(x_0)$ (respectiv la dreapta $f_d'(x_0)$) în punctul $x_0$ şi vom scrie $f_s'(x_0) = \pm\infty$ (respectiv $f_d'(x_0) = \pm\infty$).

**Corolar 1.** *Fie $f : I \to \mathbb{R}$ şi $x_0$ un punct din interiorul lui I. Atunci f are derivată în $x_0$ dacă şi numai dacă există $f_s'(x_0)$ şi $f_d'(x_0)$ şi sunt egale.*

*Demonstrație*

Conform definiției, $f$ are derivata în $x_0$ dacă și numai dacă există $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$. Existența acestei limite este echivalentă cu existența limitelor laterale și egalitatea

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x < x_0}} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x > x_0}} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0},$$

sau echivalent, există $f_s'(x_0)$ și $f_d'(x_0)$ și avem $f_s'(x_0) = f_d'(x_0)$.

| | |
|---|---|
| **Definiție** | Fie $a$, $b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Pentru o funcție reală $f$ definită pe intervalul compact $[a, b]$, vom spune că:<br>i) $f$ are derivată în punctul $a$, dacă și numai dacă are derivată la dreapta în $a$ și vom nota $f'(a) = f_d'(a)$.<br>ii) $f$ are derivată în punctul $b$, dacă și numai dacă are derivată la stânga în $b$ și vom nota $f'(b) = f_s'(b)$. |

**Corolar 2.** i) *Derivata funcției în punctul a este egală cu derivata laterală la dreapta în punctul a.*

ii) *Derivata funcției în punctul b este egală cu derivata laterală la stânga în punctul b.*

iii) *Dacă f este derivabilă la stânga și la dreapta în $x_0$, atunci f este continuă în $x_0$.*

Dacă funcția $f$ este continuă într-un punct $x_0$ și $f_d'(x_0) = +\infty$ și $f_s'(x_0) = -\infty$ (sau invers), atunci punctul $x_0$ se numește *punct de întoarcere* al graficului lui $f$ (fig. 3, 4).

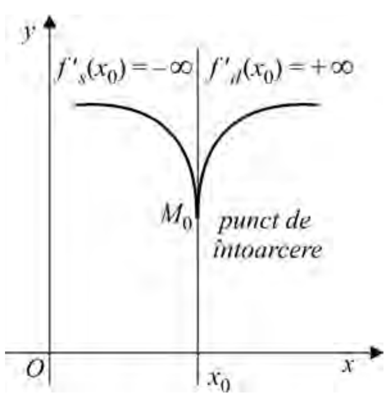



**Figura 3**

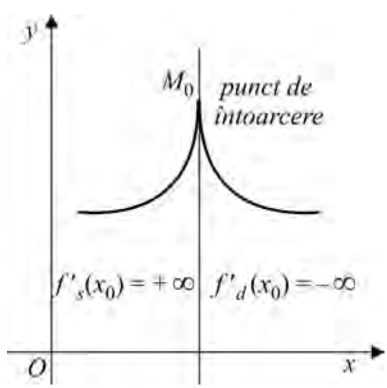



**Figura 4**

Dacă funcția $f$ este continuă într-un punct $x_0$ şi admite derivate laterale diferite în acest punct din care cel puțin una este finită, atunci $x_0$ se numeşte *punct unghiular* al graficului lui $f$ (fig. 5, 6).

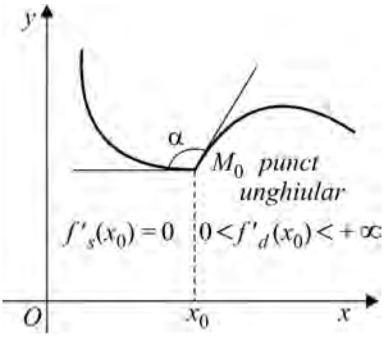



**Figura 5**

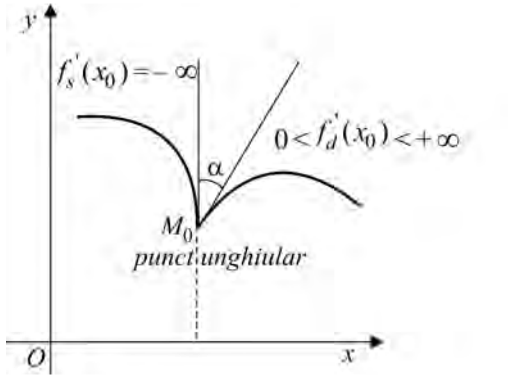



**Figura 6**

Într-un punct unghiular cele două semitangente formează un unghi de măsură $\alpha \in (0, \pi)$.

Propunem ca exercițiu, să se dea şi alte exemple de grafice de funcții care admit puncte unghiulare.

## Exerciții rezolvate

Să se studieze continuitatea şi derivabilitatea următoarelor funcții, în punctele specificate:

**1.** $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = |x|,\ x_0 = 0;$

**2.** $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = x|x|,\ x_0 = 0;$

**3.** $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = \begin{cases} e^x, & x \le 0 \\ 1-x, & x < 0 \end{cases},\ x_0 = 0;$

**4.** $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = |x^2 - x|,\ x_0 = 0,\ x_0 = 1;$

**5.** $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\dfrac{1}{x}, & x \ne 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases},\ x_0 = 0;$

**6.** $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\begin{cases} x,\ x\in\mathbb{Q} \\ -x, x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}\end{cases},\ x_0=0;$

**7.** $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\begin{cases} x,\ \ x\le 0 \\ \ln(x+1),\ x>0\end{cases}, x_0=0;$

**8.** $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\sqrt{|1-x^2|},\ x_0=-1,\ x_0=1.$

*Soluții:*

**1.** $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\begin{cases} -x,\ x\le 0 \\ x,\ x>0\end{cases}$

În punctul $x_0 = 0$ funcția este continuă.

Derivabilitatea în punctul $x_0 = 0$ se studiază cu ajutorul derivatelor laterale:

$$f_s'(0)=\lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}}\frac{-x}{x}=-1;$$

$$f_d'(0)=\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\frac{x}{x}=1;$$

Cum $f_s'(0)\ne f_d'(0)$, funcția nu este derivabilă în $x_0 = 0$.

**2.** $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\begin{cases} -x^2, x\le 0 \\ x^2,\ \ x>0\end{cases},\ x_0=0$

În punctul $x_0 = 0$ funcția este continuă;

$$f_s'(0)=\lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}}\frac{-x^2}{x}=\lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}}(-x)=0;$$

$$f_d'(0)=\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\frac{x^2}{x}=\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}}x=0;$$

Cum $f_s'(0)=f_d'(0)=0$, funcția este derivabilă în $x_0 = 0$ și $f'(0) = 0$.

**3.** În punctul $x_0 = 0$ funcția este continuă;

$$\left.\begin{aligned} f_s'(0)&=\lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}}\frac{e^x-1}{x}=1;\\ f_d'(0)&=\lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}}\frac{1-x-1}{x}=-1\end{aligned}\right\}\Rightarrow \text{ funcția nu este derivabilă în } x_0=0.$$

**4.** $f(x)=\begin{cases}-(x^2-x), & x^2-x\le 0\\ x^2-x, & x^2-x>0\end{cases}$

sau echivalent

$$f(x)=\begin{cases}x-x^2, & x\in[0,1]\\ x^2-x, & x\in(-\infty,0)\cup(1,+\infty)\end{cases},$$

adică

$$f(x)=\begin{cases}x^2-x, & x\in(-\infty,0)\\ x-x^2, & x\in[0,1]\\ x^2-x, & x\in(1,+\infty)\end{cases}.$$

i) $x_0 = 0$

Funcția este continuă în $x_0 = 0$.

$$f_s'(0)=\lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}}\frac{x^2-x}{x}=\lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}}\frac{x(x-1)}{x}=-1;$$

$$f_d'(0)=\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\frac{x-x^2}{x}=\lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}}\frac{x(1-x)}{x}=-1;$$

Cum $f_s'(0)\ne f_d'(0)$, funcția nu este derivabilă în $x_0 = 0$.

ii) $x_0 = 1$

Funcția este continuă în $x_0 = 1$.

$$f_s'(1)=\lim_{\substack{x\to 1\\ x<1}}\frac{x-x^2}{x}=\lim_{\substack{x\to 1\\ x<1}}\frac{x(1-x)}{x-1}=-1;$$

$$f_d'(1)=\lim_{\substack{x\to 1\\ x>1}}\frac{x^2-x}{x}=\lim_{\substack{x\to 1\\ x>1}}\frac{x(x-1)}{x}=1;$$

Cum $f_s'(1)\ne f_d'(1)$, funcția nu este derivabilă în $x_0 = 1$.

**5.** $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=\lim\limits_{x\to 0} x^2\sin\frac{1}{x}=0=f(0)$, deci funcția este continuă în punctul $x_0 = 0$.

$f'(0)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2\sin\frac{1}{x}-0}{x}=\lim\limits_{x\to 0} x\sin\frac{1}{x}=0$, deci funcția este derivabilă în punctul $x_0 = 0$

**6.** Funcția este continuă în punctul $x_0 = 0$.

Studiem derivabilitatea cu ajutorul șirurilor de numere raționale și respectiv iraționale.

Dacă $x_n \in \mathbb{Q}$, $x_n \to 0$, atunci

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(x_n) - f(0)}{x_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{x_n - 0}{x_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{x_n} = 1.$$

Dacă $x_n^{'} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, $x_n^{'} \to 0$, atunci

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(x_n^{'}) - f(0)}{x_n^{'}} = \lim \frac{-x_n^{'}}{x_n^{'}} = -1.$$

Deci funcția nu este derivabilă în punctul $x_0 = 0$.

**7.** Funcția este continuă în punctul $x_0 = 0$:

$$f_s^{'}(0) = \lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}} \frac{x-0}{x} = 1;$$

$$f_d^{'}(0) = \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{\ln(x+1)}{x} = 1.$$

Cum $f_s^{'}(0) = f_d^{'}(0) = 1$, funcția este derivabilă în $x_0 = 0$.

**8.** $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x^2-1}, & x \in (-\infty,-1) \cup (1,+\infty) \\ \sqrt{1-x^2}, & x \in [-1,1] \end{cases} \Leftrightarrow f(x) = \begin{cases} \sqrt{x^2-1}, & x \in (-\infty,-1) \\ \sqrt{1-x^2}, & x \in [-1, 1] \\ \sqrt{x^2-1}, & x \in (1,+\infty) \end{cases}$.

i) $x_0 = -1$.

Funcția este continuă în punctul $x_0 = -1$;

$$f_s^{'}(-1) = \lim_{\substack{x\to -1\\ x<-1}} \frac{\sqrt{x^2-1}}{x+1} = \lim_{\substack{x\to -1\\ x<-1}} \sqrt{\frac{x-1}{x+1}} = +\infty;$$

$$f_d^{'}(-1) = \lim_{\substack{x\to -1\\ x>-1}} \frac{\sqrt{1-x^2}}{x+1} = \lim_{\substack{x\to -1\\ x>-1}} \sqrt{\frac{1-x}{x+1}} = +\infty.$$

Funcția admite derivată în punctul $x_0 = -1$, dar nu este derivabilă în acest punct.

ii) Se procedează în mod analog ca în cazul precedent, pentru $x_0 = 1$ (exercițiu).

# Exerciţii propuse

Să se studieze continuitatea şi derivabilitatea funcţiilor următoare în punctele specificate.

**1.** $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\begin{cases} x^2, & x\le 0 \\ -x^3, & x>0 \end{cases},\ x_0=0;$

**2.** $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=x^2|x|,\ x_0=0;$

**3.** $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\begin{cases} e^x, & x\ge 0 \\ x+1, & x<0 \end{cases},\ x_0=0;$

**4.** $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\begin{cases} \sqrt{1+x^2}, & x\le 0 \\ 1, & x>0 \end{cases},\ x_0=0;$

**5.** $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\begin{cases} \ln(x^2+1), & x\ge 0 \\ 2x, & x<0 \end{cases},\ x_0=0;$

**6.** $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\max(x,x^3),\quad x_0=0,\ x_0=1,\ x_0=-1;$

**7.** $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\min(x,x^2),\quad x_0=0,\ x_0=1;$

**8.** $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\max\left(1,\dfrac{1}{x^2+1}\right),\ x_0=0;$

**9.** $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\begin{cases} x^2, & x\in\mathbb{Q} \\ 1, & x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q} \end{cases},\quad x_0=-1,\ x_0=0,\ x_0=1;$

**10.** $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\begin{cases} x^2\cos\dfrac{1}{x}, & x\ge 0 \\ x, & x\le 0 \end{cases},\ x_0=0;$

**11.** $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=|x^3-x|,\ x_0=0,\ x_0=1,\ x_0=-1.$

## Operații cu funcții care admit derivate

**Teorema 1.** *Fie $I \subset \mathbb{R}$ un interval, un punct $x_0 \in I$ şi $f, g : I \to \mathbb{R}$ două funcții derivabile în $x_0$. Atunci:*

*i) $f + g$ este derivabilă în $x_0$ şi*

$$(f + g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0);$$

*ii) Pentru orice $\lambda \in \mathbb{R}$, funcția $\lambda f$ este derivabilă în $x_0$ şi*

$$(\lambda f)'(x_0) = \lambda f'(x_0).$$

*iii) $fg$ este derivabilă în $x_0$ şi*

$$(fg)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0)$$

*iv) Dacă $g(x_0) \neq 0$, atunci $\frac{f}{g}$ este derivabilă în $x_0$ şi*

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)\cdot g(x_0) - f(x_0)\cdot g'(x_0)}{g^2(x_0)}$$

*Demonstrație*

i) Evident avem:

$$\frac{(f(x)+g(x))-(f(x_0)+g(x_0))}{x-x_0} = \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} + \frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}.$$

Trecând la limită ($x \to x_0$) obținem:

$$(f + g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0).$$

ii) Egalitatea

$$\frac{\lambda f(x)-\lambda f(x_0)}{x-x_0} = \lambda\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

implică $$(\lambda f)'(x_0) = \lambda f'(x_0).$$

iii) Putem scrie

$$\frac{f(x)g(x)-f(x_0)g(x_0)}{x-x_0} = \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}g(x) + f(x_0)\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}.$$

Trecând la limita cu $x \to x_0$, obținem rezultatul iii).

iv) Deoarece funcția $g$ este continuă şi $g(x_0) \neq 0$, există o vecinătate $V$ a lui $x_0$, astfel încât $g(x) \neq 0$ pe $V$. Notăm $h = \frac{f}{g}$.

Atunci

$$\frac{h(x)-h(x_0)}{x-x_0}=\frac{\frac{f(x)}{g(x)}-\frac{f(x_0)}{g(x_0)}}{x-x_0}=\frac{f(x)g(x_0)-f(x_0)g(x)}{(x-x_0)g(x)g(x_0)}=$$

$$=\frac{1}{g(x)g(x_0)}\left[\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}g(x_0)-f(x_0)\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}\right],$$

de unde rezultă formula iv).

În particular, dacă $g : I \to \mathbb{R}$ este derivabilă în $x_0$ şi $g(x_0) \neq 0$, atunci funcţia $\frac{1}{g}$ este derivabilă în $x_0$ şi

$$\left(\frac{1}{g}\right)'(x_0)=-\frac{g'(x_0)}{g^2(x_0)}.$$

**Observaţie:** Teorema 1 este adevărată şi pentru funcţii care admit derivate, cu excepţia cazurilor de nedeterminare.

**Corolar 1.** *Fie $I \subset \mathbb{R}$ un interval, un punct $x_0 \in I$, $k \geq 2$ un număr natural şi funcţiile $f_1, f_2, \dots, f_k : I \to \mathbb{R}$ derivabile în $x_0$. Atunci:*

i) *$f_1 + f_2 + \dots + f_k$ este derivabilă în $x_0$ şi*

$$(f_1 + f_2 + \dots + f_k)'(x_0) = f_1'(x_0) + f_2'(x_0) + \dots + f_k'(x_0).$$

ii) *$f_1 \cdot f_2 \cdot \dots \cdot f_k$ este derivabilă în $x_0$ şi*

$$(f_1 \cdot f_2 \cdot \dots \cdot f_k)'(x_0) = \sum_{i=1}^{k} f_1(x_0) \cdot \dots \cdot f_{i-1}(x_0) \cdot f_i'(x_0) \cdot f_{i+1}(x_0) \cdot \dots \cdot f_k(x_0).$$

**Corolar 2.** *Fie $I \subset \mathbb{R}$* un interval şi *$f, g : I \to \mathbb{R}$ două funcţii derivabile. Atun*ci:

i) *$f + g$ este derivabilă şi $(f + g)' = f' + g'$.*

ii) *pentru orice $\lambda \in \mathbb{R}$, funcţia $\lambda f$ este derivabilă şi $(\lambda f)' = \lambda f'$.*

iii) *$f g$ este derivabilă şi*

$$(f g)' = f' g + f g'.$$

iv) *dacă $g$ nu se anulează în nici un punct, atunci $\frac{f}{g}$ este derivabilă şi*

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f' g - f g'}{g^2}.$$

În continuare vom studia derivabilitatea funcţiilor compuse.

**Teorema 2.** *Fie $I$ şi $J$ două intervale şi funcţii $f : I \to J$ şi $g : J \to \mathbb{R}$. Dacă $x_0 \in I$, $f$ este derivabilă în $x_0$ şi $g$ este derivabilă în $f(x_0)$, atunci funcţia $\varphi = g \circ f : I \to \mathbb{R}$ este derivabilă în $x_0$ şi*

$$\varphi'(x_0) = g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0).$$

*Demonstraţie*

Fie $x_0 \in I$, $y_0 = f(x_0)$ şi funcţia $\alpha : J \to \mathbb{R}$, definită prin

$$\alpha(y) = \begin{cases} \dfrac{g(y) - g(y_0)}{y - y_0}, & y \neq y_0 \\ g'(y_0), & y = y_0 \end{cases}.$$

Deoarece $g$ este derivabilă, rezultă că $\alpha$ este continuă şi

$$g(y) - g(y_0) = \alpha(y)(y - y_0), \forall y \in J.$$

Deci, pentru orice $x \in I$, avem

$$g(f(x)) - g(f(x_0)) = \alpha(f(x))(f(x) - f(x_0)).$$

Prin urmare

$$\frac{\varphi(x) - \varphi(x_0)}{x - x_0} = \frac{g(f(x)) - g(f(x_0))}{x - x_0} = \alpha(f(x)) \cdot \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Întrucât funcţia $f$ este derivabilă, avem:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{\varphi(x) - \varphi(x_0)}{x - x_0} = \alpha(f(x_0)) \cdot f'(x_0) = g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0).$$

**Corolar.** *Fie $I$ şi $J$ două intervale şi funcţiile derivabile $f : I \to J$ şi $g : J \to \mathbb{R}$. Atunci funcţia $\varphi = g \circ f : I \to \mathbb{R}$ este derivabilă şi*

$$\varphi'(x) = g'(f(x)) \cdot f'(x), \forall x \in I.$$

Inversa unei funcţii bijective derivabile, cu derivata nenulă, este de asemenea o funcţie derivabilă.

**Teorema 3.** *Fie $I, J, \subset \mathbb{R}$ două intervale, $x_0$ un punct din interiorul lui $I$ şi $f : I \to J$ o funcţie continuă şi bijectivă. Dacă $f$ este derivabilă în $x_0$ şi $f'(x_0) \neq 0$, atunci funcţia $f^{-1} : J \to I$ este derivabilă în $f(x_0)$ şi avem:*

$$(f^{-1})'(f(x_0)) = \frac{1}{f'(x_0)}.$$

*Demonstrație*

Funcția $f$ este continuă şi bijectivă. Rezultă că funcția $f^{-1}$ este continuă. Notând $f(x) = y$ şi $f(x_0) = y_0$, avem

$$\frac{f^{-1}(y)-f^{-1}(y_0)}{y-y_0}=\frac{1}{\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}},\ \forall x\in I\setminus\{x_0\}.$$

Deci

$$\lim_{y\to y_0}\frac{f^{-1}(y)-f^{-1}(y_0)}{y-y_0}=\lim_{x\to x_0}\frac{1}{\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}}=\frac{1}{f'(x_0)},$$

adică $f^{-1}$ este derivabilă şi $(f^{-1})'(y_0) = \dfrac{1}{f'(x_0)}$.

| **Definiție** | Fie $f : I \to \mathbb{R}$ o funcție derivabilă şi $x_0 \in I$. Dacă funcția $f'$ este derivabilă în $x_0$ (respectiv are derivată în $x_0$), vom spune că $f$ este *de două ori derivabilă* în $x_0$ (respectiv are derivata de ordin 2 în $x_0$) şi vom nota $$f''(x_0) \stackrel{\text{def}}{=} (f')'(x_0).$$ Inductiv, putem defini $f^{(n)}(x_0) \stackrel{\text{def}}{=} (f^{(n-1)})'(x_0),\ \forall n \in \mathbb{N}^*$. |
|---|---|

## Calculul derivatelor de ordin I şi II ale funcțiilor elementare studiate

Am văzut că funcțiile elementare sunt continue. Vom arăta că sunt şi derivabile şi vom calcula derivatele lor.

**1.** Fie $c$ un număr real şi $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = c$.

Atunci, pentru orice $x, x_0 \in \mathbb{R}$, cu $x \neq x_0$, avem

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\frac{c-c}{x-x_0}=0,$$

deci $f$ este derivabilă şi $f'(x) = 0$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$, adică $c' = 0$.

**2.** Fie $n$ un număr natural şi $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^n$.

Avem

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\frac{x^n-x_0^n}{x-x_0}=\frac{(x-x_0)(x^{n-1}+x^{n-2}x_0+\ldots+x_0^{n-1})}{x-x_0}=$$

$$=x^{n-1}+x^{n-2}x_0+\ldots+x_0^{n-1}.$$

Trecând la limită ($x \to x_0$) rezultă că $f$ este derivabilă şi $f'(x_0) = n x_0^{n-1}$.

Deci $(x^n)' = nx^{n-1}$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$.

**3.** Fie $f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{x}$.

Avem

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \frac{\sqrt{x}-\sqrt{x_0}}{x-x_0} = \frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{x_0}}.$$

Trecând la limită ($x \to x_0$), cu $x_0 \neq 0$, obținem $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x_0}}$.

Deci $(\sqrt{x})' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$, pentru orice $x > 0$.

Observăm că $f$ nu este derivabilă în 0, dar are derivată în 0 egală cu $+\infty$.

**4.** Fie $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \ln x$.

Avem

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \frac{\ln x - \ln x_0}{x-x_0} = \frac{1}{x-x_0}\ln\frac{x}{x_0} = \frac{1}{x_0}\ln\left(1+\frac{x-x_0}{x_0}\right)^{\frac{x_0}{x-x_0}}.$$

Trecând la limită ($x \to x_0$), obținem $f'(x_0) = \dfrac{1}{x_0}$.

Deci $(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$, pentru orice $x > 0$.

**5.** Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sin x$. Atunci

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \frac{\sin x - \sin x_0}{x-x_0} = 2\frac{\sin\frac{x-x_0}{2}\cos\frac{x+x_0}{2}}{x-x_0} =$$

$$= \frac{\sin\frac{x-x_0}{2}}{\frac{x-x_0}{2}}\cdot\cos\frac{x+x_0}{2}.$$

Trecând la limită ($x \to x_0$), obținem că $f$ este derivabilă şi $f'(x_0) = \cos x_0$.

Am obținut $(\sin x)' = \cos x$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$.

De asemenea, avem

$$(\cos x)' = [\sin(\tfrac{\pi}{2} - x)]' = -\cos(\tfrac{\pi}{2} - x) = -\sin x,$$

pentru orice $x \in \mathbb{R}$.

**6.** Fie $f : \mathbb{R} \setminus \{k\pi + \frac{\pi}{2} \mid k \in \mathbb{Z}\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \text{tg}\, x$.

Atunci $f$ este derivabilă şi avem

$$(\text{tg}\, x)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{(\sin x)'\cos x - \sin x(\cos x)'}{\cos^2 x} =$$

$$= \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x},$$

pentru orice $x \in \mathbb{R} \setminus \{ k\pi + \frac{\pi}{2} \mid k \in \mathbb{Z}\}$.

Analog $(\text{ctg}\, x)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$, pentru orice $x \in \mathbb{R} \setminus \{ k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \}$.

**7.** Fie $f : \mathbb{R} \to (0, \infty)$, $f(x) = e^x$.

Se ştie că $f$ este bijectivă şi $f^{-1} : (0, \infty) \to \mathbb{R}$, $f^{-1}(y) = \ln y$. Notăm $y = e^x$ şi aplicăm teorema 3:

$$(e^x)' = \frac{1}{(\ln y)'} = y = e^x,$$

pentru orice $x \in \mathbb{R}$.

Mai general, pentru orice $a > 0$, $a \neq 1$, avem

$$(a^x)' = (e^{\ln a^x})' = (e^{x \ln a})' = (\ln a)e^{x \ln a} = a^x \ln a,$$

pentru orice $x \in \mathbb{R}$.

**8.** Fie $\alpha$ un număr real şi $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^\alpha$.

Putem scrie

$$f(x) = x^\alpha = e^{\ln x^\alpha} = e^{\alpha \ln x}.$$

Atunci

$$f'(x) = (e^{\alpha \ln x})' = e^{\alpha \ln x}(\alpha \ln x)' = e^{\ln a^x} \alpha \frac{1}{x} = \alpha x^{\alpha - 1}.$$

Dacă $\alpha > 1$, atunci $f$ este derivabilă şi în 0 şi $f\,'(0) = 0$.

Dacă $0 < \alpha < 1$, atunci $f$ are derivată în 0 şi $f\,'(0) = +\infty$.

Cazul $\alpha = 1$ este banal. Avem $f(x) = x$ şi $f\,'(x) = 1$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$.

**9.** Dacă funcţiile $f, g : I \to \mathbb{R}$ sunt derivabile pe un interval $I$ şi $f(x) > 0$, pentru orice $x \in I$, atunci funcţia $f^g$ este derivabilă pe $I$ şi avem

$$(f^g)' = g \cdot f^{g-1} \cdot f' + f^g \cdot \ln f \cdot g'.$$

Într-adevăr

$$(f^g)' = (e^{\ln f^g})' = (e^{g\ln f})' = e^{g\ln f}(g\ln f)' = e^{g\ln f}(g'\ln f + g\frac{f'}{f}) =$$

$$= f^g(g'\ln f + g\frac{f'}{f}) = f^g\ln f \cdot g' + g f^{g-1} f'.$$

**10.** Funcția $f : [-1, 1] \to \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, $f(x) = \arcsin x$, este derivabilă pe $(-1,1)$.

Inversa sa este funcția $f^{-1}(y) = \sin y$. Notând $f(x) = y$, avem

$$f'(x) = \frac{1}{\left(f^{-1}\right)'(y)} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

În plus, avem $f'(-1) = f'(1) = +\infty$.
Analog se demonstrează că

$$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \ \forall x \in (-1, 1),$$

**11.** Funcția $f : \mathbb{R} \to \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, $f(x) = \operatorname{arctg} x$, este derivabilă pe R.

Inversa este funcția $f^{-1}(y) = \operatorname{tg} y$, $y \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$. Notând $f(x) = y$, avem:

$$f'(x) = \frac{1}{(f^{-1})'(y)} = \frac{1}{\frac{1}{\cos^2 y}} = \frac{1}{1+\operatorname{tg}^2 y} = \frac{1}{1+x^2},$$

deci $(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$.

Cu ajutorul formulelor stabilite mai sus, putem rezuma într-un tabel derivatele de ordin I şi II ale funcțiilor elementare studiate.

| **Funcția** | **Domeniul de derivabilitate** | **Derivata I** | **Derivata a II-a** |
|---|---|---|---|
| $c$, $c \in \mathbb{R}$ | $\mathbb{R}$ | 0 | 0 |
| $x$ | $\mathbb{R}$ | 1 | 0 |
| $x^n$, $n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$ | $\mathbb{R}$ | $nx^{n-1}$ | $n(n-1)x^{n-2}$ |
| $x^\alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$ | $(0, +\infty)$ | $\alpha x^{\alpha-1}$ | $\alpha(\alpha-1)x^{\alpha-2}$ |
| $\frac{1}{x}$ | $\mathbb{R}^*$ | $-\frac{1}{x^2}$ | $\frac{2}{x^3}$ |

| | | | |
|---|---|---|---|
| $\sqrt{x}$ | $(0, +\infty)$ | $\frac{1}{2\sqrt{x}}$ | $-\frac{1}{4\sqrt{x^3}}$ |
| $\sqrt[n]{x}, n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$ | $(0, \infty)$ – $n$ par<br>$\mathbb{R} \setminus \{0\}$ – $n$ impar | $\frac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}$ | $\frac{1-n}{n\sqrt[n]{x^{2n-1}}}$ |
| $e^x$ | $\mathbb{R}$ | $e^x$ | $e^x$ |
| $a^x, a > 0, a \neq 1$ | $\mathbb{R}$ | $a^x \ln a$ | $a^x \ln^2 a$ |
| $\ln x$ | $(0, +\infty)$ | $\frac{1}{x}$ | $-\frac{1}{x^2}$ |
| $\log_a x, a > 0, a \neq 1$ | $(0, +\infty)$ | $\frac{1}{x \ln a}$ | $-\frac{1}{x^2 \ln a}$ |
| $\sin x$ | $\mathbb{R}$ | $\cos x$ | $-\sin x$ |
| $\cos x$ | $\mathbb{R}$ | $-\sin x$ | $-\cos x$ |
| $\operatorname{tg} x$ | $\mathbb{R} \setminus \{k\pi + \frac{\pi}{2} \mid k \in \mathbb{Z}\}$ | $\frac{1}{\cos^2 x}$ | $2\frac{\sin x}{\cos^3 x}$ |
| $\operatorname{ctg} x$ | $\mathbb{R} \setminus \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$ | $-\frac{1}{\sin^2 x}$ | $2\frac{\cos x}{\sin^3 x}$ |
| $\arcsin x$ | $(-1, 1)$ | $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ | $\frac{x}{\left(1-x^2\right)^{\frac{3}{2}}}$ |
| $\arccos x$ | $(-1, 1)$ | $-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ | $-\frac{x}{\left(1-x^2\right)^{\frac{3}{2}}}$ |
| $\operatorname{arctg} x$ | $\mathbb{R}$ | $\frac{1}{1+x^2}$ | $-\frac{2x}{\left(1+x^2\right)^2}$ |
| $\operatorname{arcctg} x$ | $\mathbb{R}$ | $-\frac{1}{1+x^2}$ | $\frac{2x}{\left(1+x^2\right)^2}$ |

De asemenea, utilizând teorema 2 de derivare a funcțiilor compuse din tabelul de mai sus, obținem următorul tabel cu derivatele funcțiilor compuse.

| **Funcția** | **Derivata** | **Condiții** |
|---|---|---|
| $u$ | $u'$ | |
| $u^n,\ n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$ | $nu^{n-1}u'$ | |
| $u^\alpha,\ \alpha \in \mathbb{R}$ | $\alpha u^{\alpha-1}u'$ | $u > 0$ |
| $\frac{1}{u}$ | $-\frac{1}{u^2}u'$ | $u \neq 0$ |
| $\sqrt{u}$ | $\frac{1}{2\sqrt{u}}u'$ | $u > 0$ |
| $\sqrt[n]{u},\ n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$ | $\frac{u'}{n\sqrt[n]{u^{n-1}}}$ | $u > 0$ |
| $e^u$ | $e^u u'$ | |
| $a^u,\ a > 0,\ a \neq 1$ | $a^u \cdot u' \cdot \ln a$ | |
| $\ln u$ | $\frac{1}{u}u'$ | $u > 0$ |
| $\log_a u,\ a > 0,\ a \neq 1$ | $\frac{u'}{u \ln a}$ | $u > 0$ |
| $\sin u$ | $\cos u \cdot u'$ | |
| $\cos u$ | $-\sin u \cdot u'$ | |
| $\operatorname{tg} u$ | $\frac{1}{\cos^2 u}u'$ | $\cos u \neq 0$ |
| $\operatorname{ctg} u$ | $-\frac{1}{\sin^2 u}u'$ | $\sin u \neq 0$ |
| $\arcsin u$ | $\frac{1}{\sqrt{1-u^2}}u'$ | $u^2 < 1$ |
| $\arccos u$ | $-\frac{1}{\sqrt{1-u^2}}u'$ | $u^2 < 1$ |
| $\operatorname{arctg} u$ | $\frac{1}{1+u^2}u'$ | |
| $\operatorname{arcctg} u$ | $-\frac{1}{1+u^2}u'$ | |

## Exerciții rezolvate

Aplicând operații cu funcții derivabile, să se calculeze derivatele următoarelor funcții, determinând şi domeniul de derivabilitate:

**I. 1.** $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = \dfrac{x^4}{4} + \dfrac{x^3}{3} - \dfrac{x^2}{2} - x + 1;$

**2.** $f : \mathbb{R} \setminus \{-1\} \to \mathbb{R},\ f(x) = \dfrac{x}{x+1};$

**3.** $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = \dfrac{x}{x^2+1};$

**4.** $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = \dfrac{x^2+2}{x^2+1};$

**5.** $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = \dfrac{x^2-x+1}{x^2+x+1};$

**6.** $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R},\ f(x) = \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x^2} + \dfrac{1}{x^3}.$

**II. 1.** $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = \sqrt[5]{x^3}\ ;$

**2.** $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R},\ f(x) = \sqrt{1+2x}\ ;$

**3.** $f : [0, +\infty) \to \mathbb{R},\ f(x) = x^3\sqrt{x} + x - 2\sqrt{x}\ ;$

**4.** $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = \sqrt{1+x^2} - x\ ;$

**5.** $f : (-1, 1) \to \mathbb{R},\ f(x) = x\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}\ ;$

**6.** $f : (1, 1) \to \mathbb{R},\ f(x) = \sqrt{1-x^2}\ ;$

**7.** $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = x + \sqrt{1+x^2}\ ;$

**8.** $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}\ ;$

**9.** $f : [1, +\infty) \to \mathbb{R},\ f(x) = \dfrac{1}{x + \sqrt{x^2 - x}}\ ;$

**10.** $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = \sqrt[3]{x^2+1}\ .$

**III.** **1.** $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = (x+1)\,e^x$;

**2.** $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = \dfrac{x}{e^x}$;

**3.** $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = e^{-x^2+x+1}$;

**4.** $f: (0, +\infty) \to \mathbb{R},\ f(x) = \dfrac{\ln x}{x}$;

**5.** $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$;

**6.** $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = \dfrac{e^x - 1}{e^x + 1}$;

**7.** $f: (-1, 1) \to \mathbb{R},\ f(x) = \ln \dfrac{1-x^2}{1+x^2}$;

**8.** $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = \dfrac{xe^x - 1}{xe^x + 1}$;

**9.** $f: (0, +\infty) \to \mathbb{R},\ f(x) = \dfrac{\ln x}{\sqrt{x}}$;

**10.** $f: \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R},\ f(x) = xe^{\frac{1}{x}}$.

**IV.** **1.** $f: (0, \frac{\pi}{2}) \to \mathbb{R},\ f(x) = \dfrac{1}{\sin x}$;

**2.** $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = \sin x + \sin 3x$;

**3.** $f: [0, \frac{\pi}{2}) \to \mathbb{R},\ f(x) = \dfrac{1}{\cos x}$;

**4.** $f: (0, \frac{\pi}{2}) \to \mathbb{R},\ f(x) = \operatorname{tg} x - \operatorname{ctg} x$;

**5.** $f: (0, +\infty) \to \mathbb{R},\ f(x) = \sin(\ln x)$;

**6.** $f: (0, +\infty) \to \mathbb{R},\ f(x) = \cos\sqrt{x} + \sin(\ln x)$;

**7.** a) $f(x) = \cos(\cos x)$; b) $f(x) = \sin(\sin x)$;

c) $f(x) = \sqrt{\sin x}$; d) $f(x) = \sqrt{\cos x}$.

**8.** $f(x) = \cos x \cdot \arccos(2x^2 - 1)$;

**9.** $f(x) = \operatorname{tg} x + \operatorname{tg}^3 x + \dfrac{3}{5}\operatorname{tg}^5 x + \dfrac{1}{2}\operatorname{tg}^7 x$;

**10.** $f(x) = \dfrac{\sin x - 2\cos x}{\cos x + x\sin x}$;

**11.** $f(x) = \sin^3 x + \cos^3 x$;

**12.** $f(x) = \arcsin\dfrac{1}{x} - \arccos\dfrac{1}{x}$;

**13.** a) $f(x) = \arcsin(\sin x)$; b) $f(x) = \arccos(\cos x)$;

**14.** $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 \sin\dfrac{1}{x} + 2x\cos x - 2\sin x$;

**15.** $f : \mathbb{R} \setminus (-1, 1) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \operatorname{arctg}\dfrac{x}{\sqrt{x^2-1}}$.

*Soluții:*

Vom nota cu $D_d$ mulțimea pe care funcția este derivabilă ($D_d$ se mai numeşte domeniu de derivabilitate).

**I.1.** $f'(x) = \dfrac{4x^3}{4} + \dfrac{3x^2}{3} - \dfrac{2x}{2} + 1 = x^3 + x^2 - x + 1$;

$D_d = \mathbb{R}$.

**2.** $f'(x) = \left(\dfrac{x}{x+1}\right)' = \dfrac{x'(x+1) - x(x+1)'}{(x+1)^2} = \dfrac{x+1-x}{(x+1)'} = \dfrac{1}{(x+1)^2}$;

$D_d = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$.

**3.** $f'(x) = \left(\dfrac{x}{x^2+1}\right)^2 = \dfrac{x'(x^2+1) - x(x^2+1)'}{(x^2+1)^2} = \dfrac{x^2+1-2x^2}{(x^2+1)^2} = \dfrac{1-x^2}{(1+x^2)^2}$;

$D_d = \mathbb{R}$.

**4.** $f'(x) = \left(1 + \dfrac{1}{x^2+1}\right)' = \left(\dfrac{1}{x^2+1}\right)' = \dfrac{-2x}{(x^2+1)^2}$;

$D_d = \mathbb{R}$.

**5.** $f'(x) = \left(\dfrac{x^2-x+1}{x^2+x+1}\right)' = \left(1 - \dfrac{2x}{x^2+x+1}\right)' =$

$$= -2\left[\frac{x^2+x+1-x(2x+1)}{(x^2+x+1)^2}\right] =$$

$$= \frac{x^2+x+1-2x^2-x}{(x^2+x+1)^2} = \frac{1-x^2}{(x^2+x+1)^2};$$

$D_d = \mathbb{R}$.

**6.** $f'(x) = -\frac{1}{x^2} - \frac{2x}{x^4} - \frac{3x^2}{x^6} = -\frac{1}{x^2} - \frac{2}{x^3} - \frac{3}{x^4} = -\frac{x^2+2x+3}{x^4}$;

$D_d = \mathbb{R}^*$.

**II. 1.** $f'(x) = \left(x^{\frac{3}{5}}\right)' = \frac{3}{5}x^{\frac{3}{5}-1} = \frac{3}{5}x^{\frac{-2}{5}} = \frac{3}{5}\frac{1}{\sqrt[5]{x^2}}$;

$D_d = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

**2.** $f'(x) = \left(\sqrt{1+2x}\right)' = \frac{(1+2x)'}{2\sqrt{1+2x}} = \frac{1}{\sqrt{1+2x}}$;

$D_d = (-\frac{1}{2}, +\infty)$.

**3.** $f'(x) = \left(x^3x^{\frac{1}{2}} + x - 2x^{\frac{1}{2}}\right)' = \left(x^{\frac{7}{2}} + x - 2x^{\frac{1}{2}}\right)' =$

$= \frac{7}{2}x^{\frac{7}{2}-1} + 1 - 2\cdot\frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}-1} = \frac{7}{2}x^{\frac{5}{2}} + 1 - \frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{7}{2}x^2\sqrt{x} + 1 - \frac{1}{\sqrt{x}}$;

$D_d = (0, +\infty)$.

**4.** $f'(x) = \left(\sqrt{1+x^2} - x\right) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} - 1 = \frac{x - \sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1+x^2}} =$

$= \frac{x^2 - 1 - x^2}{(x+\sqrt{1+x^2})\sqrt{1+x^2}} = -\frac{1}{\sqrt{1+x^2}\cdot\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)}$;

$D_d = \mathbb{R}$.

**5.** $f'(x) = \left(x\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\right)' = x'\sqrt{\frac{1-x}{1+x}} + x\left(\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\right)' =$

$= \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} + x\frac{\left(\frac{1-x}{1+x}\right)'}{2\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}} = \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} - \frac{x\sqrt{1-x}}{(1+x)^2\sqrt{1+x}} = \frac{1-x^2-x}{(1+x)\sqrt{1-x}}$;

$D_d = (-1, 1)$.

**6.** $f'(x)=\dfrac{(1-x^2)'}{2\sqrt{1-x^2}}=\dfrac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}}=\dfrac{-x}{\sqrt{1-x^2}};$

$D_d=(-1,1).$

**7.** $f'(x)=\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)'=1+\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}=\dfrac{x+\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1+x^2}};$

$D_d=\mathbb{R}.$

**8.** $f'(x)=\left(\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right)'=\dfrac{\sqrt{x^2+1}-\dfrac{x^2}{\sqrt{x^2+1}}}{x^2+1}=\dfrac{x^2+1-x^2}{(x^2+1)\sqrt{1+x^2}}=$

$=\dfrac{1}{(x^2+1)\sqrt{1+x^2}};$

$D_d=\mathbb{R}.$

**9.** $f'(x)=\left(\dfrac{1}{x+\sqrt{x^2-x}}\right)'=-\dfrac{1+\dfrac{2x-1}{2\sqrt{x^2-x}}}{\left(x+\sqrt{x^2-x}\right)^2}=$

$=-\dfrac{2x+2\sqrt{x^2-x}-1}{(x+\sqrt{x^2-x})^2\cdot 2\sqrt{x^2-x}}=-\dfrac{1}{2x\sqrt{x^2-x}};$

$D_d=(-\infty,0)\cup(1,\infty).$

**10.** $f'(x)=\left(\sqrt[3]{x^2+1}\right)'=\left[\left(x^2+1\right)^{\frac{1}{3}}\right]'=\dfrac{1}{3}(x^2+1)^{\frac{1}{3}-1}\cdot(x^2+1)'=$

$=\dfrac{1}{3}(x^2+1)^{\frac{-2}{3}}2x=\dfrac{2}{3}x\dfrac{1}{\sqrt[3]{(x^2+1)^2}};$

$D_d=\mathbb{R}.$

**III. 1.** $f'(x)=\left[(x+1)e^x\right]'=(x+1)e^x+e^x=(x+2)e^x;$

$D_d=\mathbb{R}.$

**2.** $f'(x)=\left(\dfrac{x}{e^x}\right)'=\dfrac{x'e^x-xe^x}{e^{2x}}=\dfrac{e^x(1-x)}{e^{2x}}=\dfrac{1-x}{e^x};$

$Dd=\mathbb{R}.$

**3.** $f'(x)=\left(e^{-x^2+x+1}\right)'=e^{-x^2+x+1}\cdot(-2x+1);$

$D_d=\mathbb{R}.$

**4.** $f'(x)=\dfrac{(\ln x)'\cdot x-\ln x\cdot x'}{x^2}=\dfrac{\frac{1}{x}x-\ln x}{x^2}=\dfrac{1-\ln x}{x^2};$

$D_d=(0,+\infty).$

**5.** $f'(x)=\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)'=\dfrac{\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)'}{x+\sqrt{x^2+1}}=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}};$

$D_d=\mathbb{R}.$

**6.** $f'(x)=\left(\dfrac{e^x-1}{e^x+1}\right)'=\dfrac{e^x(e^x+1)-(e^x-1)e^x}{(e^x+1)^2}=$

$=\dfrac{e^{2x}+e^x-e^{2x}+e^x}{(e^x+1)^2}=\dfrac{2e^x}{(1+e^x)^2};$

$D_d=\mathbb{R}.$

**7.** $f'(x)=\left(\ln(1-x^2)-\ln(1+x^2)\right)'\Rightarrow f'(x)=\dfrac{-2x}{1-x^2}-\dfrac{2x}{1+x^2}=$

$=-2x\left(\dfrac{1}{1-x^2}+\dfrac{1}{1+x^2}\right)=-2x\dfrac{2}{1-x^4}=-\dfrac{4x}{1-x^4};$

$D_d=(-1,\ 1).$

**8.** $f'(x)=\left(\dfrac{xe^x-1}{xe^x+1}\right)'=\dfrac{(xe^x-1)'(xe^x+1)-(xe^x-1)(xe^x+1)'}{(xe^x+1)^2}=$

$=\dfrac{e^x(x+1)(xe^x+1)-(xe^x-1)e^x(x+1)}{(xe^x+1)^2}=$

$=\dfrac{e^x(x+1)(xe^x+1-xe^x+1)}{(xe^x+1)^2}=\dfrac{2(x+1)e^x}{(xe^x+1)^2};$

$D_d=\mathbb{R}$.

**9.** $f'(x)=\left(\dfrac{\ln x}{\sqrt{x}}\right)'=\dfrac{\frac{1}{x}\cdot\sqrt{x}-\ln x\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}}{x}=\dfrac{\frac{1}{\sqrt{x}}-\frac{\ln x}{2\sqrt{x}}}{x}=\dfrac{2-\ln x}{2x\sqrt{x}};$

$D_d=(0,+\infty)$.

**10.** $f'(x)=\left(xe^{\frac{1}{x}}\right)'=e^{\frac{1}{x}}+xe^{\frac{1}{x}}\left(-\dfrac{1}{x^2}\right)=e^{\frac{1}{x}}\left(1-\dfrac{1}{x}\right)=\dfrac{x-1}{x}e^{\frac{1}{x}};$

$D_d=\mathbb{R}\setminus\{0\}$.

**IV. 1.** $f'(x)=-\dfrac{(\sin x)'}{\sin^2 x}=-\dfrac{\cos x}{\sin^2 x};$

$D_d=(0,\dfrac{\pi}{2})$.

**2.** $f'(x)=(\sin x+\sin 3x)'=(\sin x)'+(\sin 3x)'=\cos x+\cos 3x\cdot 3=$
$=\cos x+3(4\cos^3 x-3\cos x)=\cos x+12\cos^3 x-9\cos x=$
$=12\cos^3 x-8\cos x=4\cos x(3\cos^2 x-2);$

$D_d=\mathbb{R}$.

**3.** $f'(x)=\left(\dfrac{1}{\cos x}\right)'=-\dfrac{(\cos x)'}{\cos^2 x}=\dfrac{\sin x}{\cos^2 x};$

$D_d=[0,\dfrac{\pi}{2})$.

**4.** $f'(x)=(\operatorname{tg} x-\operatorname{ctg} x)'=(\operatorname{tg} x)'-(\operatorname{ctg} x)'=$

$=\dfrac{1}{\cos^2 x}+\dfrac{1}{\sin^2 x}=\dfrac{1}{\sin^2 x\cos^2 x}=\dfrac{4}{\sin^2 2x};$

$D_d=(0,\dfrac{\pi}{2})$.

**5.** $f'(x)=[\sin(\ln x)]'=\cos(\ln x)(\ln x)'=\frac{1}{x}\cos(\ln x);$

$D_d=(0,+\infty)$

**6.** $f'(x)=\left[\cos\sqrt{x}+\sin(\ln x)\right]'=-\sin\sqrt{x}\left(\sqrt{x}\right)'+\cos(\ln x)(\ln x)'=$

$$=-\frac{\sin x}{2\sqrt{x}}+\frac{1}{x}\cos(\ln x)=\frac{-\sqrt{x}\sin\sqrt{x}+2\cos(\ln x)}{2x};$$

$D_d=(0,+\infty)$

**7.** a) $f'(x)=-\sin(\cos x)(-\sin x)=\sin(\cos x)\sin x;$

b) $f'(x)=[\sin(\sin x)]'=\cos(\sin x)(\sin x)'=\cos(\sin x)\cos x;$

c) $\left(\sqrt{\sin x}\right)'=\frac{\cos x}{2\sqrt{\sin x}};$ d) $\left(\sqrt{\cos x}\right)'=-\frac{\sin x}{2\sqrt{\cos x}}.$

**8.** $f'(x)=\frac{(2x^2-1)'}{\sqrt{1-(2x^2-1)^2}}=-\frac{4x}{\sqrt{1-4x^4+4x^2-1}}=$

$$=-\frac{4x}{\sqrt{4x^2(1-x^2)}}=-\frac{4x}{2|x|\sqrt{1-x^2}}=\begin{cases}\frac{2}{\sqrt{1-x^2}}, & x<0\\ -\frac{2}{\sqrt{1-x^2}}, & x>0\end{cases};$$

b) $D_d=(-1,1)\setminus\{0\}$.

**9.** $f'(x)=(\operatorname{tg}x+\operatorname{tg}^3x+\frac{3}{5}\operatorname{tg}^5x+\frac{1}{7}\operatorname{tg}^7x)'=$

$$=\frac{1}{\cos^2 x}+3\operatorname{tg}^2x\frac{1}{\cos^2 x}+\frac{3}{5}\cdot 5\operatorname{tg}^4x\frac{1}{\cos^2 x}+7\frac{1}{7}\operatorname{tg}^6x\frac{1}{\cos^2 x}=$$

$$=\frac{1}{\cos^2 x}(1+3\operatorname{tg}^2x+3\operatorname{tg}^4x+\operatorname{tg}^6x)=$$

$$=\frac{1}{\cos^2 x}\left[3\operatorname{tg}^2x(1+\operatorname{tg}^2x)+(1+\operatorname{tg}^2x)(1-\operatorname{tg}^2x+\operatorname{tg}^4x)\right]=$$

$$=\frac{1}{\cos^2 x}(1+\operatorname{tg}^2x)^3=\frac{1}{\cos^2 x}\frac{1}{\cos^6 x}=\frac{1}{\cos^8 x};$$

$D_d=\mathbb{R}\setminus\{(2k+1)\frac{\pi}{2}\mid k\in\mathbb{Z}.\}.$

**10.** $f'(x)=\left(\dfrac{\sin x - x\cos x}{\cos x + x\sin x}\right)' =$

$$=\frac{(\sin x - x\cos x)'(\cos x + x\sin x)-(\sin x - x\cos x)(\cos x + x\sin x)'}{(\cos x + x\sin x)^2}=$$

$$=\frac{x\sin x(\cos x + x\sin x)-x\cos x(\sin x - x\cos x)}{(\cos x + x\sin x)^2}=$$

$$=\frac{x\sin x\cos x + x^2\sin^2 x - x\sin x\cos x + x^2\cos^2 x}{(\cos x + x\sin x)^2}=\frac{x^2}{(\cos x + x\sin x)^2}.$$

**11.** $f'(x)=(\sin^3 x+\cos^3 x)'=3\sin^2 x(\sin x)'+3\cos^2 x(\cos x)'=$

$$=3\sin^2 x\cos x+3\cos^2 x(-\sin x)=3\sin x\cos x(\sin x-\cos x);$$

b) $D_d=\mathbb{R}$.

**12.** $f'(x)=\left(\arcsin\dfrac{1}{x}-\arccos\dfrac{1}{x}\right)'=\left(\dfrac{\pi}{2}-2\arccos\dfrac{1}{x}\right)'=$

$$=2\frac{1}{\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}}\left(-\frac{1}{x^2}\right)=\frac{2|x|}{\sqrt{x^2-1}}\left(-\frac{1}{x^2}\right)=$$

$$=-\frac{2|x|}{x^2}\cdot\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}=\begin{cases}-\dfrac{2}{x\sqrt{x^2-1}}, & x\in(1,+\infty)\\[2ex] \dfrac{2}{x\sqrt{x^2-1}}, & x\in(-\infty,-1)\end{cases}.$$

**13.** a) $f'(x)=[\arcsin(\sin x)]'=\dfrac{(\sin x)'}{\sqrt{1-\sin^2 x}}=\dfrac{\cos x}{\sqrt{1-\sin^2 x}}=$

$$=\frac{\cos x}{|\cos x|}=\begin{cases}1, & \cos x>0\\ -1, & \cos x<0\end{cases}=\begin{cases}1, & x\in\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right)\cup\left(\dfrac{3\pi}{2},2\pi\right]\\[2ex] -1, & x\in\left(\dfrac{\pi}{2},\pi\right]\cup\left[\pi,\dfrac{3\pi}{2}\right)\end{cases};$$

$D_d$ : $[0, 2\pi]\setminus\left\{\dfrac{\pi}{2},\dfrac{3\pi}{2}\right\}$.

b) $f'(x)=[\arccos(\cos x)]'=\frac{(\cos x)'}{\sqrt{1-\cos^2 x}}=\frac{\sin x}{\sqrt{1-\cos^2 x}}=\frac{\sin x}{|\sin x|}=$

$$=\begin{cases}1, & x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)\cup\left(\frac{\pi}{2},2\pi\right)\\ -1, & x\in\left(\pi,\frac{3\pi}{2}\right)\cup\left(\frac{3\pi}{2},2\pi\right)\end{cases};$$

$D_d=(0,2\pi)\setminus\{\pi\}$.

**14.** $f'(x)=\left(x^2\sin\frac{1}{x}+2x\cos x-2\sin x\right)'=$

$$=2x\sin\frac{1}{x}+x^2\cos\frac{1}{x}\left(-\frac{1}{x^2}\right)+2(\cos x-x\sin x)-2\cos x=$$

$$=2x\sin\frac{1}{x}-\cos\frac{1}{x}+2\cos x-2x\sin x-2\cos x=$$

$$=2x\sin\frac{1}{x}-\cos\frac{1}{x}-2x\sin x;$$

$D_d=\mathbb{R}\setminus\{0\}$.

**15.** $f'(x)=\left(\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}\right)'=\frac{\left(\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}\right)'}{1+\left(\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}\right)^2}=$

$$=\frac{\frac{\sqrt{x^2-1}-\frac{x^2}{\sqrt{x^2-1}}}{x^2-1}}{1+\frac{x^2}{x^2-1}}=\frac{x^2-1-x^2}{(x^2-1)\sqrt{x^2-1}}\cdot\frac{x^2-1}{2x^2-1}=$$

$$=-\frac{1}{\sqrt{x^2-1}(2x^2-1)};$$

$D_d=(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$.

## Exerciții propuse

**I.** Să se calculeze derivatele următoarelor funcții:

**1.** $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = \frac{3}{4}x^4 - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + x + 1$;

**2.** $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = \sin x - \cos x + x$;

**3.** $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = (x - 1)(x^2 - 1)$;

**4.** $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = (x - 1)^2(x + 1)$;

**5.** $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = (x^2 + x + 1)^2$;

**6.** $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = \sin x - \frac{1}{3}\sin^3 x$;

**7.** $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = \sin^3 x \cos x$;

**8.** $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = x \ln(x^2 + 1)$;

**9.** $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = x^2 e^x$;

**10.** $f : (0, \frac{\pi}{2}) \to \mathbb{R},\ f(x) = \operatorname{tg} x + \frac{1}{3}\operatorname{tg}^3 x$;

**11.** $f : (0, \frac{\pi}{2}) \to \mathbb{R},\ f(x) = \operatorname{tg} x - \operatorname{tg}^3 x + \frac{3}{5}\operatorname{tg}^5 x - \frac{1}{7}\operatorname{tg}^7 x$;

**12.** $f : \mathbb{R} \setminus \{-1\} \to \mathbb{R},\ f(x) = \frac{x-1}{x+1}$;

**13.** $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = \frac{x^2 + x + 1}{x^2 - x + 1}$;

**14.** $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - x + 2}$;

**15.** $f : \mathbb{R} \setminus \{-\frac{\pi}{4} + k\pi\} \to \mathbb{R},\ f(x) = \frac{\sin x}{1 + \operatorname{tg} x}$;

**16.** $f : (0, \frac{\pi}{2}) \to \mathbb{R},\ f(x) = \frac{1}{\cos x}$;

**17.** $f : (-1, 1) \setminus \{0\} \to \mathbb{R},\ f(x) = \frac{\sqrt{1 - x^2}}{x}$;

**18.** $f : (-1, 1) \to \mathbb{R},\ f(x) = \ln \frac{1 - x}{1 + x}$;

**19.** $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\dfrac{e^x-1}{e^x+1}$;

**20.** $f:\mathbb{R}\setminus\{0\}\to\mathbb{R},\ f(x)=e^{\frac{1}{x}}$;

**21.** $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R},\ f(x)=\ln\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$;

**22.** $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R},\ f(x)=\ln\dfrac{\sqrt{1+e^{2x}}-1}{\sqrt{1+e^{2x}}+1}$;

**II.** Pentru următoarele funcții să se determine domeniul de definiție, domeniul de derivabilitate şi apoi să se calculeze derivatele lor.

**1.** a) $f:D\to\mathbb{R},\ f(x)=\dfrac{1}{4}\ln\dfrac{x-1}{x+1}-\dfrac{1}{2}\operatorname{arctg}x$;

b) $f:D\to\mathbb{R},\ f(x)=\ln\sqrt{\dfrac{1-\operatorname{tg}x}{1+\operatorname{tg}x}}$;

c) $f:D\to\mathbb{R},\ f(x)=\ln\sqrt{\dfrac{1-\sin x}{1+\sin x}}$;

d) $f:D\to\mathbb{R},\ f(x)=\arcsin\dfrac{1}{1+x^2}$;

e) $f:D\to\mathbb{R},\ f(x)=\arccos\dfrac{1-x^2}{1+x^2}$;

f) $f:D\to\mathbb{R},\ f(x)=\arcsin 2x\sqrt{1-x^2}$;

g) $f:D\to\mathbb{R},\ f(x)=\arcsin(3x-4x^3)$;

h) $f:D\to\mathbb{R},\ f(x)=\arccos(4x^3-3x)$;

**2.** $f:D\to\mathbb{R},\ f(x)=\operatorname{arctg}\sqrt{\dfrac{1-\cos x}{1+\cos x}}+\ln\sqrt{\dfrac{1-\cos x}{1+\sin x}}$;

**3.** $f:D\to\mathbb{R},\ f(x)=\dfrac{\ln x}{\ln x-1}$;

**4.** $f:D\to\mathbb{R},\ f(x)=\dfrac{\ln x-x\cos x}{\cos x+x\sin x}$;

**5.** a) $f:D\to\mathbb{R},\ f(x)=x^{\frac{1}{x}}$;

b) $f: D \to \mathbb{R},\ f(x) = \left(\sqrt{x}\right)^{\sqrt{x}}$;

c) $f: D \to \mathbb{R},\ f(x) = x^{\ln x}$;

d) $f: D \to \mathbb{R},\ f(x) = (1+x)^{\frac{1}{x}}$;

e) $f: D \to \mathbb{R},\ f(x) = \left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x}$;

f) $f: D \to \mathbb{R},\ f(x) = (\ln)^{x}$;

**6.** $f: D \to \mathbb{R},\ f(x) = \ln(\ln x)$;

**7.** a) $f: D \to \mathbb{R},\ f(x) = \arcsin(\cos x)$;

b) $f: D \to \mathbb{R},\ f(x) = \arccos(\sin x)$;

c) $f: D \to \mathbb{R},\ f(x) = \sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}$.

**III.** Să se determine parametrii reali $a$ şi $b$ astfel ca următoarele funcţii să fie derivabile în punctele specificate.

**1.** $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = \begin{cases} a\sin x + b, & x \le 0 \\ \cos x, & x > 0 \end{cases},\ x_0 = 0$.

**2.** $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = \begin{cases} \sin x, & x \ge 0 \\ ax + b, & x < 0 \end{cases},\ x_0 = 0$.

**3.** $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = \begin{cases} x^2 + ax + b, & x \le 1 \\ bx + a, & x > 1 \end{cases},\ x_0 = 1$.

**4.** $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = \begin{cases} x^4 + ax + 2, & x < 0 \\ b + \ln(1+x^4), & x \ge 0 \end{cases},\ x_0 = 0$.

**5.** $f: (0, \frac{\pi}{2}) \to \mathbb{R},\ f(x) = \begin{cases} a\cos x, & 0 \le x \le \frac{\pi}{4} \\ b\sin x, & \frac{\pi}{4} < x \le \frac{\pi}{2} \end{cases},\ x_0 = \frac{\pi}{4}$.

**6.** $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\begin{cases} a\cos\dfrac{1}{x}, & x\neq 0 \\ b, & x=0 \end{cases},\ x_0=0.$

**7.** $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\begin{cases} (x^2+a)\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0 \\ b, & x=0 \end{cases},\ x_0=0.$

**IV. 1.** Să se determine ecuațiile tangentelor la graficele următoarelor funcții în punctele specificate:

a) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=x^3,\ x_0=1;$

b) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=e^{x^2},\ x_0=0;$

c) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\dfrac{x}{x^2+1},\ x_0=1;$

d) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=e^{\sqrt{x}}+e^{-\sqrt{x}},\ x_0=0;$

e) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\ln(1+x^2),\ x_0=0;$

f) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\sin x+\cos x,\ x_0=0;$

g) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=x\cdot e^x,\ x_0=0.$

**2.** Să se determine $a\in\mathbb{R}$, astfel încât tangenta la graficul funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^3+ax$ în punctul $A(1,1)$ să fie paralelă cu prima bisectoare.

**3.** Să se determine $a\in\mathbb{R}$, astfel încât tangenta la graficul funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\ln(a+x^2)$ în punctul de abscisă $x=0$ să fie paralelă cu axa $Ox$.

**4.** Să se determine punctele unghiulare şi punctele de întoarcere ale graficelor următoarelor funcții.

a) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\sqrt{|x|};$

b) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=x\sqrt{|x-1|};$

c) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\dfrac{|x^2-4|}{x-1};$

d) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\sqrt{|1-x^2|}.$

**5.** Să se arate că graficele următoarelor perechi de funcții sunt tangente în punctele specificate:

a) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=x^2$ şi $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ g(x)=-x^2+4x-2,\ x_0=1;$

b) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = e^x$ şi $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = x^e$, $x_0 = 0$;

c) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = e^x$ şi $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = e \cdot x$, $x_0 = 1$;

d) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x + x \sin x + \cos x$ şi $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = \dfrac{x+1}{x^2+1}$, $x_0 = 1$.

**6.** Se consideră funcția:

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = |x^2 - 1|$. Se cere:

a) Să se studieze derivabilitatea funcției, precizând domeniul de derivabilitate.

b) Să se determine punctele unghiulare şi să se scrie ecuațiile semitangentelor la grafic în aceste puncte.

c) Să se determine tangenta unghiului format de aceste semitangente.

d) Există puncte pe graficul funcției în care tangenta la grafic este:

i) paralelă cu prima bisectoare a axelor de coordonate;

ii) paralelă cu a doua bisectoare a axelor de coordonate;

iii) paralelă cu axele de coordonate?

e) Există valori ale lui $a$, $b \in \mathbb{R}$, astfel încât graficul funcției $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = ax^2 + b$ să fie tangent graficului funcției $f$ în semiplanul $x \geq 1$?

## Calculul derivatei de ordinul al doilea

### Exerciții rezolvate

**I.** Să se calculeze derivata de ordinul doi şi să se pună în evidență domeniul de derivabilitate pentru următoarele funcții:

**1.** $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^3 + x^2 + x + 1$;

**2.** $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{x^5}{4 \cdot 5} - \dfrac{x^4}{4 \cdot 3} + \dfrac{x^2}{2 \cdot 1} - x + 1$;

**3.** $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{x^2+1}{x}$;

**4.** $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{x}{x^2+1}$;

**5.** $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x\,e^x$;

**6.** $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=e^{-x^2}$;

**7.** $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R},\ f(x)=\sqrt{x}$;

**8.** $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\sqrt{x^2+1}$;

**9.** $f:(0,\infty)\to\mathbb{R},\ f(x)=\ln x+\dfrac{1}{x}$;

**10.** $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R},\ f(x)=e^{\sqrt{x}}+e^{-\sqrt{x}}$;

**11.** $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\begin{cases}x^2, & x\in\mathbb{Q}\\ -x^2, & x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}\end{cases}$;

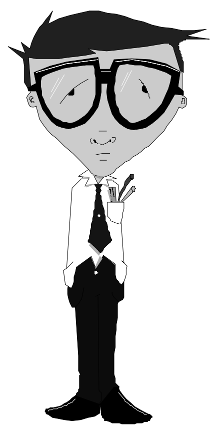
**12.** $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\begin{cases}x^2, & x\le 0\\ x, & x>0\end{cases}$;

**13.** i) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\sin x^2$;

ii) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\cos x^2$;

iii) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\sin x+\cos x$;

iv) $f:[-1,1]\to\mathbb{R},\ f(x)=\arcsin x-\arccos x$.



**14.** $f:\mathbb{R}\setminus\{-1,1\}\to\mathbb{R},\ f(x)=\dfrac{1}{x^2-1}$;

**15.** $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\begin{cases}e^{-\frac{1}{x^2}}, & x\ne 0\\ 0, & x=0\end{cases}$;

**16.** $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\begin{cases}x^3+x, & x\le 0\\ \operatorname{arctg} x, & x>0\end{cases}$;

**II. 1.** Să se cerceteze existența derivatelor de ordinul al doilea pentru următoarele funcții, în punctele specificate:

a) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{1+x^2}, & x<0\\ x, & x\ge 0\end{cases},\ x_0=0$;

b) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\begin{cases}\ln^2(x-2), & x\geq 0\\ (x-3)^2, & x<0\end{cases},\ x_0=3$.

**2.** Să se determine $a, b, c \in \mathbb{R}$ astfel încât funcția:

$$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\begin{cases}x^3+ax^2+bx+c, & x<2\\ \operatorname{arctg}(x-2), & x\geq 2\end{cases},$$

să fie de două ori derivabilă pe $\mathbb{R}$.

**3.** Să se determine $a, b, c \in \mathbb{R}$ astfel încât funcția:

$$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\begin{cases}x^3+3x+a-1, & x\leq 2\\ ax^2+bx+c, & x>2\end{cases},$$

să fie de două ori derivabilă pe $\mathbb{R}$.

**4.** Să se determine funcția polinomială $P$ de grad minim, astfel încât funcția

$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\begin{cases}P(x), & x<0\\ e^{-x^2}, & x\geq 0\end{cases}$, să fie derivabilă de două ori pe $\mathbb{R}$.

*Soluții*

**I.** **1.** $f'(x)=3x^2+2x$ şi $f''(x)=6x+2$; $D_d''=\mathbb{R}$.

**2.** $f'(x)=\dfrac{x^4}{4}-\dfrac{x^3}{3}+x-1$ şi $f''(x)=x^3-x^2+1$; $D_d''=\mathbb{R}$.

**3.** $f(x)=x+\dfrac{1}{x}\Rightarrow f'(x)=1-\dfrac{1}{x^2}$ ; $f''(x)=\dfrac{2}{x^3}$; $D_d''=\mathbb{R}\setminus\{0\}$.

**4.** $f'(x)=\dfrac{1-x^2}{(x^2+1)^2}$; $f''(x)=\dfrac{-2\cdot(x^2+1)^2-(1-x^2)\cdot 2\cdot(x^2+1)\cdot 2x}{(x^2+1)^4}=$

$$=\frac{-2x(x^2+1)[(x^2+1)+2(1-x^2)]}{(x^2+1)^3}=-\frac{2x(3-x^2)}{(x^2+1)^3};\ D_d''=\mathbb{R}.$$

**5.** $f'(x)=e^x(x+1)$; $f''(x)=e^x(x+2)$; $D_d''=\mathbb{R}$.

**6.** $f'(x) = -2xe^{x^2}$; $f''(x) = -2\left[e^{-x^2} + x\cdot e^{-x^2}(-2x)\right] =$

$= -2e^{-x^2}[1-2x^2]$; $D_d'' = \mathbb{R}$.

**7.** $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$; $f''(x) = -\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{(\sqrt{x})'}{x} = \dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{\frac{1}{2\sqrt{x}}}{x} = -\dfrac{1}{4x\sqrt{x}}$;

$D_d'' = \mathbb{R}_+^*$.

**8.** $f'(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$; $f''(x) = \dfrac{x'\sqrt{x^2+1} - x\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}}{x^2+1} =$

$= \dfrac{x^2+1-x^2}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}} = \dfrac{1}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}$; $D_d'' = \mathbb{R}$.

**9.** $f'(x) = \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x^2}$; $f''(x) = -\dfrac{1}{x^2} + \dfrac{2}{x^3} = \dfrac{2-x}{x^3}$; $D_d'' = \mathbb{R}\setminus\{0\}$.

**10.** $f'(x) = e^{\sqrt{x}}\cdot\dfrac{1}{2\sqrt{x}} - e^{-\sqrt{x}}\cdot\dfrac{1}{2\sqrt{x}} = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}(e^{\sqrt{x}} - e^{-\sqrt{x}})$;

$$f''(x) = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)'\left(e^{\sqrt{x}} - e^{-\sqrt{x}}\right) + \frac{1}{\sqrt{x}}\left(e^{\sqrt{x}} - e^{-\sqrt{x}}\right)'\right] =$$

$$= \frac{1}{2}\left[-\frac{1}{2x\sqrt{x}}\left(e^{\sqrt{x}} - e^{-\sqrt{x}}\right) + \frac{1}{\sqrt{x}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}\left(e^{\sqrt{x}} - e^{-\sqrt{x}}\right)\right] =$$

$$= \frac{1}{4x}\left[e^{\sqrt{x}}\left(1-\frac{1}{\sqrt{x}}\right) + e^{-\sqrt{x}}\left(1+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)\right];\ D_d'' = (0,\infty).$$

**11.** Funcția este continuă în $x_0 = 0$.

Analizăm derivabilitatea funcției în $x_0 = 0$.

Pentru orice şir $(x_n)$ de numere raționale cu $x_n \to 0$, avem:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{f(x_n)-f(0)}{x_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{x_n^2-0}{x_n} = \lim_{n\to\infty}x_n = 0\ .$$

Pentru orice şir $(x'_n)$ de numere iraţionale cu $x'_n \to 0$, avem:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{f(x'_n)-f(0)}{x'_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{-x'^2_n-0}{x'_n}=\lim_{n\to\infty}-x'_n=0.$$

Fie $(a_n)$ un şir arbitrar de numere reale cu $a_n \to 0$.

Dacă $(a_n)$ conţine un subşir de numere raţionale $(a_{k_n})$, atunci:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{f(a_{k_n})-f(0)}{a_{k_n}}=0, \text{conform (1)}.$$

Dacă $(a_n)$ conţine un subşir de numere iraţionale $(a_{w_n})$, atunci:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{f(a_{w_n})-f(0)}{a_{w_n}}=0, \text{ conform (2)}.$$

În concluzie, pentru orice şir de numere reale $(a_n)$ cu $a_n \to 0$, avem:

$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{f(a_n)-f(0)}{a_n}=0$, deci funcţia este derivabilă în $x_0 = 0$ şi $f\,'(0) = 0$.

Funcţia nu este derivabilă de ordin doi, deoarece $x_0 = 0$ nu este punct de acumulare al mulţimii $\{0\}$ pe care $f$ este derivabilă, deci nu se pune problema ca funcţia să fie derivabilă de ordinul doi în $x_0 = 0$.

**12.** Funcţia este continuă în $x_0 = 0$.

$$f'_s(0)=\lim_{\substack{x\to0\\x<0}}\frac{x^2-0}{x}=0;\ f'_d(0)=\lim_{\substack{x\to0\\x<0}}\frac{x-0}{x}=1,$$

funcţia nu este derivabilă în punctul $x_0 = 0$. Atunci avem

$$f\,'(x)=\begin{cases}2x, & x<0\\ 1, & x>0\end{cases} \text{ şi } f\,''(x)=\begin{cases}2, & x<0\\ 0, & x>0\end{cases};\ D''_d=\mathbb{R}.$$

**13.** i) $f\,'(x)=2x\cos x^2;\ f\,''(x)=2\left[x'\cos x^2+x(\cos x^2)'\right]=$

$$=2\left[\cos x^2-2x^2\sin x^2\right];$$

ii) $f'(x)=-2x\sin x^2;\ f''(x)=-2\left[x'\sin x^2+x(\sin x^2)'\right]=$

$=-2(\sin x^2+2x^2\cos x^2);$

iii) $f'(x)=\cos x-\sin x;\ f''(x)=-\sin x-\cos x=-(\sin x+\cos x);$

iv) $f(x)=\frac{\pi}{2}-2\arccos x;\ f'(x)=\frac{2}{\sqrt{1-x^2}};$

$$f''(x)=2\frac{-\left(\sqrt{1-x^2}\right)'}{1-x^2}=\frac{2x}{\left(1-x^2\right)\sqrt{1-x^2}};\ D_d''=(-1,1).$$

**14.** $f'(x)=-\frac{\left(x^2-1\right)'}{x^2-1}=\frac{-2x}{\left(x^2-1\right)^2};$

$$f''(x)=-2\frac{x\left(x^2-1\right)^2-x\left[(x^2-1)^2\right]'}{\left(x^2-1\right)^4}=\frac{-2\left[(x^2-1)^2-4(x^2-1)x^2\right]}{(x^2-1)^4}=$$

$$=\frac{-2\left(x^2-1\right)\left(x^2-1-4x^2\right)}{\left(x^2-1\right)^4}=\frac{2(1+3x^2)}{\left(x^2-1\right)^3};\quad D_d''=\mathbb{R}\setminus\{-1,1\}.$$

**15.** Funcția este continuă în punctul $x_0=0$; $f_s'(0)=f_d'(0)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x-0}=0.$

Funcția este derivabilă în $x_0 = 0$ (deci este derivabilă pe $\mathbb{R}$) și $f'(0) = 0$.

$$f'(x)=\begin{cases}\left(-\frac{1}{x^2}\right)'\cdot e^{-\frac{1}{x^2}}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}=\begin{cases}\frac{2}{x^3}\cdot e^{-\frac{1}{x^2}}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}.$$

Funcția $f'$ este continuă în $x_0 = 0$. Cercetăm, plecând de la definiție, derivabilitătii funcției $f'$ în punctul $x_0 = 0$:

$$f''(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)-f'(0)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{2}{x^3}e^{-\frac{1}{x^2}}}{x}=\lim_{x\to 0}2\frac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x^4}=0.$$

Funcția $f\,'$ este derivabilă în $x_0 = 0$ și $f\,''(0) = 0$. În aceste condiții funcția este derivabilă de ordinul doi pe $\mathbb{R}$ și

$$f''(x)=\begin{cases}\left(\dfrac{2}{x^3}\right)' e^{-\frac{1}{x^2}}+\dfrac{2}{x^3}\left(e^{-\frac{1}{x^2}}\right)', & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases} \Rightarrow f''(x)=\begin{cases}\left(-\dfrac{6}{x^4}+\dfrac{4}{x^6}\right)\cdot e^{-\frac{1}{x^2}}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}.$$

*Comentariu*

**1.** Dacă se continuă procedeul de derivare vom constata că funcția este derivabilă pe $\mathbb{R}$ de ordinul trei, patru, ş.a.m.d. În acest caz spunem că funcția admite derivate de orice ordin pe $\mathbb{R}$ sau altfel spus este *indefinit derivabilă* pe $\mathbb{R}$.

**2.** În general funcțiile elementare sunt indefinit derivabile pe domeniul de definiție și în acest caz există posibilitatea de a defini derivata de ordin $n$ pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$ și a găsi formule generale. De exemplu:

a) funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sin x$, are derivata de ordinul $n$:

$$f^{(n)}(x)=\sin\left(x+\frac{n\pi}{2}\right);$$

b) funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \cos x$, are derivata de ordinul $n$:

$$f^{(n)}(x)=\cos\left(x+\frac{n\pi}{2}\right).$$

Aceste formule se pot demonstra prin inducție matematică, plecând de la faptul că:

$$f^{(k)}(x) \stackrel{\text{def}}{=} \left[f^{(k-1)}(x)\right]';\ \forall k\in\mathbb{N}^*,\, k\geq 2.$$

**3.** Derivatele de ordin superior sunt foarte importante în studiul determinării rădăcinilor multiple și în dezvoltarea unei funcții polinomiale cu ajutorul formulei lui Taylor (matematician englez, unul din fondatorii calculului diferențial).

*Formula lui Taylor*: Fie funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$:

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} \ldots a_0,\ a_i \in \mathbb{R},\ i=\overline{0,n}.$$

Dacă $\alpha \in \mathbb{R}$ și $f^{(k)}(\alpha)$ este valoarea derivatei de ordinul $k$ în punctul $\alpha$, atunci avem:

$$f(x)=f(\alpha)+\frac{f'(\alpha)}{1!}(x-a)+\frac{f''(\alpha)}{2!}(x-\alpha)^2+\ldots+\frac{f^{(k)}(\alpha)}{n!}(x-\alpha)^n.$$

Formula se poate extinde și pentru alte tipuri de funcții.

*Exercițiu*: Să se verifice formula în cazul funcțiilor polinomiale de gradul doi şi trei pentru $\alpha = 1$.

**16.** Se procedează ca în cazul exercițiului 12.

**II. 1.** Se procedează ca în cazul exercițiului I. 12

**2.** i) Din condiția ca funcția să fie continuă în punctul $x_0 = 2$ rezultă

$$8 + 4a + 2b + c = 0.$$

ii) Din condiția ca funcția să fie derivabilă de ordinul întâi în punctul $x_0 = 2$ rezultă

$$f_s'(2) = \lim_{\substack{x\to 2\\ x<2}} \frac{x^3 + ax^2 + bx + c - 0}{x-2} = \lim_{\substack{x\to 2\\ x<2}} \frac{x^3 + ax^2 + bx - 8 - 4a - 2b}{x-2} =$$

$$= \lim_{\substack{x\to 2\\ x<2}} \frac{(x^3-8) + a(x^2-4) + b(x-2)}{x-2} = \lim_{\substack{x\to 2\\ x<2}} \frac{(x-2)\left[x^2+2x+4+a(x+2)+b\right]}{x-2} =$$

$$= 4 + 4 + 4 + 4a + b = 12 + 4a + b.$$

$$f_d'(2) = \lim_{\substack{x\to 2\\ x<2}} \frac{\operatorname{arctg}(x-2)}{x-2} = 1.$$

Pentru ca funcția să fie derivabilă în punctul $x_0 = 1$, am obținut următoarele condiții:

$$\begin{cases} 4a + 2b + c = -8 \\ 12 + 4a + b = 1 \end{cases}.$$

În acest caz funcția este derivabilă pe $\mathbb{R}$ şi:

$$f'(x) = \begin{cases} 3x^2 + 2ax + b, & x < 2 \\ \dfrac{1}{1+(x-2)^2}, & x \geq 2 \end{cases}.$$

În continuare se impune condiția ca funcția $f'$ să fie derivabilă în punctul $x_0 = 2$:

$$f_s''(2) = \lim_{\substack{x\to 2\\ x<2}} \frac{f'(x) - f'(2)}{x-2} = \frac{3x^2 + 2ax + b - 1}{x-2}$$

$$f_d''(2) = \lim_{\substack{x\to 2\\ x<2}} \frac{\dfrac{1}{1+(x-2)^2} - 1}{x-2} = \lim_{\substack{x\to 2\\ x<2}} \frac{-(x-2)^2}{(x-2)\left[1+(x-2)^2\right]} = 0$$

Pentru ca funcția $f\,'$ să fie derivabilă în punctul $x_0 = 2$ este necesar ca:

$\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{3x^2+2ax+b-1}{x-2}=0.$ De aici rezultă că

$$3x^2 + 2a + b - 1 = 3(x-2)^2 \Rightarrow a = -6 \text{ şi } b = 13.$$

Înlocuind în condiția $8 + 4a + 2b + c = 0$, obținem $c = -10$.

Înlocuim şi obținem funcția:

$$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\begin{cases} x^3-6x^2+13x-10, & x<2 \\ \operatorname{arctg}(x-2), & x\ge 2\end{cases},$$

care este derivabilă de ordinul doi pe $\mathbb{R}$ şi derivata $f\,''(x)$ este:

$$f\,''(x)=\begin{cases} 6x-12, & x<2 \\ -\dfrac{2(x-2)}{\left[1+(x-2)^2\right]^2}, & x\ge 2\end{cases}.$$

**3.** Se procedează ca la exercițiul 2.

**4.** Se arată că funcția polinomială de grad minim este $P(x) = 2x^2 - 2x + 1$.

## Exerciții propuse

**1.** Să se calculeze derivata de ordinul al doilea pentru următoarele funcții:

a) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x) = x\,e^x$; b) $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R},\ f(x) = x\ln x$;

c) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x) = e^{x^2}$; d) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x) = e^{\sin x}\cos x$;

e) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x) = e^x + e^{-x}$.

**2.** Să se calculeze derivata de ordinul al doilea pentru următoarele funcții:

a) $f:\mathbb{R}\setminus\{0,1\}\to\mathbb{R},\ f(x)=\dfrac{1}{x^2-x}$; b) $f:\mathbb{R}\setminus\{-1,1\}\to\mathbb{R},\ f(x)=\dfrac{1}{x^2-1}$;

c) $f:\mathbb{R}\setminus\{-1,1\}\to\mathbb{R},\ f(x)=\dfrac{x^3}{x^2-1}$; d) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\sqrt{x^2+x+1}$.

**3.** Să se calculeze derivata de ordinul al doilea pentru următoarele funcții:

a) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\begin{cases} x^3, & x\in\mathbb{Q} \\ x, & x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}\end{cases}$;

b) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\begin{cases} x^2+x+1, & x\le 0 \\ 2^x, & x>0\end{cases}$;

c) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\begin{cases} \ln(x^2+2x), & x\in(0,\ 1] \\ x^2+1, & x\in(1,+\infty)\end{cases}$.

**4.** Să se determine $a, b, c\in\mathbb{R}$ astfel încât următoarele funcții să fie de două ori derivabile pe întreg domeniul de definiție:

i) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\begin{cases} x^2+3x+a-1, & x\le 2 \\ ax^2+bx+c, & x>2\end{cases}$;

ii) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\begin{cases} e^{-x^2-\frac{3}{2}}, & x\in(-\infty,\ 1) \\ ax^3+bx+c, & x\in[1,\ +\infty)\end{cases}$.

**5.** Să se arate că următoarele funcții verifică identitățile specificate în dreptul fiecăreia:

a) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=xe^{2x};\ f''(x)-4f'(x)+4f(x)=0,\ \forall x\in\mathbb{R}$;

b) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=e^{2x}\sin 3x;\ f''(x)-4f'(x)+13f(x)=0,\ \forall x\in\mathbb{R}$;

c) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=e^{2x}(3+4x);\ f''(x)-2f'(x)+f(x)=e^{2x}(4x+11),\ \forall x\in\mathbb{R}$;

d) $f:(1,+\infty)\to\mathbb{R}, f(x)=\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)^{\alpha}$;

$(x^2-1)\ f''(x)+x f'(x)-\alpha^2 f(x)=0$;

e) $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R},\ f(x)=\left(\alpha x+\sqrt{1+\alpha^2x^2}\right)^{\frac{1}{\alpha}},\ \alpha>0$;

$(1+\alpha^2x^2)\ f''(x)+\alpha^2 x f'(x)-f(x)=0,\ \forall x\in(0,\infty)$;

f) $f:(-1,\ 1)\to\mathbb{R},\ f(x)=\dfrac{\sin(2\arccos x)}{\sqrt{1-x^2}}$;

$(x^2-1)\ f''(x)+3xf'(x)-3f(x)=0$.

# 3.2. Funcții derivabile pe un interval, puncte de extrem ale unei funcții, teorema lui Fermat, teorema lui Rolle, teorema lui Lagrange şi consecințele acesteia

## Puncte de extrem ale unei funcții

Vom prezenta teoremele fundamentale asupra funcțiilor derivabile pe un interval dat.

| | |
|---|---|
| **Definiții** | Fie $I \subset \mathbb{R}$ un interval $f : I \to \mathbb{R}$ o funcție şi $x_0 \in I$.<br>• Vom spune că $x_0$ este un *punct de maxim local* al funcției $f$, dacă există o vecinătate $V$ a lui $x_0$ astfel încât $f(x) \leq f(x_0)$, $\forall x \in I \cap V$.<br>• Vom spune că $x_0$ este un *punct de minim local* al funcției $f$ dacă există o vecinătate $V$ a lui $x_0$ astfel încât $f(x) \geq f(x_0)$, $\forall x \in I \cap V$.<br>• Punctele de maxim local şi punctele de minim local se numesc *puncte de extrem local* ale funcției $f$.<br>• Dacă $x_0$ este un punct de maxim local al funcției $f$, atunci $f(x_0)$ se numeşte *maxim local* al lui $f$.<br>• Dacă $x_0$ este un punct de minim local al funcției $f$, atunci $f(x_0)$ se numeşte *minim local* al lui $f$.<br>• Maximele şi minimele locale ale funcției $f$ se numesc *extreme locale*. |

Un punct $x_0 \in I$ se numeşte *punct de maxim global* (absolut) al funcției $f$ dacă $f(x) \leq f(x_0)$, $\forall x \in I$.

Un punct $x_0 \in I$ se numeşte *punct de minim global* (absolut) al funcției $f$ dacă $f(x) \geq f(x_0)$, $\forall x \in I$.

Un punct $x_0 \in I$ se numeşte *punct de extrem global* (absolut) al funcției $f$ dacă $x_0$ este punct de maxim global sau de minim global.

## Teorema lui Fermat

O condiție necesară pentru ca un punct să fie de extrem local este dată de teorema lui Fermat.

| | |
|---|---|
| **Teoremă (Fermat)** | *Fie $I \subset \mathbb{R}$ un interval. Dacă funcția $f : I \to \mathbb{R}$ are derivată într-un punct de extrem local $x_0$ interior intervalului I, atunci $f'(x_0) = 0$.* |

*Demonstrație*

Fie $x_0$ un punct de maxim local pentru $f$, situat în interiorul intervalului $I$. Atunci există o vecinătate $V$ a lui $x_0$ astfel încât $f(x) \le f(x_0)$, $\forall x \in I \cap V$.

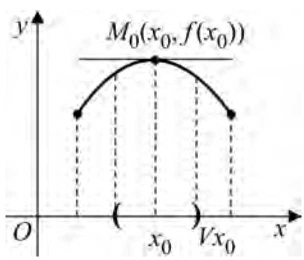



**Figura 7**

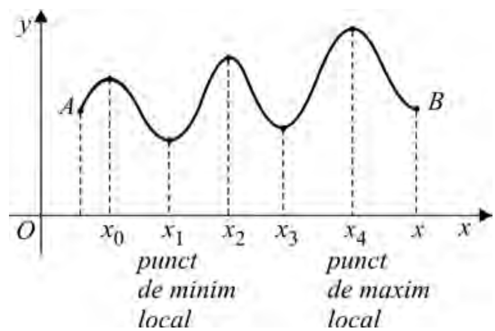



**Figura 8**

Din ipoteză, $f$ are derivată în $x_0$, deci $f'(x_0) = f_s'(x_0) = f_d'(x_0)$. Evident avem:

$$f_s'(x_0) = \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x < x_0}} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \ge 0,$$

$$f_d'(x_0) = \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x > x_0}} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \le 0.$$

Prin urmare $f'(x_0) = 0$.

Cazul în care $x_0$ este punct de minim local se tratează în mod analog.

**Observații:**

1. Teorema nu este adevărată dacă $x_0$ nu este punct interior.
2. Funcția $f$ poate avea un extrem local într-un punct $x_0$ în care nu are derivată.
3. Reciproca teoremei lui Fermat nu este adevărată.

*Contraexemple*

**1.** Fie $f : [0,1] \to \mathbb{R}, f(x) = x$. În acest caz $x_0 = 0$ este punct de minim, dar $f'(0) = 1$.

**2.** Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = |x|$. Evident 0 este punct de minim, dar $f$ nu are derivată în $x_0 = 0$.

**3.** Considerăm funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definită prin $f(x) = x^3$. Deşi $f'(0) = 0$, $x_0 = 0$ nu este punct de extrem local (fig. 9), funcția fiind strict crescătoare pe $\mathbb{R}$.

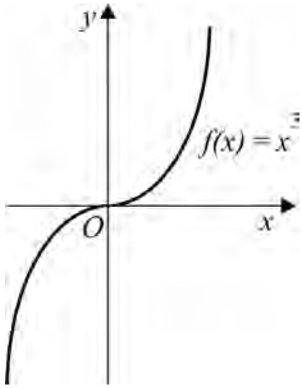



**Figura 9**

Fie $f : I \to \mathbb{R}$ o funcție derivabilă. Punctele în care se anulează derivata $f'$ se numesc *puncte critice* ale funcției $f$.

Teorema lui Fermat afirmă că punctele de extrem din interiorul lui $I$ sunt puncte critice.

Contraexemplul 3) dovedeşte că există puncte critice care nu sunt puncte de extrem.

*Interpretare geometrică*

Dacă graficul unei funcții $f$ are tangentă într-un punct de extrem din interiorul domeniului său de definiție, atunci tangenta în acest punct este paralelă cu axa $Ox$ (fig. 10).

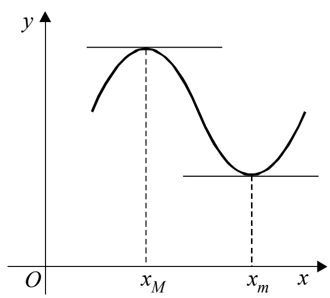



**Figura 10**

## Teorema lui Rolle

Teorema lui Fermat furnizează condiții suficiente ca derivata unei funcții să se anuleze într-un punct. De asemenea, teorema lui Rolle furnizează condiții suficiente ca derivata unei funcții să fie nulă într-un punct.

| | |
|---|---|
| **Teoremă (Rolle)** | *Fie $I \subset \mathbb{R}$ un interval, $a, b \in I$, $a < b$ și $f : I \to \mathbb{R}$ o funcție care verifică condițiile:*<br>i) *$f$ este continuă pe* $[a, b]$;<br>ii) *$f$ este derivabilă pe* $(a, b)$;<br>iii) $f(a) = f(b)$.<br>*Atunci, există cel puțin un punct $\xi \in (a, b)$, astfel încât $f'(\xi) = 0$.* |

*Demonstrație*

Dacă funcția $f$ este constantă pe $[a, b]$, atunci $f'(x) = 0$, pentru orice $x \in (a, b)$.

Presupunem că $f$ nu este constantă. Atunci, conform teoremei lui Weierstrass, funcția $f|_{[a,b]}$ este mărginită și își atinge marginile. Deci există $x_m, x_M \in [a, b]$, astfel încât

$$f(x_m) \le f(x) \le f(x_M),\ \forall x \in [a, b].$$

**1.** Dacă $f(x_m) = f(x_M)$, atunci funcția este constantă.

**2.** Dacă $f(x_m) < f(x_M)$ și $x_m \in (a, b)$, teorema lui Fermat implică $f'(x_m) = 0$.

În caz contrar, $x_m = a$ sau $x_m = b$.

Dacă $x_m = a$ sau $x_m = b$, avem $f(a) = f(b) = f(x_m) < f(x_M)$. Atunci $x_M \in (a, b)$. Teorema lui Fermat implică $f'(x_M) = 0$.

*Interpretare geometrică*

Dacă graficul funcției $f$ admite derivată în fiecare punct și dreapta ce unește extremitățile graficului este paralelă cu axa $Ox$, atunci există cel puțin un punct de pe grafic în care tangenta este paralelă cu axa $Ox$ (fig. 11).

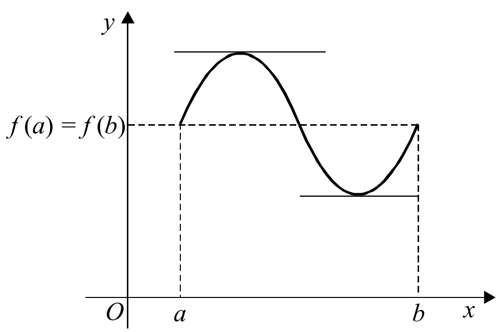



**Figura 11**

**Observație:** Toate condițiile i) – iii) sunt esențiale.

*Contraexemple*

**1.** Fie $f: [1, 2] \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$. Atunci $f'(x) \neq 0$, pentru orice $x \in [1, 2]$. În acest caz, condiția iii) nu este verificată ($f(1) \neq f(2)$).

**2.** Fie $f: [-1, 1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{|x|}$. Evident $f$ verifică condițiile i) şi iii), dar nu este derivabilă în $x_0 = 0$. Concluzia teoremei lui Rolle nu este adevărată.

**3.** Fie $f: [0, 1] \to \mathbb{R}$, definită prin

$$f(x) = \begin{cases} x, & 0 \le x < 1 \\ 0, & x = 1 \end{cases}.$$

Evident $f$ nu este continuă în $x_0 = 1$ şi verifică condițiile ii) şi iii). Derivata $f'$ nu se anulează în nici un punct din interiorul intervalului (0, 1).

**Corolar 1.** *Fie* $f: [a, b] \to \mathbb{R}$ *o funcție derivabilă. Dacă* $f(a) = f(b) = 0$, *atunci există cel puțin un punct* $\xi \in (a, b)$, *astfel încât* $f'(\xi) = 0$.

**Corolar 2.** *Fie* $f: [a, b] \to \mathbb{R}$ *o funcție derivabilă. Dacă* $f'(a) = f'(b) = 0$ *şi* $f'(x) \neq 0$, $\forall x \in (a, b)$, *atunci există cel mult un punct* $\xi \in (a, b)$, *astfel încât* $f(\xi) = 0$.

*Demonstrație*

Presupunem că există $a < \xi_1 < \xi_2 < b$, astfel încât $f(\xi_1) = f(\xi_2) = 0$. Atunci teorema lui Rolle implică existența unui punct $\eta \in (\xi_1, \xi_2) \subset (a, b)$, astfel încât $f'(\eta) = 0$ – contradicție.

**Corolar 3.** *Fie* $f: I \to \mathbb{R}$ *o funcție derivabilă şi* $x_1$ *şi* $x_2$ *două soluții consecutive ale ecuației* $f'(x) = 0$.

a) *Dacă* $f(x_1) \cdot f(x_2) < 0$, *atunci există o singură soluție* $x_0 \in (x_1, x_2)$ *astfel încât* $f(x_0) = 0$.

b) *Dacă* $f(x_1) \cdot f(x_2) \ge 0$, *atunci funcția* $f$ *are semn constant pentru orice* $x \in (x_1, x_2)$ *şi deci ecuația* $f(x) = 0$ *nu admite nici o rădăcină în intervalul* $(x_1, x_2)$.

Corolarul 3 ne este util pentru a determina intervalele în care sunt situate soluțiile reale ale unei ecuații şi implicit determinarea numărului de soluții reale ale unei ecuații algebrice sau transcendente.

Facem observația că studierea soluțiilor funcției $f$ se poate face pe orice interval în care funcția $f$ este derivabilă.

Metoda care se aplică conține următoarele etape:

**1.** Se verifică că funcția $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ este derivabilă pe (a, b).

**2.** Se rezolvă ecuația $f\,'(x) = 0$ şi se aranjează soluțiile în ordine crescătoare. Fie $x_1, < x_2 < \ldots < x_n$, soluțiile ecuației $f\,'(x) = 0$.

**3.** Se determină semnul lui $f(x_k)$, $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$şi $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x > a}} f(a)$ şi $\lim\limits_{\substack{x \to b \\ x < b}} f(x)$ .

Toate aceste rezultate se organizează într-un tablou care se prezintă astfel:

| $x$ | $a$ | $x_1$ | $x_2$ | ... | $x_n$ | $b$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x > a}} f(x)$ | $f(x_1)$ | $f(x_2)$ | ... | $f(x_n)$ | $\lim\limits_{\substack{x \to b \\ x > b}} f(x)$ |
| semn | $\pm$ | $\pm$ | $\pm$ | … | $\pm$ | $\pm$ |

Acest tablou se numeşte şirul lui Rolle, ataşat ecuației $f(x) = 0$. Numărul schimbărilor de semn din şirul lui Rolle este egal cu numărul soluțiilor reale ale ecuației $f(x) = 0$.

**Observație:** Şirul lui Rolle se aplică cu succes atunci când ecuația $f\,'(x) = 0$ este uşor de rezolvat; de aceea metoda şirului lui Rolle are un caracter restrictiv.

## Exerciții rezolvate

**1.** Să se determine numărul soluțiilor reale şi intervalele în care sunt situate, pentru următoarele ecuații:

a) $x^3 - 3x + 1 = 0$; b) $x^4 - 2x^2 - 1 = 0$;

c) $x^2 + x - \ln x = 0$; d) $3 \sin x + 2 \cos^3 x = 0$, $x \in [0, 2\pi]$.

*Soluții*

a) Intervalul $I = (-\infty, +\infty)$; $f\,'(x) = 0 \Rightarrow x \in \{-1, 1\}$, $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$ şi $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

Şirul lui Rolle se prezintă astfel:

| $x$ | $-\infty$ | $-1$ | $1$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ | $f(-1)$ | $f(1)$ | $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ |
| semn | $-$ | $+$ | $-$ | $+\infty$ |

*Concluzie*

Şirul lui Rolle are trei schimbări de semn, deci trei rădăcini reale, iar rădăcinile $x_1$, $x_2$, $x_3$ sunt situate în intervalele: $x_1 \in (-\infty, -1)$, $x_2 \in (-1, 1)$, $x_3 \in (1, +\infty)$.

b) Intervalul $I = (-\infty, +\infty)$; $f'(x) = 0 \Rightarrow x \in \{-1, 0, 1\}$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$ şi $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

Şirul lui Rolle se prezintă astfel:

| $x$ | $-\infty$ | $-1$ | $0$ | $1$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ | $f(-1)$ | $f(0)$ | $f(1)$ | $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ |
| semn | $+$ | $-$ | $-$ | $-$ | $+\infty$ |

*Concluzie*

Avem două schimbări de semn, două rădăcini reale $x_1 \in (-\infty, -1)$ şi $x_2 \in (1, +\infty)$.

c) Intervalul $I = (0, +\infty)$; $f'(x) = 0 \Rightarrow x_1 = \frac{1}{2} \in (0, +\infty)$.

$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x) = +\infty$; $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

Şirul lui Rolle se prezintă astfel:

| $x$ | $0$ | $\frac{1}{2}$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $f(x)$ | $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x)$ | $f(\frac{1}{2})$ | $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ |
| semn | $+$ | $+$ | $+$ |

*Concluzie*

Nu avem schimbări de semn, deci nu există rădăcini reale

d) $I = [0, 2\pi]$; $f'(x) = 0 \Rightarrow 3\cos x + 3 \cdot 2\cos^2 x(-\sin x) = 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow x \in \left\{\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right\} \quad f(0) = 2 > 0 \text{ şi } f(2\pi) = 2 > 0.$$

Şirul lui Rolle se prezintă astfel:

| $x$ | $0$ | $\frac{\pi}{4}$ | $\frac{\pi}{2}$ | $\frac{3\pi}{2}$ | $2\pi$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | $f(0)$ | $f(\frac{\pi}{4})$ | $f(\frac{\pi}{2})$ | $f(\frac{3\pi}{2})$ | $f(2\pi)$ |
| semn | + | + | + | + | + |

Nu admite rădăcini în intervalul $[0, 2\pi]$.

**2.** Să se discute după valorile parametrului real $m$ numărul de rădăcini reale ale ecuației: $x^3 - 27x + m = 0$.

*Soluție*

Rezultatele aplicării şirului lui Rolle se găsesc în următorul tabel:

| $x$ | $-\infty$ | $-3$ | $3$ | $+\infty$ | Concluzii privind rădăcinile ecuației $f(x) = 0$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ <br> $m$ | $-\infty$ | $m + 54$ | $m - 54$ | $+\infty$ | |
| $m < -54$ | $-$ | $-$ | $-$ | $+$ | O singură rădăcină reală $x_1 \in (3, +\infty)$ |
| $m = -54$ | $-$ | $0$ | $-$ | $+$ | Trei rădăcini reale $x_1 = x_2 = -3$, $x_3 \in (3, +\infty)$ |
| $-54 < m < 54$ | $-$ | $+$ | $+$ | $+$ | O singură rădăcină reală $x_1 \in (-\infty, -3)$ |
| $m = 54$ | $-$ | $+$ | $0$ | $+$ | Trei rădăcini reale $x_1 \in (-\infty, -3)$, $x_2 = x_3 = 3$ |
| $m > 54$ | $-$ | $+$ | $+$ | $+$ | O singură rădăcină reală $x_1 \in (-\infty, -3)$ |

## Exerciții propuse

**1.** Să se determine numărul de rădăcini reale şi intervalele unde sunt situate pentru următoarele ecuații:

a) $x^3 + 3x - 15 = 0$; $x \in \mathbb{R}$; b) $x^4 + 4x + 10 = 0$; $x \in \mathbb{R}$;

c) $x^3 + 1 - 3 \ln x = 0$; $x \in (0, +\infty)$;

d) $3 \cos x + 2 \sin^3 x = 0$; pentru $I = [0, 2\pi]$; $I = [-2\pi, 0]$; $I = [-\pi, \pi]$.

**2.** Să se discute după valorile parametrului $m \in \mathbb{R}$ numărul rădăcinilor reale pentru ecuațiile următoare:

a) $x^4 - 4x + m = 0$; b) $x^3 + m - 3 \ln x = 0$; c) $\sin x + \cos x + m = 0$.

## Teorema lui Lagrange

Cu ajutorul teoremei lui Rolle vom demonstra teorema lui Lagrange (sau teorema creşterilor finite).

**Teoremă (Lagrange)** *Fie $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ şi $f : I \to \mathbb{R}$ o funcție continuă pe $[a, b]$ şi derivabilă pe $(a, b)$. Atunci există cel puțin un punct $\xi \in (a, b)$, astfel încât*

$$f(b) - f(a) = (b - a) f'(\xi).$$

*Demonstrație*

Considerăm funcția $h : [a, b] \to \mathbb{R}$, definită prin

$$h(x) = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} x, \ \forall x \in [a, b].$$

Evident funcția $h$ verifică ipotezele teoremei lui Rolle. Atunci există cel puțin un punct $\xi \in (a, b)$, astfel încât $h'(\xi) = 0$, sau echivalent,

$$f(b) - f(a) = (b - a) f'(\xi).$$

*Interpretare geometrică*

Dacă graficul unei funcții admite tangentă în fiecare punct, atunci există cel puțin un punct de pe grafic (diferit de extremități), în care tangenta este paralelă cu coarda care uneşte extremitățile (fig. 12).

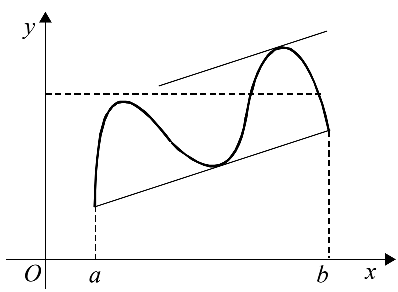



**Figura 12**

**Observații:** 1) Teorema lui Rolle poate fi considerată un caz particular al teoremei lui Lagrange.

2) Punctul $\xi$ depinde atât de funcția $f$ cât şi de punctele $a$ şi $b$ din domeniul de definiție.

## Consecințe ale teoremei lui Lagrange

**Corolar 1.** *Dacă funcția $f : I \to \mathbb{R}$, are derivata nulă pe intervalul I, atunci este constantă pe acest interval şi reciproc.*

*Demonstrație*

Presupunem că $f'(x) = 0$, pentru orice $x \in I$.

Fie $a$ şi $b$ două puncte distincte din $I$. Aplicând teorema lui Lagrange, există cel puțin un punct $\xi$ situat între a şi b astfel încât:

$$f(b) - f(a) = (b-a)f'(\xi) = 0,$$

deci $f(a) = f(b)$. Cum punctele $a$ şi $b$ au fost alese arbitrar, rezultă că $f$ este constantă.

Reciproc este evident.

**Observație:** Dacă domeniul de definiție al funcției $f$ nu este un interval, atunci rezultatul de mai sus nu mai este adevărat.

*Contraexemplu*

Fie $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$, definită prin $f(x) = \dfrac{|x|}{x}$, $\forall x \in \mathbb{R}^*$.

Evident $f'(x) = 0$, $\forall x \in \mathbb{R}^*$, dar $f$ nu este constantă pe întreg domeniul de definiție.

**Corolar 2.** *Dacă funcțiile $f$, $g : I \to \mathbb{R}$ au derivate egale pe intervalul I, atunci diferența lor este constantă pe acest interval (altfel spus, funcțiile diferă printr-o constantă).*

*Demonstrație*

Aplicăm corolarul 1 funcției $f - g$.

**Observație:** Dacă domeniul de definiție al funcțiilor $f$, $g$ nu este un interval, atunci rezultatul de mai sus nu mai este adevărat.

*Contraexemplu*

Fie $f, g : (0, \pi) - \left\{\frac{\pi}{2}\right\} \to \mathbb{R}$ definite prin $f(x) = \operatorname{tg} x$,

$$g(x) = \begin{cases} \operatorname{tg} x + 1, & x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \\ \operatorname{tg} x - 1, & x \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right) \end{cases}.$$

Evident $f'(x) = g'(x) = \dfrac{1}{\cos^2 x}$, $\forall x \in (0, \pi) - \left\{\frac{\pi}{2}\right\}$ dar $f - g$ nu este constantă pe tot domeniul de definiție.

Cu ajutorul semnului derivatei, putem stabili monotonia unei funcții derivabile pe un interval.

**Propoziția 1.** *Fie $f : I \to \mathbb{R}$, o funcție derivabilă pe intervalul $I$.*

*i) Dacă $f'$ este strict pozitivă pe $I$, atunci $f$ este strict crescătoare pe $I$.*

*ii) Dacă $f'$ este strict negativă pe $I$, atunci $f$ este strict decrescătoare pe $I$.*

*Demonstrație*

Fie $x_1 < x_2$ două puncte din intervalul $I$. Aplicând teorema lui Lagrange funcției $f$ pe intervalul $[x_1, x_2]$, rezultă că există cel puțin un punct $\xi \in (x_1, x_2)$ astfel încât

$$f(x_2) - f(x_1) = (x_2 - x_1) f'(\xi).$$

Dacă $f'$ este strict pozitivă, rezultă că $f(x_2) > f(x_1)$, adică $f$ este strict crescătoare pe $I$.

Dacă $f'$ este strict negativă, rezultă că $f(x_2) < f(x_1)$, adică $f$ este strict descrescătoare pe $I$.

**Corolar 3.** *Fie $f : I \to \mathbb{R}$ o funcție derivabilă pe intervalul I. Atunci:*

i) *Funcția $f\,'$ este pozitivă pe I dacă și numai dacă f este crescătoare pe I.*

ii) *Funcția $f\,'$ este negativă pe I dacă și numai dacă f este descrescătoare pe I.*

*Demonstrație*

Implicația „⇒” rezultă din demonstrația propoziției 1.

Implicația „⇐” rezultă din definiția derivatei.

**Propoziția 2.** *Fie $f : I \to \mathbb{R}$ o funcție continuă pe un interval I și $x_0 \in I$. Dacă f este derivabilă pe $I \setminus \{x_0\}$ și derivata sa $f\,'$ are limită în punctul $x_0$, atunci există $f\,'(x_0)$ și*

$$f\,'(x_0) = \lim_{x \to x_0} f\,'(x).$$

*Demonstrație*

Notăm $\lim\limits_{x \to x_0} f\,'(x) = l$. Fie $(x_n)_{n \geq 1}$ un şir de numere din $I$, $x_n \neq x_0$ şi $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = x_0$.

Pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$, aplicăm teorema lui Lagrange funcției $f$ pe intervalul $[x_0, x_n]$, dacă $x_0 < x_n$, (respectiv $[x_n, x_0]$, dacă $x_n < x_0$). Atunci există un punct $\xi_n$ astfel încât

$$f(x_n) - f(x_0) = (x_n - x_0) f\,'(\xi_n).$$

Din alegerea punctelor $\xi_n$ avem $\lim\limits_{n \to \infty} \xi_n = x_0$ şi $\xi_n \neq x_0$ Conform ipotezei, rezultă

$$\lim_{n \to \infty} \frac{f(x_n) - f(x_0)}{x_n - x_0} = \lim_{n \to \infty} f\,'(\xi_n) = l.$$

Cum şirul $(x_n)_{n \geq 1}$ a fost ales arbitrar, rezultă că există $f\,'(x_0) = l$.

***Exemplu***

Fie funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\begin{cases} x^2, & x\le 1\\ \ln x+x, & x>1\end{cases}.$

Pentru orice $x\neq 1$, avem $f'(x)=\begin{cases} 2x, & x<1\\ \dfrac{1}{x}+1, & x>1\end{cases}.$

$\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}} f'(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}} f'(x)=2$, deci $f$ este derivabilă în $x_0=1$ şi $f'(1)=2$.

**Observaţie:** Propoziţia 2 exprimă o condiţie suficientă ca funcţia $f$ să fie derivabilă în $x_0$. Dar această condiţie nu este şi necesară.

De exemplu funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\begin{cases} x^2\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases},$

este derivabilă în punctul $x_0=0$, dar $\lim\limits_{x\to 0} f'(x)$ nu există (acest fapt se verifică cu uşurinţă).

## Teorema lui Cauchy

O generalizare a teoremei lui Lagrange este următoarea:

**Teoremă (Cauchy)** *Fie $a, b, \in\mathbb{R}$, $a<b$ şi $f, g:[a, b]\to\mathbb{R}$ două funcţii continue pe $[a, b]$ şi derivabile pe $(a, b)$, cu $g'(x)\neq 0$, pentru orice $x\in(a, b)$. Atunci $g(a)\neq g(b)$ şi există cel puţin un punct $\xi\in(a, b)$ astfel încât:*

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}.$$

*Demonstraţie*

Observăm că $g(a)\neq g(b)$. În caz contrar, teorema lui Rolle implică faptul că derivata $g'$ se anulează într-un punct din intervalul $(a, b)$ – contradicţie.

Considerăm funcţia $h:[a, b]\to\mathbb{R}$, definită prin

$$h(x)=f(x)-\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}g(x),\quad \forall x\in[a, b].$$

Evident funcția $h$ verifică ipotezele teoriei lui Rolle. Atunci există cel puțin un punct $\xi \in (a, b)$ astfel încât $h'(\xi) = 0$, sau echivalent,

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}.$$

## Teorema lui Darboux

În capitolul precedent am demonstrat că funcțiile continue au proprietatea lui Darboux. De asemenea am observat că există şi funcții discontinue care au proprietatea lui Darboux.

În continuare vom arăta că şi funcțiile derivate au proprietatea lui Darboux, adică transformă orice interval tot într-un interval.

| | |
|---|---|
| **Teoremă (Darboux)** | *Fie $I \subset \mathbb{R}$ un interval şi $f: I \to \mathbb{R}$ o funcție derivabilă. Atunci funcția derivată $f'$ are proprietatea lui Darboux.* |

*Demonstrație*

Fie $a$, $b \in I$ *cu* $a < b$ *şi* $f(a) \neq f(b)$; fie $\xi$ un punct situat între $f'(a)$ şi $f'(b)$. Presupunem că $f'(a) < \xi < f'(b)$. Ne propunem să arătăm că există $c \in (a, b)$ astfel încât $f'(c) = \xi$.

Pentru aceasta consideram funcția $h : I \to \mathbb{R}$, definită prin

$$h(x) = f(x) - \xi x, \quad \forall x \in I.$$

Evident $h$ este derivabilă şi $h'(x) = f'(x) - \xi$, pentru orice $x \in I$.

Funcția $h$ este derivabilă, deci, în particular, continuă. Prin urmare ea este mărginită şi își atinge marginile pe intervalul compact $[a, b]$.

Inegalitățile $f'(a) < \xi < f'(b)$ implică $h'(a) < 0 < h'(b)$. Deoarece $h'(a) < 0$, rezultă că există o vecinătate $V$ a lui $a$ astfel încât

$$\frac{h(x)-h(a)}{x-a} < 0, \; \forall x \in V \cap I.$$

Dacă $x \in V \cap [a, b]$, avem $x > a$; deci $h(x) < h(a)$, pentru orice $x \in V \cap [a, b]$.

Prin urmare $h$ își atinge marginea inferioară pe $[a, b]$ într-un punct $c$ diferit de $a$.

Analog, $h'(b) > 0$ implică existența unei vecinătăți $W$ a lui $b$ astfel încât:

$$\frac{h(x)-h(b)}{x-b} > 0,\ \forall x \in W \cap I.$$

Dacă $x \in W \cap [a, b]$, avem $x < b$; deci $h(x) < h(b)$, pentru orice $x \in W \cap [a, b]$. Prin urmare punctul $c$ de minim absolut pe [a, $b$] este diferit de $b$. În concluzie $c \in (a, b)$.

Aplicând teorema lui Fermat restricției funcției $h$ la intervalul $[a, b]$, rezultă că $h'(c) = 0$, sau echivalent, $f'(c) = \xi$, ceea ce trebuia demonstrat.

## Exerciții rezolvate

**I.** Să se determine punctele critice pentru funcțiile următoare, unde $D \subset \mathbb{R}$ este domeniul maxim de definiție:

**1.** $f: D \to \mathbb{R},\ f(x) = x^3 - 3x^2$;

**2.** $f: D \to \mathbb{R},\ f(x) = x\, e^x$;

**3.** $f: D \to \mathbb{R},\ f(x) = \ln(x^2 - x + 1)$;

**4.** $f: D \to \mathbb{R},\ f(x) = e^{2x} + e^{-2x}$;

**5.** $f: D \to \mathbb{R},\ f(x) = \sin x + \cos x$;

**6.** $f: D \to \mathbb{R},\ f(x) = \arcsin x - \arccos x$;

**7.** $f: D \to \mathbb{R},\ f(x) = \operatorname{arctg}\frac{1}{x}$.

*Soluții:*

**1.** $f'(x) = 3x^2 - 6x,\ f'(x) = 0 \Rightarrow 3x(x-2) = 0 \Rightarrow x_1 = 0, x_2 = 2; x_1, x_2 \in D = \mathbb{R}$;

**2.** $f'(x) = e^x(x+1),\ f'(x) = 0 \Rightarrow x + 1 = 0 \Rightarrow x = -1 \in D = \mathbb{R}$;

**3.** $f'(x) = \dfrac{2x-1}{x^2-x+1},\ f'(x) = 0 \Rightarrow 2x - 1 = \dfrac{1}{2} \in D = \mathbb{R}$;

**4.** $f'(x) = 2\,e^{2x} - 2\,e^{-2x} = 2(e^{2x} - e^{-2x}) = 0 \Rightarrow x_0 = 0 \in D = \mathbb{R}$;

**5.** $f'(x)=\cos x-\sin x$, $f'(x)=0 \Rightarrow \sin x=\cos x \Rightarrow \operatorname{tg} x=1 \Rightarrow x \in \{\frac{\pi}{4}+k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$;

**6.** $f'(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}+\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}=\frac{2}{\sqrt{1-x^2}}$ ; $f$ nu admite puncte critice;

**7.** $f'(x)=\frac{1}{1+\left(\frac{1}{x}\right)^2}\left(\frac{1}{x}\right)'=\frac{x^2}{x^2+1}\cdot\frac{-1}{x^2}=-\frac{1}{x^2+1}$ ; $f$ nu admite puncte critice.

**II.** Să se determine punctele de extrem local pentru următoarele funcții şi să se precizeze natura punctelor de extrem pentru fiecare dintre următoarele funcții:

**1.** $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=x^2-3x+2$;

**2.** $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=x^4-4x^3$;

**3.** $f:\mathbb{R}\setminus\{0\}\to\mathbb{R},\ f(x)=\frac{x+1}{x}$;

**4.** $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=x^2e^x$;

**5.** $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\frac{x}{e^x}$;

**6.** $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R},\ f(x)=\frac{\ln x}{x}$;

**7.** $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=|x^2-1|$;

8. $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=e^{-x^2+x}$.

*Soluții:*

Pentru uşurință, vom realiza un tabel cu semnele derivatei de ordinul întâi pentru fiecare funcție.

**1.** $f'(x)=2x-3$; $f'(x)=0 \Rightarrow x=\frac{3}{2}$;

| $x$ | $-\infty$ | | $\frac{3}{2}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $-$ | 0 | $+$ | |
| $f(x)$ | $+\infty$ | $\searrow$ | $f\left(\frac{3}{2}\right)$ | $\nearrow$ | $+\infty$ |

Deci $x_0=\frac{3}{2}$ este abscisa punctului de minim.

**2.** $f'(x) = 4x^3 - 12x^2 = 4x^2(x-3)$; $f'(x) = 0 \Rightarrow x \in \{0, 3\}$;

| $x$ | $-\infty$ | | $0$ | | $3$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $- \; - \; -$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+ \; + \; +$ | |
| $f(x)$ | $+\infty$ | $\searrow$ | $0$ | $\searrow$ | $f(3)$ | $\nearrow$ | $+\infty$ |

Deci $x_0 = 3$ este abscisa punctului de minim.

**3.** $D' = \mathbb{R} \setminus \{0\}$: $f'(x) = \dfrac{x-(x+1)}{x^2} = -\dfrac{1}{x^2}$ ; funcția $f'$ nu se anulează şi păstrează tot timpul semnul minus.

**4.** $f'(x) = 2xe^x + x^2e^x = xe^x(x+2)$; $f'(x) = 0 \Rightarrow x \in \{-2, 0\}$;

| $x$ | $-\infty$ | | $-2$ | | $0$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f(x)$ | $0$ | $\nearrow$ | $f(-2)$ | $\searrow$ | $f(0)$ | $\nearrow$ | $+\infty$ |

Deci $x_0 = -2$ este abscisa punctului de maxim şi $x_0 = 0$ este abscisa punctului de minim.

**5.** $f'(x) = \left(\dfrac{x}{e^x}\right)' = \dfrac{e^x - xe^x}{e^{2x}} = \dfrac{1-x}{e^x}$; $f'(x) = 0 \Rightarrow x = 1$;

| $x$ | $-\infty$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $+ \; + \; +$ | $0$ | $- \; - \; -$ | |
| $f(x)$ | $-\infty$ | $\nearrow$ | $f(1) = \dfrac{1}{e}$ | $\searrow$ | $0$ |

Deci $x_0 = 1$ este abscisa punctului de maxim.

**6.** $f'(x) = \dfrac{\frac{1}{x}x - \ln x}{x^2} = \dfrac{1 - \ln x}{x^2}$ ; $f'(x) = 0 \Rightarrow \ln x = 1 \Rightarrow x = e$.

| $x$ | $0$ | | $e$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $+++$ | $0$ | $---$ | |
| $f(x)$ | $-\infty$ | $\nearrow$ | $f(e) = \dfrac{1}{e}$ | $\searrow$ | $0$ |

Deci $x_0 = e$ este abscisa punctului de maxim.

**7.** $f(x)=\begin{cases} x^2-1, & x\in(-\infty,-1]\cup[1,+\infty) \\ 1-x^2, & x\in(-1,1) \end{cases}$;

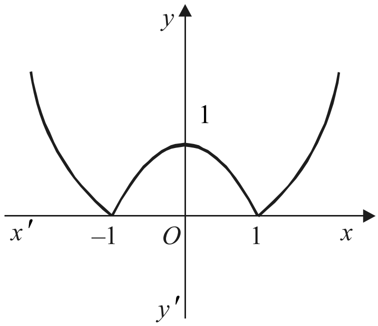



**Figura 13**

Funcția nu este derivabilă în punctele $x_1=-1$ şi $x_2=1$.
Graficul funcției este prezentat în figura de mai jos.

Se observă pe grafic că funcția admite un punct de extrem local $x_0=0$, care este punct de maxim.

$$f'(x)=\begin{cases} 2x, & x\in(-\infty,-1)\cup(1,+\infty) \\ -2x, & x\in(-1,1) \end{cases};\ f'(x)=0\Rightarrow x=0.$$

Tabelul pentru semnul derivatei este următorul:

| $x$ | $-\infty$ | | $-1$ | | $0$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $-\ -\ -$ | $\vert$ | $+\ +$ | $0$ | $-\ -\ -$ | $\vert$ | $+\ +\ +$ | |
| $f(x)$ | $+\infty$ | $\searrow$ | $0$ | $\nearrow$ | $1$ | $\searrow$ | $0$ | $\nearrow$ | $+\infty$ |

Deci $x_0=0$ este abscisa punctului de maxim local, iar $x_1=-1$, $x_2=1$ sunt abscisele punctelor de minim local.

**8.** $f'(x)=e^{-x^2+x}(-2x+1)$;

$f'(x)=0\Rightarrow -2x+1=0\Rightarrow x=\dfrac{1}{2}$;

| $x$ | $-\infty$ | | $\frac{1}{2}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $- -$ | $0$ | $+ +$ | |
| $f(x)$ | $+\infty$ | $\searrow$ | $f\left(\frac{1}{2}\right)$ | $\nearrow$ | $+\infty$ |

Deci $x_0 = \dfrac{1}{2}$ este abscisa punctului de minim.

## Exerciții propuse

**1.** Să se determine punctele critice pentru următoarele funcții:

a) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = e^x - 1;$

b) $f: \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R},\ f(x) = \dfrac{1}{x};$

c) $f: \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R},\ f(x) = \dfrac{e^x}{x};$

d) $f: \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\} \to \mathbb{R},\ f(x) = \dfrac{x^3 + x}{x^2 - 1};$

e) $f: (-\infty, -1] \cup [1, \infty) \to \mathbb{R},\ f(x) = \dfrac{1}{2}\sqrt{x^2 - 1};$

f) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = e^{-x^2};$

g) $f: (-1, 1) \to \mathbb{R},\ f(x) = \ln(1 - x^2);$

h) $f: \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R},\ f(x) = e^{-\frac{1}{x^2}}.$

**2.** Să se determine punctele de extrem pentru următoarele funcții:

a) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = \dfrac{x^3}{3} - \dfrac{3x^2}{2} + 2x + 1;$

b) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$;

c) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = e^x - x + 1$;

d) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = \sqrt[3]{x^3+1}$;

e) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = \dfrac{x}{1+x^2}$;

f) $f : (-\infty,1] \cup [2, +\infty),\ f(x) = \sqrt{x^2-3x+2}$;

g) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = \dfrac{e^x-1}{e^x+1}$;

h) $f : (0,+\infty) \setminus \{\dfrac{1}{e}\} \to \mathbb{R},\ f(x) = \dfrac{\ln x}{1+\ln x}$;

k) $f : (-1,1] \to \mathbb{R},\ f(x) = \sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}$;

l) $f : (0, +\infty) \setminus \{1\} \to \mathbb{R},\ f(x) = \dfrac{x}{\ln x}$;

m) i) $f : [0, 2\pi] \to \mathbb{R},\ f(x) = e^{\sin x} \cdot \cos x$; ii) $f : [0, 2\pi] \to \mathbb{R},\ f(x) = e^{\cos x} \cdot \sin x$;

n) $f : [0, 2\pi] \to \mathbb{R},\ f(x) = \sin x + \cos x$;

p) $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R},\ f(x) = \ln x - 2 \operatorname{arctg} x$;

q) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = \arcsin\dfrac{2x}{1+x^2}$;

r) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = \arccos\dfrac{1-x^2}{1+x^2}$;

s) $f : (0,+\infty) \setminus \{1\} \to \mathbb{R},\ f(x) = \arcsin\dfrac{\sqrt{x}}{x-1}$.

**3.** a) Să se precizeze coordonatele punctelor de extrem pentru funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = |x^2 - 3x - 10|$ și să se studieze valabilitatea teoremei lui Fermat pe următoarele intervale:

i) $I_1 = [-5, 0]$; ii) $I_2 = [\dfrac{3}{2}, 10]$.

b) Să se determine $a \in (0, +\infty)$, astfel încât

$$a^x + 1 \geq 5^x + 7^x, \forall x \in \mathbb{R}.$$

c) Fie $a_1, a_2, \dots a_n \in (0, +\infty)$, astfel încât

$$a_1^x + a_2^x + \dots + a_n^x \geq n, (\forall) x \in \mathbb{R}.$$

Să se arate că $a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n = 1$.

d) Se consideră numerele $a_1, a_2, \dots a_n \in (0, +\infty)$ şi $b_1, b_2, \dots b_n \in \mathbb{R}$ astfel ca $b_1 \cdot a_1^x + b_2 \cdot a_2^x + \dots + b_n \cdot a_n^x \geq b_1 + b_2 + \dots + b_n$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Să se arate că

$$a_1^{b_1} \cdot a_2^{b_2} \cdot \dots \cdot a_n^{b_n} = 1.$$

**4.** a) Să se determine o funcţie polinomială de grad cât mai mic posibil, ştiind că funcţia admite un maxim local egal cu $-1$ pentru $x = 1$ şi un minim local egal cu $-2$ pentru $x = 2$.

b) Se consideră funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = ax(x - a)(x - b)$, $a, b \in \mathbb{R}$. Să se determine $a$ şi $b$, astfel ca funcţia $f$ să admită un punct de minim pentru $x = \frac{4}{3}$ şi un maxim egal cu 6 pentru $x = 6$.

c) Se consideră funcţia $f : D \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \frac{x^2 + 2ax + b}{x^2 + 2cx + d}, \text{ unde } a, b, c, d \in \mathbb{R}.$$

Să se determine $a$, $b$, $c$, $d$ astfel ca funcţia să admită pentru $x = 1$ un maxim egal cu 2, iar pentru $x = 1$ un minim egal cu 4.

d) Fie funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x + a}{x^2 + b}$ $(a > 0, b > 0)$.

Notând cu $m$ şi $M$ minimul şi respectiv maximul funcţiei, să se determine relaţia dintre $a$ şi $b$ astfel încât să avem $2m + M = 0$.

e) Se consideră funcţia $f : D \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x + a}{x^2 + kx + k^2}$, unde $a$ şi $k > 0$.

Să se determine valorile parametrului $k$ în funcţie de $a$, astfel ca între ordonatele $y_1$ şi $y_2$ ale punctelor de extrem ale funcţiei să existe relaţia $\frac{1}{y_1} + \frac{1}{y_2} = 0$.

f) Se dă funcția $f: D \to \mathbb{R}$ $(D \subset \mathbb{R})$, $f(x) = \dfrac{ax}{x^2 + 3x + k^2}$. Să se determine valorile parametrilor reali $a$ şi $k$ astfel încât punctele de extrem ale funcției să aibă ordonatele –1, respectiv –2.

## Exerciții rezolvate

**I.** Să se studieze aplicabilitatea teoremei lui Rolle pentru următoarele funcții:

**1.** $f: [-3, 3] \to \mathbb{R}$, $f(x) = |x^2 - 9|$;

**2.** $f: [-1, \frac{\pi}{2}] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} 2x+1, & x \in [-1, 0) \\ 1 - 2\sin x, & x \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right] \end{cases}$;

**3.** $f: [0, 1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} x\sin\dfrac{\pi}{x}, & x \in (0, 1] \\ 0, & x = 0 \end{cases}$;

**4.** $f: [-1, 1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = |x|$;

**5.** $f: [-1, 1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{|x|}$;

**6.** $f: [-1, 1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} x^2 + 1, & x \in [-1, 0] \\ x + 1, & x \in (0, 1] \end{cases}$;

**7.** Să se determine parametrii $a, b, c \in \mathbb{R}$ astfel încât funcției:

$$f: [0, 2] \to \mathbb{R},\ f(x) = \begin{cases} cx^2 + 3x + a, & x \in [0, 1] \\ bx + 1, & x \in (1, 2] \end{cases},$$

să i se poată aplica teorema lui Rolle.

*Soluții:*

**1.** $f(-3) = f(3) = 0$; funcția este continuă pe $[-3, 3]$, nu este derivabilă în punctele $x_1 = -3$ şi $x_2 = 3$ şi este derivabilă pe $(-3, 3)$, deci verifică condițiile din teorema lui Rolle.

$$f(x) = 9 - x^2 \Rightarrow f'(x) = -2x \Rightarrow f'(x) = 0 \Rightarrow c = 0,\ c \in (-3, 3).$$

**2.** $f(-1) = f\left(\frac{\pi}{2}\right) = -1$; funcția este continuă în $x_0 = 0$, deci funcția este continuă pe $[-1, \frac{\pi}{2}]$. Studiem derivabilitatea în $x_0 = 0$, cu ajutorul derivatelor laterale.

$f_s'(0) = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} \frac{2x+1-1}{x} = 2$; $f_d'(0) = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{1-2\sin x - 1}{x} = -2$, deci funcția nu este derivabilă în punctul $x_0 = 0$ şi deci nu este derivabilă pe $(-1, \frac{\pi}{2})$. Astfel, funcția nu verifică condițiile din teorema lui Rolle.

**3.** $f(0) = f(1) = 0$; funcția este continuă în punctul $x_0 = 0$. Deoarece $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} x\sin\frac{\pi}{x} = 0 = f(0)$, rezultă că funcția este continuă pe $[0, 1]$. Funcția este derivabilă pe intervalul $(0, 1)$. Funcția $f$ verifică condițiile din teorema lui Rolle.

$$f'(x) = \left(x \sin \frac{\pi}{x}\right)' = \sin \frac{\pi}{x} + x \cos \frac{\pi}{x} \left(-\frac{\pi}{x^2}\right) =$$

$= \sin \frac{\pi}{x} - \frac{\pi}{x} \cos \frac{\pi}{x}$, $\forall x \in (0, 1)$, deci există $c \in (0, 1)$ astfel încât să avem:

$\sin\frac{\pi}{c} - \frac{\pi}{c}\cos\frac{\pi}{c} = 0 \Rightarrow \operatorname{tg}\frac{\pi}{c} = \frac{\pi}{c}$. Se observă că $\frac{\pi}{c}$ este o soluție a ecuației: $\operatorname{tg} x = x$.

**4.** $f(-1) = f(1) = 1$; funcția este continuă în $x_0 = 0$, dar nu este derivabilă în acest punct, deci nu i se poate aplica teorema lui Rolle.

**5.** $f(x) = \begin{cases} \sqrt{-x}, & x \in [-1, 0) \\ \sqrt{x}, & x \in [0, 1] \end{cases}$;

Funcția verifică condiția $f(-1) = f(1) = 1$, este continuă pe intervalul $[-1, 1]$, nu este derivabilă în punctul $x_0 = 0$ şi deci nu este derivabilă pe $(-1, 1)$. Nu se poate aplica teorema lui Rolle.

**6.** $f(-1) = f(1) = 2$; $f_s'(0) = 0$; $f_d'(0) = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{x+1-1}{x} = 1$, deci funcția nu este derivabilă în $x_0 = 0$ şi nu i se poate aplica teorema lui Rolle.

**7.** $f(0) = f(2) \Rightarrow a = 2b + 1$:

Punând condiția de continuitate în punctul $x_0 = 1$, deducem $c + 3 + a = b + 1$.

Punând condiția de derivabilitate în punctul $x_0 = 1$, deducem $2c + 3 = b$.

Din condițiile $\begin{cases} a = 2b+1 \\ c + a - b = -2 \\ 2c + 3 = b \end{cases}$, se determină $a = -1$, $b = -1$, $c = -2$.

Înlocuind, obținem funcția $f : [0, 2] \to \mathbb{R}$:

$$f(x) = \begin{cases} -2x^2 + 3x - 1, & x \in [0, 1] \\ -x + 1, & x \in (1, 2] \end{cases}.$$

Avem: $$f'(x) = \begin{cases} -4x + 3, & x \in (0, 1] \\ -1, & x \in (1, 2) \end{cases};$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow x = \frac{3}{4} \Rightarrow c = \frac{3}{4} \in (0, 1].$$

**II.** Să se analizeze pentru care din funcțiile de la (I) se poate aplica teorema lui Lagrange şi în caz afirmativ să se determine punctul intermediar $c$.

*Soluții:*

**1.** Funcția $f : [-3, 3]$, $f(x) = 9 - x^2$ verifică condițiile din teorema lui Lagrange:
$f(3) - f(-3) = (3 - (-3)) \cdot f'(c) \Rightarrow 0 = -2c \Rightarrow c = 0$.

**2.** Funcția nu este derivabilă pe $(-1, \frac{\pi}{2})$, deci nu se poate aplica teorema lui Lagrange.

**3.** Se poate aplica teorema lui Lagrange.

$f(1) - f(0) = (1 - 0)\, f'(c) \Rightarrow f'(c) = 0 \Rightarrow c$ este rădăcină a ecuației $\operatorname{tg} x = x$.

**4.** Nu verifică condițiile din teorema lui Lagrange (funcția nu este derivabilă în punctual $x_0 = 0$).

**5.** Nu verifică condițiile din teorema lui Lagrange (funcția nu este derivabilă în punctul $x_0 = 0$).

**6.** Nu verifică condițiile din teorema lui Lagrange (funcția nu este derivabilă în punctual $x_0 = 0$).

**7.** Verifică condițiile din teorema lui Lagrange:

$f(2) - f(0) = f'(c)(2 - 0) \Rightarrow -1 - (-1) = f'(c)(2 - 0) \Rightarrow f'(c) = 0 \Rightarrow c = 1$.

**III.**

**1.** Să se studieze derivabilitatea funcției:

$$f:(0,+\infty)\to \mathbb{R},\ f(x)=\begin{cases}(\ln x)^3, & x\in(0,e)\\ \dfrac{3}{e}x-2, & x\in[e,+\infty)\end{cases}.$$

**2.** Să se demonstreze că

$$\arccos\frac{1-x^2}{1+x^2}=2\ \mathrm{arctg}\, x,\ (\forall)\ x\in[0,+\infty).$$

**3.** Se consideră funcțiile $f, g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\arcsin\dfrac{x-1}{2\sqrt{2(1+x^2)}}$, $g(x)=\mathrm{arctg}\, x$.

Să se arate că:

i) $f(x)-g(x)=-\dfrac{3\pi}{4}$, $\forall x\in(-\infty,-1]$;

ii) $f(x)+g(x)=-\dfrac{\pi}{4}$, $\forall x\in[-1,+\infty)$.

**4.** Să se arate că:

a) $\cos^2 x+\sin^2 x=1$, $\forall x\in\mathbb{R}$;

b) $\mathrm{arctg}\, x+\mathrm{arctg}\,\dfrac{1}{x}=\begin{cases}\dfrac{\pi}{2}, & x>0\\ -\dfrac{\pi}{2}, & x<0\end{cases}$;

c) $\arcsin(3x-4x^3)=3\arcsin x$, $\forall x\in\left[-\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2}\right]$;

d) $\arcsin\sqrt{1-x^2}+\arccos x=\pi$, $\forall x\in[-1,0]$.

**5.** Să se arate că: $e^x>ex$, $\forall x>1$.

**6.** Fie $0<a<b<\dfrac{\pi}{2}$. Să se demonstreze inegalitatea:

$$\frac{b-a}{\sin^2 a}<\mathrm{ctg}\, a-\mathrm{ctg}\, b<\frac{b-a}{\sin^2 b}.$$

**7.** Să se demonstreze inegalitățile:

a) $\dfrac{1}{n+1}<\ln(n+1)-\ln n<\dfrac{1}{n}$, $\forall n\in\mathbb{N}^*$;

b) $\ln\ln(n+1)-\ln\ln n<\dfrac{1}{n\ln n}$, $\forall n\in\mathbb{N}$, $n\geq 3$.

**8.** Să se arate că există inegalitatea:

$$\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{5}<\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{4}.$$

**9.** Pentru $1 \le a < b$ şi $n \in \mathbb{N}^*$, să se arate că:

$$\frac{b^n - a^n}{n} < \frac{b^{n+1} - a^{n+1}}{n+1}.$$

**10.** Folosind corolarul teoremei lui Langrage, să se calculeze derivatele laterale ale următoarelor funcții, în punctele specificate:

a) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = \begin{cases} x^2+1, & x \le 0 \\ 3^{-x}, & x > 0 \end{cases},\ x_0 = 0$;

b) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = \begin{cases} x^2, & x \le 1 \\ \ln x + x, & x > 1 \end{cases},\ x_0 = 0$;

c) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = \sqrt{|x|}$, $x_0 = 0$;

d) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = \begin{cases} -1, & x < 0 \\ 0, & x = 0 \\ 1, & x > 0 \end{cases},\ x_0 = 0$;

e) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = \begin{cases} x^2 \cos\frac{1}{x}, & x \ne 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases},\ x_0 = 0$.

**11.** Să se determine $a, b \in \mathbb{R}$ astfel încât funcția

$$f : (0, +\infty) \to \mathbb{R},\ f(x) = \begin{cases} \ln^3 x, & x \in (0, e] \\ ax + b, & x \in (e, +\infty) \end{cases}$$

să fie derivabilă pe tot domeniul de definiție.

*Soluții:*

**1.** $\lim\limits_{\substack{x \to e \\ x<e}} f(x) = 1$; $\lim\limits_{\substack{x \to e \\ x>e}} f(x) = 1 = f(e)$, rezultă că funcția $f$ este continuă în punctul $x_0 = e$.

Funcția $f$ este derivabilă pe fiecare din intervalele deschise $(0, e)$ şi $(e, +\infty)$ şi avem:

$$f'(x)=\begin{cases} 3\dfrac{\ln^2 x}{x}, & x\in(0,e) \\ \dfrac{3}{e}, & x\in(e,0) \end{cases};$$

$$\lim_{\substack{x\to e\\ x<e}} f'(x)=\frac{3}{e};\ \lim_{\substack{x\to e\\ x>e}} f'(x)=\frac{3}{e}.$$

Conform corolarului teoremei lui Lagrange funcția este derivabilă în $x_0 = e$, deci implicit este derivabilă pe $(0, +\infty)$ şi

$$f'(x)=\begin{cases} \dfrac{3\ln^2 x}{x}, & x\in(0,e) \\ \dfrac{3}{e}, & x\in[e,+\infty) \end{cases}.$$

**2.** Fie $f: [0, +\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \arccos\dfrac{1-x^2}{1+x^2} - 2\operatorname{arctg} x$; după calcule obținem:

$$f'(x)=\begin{cases} 0, & x\in(0,+\infty) \\ -\dfrac{4}{1+x^2}, & x\in(-\infty,0) \end{cases}.$$

Se observă că pe intervalul $(0, +\infty)$ funcția derivată este nulă, deci $f(x) = c$ (constant), $\forall\, x \in [0, +\infty) \Rightarrow c = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x) = f(0)$, deci $f(x) = 0$, $\forall\, x \in [0, +\infty)$.

**3.** Avem $f'(x)=\begin{cases} -\dfrac{1}{1+x^2}, & x\in(-\infty,-1) \\ \dfrac{1}{1+x^2}, & x\in(-1,+\infty) \end{cases}$, $g'(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

Atunci există $\lambda \in \mathbb{R}$ astfel încât $f(x) - g(x) = \lambda$, $\forall x \in (-1, +\infty)$ şi există $\mu \in \mathbb{R}$ astfel încât $f(x) + g(x) = \mu$, $\forall\, x \in (-\infty, -1)$.

Trecând la limită, avem:

$$\lambda=\lim_{\substack{x\to -1\\ x>-1}}(f(x)-g(x))=-\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{4}=-\frac{\pi}{4}$$

şi

$$\mu=\lim_{\substack{x\to -1\\ x<-1}}(f(x)+g(x))=\frac{3\pi}{4},\ (\forall)x\in(-\infty,-1].$$

**4.** Se va proceda ca şi în cazul exercițiului 3.

**5.** Fie intervalul $[1, x]$ şi funcția $f : [1, x] \to \mathbb{R}$, $f(t) = e^t - et$.

Aplicând teorema lui Lagrange, vom avea:

$$f(x) - f(1) = f'(c)(x-1) \Rightarrow e^x - ex = (e^c - e)(x-1) \Rightarrow e^x - ex > 0 \Rightarrow$$
$$e^x > ex,\ \forall x > 1.$$

**6.** Fie intervalul $[a, b] \subset \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ şi funcția $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \operatorname{ctg} x$.

Aplicăm teorema lui Lagrange şi obținem:

$$\operatorname{ctg} a - \operatorname{ctg} b = -\frac{1}{\sin^2 c}(a-b),\ a < c < b \Rightarrow \sin^2 c\ \frac{b-a}{\operatorname{ctg} a - \operatorname{ctg} b}$$

Cum funcția sinus este strict crescătoare pe $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, din relația $a < c < b$, obținem: $\sin a < \sin c < \sin b \Rightarrow \sin^2 a < \sin^2 c < \sin^2 b$. Înlocuind pe $\sin^2 c$ cu expresia de mai sus obținem:

$$\frac{b-a}{\sin^2 a} < \operatorname{ctg} a - \operatorname{ctg} b < \frac{b-a}{\sin^2 b}.$$

**7.** a) Pe intervalul $[n, n+1]$, se aplică teorema lui Lagrange funcției $f(x) = \ln x$.

b) Pe intervalul $[\ln n, \ln(n+1)]$, se aplică, teorema lui Lagrange funcției $f(x) = \ln x$

**8.** Pe intervalul $[2, 3]$, se aplică teorema lui Lagrange funcției:

$$f(x) = \sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{7-x}.$$

**9.** Pe intervalul $[n, n+1]$, se aplică teorema lui Lagrange funcției:

$$f(x) = \frac{b^x - a^x}{x} \text{ şi obținem:}$$

$$\frac{b^{n+1} - a^{n+1}}{n+1} - \frac{b^n - a^n}{n} = f'(c) > 0 \text{ pentru } n < c < n+1 \Rightarrow \frac{b^{n+1} - a^{n+1}}{n+1} > \frac{b^n - a^n}{n}$$

**10.** a) $f'(x) = \begin{cases} 2x, & x < 0 \\ -3^{-x}\ln 3, & x > 0 \end{cases}$, $\left(\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} f'(x) = 0;\ \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f'(x) = 0\right) \Rightarrow f'(0) = 0.$

b) $f'(x)=\begin{cases} 2x, & x\le 1 \\ \dfrac{1}{x}+1, & x>1 \end{cases}$, $\left(\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}} f(x)=2;\ \lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}} f(x)=2\right) \Rightarrow f'(1)=2.$

c) Funcția nu este derivabilă în punctul $x_0 = 0$.

d) Funcția nu este continuă în punctul $x_0 = 0$.

e) Pentru $x \neq 0$ $f'(x)=2x\cos\dfrac{1}{x}+\sin\dfrac{1}{x}$, deci $\lim\limits_{x\to 0} f'(x)$ nu există.

**Observații:** **1.** Nu putem aplica corolarul teoremei lui Lagrange. Derivata funcției $f$ în punctul $x_0$ se calculează plecând de la definiția derivatei într-un punct. Astfel $f'(0)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2\cos\frac{1}{x}}{x}=\lim\limits_{x\to 0} x\cos\dfrac{1}{x}=0$, deci funcția este derivabilă în punctul zero.

**2.** O funcție poate să admită derivată într-un punct fără ca funcția să fie continuă în acel punct.

De exemplu, funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$,

$f(x)=\begin{cases} \dfrac{e^x-1}{x^2}, & x\neq 0 \\ 0, & x=0 \end{cases}$ este discontinuă în $x_0 = 0$, dar $f'(0) = +\infty$

(verificarea se face imediat).

**11.** Din condiția de continuitate în $x_0 = e$ obținem: $1 = ae + b$, şi din condiția de derivabilitate (în $x_0 = e$) obținem $a = 3$; în final $a = 3$, $b = 1 - 3e$.

## Exerciții propuse

**I.** Să se verifice aplicabilitatea teoremei lui Rolle pentru următoarele funcții şi în caz afirmativ, să se aplice efectiv această teoremă:

**1.** a) $f:[0, 3]\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases} 2x, & x\in[0,1] \\ 2-x, & x\in[1,3] \end{cases}$;

b) $f:[-1, 1]\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases} x^4, & x\in[-1,0] \\ x^2, & x\in[0,1] \end{cases}$;

c) $f:[-1, 1]\to\mathbb{R}$, $f(x)=|x^3-x|$;

d) $f : [0, \frac{\pi}{4}] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} \operatorname{tg} x, & x \in [0, \frac{\pi}{4}) \\ \operatorname{ctg} x, & x \in [\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}] \end{cases}$;

e) $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} x^2 + 1, & x \in [-1, 0] \\ x + 1, & x \in (0, 1] \end{cases}$;

f) $f : [0, \frac{\pi}{2}] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} \cos x, & x \in [0, \frac{\pi}{4}] \\ \sin x, & x \in (\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}] \end{cases}$.

**2.** a) Fie funcția $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} x^2 + mx + n, & x \in [-1, 0] \\ px^2 + 4x + 4, & x \in [0, 1] \end{cases}$.

Să se determine parametrii reali $m$, $n$, $p$ astfel încât funcției $f$ să i se poată aplica teorema lui Rolle.

b) Să se determine $a, b, c \in \mathbb{R}$, astfel încât funcției $f : [-2, e-2] \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} (a-1)x^2 + bx + c, & x \in [-2, -1) \\ \ln(x+2), & x \in [-1, e-2] \end{cases}$$

să i se poată aplica teorema lui Rolle.

c) Există valori ale parametrilor $m, n \in \mathbb{R}$, astfel încât funcției $f : [0, 2] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} m\ln(1+x), & x \in [0, e-1) \\ x^2 - 4x + n, & x \in [e-1, 2] \end{cases}$ să i se poată aplica teorema lui Rolle?

**II. 1.** Să se studieze aplicabilitatea teoremei lui Lagrange pentru următoarele funcții:

a) $f : [0, 2] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} x^2, & x \in [0, 1] \\ 2x - 1, & x \in (1, 2] \end{cases}$;

b) $f : [1, 3] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} \ln x, & x \in [1, e] \\ \frac{x}{e}, & x \in [e, 3] \end{cases}$;

c) $f : [-3, -1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} x^2 + 4x + 9, & x \in [-3, -2) \\ x^3 + 3x^2 + 1, & x \in [-2, -1] \end{cases}$;

d) $f : [-4, 3] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{2} + 1, & x \in [-4, 0] \\ \sqrt{x+1}, & x \in (0, 3] \end{cases}$.

**2.** Să se determine valorile parametrilor $p$ şi $q \in \mathbb{R}$, astfel încât să se poată aplica teorema lui Lagrange următoarelor funcţii:

a) $f : [-1, 3] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} \ln^3(x+2), & x \in [-1, e-2) \\ (p+1)x + p + q, & x \in [e-2, 3] \end{cases}$;

b) $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} x^2 + p, & -1 \le x \le 0 \\ (qx)^{x^2}, & 0 < x \le 1 \end{cases}$;

c) $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} pe^{2x}, & x \in [-1, 0] \\ \sin 2x + (q+1)\cos 3x, & x \in (0, 1] \end{cases}$.

**III. 1.** Să se calculeze valoarea punctului intermediar din teorema lui Lagrange pentru următoarele funcţii:

a) $f : [1,2] \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^3 - x$;

b) $f : [1, 2] \to \mathbb{R}$, $f(x) = x + \dfrac{1}{x}$;

c) $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \arccos x$;

d) $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \operatorname{arctg} x$;

**2.** Aplicând teorema lui Lagrange, să se demonstreze următoarele inegalităţi:

a) $na^{n-1} < \dfrac{b^n - a^n}{b-a} < nb^{n-1}$, $b > a \ge 0$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$;

b) $\dfrac{b-a}{b} < \ln\dfrac{b}{a} < \dfrac{b-a}{a}$, $0 < a < b$;

c) $\sin x > \dfrac{2}{\pi}x$, $0 < x < \dfrac{\pi}{2}$;

d) $\cos x \geq 1 - \dfrac{x^2}{2}$, $\forall x \geq 0$;

e) $\dfrac{b-a}{\cos^2 a} < \operatorname{tg} b - \operatorname{tg} a < \dfrac{b-a}{\cos^2 b}$, $0 \leq a < b < \dfrac{\pi}{2}$;

f) $\dfrac{b-a}{\sin^2 b} < \operatorname{ctg} b - \operatorname{ctg} a < \dfrac{b-a}{\sin^2 a}$, $\dfrac{\pi}{2} \leq a < b < \pi$;

g) $e^{\frac{a+b}{2}} \leq \dfrac{e^a + e^b}{2}$, $(\forall)\ a, b \in \mathbb{R}$;

h) $\arcsin x > x - \dfrac{x^3}{3!}$, $-1 \leq x \leq 1$;

i) $e^x > x + 1$, $(\forall) x \in \mathbb{R}$;

j) $\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x < \left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x+1}$, $\forall x \in (0, +\infty)$.

**3.** Utilizând consecințe ale teoremei lui Lagrange, să se demonstreze:

a) $\arcsin x + \arccos x = \dfrac{\pi}{2}$, $(\forall) x \in [-1, 1]$;

b) $\operatorname{arctg} x + \operatorname{arcctg} x = \dfrac{\pi}{2}$;

c) $\operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} \dfrac{1}{x} = \begin{cases} \dfrac{-\pi}{2}, & x \in (-\infty, 0) \\ \dfrac{\pi}{2}, & x \in [0, +\infty) \end{cases}$;

d) $\arcsin \dfrac{2x}{1+x^2} + 2\operatorname{arctg} x = \begin{cases} -\pi, & x \leq -1 \\ \pi, & x \geq 1 \end{cases}$;

e) $\operatorname{arctg} x + \operatorname{arcctg} \dfrac{1-x}{1+x} = \begin{cases} \dfrac{\pi}{4}, & x \in (-1, +\infty) \\ \dfrac{3\pi}{4}, & x \in (-\infty, -1] \end{cases}$;

f) $\arccos \dfrac{1-x^2}{1+x^2} + 2 \operatorname{sgn} x \cdot \operatorname{arctg} x = 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$;

g) $2\operatorname{arctg} x + \arcsin \dfrac{2x}{1+x^2} = \begin{cases} -\pi, & x \in (-\infty, -1] \\ \pi, & x \in [1, +\infty) \end{cases}$.

**4.** Să se arate că următoarele funcţii diferă printr-o constantă pe anumite intervale. Se vor preciza intervalele şi constantele respective.

a) $f, g : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{x^2}{2}$, $g(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2}{2} + 1, & x < 0 \\ \dfrac{x^2}{2} + 2, & x > 0 \end{cases}$;

b) $f, g : \mathbb{R} \setminus \{1\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} \ln(1-x), & x < 1 \\ \ln(x-1), & x > 1 \end{cases}$, $g(x) = \begin{cases} \ln(1-x) + 2, & x < 1 \\ \ln(x-1), & x > 1 \end{cases}$;

c) $f(x) = \arcsin x \sqrt{1-x^2}$, $g(x) = 2 \arcsin x$;

d) $f(x) = \arcsin(3x - 4x^3)$, $g(x) = 3 \arcsin x$;

e) $f(x) = \arcsin \dfrac{2x}{1+x^2}$, $g(x) = 2 \operatorname{arctg} x$.

**5.** a) Să se determine punctul $c_n$ din teorema lui Lagrange, aplicată funcţiei $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^n$ şi să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} c_n$.

b) i) Să se dea un exemplu de funcţie $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, pentru care punctul $c$ din teorema lui Lagrange nu este unic.

ii) Să se precizeze o condiţie suficientă pentru ca punctul $c$ intermediar, din teorema lui Lagrange, să fie unic.

c) Să se deducă inegalităţile:

i) $e^x \geq 1 + x$, $\forall x > -1$;

ii) $x > \sin x > x - \dfrac{x^3}{6}$, $\forall x > 0$;

iii) $e^{-x} < 1 - \dfrac{x}{1!} + \dfrac{x^2}{2!}$, $\forall x < 0$;

iv) $e^x > 1 + \dfrac{x}{1!} + \dfrac{x^2}{2!} + \ldots + \dfrac{x^n}{n!}$, $\forall x > 0$.

d) Să se stabilească monotonia următoarelor funcţii:

i) $f : (0, +\infty) \to (0, +\infty)$, $f(x) = (1 + \alpha^x)^{\frac{1}{x}}$, $\alpha > 1$;

ii) $f : (0, +\infty) \to (0, +\infty)$, $f(x) = (a^x + b^x)^{\frac{1}{x}}$ $a \neq 1, a > 0, b \neq 1, b > 0$.

e) Să se rezolve următoarele ecuaţii:

i) $2^x + 3^x = 5^x + 6^x$;

ii) $10^x + 6^x + 4^x = 8^x + 7^x + 5^x$;

iii) $9^x + 1 = 2^x + 8^x$.

f) Să se calculeze următoarele limite:

$\alpha_1$) $\lim\limits_{n\to\infty} n^2\left(e^{\frac{1}{n}} - e^{\frac{1}{n+1}}\right)$; $\alpha_2$) $\lim\limits_{n\to\infty} n\left(\frac{e^{n+1}}{n+1} - \frac{e^n}{n}\right)$;

$\alpha_3$) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n}\right)$; $\alpha_4$) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{(n+1)^{n+1}}{n^n}}$.

**6.** Să se aplice teorema lui Cauchy pentru următoarele perechi de funcţii, aflând şi punctul $c$ corespunzător:

a) $f, g : [1, e] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \ln x$, $g(x) = 2x - 1$;

b) $f, g : \left[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}\right] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sin x$, $g(x) = \cos x$;

c) $f, g : [1, e] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \ln x$, $g(x) = \frac{e}{x}$;

d) $f, g : [\sqrt{2}, 2] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \ln x$, $g(x) = x^2$.

## Test de aprofundare

**1.** Să se arate că $\forall x \in \mathbb{R}$, $|x| \leq \frac{\sqrt{2}}{2}$, avem:

$\arcsin x + 3 \arccos x + 2 \arcsin 2x\sqrt{1 - x^2} = \frac{3\pi}{2}$.

**2.** Să se arate că: $f$ : (–1, 1) → ℝ, $f(x) = \text{arctg}\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}} + \text{arctg}\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}$ este o constantă, ∀ $x \in (-1, 1)$.

**3.** $\text{arctg}\, x < x - \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{x^5}{5}$, ∀ $x > 0$.

**4.** Să se demonstreze inegalitatea: $\dfrac{2}{2x+1} < \ln(x+1) - \ln x < \dfrac{1}{\sqrt{x(x+1)}}$.

**5.** Să se arate că dacă funcția $f$ : ℝ → ℝ, este derivabilă pe ℝ şi periodică cu perioada $T$, atunci şi derivata sa $f\,'$ este periodică cu perioada $T$.

**6.** Să se deducă inegalitatea: $\dfrac{e}{2x+2} < e - \left(x + \dfrac{1}{x}\right)^x < \dfrac{e}{2x+1}$.

**7.** Fie funcția: $f$ : [$a$, $b$] → ℝ, $f(x)\ \sqrt{x}$, $0 \le a < b$. Să se arate că există un singur punct $c \in \left(\sqrt{ab}, \dfrac{a+b}{2}\right)$ care verifică teorema lui Lagrange.

**8.** Să se arate că au loc relațiile:

a) $x - \dfrac{x}{3!} < \sin x < x - \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^5}{5!}$, ∀ $x \in$ ℝ;

b) $1 - \dfrac{x^2}{2!} < \cos x < 1 - \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^4}{4!}$, ∀ $x \in$ ℝ;

c) $\ln(1+x) < x - \dfrac{x^2}{2}$, ∀ $x \in (-1, 0)$.

9. Dacă $a_1, a_2, \ldots, a_n \in (0, 1)$ şi $a_1 + a_2 + \ldots + a_n = 1$, să se arate că avem:

$(1 + a_1)(1 + a_2) \ldots (1 + a_n) \geq \left(1 + \dfrac{1}{n^2}\right)^n$, ∀ $n \in$ ℕ.

# 3.3. Regulile lui l'Hospital

În cazurile de nedeterminare, calculul limitelor de funcții este în general dificil. O metodă puternică de calcul a acestor limite o constituie regulile lui l'Hospital.

**I. Cazul $\frac{0}{0}$**

**Teorema 1.** *Fie $I \subset \mathbb{R}$ un interval, $x_0$ un punct de acumulare al lui $I$ şi $f, g : I \setminus \{x_0\} \to \mathbb{R}$ două funcţii derivabile verificând următoarele condiţii:*

i) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0} g(x) = 0$;

ii) $g'(x) \neq 0$, *pentru orice* $x \neq x_0$ *din* $I$;

iii) *există* $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = l \in \overline{\mathbb{R}}$.

*Atunci*

*a)* $g(x) \neq 0$, *pentru orice* $x \in I \setminus \{x_0\}$;

*b) funcţia* $\frac{f}{g}$ *are limită în* $x_0$ *şi*

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

*Demonstraţie*

**1.** Fie $x_0$ finit. Deoarece $g'(x) \neq 0$ pe $I \setminus \{x_0\}$, rezultă că $g'$ are semn constant pe $\{x \in I \mid x < x_0\}$ şi respectiv pe $\{x \in I \mid x > x_0\}$.

Deci $g$ este strict monotonă pe fiecare din aceste mulţimi. Atunci

$$g(x) \neq \lim_{x\to x_0} g(x) = 0, \text{ pentru orice } x \in I,\ x \neq x_0.$$

Definim funcţiile $\widetilde{f}, \widetilde{g} : I \to \mathbb{R}$, prin formulele:

$$\widetilde{f}(x) = \begin{cases} f(x), & x \neq x_0 \\ 0, & x = x_0 \end{cases}, \qquad \widetilde{g}(x) = \begin{cases} g(x), & x \neq x_0 \\ 0, & x = x_0 \end{cases}.$$

Evident funcţiile $\widetilde{f}$ şi $\widetilde{g}$ sunt continue în $x_0$ şi derivabile pe $I \setminus \{x_0\}$.

Avem:

$$\widetilde{f}'(x) = f'(x),\quad \widetilde{g}'(x) = g'(x) \neq 0,\quad \forall x \in I \setminus \{x_0\}.$$

Aplicăm teorema lui Cauchy funcțiilor $\widetilde{f}$ și $\widetilde{g}$ și obținem:

$$\frac{\widetilde{f}(x)-\widetilde{f}(x_0)}{\widetilde{g}(x)-\widetilde{g}(x_0)}=\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)},$$

sau echivalent,

$$\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)},$$

cu $\xi$ în intervalul deschis de extremități $x_0$ și $x$.

Trecând la limită ($x \to x_0$), obținem: $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$.

**2.** Dacă $x_0 = +\infty$, putem presupune $I = (a, +\infty)$, cu $a > 0$.

Definim funcțiile $\widetilde{f}$ și $\widetilde{g}$ pe intervalul $\left(0,\dfrac{1}{a}\right)$, prin

$$\widetilde{f}(y)=f\left(\frac{1}{y}\right),\quad \widetilde{g}(y)=g\left(\frac{1}{y}\right),\quad y\in\left(0,\frac{1}{a}\right).$$

Evident funcțiile $\widetilde{f}$ și $\widetilde{g}$ verifică ipotezele teoremei pentru $y_0 = 0$. Conform demonstrației din cazul precedent, rezultă

$$\lim_{y\to 0}\frac{\widetilde{f}(y)}{\widetilde{g}(y)}=\lim_{y\to 0}\frac{\widetilde{f}'(y)}{\widetilde{g}'(y)},$$

sau echivalent,

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

**3.** Cazul $x_0 = -\infty$ se tratează analog.

**Observații:** **1.** Condiția ii) din teorema 1 este esențială.

**2.** Reciproca nu este adevărată.

*Contraexemple*

**1.** Fie $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definite prin

$$f(x) = e^{-2x}(\cos x + 2\sin x),\quad g(x) = e^{-x}(\cos x + \sin x).$$

Evident $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\infty} g(x) = 0$ și

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}=\lim_{x\to\infty}\frac{5}{2}e^{-x}=0.$$

În schimb, funcția

$$\frac{f(x)}{g(x)} = e^{-x}\frac{1+2\operatorname{tg} x}{1+\operatorname{tg} x}$$

nu are limită când $x \to \infty$.

**2.** Fie funcțiile $f, g : \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \setminus \{0\}$, definite prin

$$f(x) = x^2 \sin\frac{1}{x},\ g(x) = \sin x.$$

Prin calcul

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to 0}\frac{x^2\sin\frac{1}{x}}{\sin x} = \lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin x}\cdot x\sin\frac{1}{x} = 0.$$

Pe de altă parte $\dfrac{f'(x)}{g'(x)} = 2\dfrac{x\sin\frac{1}{x}}{\cos x} - \dfrac{\cos\frac{1}{x}}{\cos x}$.

Nu există $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$, deoarece

$$\lim_{x\to 0}\frac{x\sin\frac{1}{x}}{\cos x} = 0$$

şi nu există $\lim\limits_{x\to 0}\cos\dfrac{1}{x}$.

### II. Cazul $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$

Se poate folosi o regulă a lui l'Hospital şi în acest caz. Vom da un enunț mai general (nu este necesar să verificăm că $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \pm\infty$.

**Teorema 2.** *Fie $I \subset \mathbb{R}$ un interval, $x_0$ un punct de acumulare al lui $I$ şi $f, g : I \setminus \{x_0\} \to \mathbb{R}$ două funcții derivabile verificând următoarele condiții:*

i) $\lim\limits_{x\to x_0} |g(x)| = +\infty$;

ii) $g'(x) \neq 0$, pentru orice $x \neq x_0$ din I;

iii) există $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = l \in \overline{\mathbb{R}}$;

*Atunci funcţia* $\dfrac{f}{g}$ *are limită în* $x_0$ *şi*

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Ca şi în cazul $\dfrac{0}{0}$, condiţia ii) este esenţială şi reciproca nu este adevărată.

**Observaţie:** Cazul $\dfrac{\pm\infty}{\pm\infty}$ poate fi redus la cazul $\dfrac{0}{0}$, procedând astfel:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{\dfrac{1}{g(x)}}{\dfrac{1}{f(x)}}.$$

Ultima limită este o nedeterminare de tipul $\dfrac{0}{0}$.

Putem rezolva şi celelalte cazuri de nedeterminări folosind regulile lui l'Hospital.

**III. Cazul $0 \cdot \pm\infty$**

Aceasta înseamnă că $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = 0$ şi $\lim\limits_{x \to x_0} |g(x)| = +\infty$. Atunci putem scrie:

$$\lim_{x \to x_0} f(x)g(x) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{\dfrac{1}{g(x)}},$$

cu $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{1}{g(x)} = 0$, deci suntem în cazul $\dfrac{0}{0}$.

**IV. Cazul $\infty - \infty$**

Aceasta înseamnă că $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0} g(x) = +\infty$. Atunci

$$\lim_{x\to x_0}(f(x) - g(x)) = \lim_{x\to x_0}\left(\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{f(x)}\right)f(x)g(x),$$

deci suntem în cazul $0 \cdot \infty$.

**V. Cazul $1^{\pm\infty}$**

Dacă funcțiile $f, g : I \to \mathbb{R}$ verifică $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = 1$ şi $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = +\infty$, atunci există $V$ o vecinătate a lui $x_0$ astfel încât $f(x) > 0$ şi $g(x) > 0$ pe $V \cap I \setminus \{x_0\}$.

Notăm $h(x) = [f(x)]^{g(x)}$. Avem $h(x) = e^{\ln h(x)}$ şi

$$\ln h(x) = g(x)\ln f(x) = \frac{\ln f(x)}{\dfrac{1}{g(x)}}.$$

Deoarece $\lim\limits_{x\to x_0} \ln f(x) = \lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{1}{g(x)} = 0$, $\lim\limits_{x\to x_0} \ln h(x)$ este de tipul $\dfrac{0}{0}$.

**VI.** Raționamente analoage se fac şi în cazurile $0^0$ şi $\infty^0$.

## Exerciții rezolvate

**1.** Fie f şi g două funcții definite astfel:

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = \begin{cases} x^2, & x \in \mathbb{Q} \\ 0, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases},\ g : (0, \frac{\pi}{2}) \to \mathbb{R},\ g(x) = \operatorname{tg} x.$$

a) Să se calculeze $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(x)}{g(x)}$.

b) Se poate aplica regula lui l'Hospital?

**2.** Se consideră funcțiile $f : (0, \frac{\pi}{2}) \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 \sin\frac{1}{x}$ şi $g : (0, \frac{\pi}{2}) \to \mathbb{R}$, $g(x) = \sin 2x$. Să se arate că:

a) există $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}$; b) nu există $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$

**3.** a) Să se calculeze $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x+\sin x}{x-\sin x}$;

b) Se poate aplica regula lui l'Hospital?

**4.** a) Să se calculeze $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x+7\sin x}{9x}$;

b) Se poate aplica regula lui l'Hospital?

**5.** a) Să se calculeze $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2+\sin\frac{1}{x}}{\ln(1+x)}$

b) Se poate aplica regula lui l'Hospital?

**6.** a) Să se calculeze $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$

b) Este indicat să se aplice regula lui l'Hospital?

*Soluții*

**1.** a) Vom folosi definiția limitei unei funcții cu ajutorul şirurilor.

Fie şirul $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $x_n\in\mathbb{Q}$ şi $x_n\to 0$. Atunci $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_n^2}{\operatorname{tg} x_n}$.

Dar $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_n}{\operatorname{tg} x_n}=1$ şi va rezulta $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\lim x_n\cdot\lim\dfrac{x_n}{\operatorname{tg} x_n}=0.$

b) Nu se poate aplica regula lui l'Hospital deoarece funcția $f$ nu este derivabilă în orice vecinătate a punctului $x_0 = 0$ cu excepția punctului $x_0 = 0$.

**2.** a) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2\sin\frac{1}{x}}{\sin 2x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\sin x}\cdot\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{2\cos x}\sin\dfrac{1}{x}=0$;

$$\text{b)}\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)}{g'(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2\cos\frac{1}{x}\left(-\frac{1}{x^2}\right)+2x\sin\frac{1}{x}}{2\cos 2x}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{-\cos\frac{1}{x}+2x\sin\frac{1}{x}}{2\cos 2x};$$

această limită nu există deoarece nu există $\lim\limits_{x\to 0}\left(-\cos\dfrac{1}{x}\right)$.

**3.** a) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x+\sin x}{x-\sin x}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x\left(1+\dfrac{\sin x}{x}\right)}{x\left(1-\dfrac{\sin x}{x}\right)}=1.$

b) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(x+\sin x)'}{(x-\sin x)'}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1+\cos x}{1-\cos x}$ (care nu există).

**Observație:** Funcțiile trigonometrice sinus, cosinus, tangentă şi cotangentă nu au limită în $-\infty$ sau $+\infty$.

**4.** a) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x+7\sin x}{9x}=\dfrac{5}{9}+\dfrac{7}{9}\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sin x}{x}=\dfrac{5}{9}+\dfrac{7}{9}\cdot 0=\dfrac{5}{9}.$

b) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(5x+7\sin x)'}{(9x)'}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5+7\cos x}{9}$, limită care nu există.

**5.** a) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2\sin\dfrac{1}{x}}{\ln(1+x)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\ln(1+x)}\cdot\lim\limits_{x\to 0}x\sin\dfrac{1}{x}=0.$

b) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\left(x^2\sin\dfrac{1}{x}\right)'}{[\ln(1+x)]'}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-\cos\dfrac{1}{x}+2x\sin\dfrac{1}{x}}{\dfrac{1}{1+x}};$

această limită nu există deoarece nu există $\lim\limits_{x\to 0}\cos\dfrac{1}{x}$.

**6.** a) Evident $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}=1$ (metode elementare).

b) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\left(e^x-e^{-x}\right)'}{\left(e^x+e^{-x}\right)'}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{e^x+e^{-x}}{e^x-e^{-x}}$ Deci, nu este eficient să mai aplicăm regula lui l'Hospital, întrucât, aşa cum s-a arătat la punctul a), limita se calculează direct prin metode elementare.

**7.** a) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{\sin x}\right)\overset{(\infty-\infty)}{=}\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x - x}{x\sin x}=\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\sin x - x}{x^2}\cdot\frac{x}{\sin x}\right)=$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x - x}{x^2}\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{(\sin x - x)'}{(x^2)'}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin x}=$$

l'Hospital

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x - 1}{2x}\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{-\sin x}{2}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin x}=0.$$

l'Hospital

Din exemplele analizate se desprind următoarele observații:

**1.** Dacă ajungem la nedeterminările $\frac{0}{0}$ sau $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$ este foarte important să se verifice dacă se respectă condițiile din regulile lui l'Hospital.

**2.** Dacă nu putem calcula $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ este recomandabil să verificăm dacă funcțiile $f'$ şi $g'$ verifică condițiile din regula lui l'Hospital şi în caz afirmativ calculăm $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f''(x)}{g''(x)}$, procedeu care se poate repeta calculând $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f^{(n)}(x)}{g^{(n)}(x)}$.

**3.** Pentru a simplifica calculele este recomandabil să aplicăm combinat atât metodele elementare cât şi regula lui l'Hospital.

**4.** Cazurile de nedeterminare se pot reduce, transformând convenabil funcția a cărei limită dorim să o calculăm, la cazurile de bază: $\frac{0}{0}$ sau $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$.

**5.** Nu întotdeauna aplicarea corectă a regulii lui l'Hospital conduce la un rezultat favorabil. De exemplu, aplicarea regulii pentru $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{\sqrt{x^2+1}}{x}\ldots$, conduce la o buclă infinită, iar valoarea limitei nu se poate calcula.

Dar cu ajutorul metodelor elementare, limita se calculează imediat astfel:

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x}{|x|\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x}{|x|}=\pm1.$$

**II.** Ținând seama de observațiile de mai înainte, să se calculeze următoarele limite:

**1.** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{2\sin x}$; **2.** $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{\ln x}{x^\alpha}(\alpha>0)$; **3.** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\sin x-x^2e^x}{\sin x+x^2e^x}$;

**4.** $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{\ln^2(x^2)}{x^n}(n\geq 1)$; **5.** $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{e^x}{x^\alpha}(\alpha>0)$; **6.** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-x\cos x}{x^2\sin x+\sin^3 x}$;

**7.** $\lim\limits_{\substack{x\to e\\ x>e}}\ln(x-e)(\ln x-1)$; **8.** $\lim\limits_{x\to 0}\left(\operatorname{ctg} x-\dfrac{1}{x}\right)$; **9.** $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x}\right)^{\operatorname{tg} x}$;

**10.** $\lim\limits_{x\to 0}x^x$; **11.** $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x^2}-\operatorname{ctg}^2 x\right)$.

*Soluții:*

**1.** Fie funcțiile $f, g:(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, $f(x)=e^x-1$ şi $g(x)=2\sin x$.

Suntem în cazul $\dfrac{0}{0}$ şi observăm că sunt îndeplinite condițiile din regula lui l'Hospital (exercițiu independent), deci $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{2\sin x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x}{2\cos x}=\dfrac{1}{2}$.

**2.** Suntem în cazul $\dfrac{\infty}{\infty}$ şi $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{\ln x}{x^\alpha}=\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{(\ln x)'}{(x^\alpha)'}=\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{1}{\alpha x^\alpha}=0$.

**3.** Cazul $\dfrac{0}{0}$: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\sin x-x^2e^x}{\sin x+x^2e^x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x+x\cos x-x^2e^x-2xe^x}{\cos x+x^2e^x+2xe^x}=\dfrac{0}{1}=0$.

**4.** $$\lim_{x\to +\infty}\frac{\ln^2(x^2)}{x^n}=\lim_{x\to +\infty}\frac{4\ln x\cdot\frac{1}{x}}{nx^{n-1}}=\frac{4}{n}\lim_{x\to +\infty}\frac{\ln x}{x^n}=$$

$$=\frac{4}{n}\lim_{x\to +\infty}\frac{\frac{1}{x}}{nx^{n-1}}=\frac{4}{n^2}\lim_{x\to +\infty}\frac{1}{x^n}=0.$$

**5.** $$\lim_{x\to +\infty}\frac{e^x}{x^\alpha}=\lim_{x\to +\infty}\frac{e^x}{\alpha x^{\alpha-1}}=\lim_{x\to +\infty}\frac{e^x}{\alpha(\alpha-1)x^{\alpha-2}}=\ldots$$

$$=\lim_{x\to +\infty}\frac{1}{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}\cdot x^{n-\alpha}e^x=+\infty,\text{unde } n-1<\alpha\leq n.$$

**6.** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-x\cos x}{x^2\sin x+\sin^3 x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x(1-\cos x)}{\sin x(x^2+\sin^2 x)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\sin x}\cdot\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2+\sin^2 x}=$

$$=1\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{2x+2\sin x\cos x}=\frac{1}{4}.$$

**7.** Suntem în cazul $\infty\cdot 0$. Aducem la cazul $\dfrac{0}{0}$ şi obţinem:

$$\ln(x-e)(\ln x-1)=\frac{(\ln x-1)}{\dfrac{1}{\ln(x-e)}} \text{ şi}$$

$$\lim_{\substack{x\to e\\ x>e}}(x-e)(\ln x-1)=\lim_{\substack{x\to e\\ x>e}}\frac{[(\ln x-1)]'}{\left[\dfrac{1}{\ln(x-e)}\right]'}=-\lim_{\substack{x\to e\\ x>e}}\frac{\dfrac{1}{x}}{\dfrac{1}{(x-e)\ln^2(x-2)}}=$$

$$=-\lim_{\substack{x\to e\\ x>e}}\frac{(x-e)\ln^2(x-e)}{x}\overset{(0\cdot\infty)}{=}-\frac{1}{e}\lim_{\substack{x\to e\\ x>e}}\frac{\ln^2(x-e)}{\dfrac{1}{x-e}}=$$

$$=\frac{1}{e}\lim_{\substack{x\to e\\ x>e}}\frac{\dfrac{1}{x-e}2\ln(x-e)}{\dfrac{1}{(x-e)^2}}=\frac{2}{e}\lim_{\substack{x\to e\\ x>e}}\frac{\ln(x-e)}{\dfrac{1}{x-e}}=$$

$$=-\frac{2}{e}\lim_{\substack{x\to e\\ x>e}}\frac{\dfrac{1}{x-e}}{\dfrac{1}{(x-e)^2}}=0.$$

**Observaţie:** Să se încerce să se facă şi o altă aranjare a funcţiei şi să se aplice regula lui l'Hospital, apoi să se compare cele două metode de rezolvare.

**8.** $\lim\limits_{x\to 0}\left(\operatorname{ctg} x-\dfrac{1}{x}\right)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\dfrac{1}{\operatorname{ctg} x}}{\dfrac{x}{\operatorname{ctg} x}}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\operatorname{tg} x}{x\operatorname{tg} x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\dfrac{1}{\cos^2 x}}{\operatorname{tg} x+\dfrac{x}{\cos^2 x}}=$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\cos^2 x-1}{\sin x\cos x+x}=\lim_{x\to 0}\frac{-2\sin x\cos x}{\cos^2 x-\sin^2 x+1}=\frac{0}{2}=0.$$

**9.** $\left(\frac{1}{x}\right)^{\operatorname{tg} x}=e^{\operatorname{tg} x \ln \frac{1}{x}}; \lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}\right)^{\operatorname{tg} x} \overset{\infty^0}{=} \lim\limits_{x\to 0} e^{\operatorname{tg} x \ln \frac{1}{x}}$; notăm $f(x)=\operatorname{tg} x \ln \frac{1}{x}$:

$$\lim_{x\to 0} f(x)=\lim_{x\to 0}\operatorname{tg} x \ln\frac{1}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\ln\frac{1}{x}}{\frac{1}{\operatorname{tg} x}}=\lim_{x\to 0}\frac{-\frac{1}{x}}{\frac{-1}{\cos^2 x \operatorname{tg}^2 x}}=$$

$$=\lim_{x\to 0} x\frac{\sin^2 x}{x^2}=0 \Rightarrow \lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}\right)^{\operatorname{tg} x}=e^0=1.$$

**10.** $x^x=e^{x\ln x}$; $\lim\limits_{x\to 0} x^x=\lim\limits_{x\to 0} e^{x\ln x}$; notăm $f(x)=x\ln x$;

$$\lim_{x\to 0} f(x)=\lim_{x\to 0} x\ln x=\lim_{x\to 0}\frac{\ln x}{\frac{1}{x}}=\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}=0\,.$$

**11.** Indicație:

$$\frac{1}{x^2}-\operatorname{ctg}^2 x=\frac{1}{x^2}-\frac{1}{\operatorname{tg}^2 x}=\frac{\operatorname{tg} x+x}{\operatorname{tg} x}\cdot\frac{\operatorname{tg} x-x}{x^2\operatorname{tg} x}=\frac{\operatorname{tg} x+x}{\operatorname{tg} x}\cdot\frac{\operatorname{tg} x-x}{x^3}\cdot\frac{x}{\operatorname{tg} x}=$$

$$=\frac{\operatorname{tg} x+x}{\operatorname{tg} x}\cdot\frac{\operatorname{tg} x-x}{x^3}\cdot\frac{x}{\operatorname{tg} x}\cdot x\,.$$

Evident $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} x+x}{\operatorname{tg} x}=2$ şi $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{\operatorname{tg} x}=1$.

Apoi $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} x-x}{x^3}=\frac{1}{3}$ cu ajutorul regulii lui L'Hpspital.

## Exerciții propuse

### I. Cazul $\frac{0}{0}$

Să se calculeze următoarele limite:

**1.** $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2-3x+2}{x^2-1}$; **2.** $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^5-1}{x^3-1}$;

**3.** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x^2}-\sqrt{1-x^2}}{x}$;

**4.** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{1+2x}-\sqrt{1-2x}}{x}$;

**5.** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x-\cos 3x}{x^2}$;

**6.** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{1+x^3}-1}{\sin 3x}$;

**7.** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-e^{\sin x}}{x-\sin x}$;

**8.** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\sin x}{x^3}$;

**9.** $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^a-1}{x^b-1}\ (a,b\in\mathbb{R}^*)$;

**10.** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-e^{\operatorname{arctg} x}}{x(1-\cos x)}$;

**11.** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\left(1+\frac{1}{x}\right)^x-e}{x}$;

**12.** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x-\ln\cos x}{x^2}$;

**13.** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\ln(x+1)}{x^2}$;

**14.** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-e^{-x}-2x}{x^3}$;

**15.** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-\frac{1}{2}x^2-x-1}{x^3}$;

**16.** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^n-\sin^n x}{x^{n+2}}$ ; discuție după $n\in\mathbb{N}$;

**17.** $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^x-1}{\ln x}$;

**18.** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\cos\alpha x}{\ln\cos\beta x}$ ; discuție după $\alpha,\beta\in\mathbb{R}_+^*$ ;

**19.** $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\operatorname{arctg}(x^2-4x+3)}{x-3}$;

**20.** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2-x\sin x}{\cos 2x-4\cos x+3}$;

**21.** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg}^3 x-\operatorname{tg} x^3}{x^n}$, $n\in\mathbb{N}$;

**22.** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^n-\sin^n x}{x^m}$ , $m, n\in\mathbb{N}$.

**II. Cazul $\frac{\infty}{\infty}$**

Să se calculeze următoarele limite:

**1.** $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3-3x+2}{(x+1)(x+2)}$;  **2.** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\sin\alpha x}{\ln\sin\beta x}$, discuție după $\alpha$, $\beta \in \mathbb{R}$;

**3.** $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^k}{e^x}$ $(k\in\mathbb{N}^*)$;  **4.** $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2+\ln x}{2x^2+3\ln x}$;

**5.** $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^3+x^2+x+1}{e^x+x+2}$;  **6.** $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln(x^2+x+1)}{\ln(x^2-x+1)}$;

**7.** $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln(1+x+x^2e^x)}{\ln(1+x+x^3e^{3x})}$;  **8.** $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\ln^2 x^2}{x^4}$;

**9.** $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{\mathrm{tg}(2n+1)x}{\mathrm{tg}(2p+1)x}$;  **10.** $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\dfrac{\ln\mathrm{tg}\,\alpha x}{\ln\mathrm{tg}\beta x}$ $(\alpha,\beta>0)$.

**III. Cazul 0 · (± ∞)**

Să se calculeze următoarele limite:

**1.** $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}}(1-x)\ln(x-1)$;  **2.** $\lim\limits_{x\to+\infty} x\cdot e^{-x}$;

**3.** $\lim\limits_{x\to 0} x\,\mathrm{ctg}\,x$;  **4.** $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(\mathrm{tg}\,x-1)\left(1-\mathrm{tg}\,\dfrac{x}{2}\right)$;

**5.** $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}}(x-1)\cdot e^{\frac{1}{x-1}}$;  **6.** $\lim\limits_{\substack{x\to\frac{\pi}{2}\\ x<\frac{\pi}{2}}}(1-\sin x)\cdot e^{\mathrm{tg}\,x}$;

**7.** $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\sin x\cdot\ln\mathrm{tg}\,x$;  **8.** $\lim\limits_{x\to\infty} x^2\left(e^{\frac{1}{x}}-e^{\frac{1}{x+1}}\right)$;

**9.** $\lim\limits_{x\to\infty} x\left[\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x-e\right]$;  **10.** $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}}\sqrt{\ln x}\cdot\ln(\ln x)$.

**IV. Cazul $\infty - \infty$**

Să se calculeze următoarele limite:

**1.** $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{2x+1}{x^2+x-2}-\dfrac{1}{x\ln x}\right)$; **2.** $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{1}{x\sin x}\right)$;

**3.** $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{\ln(1+x)}-\dfrac{1}{x}\right)$; **4.** $\lim\limits_{x\to +\infty}\left[x-x^2\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)\right]$;

**5.** $\lim\limits_{x\to \infty} x^2\left(\cos\dfrac{1}{x}-\cos\dfrac{2}{x}\right)$; **6.** $\lim\limits_{x\to \infty}\left(\dfrac{\pi x}{2}-x\operatorname{arctg}x\right)$;

**7.** $\lim\limits_{x\to \infty} x\left(\dfrac{\pi}{4}-\operatorname{arctg}\dfrac{x}{x+1}\right)$; **8.** $\lim\limits_{x\to \infty} x\left(\operatorname{arctg}\dfrac{x}{x+1}-\operatorname{arctg}\dfrac{x-1}{x+1}\right)$;

**9.** $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x^n}-\operatorname{ctg}^n x\right)$, $n\in \mathbb{N}^*$; **10.** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x^2}\left(2^x+2^{-x}-2\right)$.

**V. Cazurile $1^\infty$, $\infty^0$, $0^0$**

Să se calculeze următoarele limite:

**1.** $\lim\limits_{x\to \infty}\left(\dfrac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}\right)^x$; **2.** $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{x^2}}$; **3.** $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)^{\operatorname{ctg}x}$;

**4.** $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\operatorname{tg}x}{x}\right)^{\frac{1}{\sin x^2}}$; **5.** $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\arcsin x}{x}\right)^{\frac{1}{x}}$; **6.** $\lim\limits_{x\to 0}\left(e^x+\sin x\right)^{\frac{1}{x^2}}$;

**7.** $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x+\lambda\sin x)^{\frac{1}{x}}$, $\lambda>0$; **8.** $\lim\limits_{x\to 0}(e^x+\sin x+\operatorname{tg} x)^{\frac{1}{x^2}}$; **9.** $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\cos\alpha x}{\cos\beta x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$;

**10.** $\lim\limits_{x\to 1}(1+\ln x)^{\frac{1}{(x-1)^2}}$; **11.** $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}}(\sin x)^{\sin x}$; **12.** $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}}(\operatorname{tg} x)^{\sin x}$;

**13.** $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{6}}\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{ctg}x\right)^{\operatorname{ctg}6x}$; **14.** $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x^2}\right)^{\operatorname{tg}x}$; **15.** $\lim\limits_{x\to 0} x^{x^p}$;

**16.** $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}}\left(2-\operatorname{tg}x\sqrt{\operatorname{ctg}x}\right)^{\frac{1}{\sin 2x}}$; **17.** $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}}(\ln x)^{\ln(1-x)}$; **18.** $\lim\limits_{x\to 1}(\ln ex)^{\frac{1}{x-1}}$.

**19.** $\lim_{x\to 0}\left(\operatorname{tg}\frac{\pi x}{4}\right)^{\operatorname{tg}\frac{\pi x}{2}}$; **20.** $\lim_{x\to 1}\left(\operatorname{tg}\frac{\pi x}{4}\right)^{\operatorname{tg}\frac{\pi x}{2}}$;

**21.** $\lim_{x\to 0}\,[1 + \ln(x + 1) + \ln(2x + 1) + \ldots+\ln(nx + 1)]^{\frac{1}{x}}$;

**22.** $\lim_{n\to\infty}\left[\lim_{x\to 0}(1+\sin^2 x+\sin^2 2x+\ldots+\sin^2 nx)^{\frac{3}{n^3x^3}}\right]$.

## 3.4. Rolul derivatei I în studiul funcțiilor: puncte de extrem, monotonia funcțiilor

Fie $D$ o reuniune (finită sau infinită) de intervale şi $f : D \to \mathbb{R}$ o funcție reală definită pe $D$. Presupunem că $f$ este derivabilă pe $D$ cu excepția unei mulțimi finite de puncte din $D$. Notăm cu $D'$ mulțimea pe care $f$ este derivabilă. Evident $D'$ este de asemenea o reuniune (finită sau infinită) de intervale.

Teorema lui Lagrange are următoarele consecințe:

**Teoremă.** i) *Dacă derivata $f\,'$ este strict pozitivă pe un interval $I \subset D'$, atunci funcția este strict crescătoare pe $I$.*

ii) *Dacă derivata $f\,'$ este strict negativă pe un interval $I \subset D'$, atunci funcția este strict descrescătoare pe $I$.*

iii) *Dacă derivata $f\,'$ nu se anulează pe un interval $I \subset D'$, atunci funcția $f$ este strict monotonă pe $I$.*

În concluzie, funcția $f$ este strict monotonă pe intervalele pe care derivata $f\,'$ nu se anulează.

Pentru studiul monotoniei funcției $f$ vom proceda în modul următor:

**1.** Se determină mulțimea $D\,' \subset D$ pe care funcția $f$ este derivabilă şi se calculează derivata $f\,'$.

**2.** Se rezolvă ecuația $f\,'(x) = 0$ pe $D\,'$.

**3.** Se descompune mulțimea $D\,'$ într-o reuniune de intervale disjuncte pe care derivata $f\,'$ nu se anulează.

**4.** Se determină semnul derivatei $f\,'$ pe fiecare interval $I$ din descompunerea de mai sus. Deoarece $f\,'$ nu se anulează pe $I$, ea are semn constant pe $I$, deci este suficient să calculăm valoarea lui $f\,'$ într-un singur punct din $I$.

**5.** Monotonia funcției $f$ pe $I$ este dată de semnul derivatei $f\,'$ pe $I$.

Dacă $f\,' > 0$ (respectiv $f\,' < 0$) pe $I$, atunci $f$ este strict crescătoare (respectiv strict descrescătoare) pe $I$.

Astfel vom determina şi punctele de extrem ale funcţiei $f$.

Distingem următoarele cazuri:

a) $x_0$ este un punct interior al mulțimii $D$.

Fie $I \subset D'$ intervalul care îl conține pe $x_0$ astfel încât derivata $f\,'$ nu se anulează pe $I$, cu excepția eventual a lui $x_0$.

**1.** Dacă funcția $f$ este strict crescătoare pe $\{x \in I \mid x < x_0\}$şi strict descrescătoare pe $\{x \in I \mid x > x_0\}$, atunci $x_0$ este un punct de maxim.

Echivalent, dacă derivata $f\,' > 0$ pe $\{x \in I \mid x < x_0\}$ şi $f\,' < 0$ pe $\{x \in I \mid x > x_0\}$, atunci $x_0$ este un punct de maxim.

**2.** Dacă funcția $f$ este strict descrescătoare pe $\{x \in I \mid x < x_0\}$şi strict crescătoare pe $\{x \in I \mid x > x_0\}$, atunci $x_0$ este un punct de minim.

Echivalent, dacă derivata $f\,' < 0$ pe $\{x \in I \mid x < x_0\}$ şi $f\,' > 0$ pe $\{x \in I \mid x > x_0\}$, atunci $x_0$ este un punct de minim.

b) $x_0$ este extremitatea stângă a unui interval $I \subset D'$ în interiorul căruia derivata $f\,'$ nu se anulează.

**1.** Dacă $f\,' < 0$ pe $I$, atunci $x_0$ este un punct de maxim.

**2.** Dacă $f\,' > 0$ pe $I$, atunci $x_0$ este un punct de minim.

c) $x_0$ este extremitatea dreaptă a unui interval $I \subset D'$ în interiorul căruia derivata $f\,'$ nu se mai anulează. Atunci:

**1.** Dacă $f\,' < 0$ pe $I$, atunci $x_0$ este un punct de minim.

**2.** Dacă $f\,' > 0$ pe $I$, atunci $x_0$ este un punct de maxim.

## Exerciții rezolvate

Să se determine intervalele de monotonie şi punctele de extrem pentru funcțiile următoare:

**1.** $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^3 - 9x$;

**2.** $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R},\ f(x) = \dfrac{2x-1}{x}$;

**3.** $f : (-\infty, -1] \cup [1, +\infty) \to \mathbb{R},\ f(x) = x\sqrt{x^2-1}$;

**4.** $f : [0, +\infty) \to \mathbb{R},\ f(x) = e^{\sqrt{x}} + e^{-\sqrt{x}}$;

**5.** $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R},\ f(x) = x \cdot \ln x$;

**6.** $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = x^2 \cdot e^{-x}$.

*Soluții:*

**1.** $D' = \mathbb{R},\ f'(x) = 3(x^2 - 3)$

Tabelul este:

| $x$ | $-\infty$ | | $-\sqrt{3}$ | | $\sqrt{3}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | + | 0 | – | 0 | + | |
| $f(x)$ | $-\infty$ | $\nearrow$ | $6\sqrt{3}$ | $\searrow$ | $-6\sqrt{3}$ | $\nearrow$ | $+\infty$ |

*Concluzii*

a) pentru $x \in (-\infty, -\sqrt{3})$ şi $x \in (\sqrt{3}, +\infty)$, funcția este strict crescătoare;

b) $x = -\sqrt{3}$ este punct de maxim şi max $f = f(-\sqrt{3})$;

$x = \sqrt{3}$, este punct de minim şi min $f = f(\sqrt{3})$.

**2.** $D' = \mathbb{R} \setminus \{0\},\ f'(x) = \dfrac{1}{x^2}$. Tabelul este următorul:

| $x$ | $-\infty$ | | 0 | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | + | \| | + | |
| $f(x)$ | 2 | $\nearrow$ | $+\infty$ \| $-\infty$ | $\nearrow$ | 2 |

*Concluzii*

a) funcția este strict crescătoare pe $(-\infty, 0)$ şi respectiv $(0, +\infty)$;

b) funcția nu admite puncte de extrem.

**3.** $D' = (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$, $f\,'(x) = \dfrac{2x^2 - 1}{\sqrt{x^2 - 1}}$ .

Tabelul este următorul:

| $x$ | $-\infty$ | | $-1$ | $0$ | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $+$ | ////// | ////// | ////// | $+$ | |
| $f(x)$ | $-\infty$ | $\nearrow$ | $0$ | ////// | $0$ | $\nearrow$ | $+\infty$ |

*Concluzii*

a) punctele în care $f\,'(x) = 0$ sunt $\pm\dfrac{\sqrt{2}}{2} \notin D\,'$;

b) $f(x) \geq 0,\ \forall x \in [1, +\infty)$ şi $f(x) \leq 0,\ \forall x \in [-\infty, -1]$ .

**4.** $D' = (0, +\infty)$; $f\,'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}\left(e^{\sqrt{x}} - e^{-\sqrt{x}}\right)$

Tabelul este următorul:

| $x$ | $0$ | | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $\vert$ | $+$ | $+$ | |
| $f(x)$ | $2$ | $\nearrow$ | | $+\infty$ |

*Concluzii*

a) $f\,'(x) = 0 \Rightarrow x = 0 \notin D'$;

b) funcția este strict crescătoare;

c) $\forall x \in [0, +\infty) \Rightarrow f(x) \geq 2$ (valoarea minimă se atinge într-un punct în care funcția nu este derivabilă).

**5.** $D' = (0, +\infty)$; $f'(x) = \ln x + 1$;

Tabelul este următorul:

| $x$ | $0$ | | $\frac{1}{e}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | \| | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f(x)$ | \| | $\searrow$ | $-\frac{1}{e}$ | $\nearrow$ | $+\infty$ |

*Concluzii*

a) $x = \frac{1}{e}$ este punct de minim; $f(x) \geq -\frac{1}{e}$, $\forall x \in (0, +\infty)$;

b) pentru $x \in (0, \frac{1}{e}]$, funcția este descrescătoare;

pentru $x \in [\frac{1}{e}, +\infty)$, funcția este crescătoare.

**6.** $D' = \mathbb{R}$, $f'(x) = e^{-x}(2x - x^2)$

Tabelul este următorul:

| $x$ | $-\infty$ | | $0$ | | $2$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $-$ | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | $-$ |
| $f(x)$ | $+\infty$ | $\searrow$ | $0$ | $\nearrow$ | $\frac{4}{e^2}$ | $\searrow$ | $0$ |

*Concluzii*

a) $x = 0$ este punct de minim şi $\min f = 0$;

b) $x = 2$ este punct de maxim şi $\max f = \frac{4}{e^2}$;

c) pentru $x \in (-\infty, 0)$ şi respectiv $x \in (2, +\infty)$ funcția este strict descrescătoare;

pentru $x \in (0, 2)$, funcția este strict crescătoare.

## Exerciții propuse

Să se determine intervalele de monotonie şi punctele de extrem pentru următoarele funcții:

**1.** $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^3 - 81\,x$;

**2.** $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{x}{x^2+1}$;

**3.** $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x\sqrt{x^2+1}$;

**4.** $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{\sqrt{x^2+1}}{x}$;

**5.** $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = e^{\sqrt[3]{x}} + e^{-\sqrt[3]{x}}$;

**6.** $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \ln\dfrac{x}{x^2+1}$;

**7.** $f : \mathbb{R} \setminus \{2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{\sin x}{1-\cos x}$;

**8.** $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \arccos\dfrac{2x}{1+x^2}$;

**9.** $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sin x + \dfrac{1}{2}\sin 2x$;

**10.** $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 1 - \sqrt{|1-x^2|}$.

### Probleme de maxim şi minim cu caracter interdisciplinar

Una dintre aplicațiile cel mai des întâlnite ale derivatei întâi, o reprezintă utilizarea ei în problemele de maxim şi minim.

## Exerciții rezolvate

**1.** Să se arate că dintre toate dreptunghiurile care au aceeaşi arie, pătratul are perimetrul cel mai mic.

**2.** Să se arate că dintre toate dreptunghiurile care au acelaşi perimetru, pătratul are aria maximă.

**3.** Fie o sferă de rază $R$. Să se arate că volumul maxim al unui con înscris în sferă este $V_{\max} = \dfrac{32\pi}{81} R^3$.

**4.** Să se determine sub ce unghi față de orizontală trebuie tras un proiectil cu viteză inițială $v_0$, astfel încât să atingă în cădere orizontala la distanța cea mai mare.

**5.** Dintr-un râu de lățime $a$ porneşte un canal de lățime $b$, formând cu râul un unghi drept. Care este lungimea maximă a unui vas care poate să intre pe canal? (se neglijează lățimea vasului).

**6.** Două localități $A$ şi $B$ sunt aşezate la distanțele $a$ şi $b$ față de şosea. Unde trebuie să fie situată o localitate $C$ pe şosea, astfel încât lungimea traseului $A - C - B$ să fie minim (localitățile sunt de aceeaşi parte față de şosea).

**7.** Să se determine cilindrul de volum maxim înscris într-o sferă de rază $R$.

**8.** Să se determine cilindrul de arie totală maximă înscris într-o sferă de rază $R$.

**9.** Presupunem că la fiecare moment $t$ cantitatea de electricitate scursă printr-un conductor este $Q(t) = 3 \cos \pi t$.

La ce momente de timp intensitatea este maximă? Dar minimă?

**10.** Un amestec de gaze este format din oxid de azot şi oxigen. Se cere să se determine concentrația oxigenului pentru care oxidul de azot conținut în amestec se oxidează cu viteză maximă.

**11.** Să se determine înălțimea de suspendare a unei surse luminoase punctiforme şi uniforme $S$ astfel încât iluminarea unui punct din planul orizontal să fie maximă.

*Soluții:*

**1.** Fie $k^2$ aria dreptunghiurilor şi $x$ şi $y$ lungimile laturilor dreptunghiurilor. Condițiile din ipoteză sunt: $xy = k^2$ şi perimetrul $p(x, y) = 2(x + y)$.

Din $y = \dfrac{k^2}{x}$ rezultă $p(x) = 2\left(x + \dfrac{k^2}{x}\right)$. Ataşăm funcția $p : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$,

$$p(x) = 2\left(x + \frac{k^2}{x}\right),\ p'(x) = 2\left(1 - \frac{k^2}{x^2}\right).$$

Tabelul de variație este următorul:

| $x$ | $0$ | | $k$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $p'(x)$ | \| | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $p(x)$ | \| | $\searrow$ | $4k$ | $\nearrow$ | $+\infty$ |

*Concluzie:* pentru $x = k$ şi $y=\frac{k^2}{k}=k$, adică pentru un pătrat cu latura $k$, perimetrul este cel mai mic şi este egal cu $4k$.

**2.** Fie $2a(a > 0)$ perimetrul dreptunghiurilor şi $x$ şi $y$ lungimile laturilor dreptunghiurilor. Condițiile din ipoteză sunt:

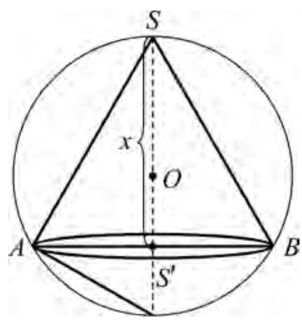
$2x + 2y = 2a \Rightarrow x + y = a$ şi $S = xy = x(a - x)$. Ataşăm funcția $S : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$, $S(x) = x(a - x)$; $S'(x) = a - 2x$. Tabelul de variație este următorul:

| $x$ | $0$ | | $\frac{a}{2}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $S'(x)$ | \| | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $S(x)$ | \| | $\nearrow$ | $\frac{a^2}{4}$ | $\searrow$ | $+\infty$ |

*Concluzie*

Pentru $x = \frac{a}{2}$ şi $y = a - \frac{a}{2} = \frac{a}{2}$, adică pătratul de latură $\frac{a}{2}$, aria este maximă şi este egală cu $\frac{a^2}{4}$.

**3.** Raționamentul se face urmărind figura alăturată. Notăm cu $x$ înălțimea variabilă a conurilor înscrise în sfera de rază $R$. Din considerații geometrice rezultă $AS^2 = x(2R - x)$.




Volumele conurilor sunt $V(x)=\frac{\pi}{3}x^2(2R-x)$.

Funcția ataşată este $V : (0, 2R) \to [0, +\infty)$,

$V(x)=\frac{\pi}{3}x^2(2R-x)$ cu derivata

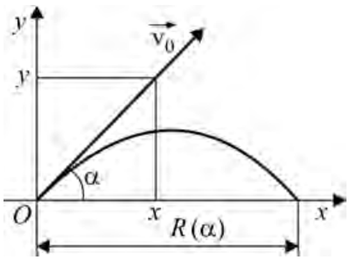
$V'(x)=\frac{\pi}{3}x(4R-3x)$.

Procedând ca în cazul exercițiilor anterioare va rezulta că pentru $x=\frac{4R}{3}$,

$V_{\max}=\frac{32\pi}{81}R^3$.

**4.** Raționamentul se va face urmărind figura de mai jos.

Se ştie din fizică că sub acțiunea forței gravitaționale, proiectilul va descrie o parabolă de ecuație $R(\alpha)=\frac{v_0^2}{g}\sin 2\alpha$. Aceasta rezultă din ecuația $y(x)=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}x-\frac{1}{2}g\cdot\frac{x^2}{v_0^2\cos^2\alpha}$, unde pentru $y = 0$ (punctul de impact cu orizontala) rezultă $x=\frac{v_0^2}{g}\sin 2\alpha$. Ataşăm funcția $R:\left[0,\frac{\pi}{2}\right]\to\mathbb{R}$,




$R(\alpha)=\frac{v_0^2}{g}\sin 2\alpha$ cu derivata $R'(\alpha)=\frac{2v_0^2}{g}\cos 2\alpha$.

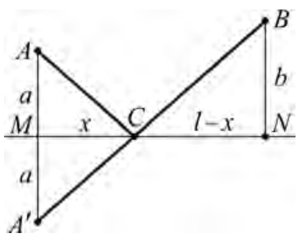
Se observă că pentru $\alpha=\frac{\pi}{4}$, $R\left(\frac{\pi}{4}\right)$ este maxim, deci pentru a avea distanța maximă, proiectilul trebuie tras sub un unghi de 45° față de orizontală.

**5.** Se exprimă lungimea $l$ a vasului, în poziția în care acesta se sprijină cu o extremitate pe malul râului, iar cu cealaltă pe peretele canalului, în funcție de unghiul $\alpha$ format de direcția vasului cu malul râului şi se obține:

$$l(\alpha)=\frac{a}{\sin\alpha}+\frac{b}{\cos\alpha}\text{; pentru } \alpha=\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{a}{b}} \text{ se obține max } l=\left(a^{\frac{2}{3}}+b^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{2}}.$$

(calculele şi verificările se recomandă ca temă pentru acasă).

**6.** Fie $MN = l$. Raționamentul se face urmărind figura de mai jos.




Notând $MC = x$, avem $AC=\sqrt{a^2+x^2}$ şi $BC=\sqrt{b^2+(l-x)^2}$.

Funcția ataşată este $L:[0,l]\to\mathbb{R}$, $L(x)=\sqrt{a^2+x^2}+\sqrt{b^2+(l-x)^2}$ cu

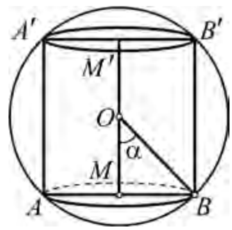
derivata $$L'(x)=\frac{x}{\sqrt{a^2+x^2}}-\frac{l-x}{\sqrt{b^2+(l-x)^2}}.$$

Se verifică că $L'(x)=0\Rightarrow x=\frac{al}{a+b}$ (verificarea se recomandă ca exercițiu),

şi $$L\left(\frac{al}{a+b}\right)=\frac{a}{a+b}\sqrt{(a+b)^2+l^2}+\frac{b}{a+b}\sqrt{(a+b)^2+l^2}=\sqrt{(a+b)^2+l^2}.$$

**Observație:** Rezolvarea se poate face şi fără a folosi analiza matematică, numai din considerații geometrice. Astfel se observă că dacă $A'$ este simetricul lui $A$ față de $MN$, atunci drumul minim $A - C - B$ este $A' - C - B$, adică lungimea segmentului $A'B$, care se determină imediat considerând triunghiurile asemenea $MCA$ şi $NCB$ (calculele se propun ca exercițiu).

**7.** Cu notațiile din figura alăturată avem:




$MB = R \sin \alpha$, $MM' = R(1 + \cos \alpha)$.

Volumul cilindrului este:

$V = \pi R^3 \sin^2 \alpha(1 + \cos \alpha)$.

Funcția ataşată este:

$V = \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \to \mathbb{R}$, $V(\alpha) = \pi R^3 \sin^2 \alpha(1 + \cos \alpha)$ şi

$V'(\alpha) = \pi R^3 \sin \alpha\, [3 \cos^2 \alpha + 2 \cos\alpha - 1]$.

Soluția acceptabilă pentru $V'(\alpha) = 0$ este $\cos \alpha = \frac{1}{3}$ şi $V_{\max} = \frac{32}{27}\pi R^3$.

**Observație:** Se recomandă ca temă rezolvarea completă şi verificarea faptului că pentru $\cos\alpha = \frac{1}{3}$, volumul este maxim.

**8.** Vom utiliza aceleaşi notații ca la problema 7 şi avem că aria totală este $A(\alpha) = 2\pi R^2 \sin 2\alpha$.

Funcția ataşată este $A: \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \to \mathbb{R}$, $A(\alpha) = 2\pi R^2 \sin 2\alpha$ cu derivata

$A'(\alpha) = 4\pi R^2 \cos 2\alpha$; $A'(\alpha) = 0 \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{4}$ şi $A_{\max} = 2\pi R^2$.

**Observație:** Se constată cu uşurință că $A(\alpha)$ este maxim când $\sin 2\alpha = 1$, adică $2\alpha = \frac{\pi}{2}$ şi $\alpha = \frac{\pi}{4}$.

**9.** Se calculează $Q'(t)$ şi se determină zerourile ecuației $Q'(t) = 0$.

**10.** Se ştie din chimie că viteza reacției $2NO + O_2 = 2NO_2$ este dată de formula $V = kx^2 \cdot y$ în care $x$ este concentrația oxidului de azot la un moment oarecare şi $y$ concentrația oxigenului, $k$ constanța vitezei de reacție. Din faptul că $y = 100 - x$ obținem $V = kx^2 (100 - x) \Rightarrow x = 33{,}33\%$ şi $y = 66{,}67\%$.

**11.** Fie $OP = d$ şi $I$ intensitatea luminoasă a sursei $S$.

Din fizică avem formula $E_p(h) = I \cdot \dfrac{h}{(h^2+d^2)^{\frac{3}{2}}}$, $h > 0$.

Din faptul că $h = d\text{ctg}\,\alpha$ obţinem $E_p(\alpha) = \dfrac{I}{d^2}\sin^2\alpha \cdot \cos\alpha$, $\alpha \in \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$;

$E_p'(\alpha) = 0 \Rightarrow \alpha = \text{arctg}\sqrt{2}$ şi $h = \dfrac{d\cdot\sqrt{2}}{2}$.

**Observaţie:** Încercaţi pentru anumite probleme să rezolvaţi fără ajutorul derivatei de ordinul unu (folosind formule şi relaţii geometrice şi trigonometrice).

## Probleme propuse

**1.** Să se arate că dintre toate triunghiurile dreptunghice în care suma catetelor este aceeaşi, triunghiul dreptunghic isoscel are aria maximă.

**2.** Ce unghi trebuie să formeze un acoperiş cu orizontala, pentru ca apa să se scurgă într-un timp minim?

**3.** Un triunghi dreptunghic are vârful unghiului drept fix şi celelalte două vârfuri pe două drepte paralele fixe. Există un triunghi cu aria cea mai mare? Dar cea mai mică?

**4.** Un punct $M$ se mişcă pe latura $BC$ a triunghiului $ABC$ presupus fix. Există poziţii ale punctului $M$ astfel ca $MA^2 + MB^2 + MC^2$ să fie maximă? Dar minimă?

**5.** Se consideră unghiul $xOy$ şi punctul $P$ fix situat în interiorul său. O secantă mobilă dusă prin $P$ intersectează pe $Ox$ şi $Oy$ în $M$ respectiv $N$. Să se determine minimul ariei triunghiului $OMN$.

**6.** Un copil trage o săniuţă de masă $m$ (inclusiv încărcătura) cu o forţă de tracţiune care face cu direcţia de deplasare (orizontală) un unghi $\alpha$. Să se determine $\alpha$ pentru care copilul trage sania, într-o mişcare uniformă cu cel mai mic efort.

**7.** Un corp este aruncat în vid cu viteza $V_0$, a cărei direcţie face unghiul $\alpha$ cu orizontala. Se cere să se determine timpul necesar corpului pentru a ajunge până în poziţia cea mai de sus a traiectoriei sale, precum şi viteza lui în această poziţie.

**8.** Într-o emisferă de rază $R$, să se înscrie paralelipipedul dreptunghic de volum maxim, având baza un pătrat.

**9.** Să se înscrie într-un con dat un cilindru de volum maxim (se presupune că bazele cilindrului şi conului se află în acelaşi plan).

**10.** Să se determine trapezul dreptunghic de arie maximă, care are baza mare egală cu $a$ şi perimetrul egal cu $4a$.

## 3.5. Rolul derivatei a II-a în studiul funcțiilor: concavitate, convexitate, puncte de inflexiune

Monotonia unei funcții nu este suficientă pentru trasarea graficului unei funcții. Vom defini noțiunile de convexitate şi concavitate a unei funcții şi vom caracteriza aceste proprietăți cu ajutorul derivatei a II-a.

Fie $f : I \to \mathbb{R}$ o funcție derivabilă pe intervalul $I$ şi $x_0$ un punct din $I$. Tangenta la graficul funcției $f$ în punctul $M_0(x_0, f(x_0))$ are ecuația

$$y = f(x_0) + f\,'(x_0)(x - x_0).$$

*Funcție convexă*

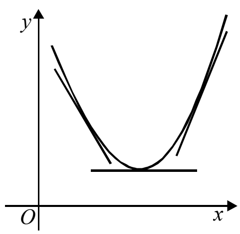



**Figura 14**

*Funcție concavă*

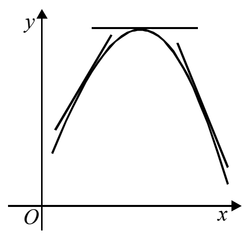



**Figura 15**

| | |
|---|---|
| **Definiție** | i) Funcția $f$ este *convexă* dacă pentru orice interval $a$, $b \in I$ şi orice $\lambda \in [0, 1]$, avem: $f((1-\lambda)a + \lambda b) \le (1-\lambda)f(a) + \lambda f(b)$. <br> ii) Funcția $f$ se numeşte *concavă* dacă $(-f)$ este convexă, sau echivalent, pentru orice $a$, $b \in I$ şi orice $\lambda \in [0, 1]$, avem: $f((1-\lambda)a + \lambda b) \ge (1-\lambda)f(a) + \lambda f(b)$. |

*Interpretare geometrică:*

Funcția $f$ este convexă (respectiv concavă) dacă pentru orice $a, b \in I$, $a < b$, segmentul determinat de punctele $A(a, f(a))$ şi $B(b, f(b))$ se află deasupra graficului (respectiv sub graficul) funcției $f$ pe intervalul $[a, b]$ (fig. 16, 17).

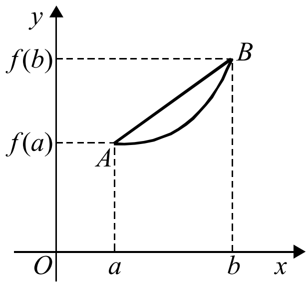



**Figura 16**

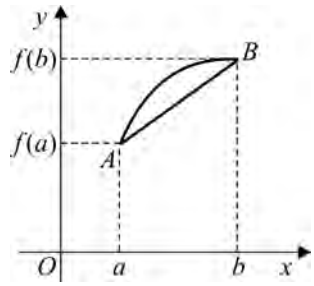



**Figura 17**

**Teoremă.** *Fie $f : I \to \mathbb{R}$ o funcție de două ori derivabilă pe un interval $I \subset \mathbb{R}$ Atunci:*

i) *Funcția $f$ este convexă pe $I$ dacă şi numai dacă $f''(x) \geq 0$*, pentru orice $x \in I$.

ii) *Funcția $f$ este concavă pe $I$ dacă şi numai dacă $f''(x) \leq 0$*, pentru orice $x \in I$.

*Demonstrație*

Presupunem că $f''(x) \geq 0$, pentru orice $x \in I$.

Atunci funcția $f' : I \to \mathbb{R}$ este crescătoare.

Fie $a, b \in I$, $a < b$ şi $\lambda \in (0, 1)$. Notăm:

$$c = (1 - \lambda)\, a + \lambda b,\ c \in (a, b)$$

Aplicând teorema lui Lagrange funcției $f$ pe intervalele $[a, c]$ şi $[c, b]$, găsim punctele $\xi \in (a, c)$ şi $\eta \in (c, b)$ astfel încât

$$\frac{f(c) - f(a)}{c - a} = f'(\xi), \quad \frac{f(b) - f(c)}{b - c} = f'(\eta).$$

Funcția $f'$ fiind crescătoare şi $\xi < \eta$, deducem că

$$\frac{f(c) - f(a)}{c - a} \leq \frac{f(b) - f(c)}{b - c}.$$

Înlocuind expresia lui $c$ în relația de mai sus, rezultă

$$f((1-\lambda)a+\lambda b)\le(1-\lambda)f(a)+\lambda f(b),$$

deci funcția $f$ este convexă.

Reciproc, presupunem că funcția $f$ este convexă pe $I$. Fie $a, b \in I$, $a < b$. Pentru orice $s, t \in (a, b)$ şi $s < t$, există $\lambda \in (0, 1)$ astfel încât $s = (1-\lambda)a + \lambda t$.

Conform raționamentului de mai sus, inegalitatea

$$f((1-\lambda)a+\lambda t)\le(1-\lambda)f(a)+\lambda f(t),$$

este echivalentă cu

$$\frac{f(s)-f(a)}{s-a}\le\frac{f(t)-f(s)}{t-s}.$$

Analog obținem:

$$\frac{f(t)-f(s)}{t-s}\le\frac{f(b)-f(t)}{b-t}.$$

Deci

$$\frac{f(s)-f(a)}{s-a}\le\frac{f(b)-f(t)}{b-t}.$$

Trecând la limită ($s \to a$), avem

$$f'(a)=\lim_{s\to a}\frac{f(s)-f(a)}{s-a}\le\frac{f(b)-f(t)}{b-t}.$$

Apoi trecem la limită ($t \to b$), avem

$$f'(a)\le\lim_{t\to b}\frac{f(b)-f(t)}{b-t}=f'(b).$$

Deci funcția $f'$ este crescătoare. Prin urmare, $f'' \ge 0$, ceea ce trebuia demonstrat.

Vom defini noțiunea de punct de inflexiune al unei funcții derivabile.

| | |
|---|---|
| **Definiție** | Fie $I \subset \mathbb{R}$ un interval şi $f : I \to \mathbb{R}$ o funcție reală. Un punct $x_0$ interior lui $I$ se numeşte *punct de inflexiune* dacă $f$ are derivată în $x_0$ şi există $\delta > 0$ astfel încât $(x_0 - \delta, x_0 + \delta) \subset I$ şi $f$ este convexă pe $(x_0 - \delta, x_0)$ şi concavă pe $(x_0, x_0 + \delta)$ sau invers sau, altfel spus, în punctul $x_0$ funcția îşi schimbă concavitatea. |

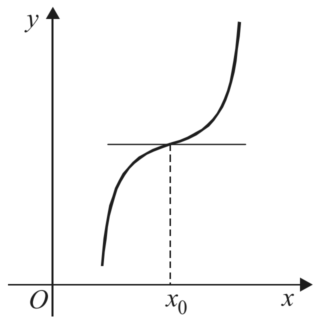



Figura 18

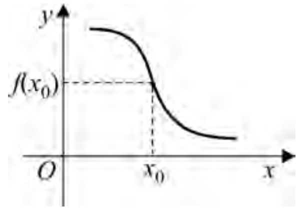



Figura 19

Aplicând teorema de mai sus, obținem următoarea proprietate a punctelor de inflexiune.

**Corolar.** *Fie $f : \to \mathbb{R}$ o funcție de două ori derivabilă pe un interval $I \subset \mathbb{R}$ şi $x_0$ un punct interior lui I. Dacă $x_0$ este un punct de inflexiune, atunci* $f''(x_0) = 0$.

**Observație:** Reciproca nu este adevărată.

Într-adevăr, considerăm funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^4$. Evident $f$ este convexă şi $f''(0) = 0$ (deşi 0 nu este punct de inflexiune deoarece $f''(x) \geq 0$, $x \in \mathbb{R}$, adică derivata de ordin doi păstrează un semn constant la dreapta şi la stânga punctului 0).

Din cele analizate mai sus, deducem că, în cazul unei funcții de două ori derivabile pe $I$, condiția suficientă ca un punct $x_0$ să fie punct de inflexiune este: $f''(x_0) = 0$ şi $f''(x)$ îşi schimbă semnul în jurul punctului $x_0$.

**Observație:** Există puncte de inflexiune fără ca funcția să fie derivabilă în aceste puncte.

***Exemplu***

Funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt[3]{x}$ a cărei reprezentare grafică este în figura 20 admite $x_0 = 0$ ca punct de inflexiune, deoarece, își schimbă concavitatea (de la convex la concav), dar în $x_0$ funcția nu este derivabilă.

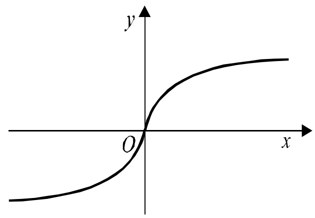



**Figura 20**

Pentru studiul concavității (convexității) şi determinarea punctelor de inflexiune ale unei funcții, vom proceda în modul următor:

a) Se determină submulțimea $D'' \subset D$ pe care funcția este de două ori derivabilă şi se calculează derivata de ordinul doi.

b) Se descompune mulțimea $D''$ într-o reuniune de intervale disjuncte pe care $f''$ nu se anulează şi se determină semnul lui $f''$ pe fiecare din aceste subintervale.

c) Intervalele de concavitate (convexitate) sunt date de semnul lui $f''$. Dacă $f''(x) > 0$ (respectiv $f''(x) < 0$) atunci $f$ este strict convexă (respectiv strict concavă). Punctele $x_0 \in D''$ în care $f''(x) = 0$ şi $f''(x)$ îşi schimbă semnul sunt puncte de inflexiune.

Rezultatele se pot încadra într-un tabel, unde prin semnul $\cup$ vom indica că funcția este convexă şi prin semnul $\cap$ vom indica că funcția este concavă. Pot apărea două situații:

**Caz 1**

| $x$ | | $x_0$ | |
|---|---|---|---|
| $f''(x)$ | $+$ | $0$ | $-$ |
| $f(x)$ | $\cup$ | $f(x_0)$ | $\cap$ |

$M(x_0 f(x_0))$ este punct de inflexiune cu următoarea interpretare grafică (fig.21).

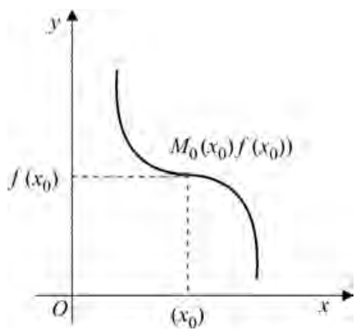



**Figura 21**

**Caz 2**

| $x$ | | $x_0$ | |
|---|---|---|---|
| $f''(x)$ | $-$ | $0$ | $+$ |
| $f(x)$ | $\frown$ | $f(x_0)$ | $\smile$ |

$M(x_0 f(x_0))$ este punct de inflexiune cu următoarea interpretare grafică (fig. 22).

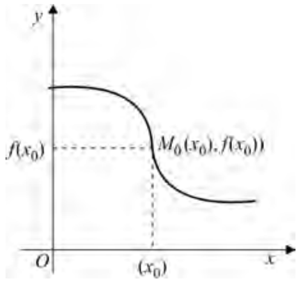



**Figura 22**

## Exerciții rezolvate

Să se determine intervalele de convexitate (concavitate) şi punctele de inflexiune (dacă există) pentru următoarele funcții:

**1.** $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^3 - 1$;

**2.** $f : \mathbb{R} \setminus \{-1\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{x}{x+1}$;

**3.** $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{x^2+1}$;

**4.** $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = x - \ln x$;

**5.** $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x \cdot e^{-x^2}$;

**6.** $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = x \cdot \ln x$.

*Soluții*

**1.** $D'' = \mathbb{R}$, $f''(x) = 6x$. Rezultatele se prezintă în tabelul următor:

| $x$ | $-\infty$ | | $0$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f''(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f(x)$ | | $\frown$ | $-1$ | $\smile$ | |

*Concluzie*

Punctul $M(0, -1)$ este punct de inflexiune; pentru $x \in (-\infty, 0)$ funcția este concavă şi pentru $x \in [0, +\infty)$ funcția este convexă.

**2.** $D'' = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$, $f''(x) = -\dfrac{2}{(x+1)^3}$. Tabelul este următorul:

| $x$ | $-\infty$ | $-1$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $f''(x)$ | $+$ \| | | $-$ |
| $f(x)$ | $\smile$ \| | | $\frown$ |

*Concluzie*

Funcția nu admite puncte de inflexiune. Pentru $x \in (-\infty, -1)$ funcția este convexă, iar pentru $x \in (-1, +\infty)$ funcția este concavă.

**3.** $D'' = \mathbb{R}$, $f''(x) = \dfrac{1}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}$

Tabelul este următorul:

| $x$ | $-\infty$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $f''(x)$ | $+$ | $+$ | $+$ |
| $f(x)$ | $\smile$ | | $\smile$ |

*Concluzie*

a) funcția nu admite puncte de inflexiune;

b) funcția este convexă pe $\mathbb{R}$.

**4.** $D'' = (0, +\infty)$, $f''(x) = \dfrac{1}{x^2}$

Tabelul este următorul:

| $x$ | $0$ | | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|
| $f''(x)$ | \| | $+$ | $+$ | $+$ |
| $f(x)$ | \| | $\smile$ | $\smile$ | $\smile$ |

*Concluzie*

a) funcția nu admite puncte de inflexiune;

b) funcția este convexă pe $(0, +\infty)$.

**5.** $D'' = \mathbb{R}$, $f''(x) = -2x(2x^2 - 3)\ e^{-x^2}$ .

Tabelul este următorul:

| $x$ | $-\infty$ | | $-\sqrt{\frac{3}{2}}$ | | $0$ | | $\sqrt{\frac{3}{2}}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f''(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $f(x)$ | | $\smile$ | $f\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ | $\frown$ | $0$ | $\smile$ | $f\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ | $\frown$ | |

*Concluzie*

a) funcția admite trei puncte de inflexiune:

$x_1 = 0$; $x_2 = -\sqrt{\frac{3}{2}}$ ; $x_3 = \sqrt{\frac{3}{2}}$ .

b) pentru $x \in \left(-\infty, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, funcția este convexă;

pentru $x \in \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, 0\right)$, funcția este concavă;

pentru $x \in \left(0, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, funcția este convexă;

pentru $x \in \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, +\infty\right)$, funcția este concavă.

**6.** $D'' = (0, +\infty)$, $f''(x) = \frac{1}{x}$

Tabelul este următorul:

| $x$ | $0$ | | | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f''(x)$ | | $+$ | $+$ | $+$ | |
| $f(x)$ | | $\smile$ | $\smile$ | $\smile$ | |

*Concluzie*

a) funcția nu admite puncte de inflexiune;

b) pentru $x \in (0, +\infty)$ funcția este convexă.

## Exerciții propuse

**I.** Să se determine intervalele de convexitate (concavitate) şi punctele de inflexiune pentru funcțiile următoare:

**1.** $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = x^3 + 1$;

**2.** $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = x^n + 1,\ n \in \mathbb{N}^*$;

**3.** $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = x^3 - 3x + 2$;

**4.** $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = \dfrac{1}{x^2 + 1}$;

**5.** $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = e^{x^2}$;

**6.** $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R},\ f(x) = x + \ln x$;

**7.** $f : \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\} \to \mathbb{R},\ f(x) = \dfrac{x(x^2 + 1)}{x^2 - 1}$;

**8.** $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = e^{-x^2}$;

**9.** $f : (-1, 1) \to \mathbb{R},\ f(x) = \ln(1 - x^2)$;

**10.** $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = \sqrt{x^2 - x + 1}$;

**11.** $f : (-1, 1) \to \mathbb{R},\ f(x) = \arcsin x - \arccos x$;

**12.** $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = \arcsin \dfrac{x - 1}{\sqrt{2(x^2 + 1)}}$;

**13.** $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = \arccos \dfrac{1 - x^2}{1 + x^2}$;

**14.** $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = x - \sin x$;

**15.** $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = \ln(x + \sqrt{1 + x^2})$;

**16.** $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R},\ f(x) = \dfrac{\ln x}{x}$.

**II.**

**1.** Se consideră funcția $f : D \to \mathbb{R},\ f(x) = \dfrac{x^2}{x^2 - x + a},\ a \in \mathbb{R}^*$.

Să se determine valorile parametrului $a \in \mathbb{R}$, astfel încât funcția să admită trei puncte de inflexiune.

**2.** Să se determine punctele de inflexiune ale funcției:

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^3 + 3ax + 2$ ştiind că $f\,''(1) = 1$.

**3.** Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = ax + b \operatorname{arctg} x$.

Să se determine intervalele de convexitate (concavitate) pentru funcția $f$ în ipoteza când $f\,'(1) = 1$; $f\,'(-1) = -1$.

**4.** Să se determine punctele de extrem şi punctele de inflexiune ale funcției $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^3 + ax^2 + 2x + 1$, ştiind că $f\,''(-1) = -1$.

**5.** Să se arate că pentru orice $a$, $b \in \mathbb{R}$, punctele de inflexiune ale graficului funcției $f(x) = 3x^5 - 10x^3 + ax + b$ sunt situate pe aceeaşi dreaptă a cărei ecuație se cere.

**6.** Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = (ax + b)e^x$. Să se determine funcția $f$ ştiind că $f(0) = 0$ şi $x = 0$ este abscisa punctului de inflexiune.

**III.**

**1.** a) Să se arate că pentru orice $x \in [0, +\infty)$, avem: $x \operatorname{arctg} x \geq \ln(1 + x^2)$;

b) Să se arate că pentru orice $x \in [0, +\infty)$, avem: $\frac{x^2}{2} + x \geq \ln x$;

c) Să se arate că pentru orice $x \in [0, +\infty)$, avem: $e^x \geq 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!}$;

d) Să se arate că pentru orice $x \in [0, +\infty)$, avem: $\cos x \leq 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!}$;

e) Să se arate că pentru orice $x \in (0, +\infty)$, avem: $\ln x < x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}$.

**2.** Să se demonstreze inegalitățile următoare:

a) dacă $x_i \geq 0, \forall i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, atunci:

$$\frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n} \geq \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n} \text{ (inegalitatea mediilor).}$$

b) i) dacă $x, y \in \mathbb{R}_+$ şi $n \in \mathbb{N}$, atunci: $\left(\frac{x+y}{2}\right)^n \leq \frac{x^n + y^n}{2}$;

ii) dacă $x, y \in \mathbb{R}_+^*$, atunci: $\ln\frac{x+y}{2} < \frac{x}{x+y}\ln x + \frac{y}{x+y}\ln y$.

c) dacă $x_1, x_2, \dots, x_n \in (0, 1)$ şi $x_1 + x_2 + \dots + x_n = 1$, atunci:

$$\frac{1}{1-x_1}+\frac{1}{1-x_2}+\dots+\frac{1}{1-x_n}\geq\frac{n^2}{n-1}.$$

d) dacă $a_1, a_2 \dots a_n \in (0, 1)$ şi $s = a_1 + a_2 + \dots + a_n$, atunci:

$$\frac{a_1}{1-a_1}+\frac{a_2}{1-a_2}+\dots+\frac{a_n}{1-a_n}\geq\frac{ns}{n-s};$$

e) dacă $a_1, a_2 \dots a_n \in [0, 1]$ şi $a_1 + a_2 + \dots + a_n = 1$, atunci:

$$\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^n\leq(1+a_1)(1+a_2)\dots(1+a_n).$$

**3.** Să se demonstreze că între elementele unui triunghi oarecare $ABC$ avem următoarele inegalităţi:

i) utilizând inegalităţile lui Jensen;

ii) utilizând cunoştinţele de trigonometrie din clasa a X-a.

a) $\sin A + \sin B + \sin C \leq \dfrac{3\sqrt{3}}{2}$; b) $\cos A \cdot \cos B \cdot \cos C \leq \dfrac{1}{8}$;

c) $\cos A + \cos B + \cos C \leq \dfrac{3}{2}$; d) $\cos\dfrac{A}{2}\cos\dfrac{B}{2}\cos\dfrac{C}{2}\leq\dfrac{3\sqrt{3}}{8}$;

e) $\sin\dfrac{A}{2}\sin\dfrac{B}{2}\sin\dfrac{C}{2}\leq\dfrac{1}{8}$.

**4.** Să se demonstreze că între lungimile laturilor unui triunghi avem următoarele inegalităţi:

a) $\dfrac{a}{b+c-a}+\dfrac{b}{a+c-b}+\dfrac{c}{a+b-c}\geq 3$;

b) $\dfrac{a^2}{b+c-a}+\dfrac{b^2}{a+c-b}+\dfrac{c^2}{a+b-c}\geq a+b+c$;

c) $27(b + c - a)(c + a - b)(a + b - c) \leq (a + b + c)^3$.

# Test de aprofundare

**1.** Să se obțină prin derivare următoarele identități:

a) $x + 2x^2 + 3\,x^3 + \ldots + nx^n = \dfrac{nx^{n+2} - (n+1)x^{n+1} + x}{(x-1)^2}$, $\forall x \neq 1$.

b) $C_n^1 + 2C_n^2 + \ldots + nC_n^n x^{n-1} = n(1+x)^{n-1}$.

**2.** Utilizând concavitatea funcției logaritmice, să se stabilească inegalitatea mediilor.

**3.** Fie $a, b > 0, p, q > 1$ şi $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$. Să se stabilească inegalitatea:

$$ab < \frac{a^p}{p} + \frac{b^a}{q}$$ (variantă examen bacalaureat).

**4.** Fie $I \subset \mathbb{R}$ un interval şi o funcție $f : I \to \mathbb{R}$ de două ori derivabilă. Să se arate că pentru orice $a, x \in I$ există un punct $\alpha$ între $a$ şi $x$ pentru care avem:

$$f(x) = f(a) + \frac{x-a}{1!} f\,'(a) + \frac{(x-a)^2}{2!} f\,''(\alpha).$$

**5.** Se dă funcția $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = e^{\frac{1}{x}}$.

Să se verifice relația:

$x^2 f^{(n+1)}(x) + (2nx + 1)f^{(n)}(x) + n(n-1)\, f^{(n-1)}(x) = 0$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$.

**6.** Să se determine funcțiile derivabile $f : [0, 2a]$, $a > 0$ fixat, care îndeplinesc condiția:

$(a - f(x))f\,'(x) = \sqrt{2af(x) - f^2(x)}$.

**7.** Se consideră funcția: $f : [0, h] \to \mathbb{R}$, $f(x) = x - \sin^2 x$.

Ştiind că $f(h) - f(0) = hf(a \cdot h)$, să se arate că $0 < a < 1$ şi să se calculeze $\lim\limits_{h \to 0} a$.

**8.** Să se determine funcțiile $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ derivabile pe $\mathbb{R}$ cu proprietatea că:

$f\,'(x) = f(x) + f(1-x)$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$.

Capitolul 4

# REPREZENTAREA GRAFICĂ A FUNCŢIILOR

## 4.1. Grafice de funcții

Ne propunem să reprezentăm grafic o funcție $f$ de două ori derivabilă pe domeniul său de definiție (eventual cu excepția unui număr finit de puncte).

Sunt necesari următorii paşi:

**1.** Determinarea domeniului de definiție:

- în cazul expresiilor raționale, numitorul trebuie să fie diferit de 0;
- expresia de sub un radical de ordin par trebuie să fie pozitivă;
- baza unei funcții exponențiale trebuie să fie strict pozitivă;
- baza unei funcții logaritmice trebuie să fie strict pozitivă şi diferită de 1, iar argumentul trebuie să fie strict pozitiv;
- funcțiile arcsin şi arccos trebuie definite pe intervalul $[-1, 1]$.

**2.** Explicitarea funcțiilor: modul, maxim, minim, parte întreagă etc.

**3.** Simetrii ale graficului:

- paritatea sau imparitatea funcției.

a) Dacă funcția $f$ este pară, adică $f(x) = f(-x)$, pentru orice $x$ din domeniul de definiție, atunci graficul lui $f$ este simetric față de axa ordonatelor $Oy$.

b) Dacă funcția $f$ este impară, adică $f(x) = - f(-x)$, pentru orice $x$ din domeniul de definiție, atunci graficul lui $f$ este simetric față de originea $O$ a sistemului de coordonate.

- periodicitatea funcției.

Dacă funcția $f$ are perioada $T > 0$, se trasează graficul pe intervalul $[0, T]$ şi apoi se extinde graficul pe tot domeniul de definiție. Ca exemplu de funcții periodice, menționăm funcțiile trigonometrice.

**4.** Intersecția cu axele de coordonate:

a) Rezolvăm ecuația $f(x) = 0$. Fie $x_1, x_2, \ldots, x_k$ soluțiile reale distincte din domeniul de definiție al funcției $f$. Atunci

$$G_f \cap Ox = \{(x_1, 0), (x_2, 0), \ldots, (x_k, 0)\}.$$

Menționăm că intersecția poate fi şi mulțimea vidă (dacă ecuația $f(x) = 0$ nu are soluții în domeniul de definiție al lui $f$).

b) Dacă 0 aparține domeniului de definiție al funcției $f$, atunci

$$G_f \cap Oy = \{(0, f(0))\}.$$

În caz contrar, intersecția graficului cu axa $Oy$ este mulțimea vidă.

**5.** Limite la $\pm\infty$.

a) Dacă domeniul de definiție nu este majorat, se studiază existența limitei la $+\infty$.

b) Dacă domeniul de definiție nu este minorat, se studiază existența limitei la $-\infty$.

**6.** Asimptote:

a) *verticale*

Se studiază în punctele de discontinuitate (în particular în punctele în care funcția $f$ nu este definită) ale funcțiilor nemărginite (chiar dacă acestea sunt definite pe mulțimi mărginite).

Fie $x_0$ un punct de discontinuitate al funcției $f$.

i) Dacă $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x < x_0}} f(x) = \pm\infty$, atunci dreapta $x = x_0$ este asimptotă verticală la stânga.

ii) Dacă $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x > x_0}} f(x) = \pm\infty$, atunci dreapta $x = x_0$ este asimptotă verticală la dreapta.

b) *orizontale*

Se studiază pentru funcțiile definite pe mulțimi nemărginite.

i) Dacă există $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = l \in \mathbb{R}$, atunci dreapta $y = l$ este asimptotă orizontală spre $+\infty$.

ii) Dacă există $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = l \in \mathbb{R}$, atunci dreapta $y = l$ este asimptotă orizontală spre $-\infty$.

c) *oblice*

i) Dacă există $\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = m \in \mathbb{R}$ şi $\lim_{x \to +\infty} [f(x) - mx] = n \in \mathbb{R}$, atunci dreapta $y = mx + n$ este asimptotă oblică spre $+\infty$.

ii) Dacă există $\lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} = m \in \mathbb{R}$ şi $\lim_{x \to -\infty} [f(x) - mx] = n \in \mathbb{R}$, atunci dreapta $y = mx + n$ este asimptotă oblică spre $-\infty$.

**Observaţie:** Existenţa unei asimptote orizontale (spre $+\infty$ sau $-\infty$) exclude existenţa unei asimptote oblice în aceeaşi direcţie.

În schimb, o funcţie poate admite asimptotă orizontală spre $+\infty$ (respectiv $-\infty$) şi asimptota oblică spre $-\infty$ (respectiv $+\infty$).

Este posibil ca o funcţie $f$ să nu admită nici o asimptotă.

**7.** Studiul derivatei întâi:

a) Se determină mulţimea $E \subset D$ pe care $f$ este derivabilă şi se calculează $f'(x)$, $x \in E$.

b) Se rezolvă ecuaţia $f'(x) = 0$. Soluţiile acestei ecuaţii, numite puncte critice ale lui $f$, pot fi puncte de extrem local ale lui $f$ (în funcţie de monotonia lui $f$).

c) Se determină intervalele pe care $f'$ are semn constant.

i) Dacă $f' > 0$ pe intervalul $I_1 \subset E$, atunci $f$ este strict crescătoare pe $I_1$.

ii) Dacă $f' < 0$ pe intervalul $I_2 \subset E$, atunci $f$ este strict descrescătoare pe $I_2$.

Dacă funcţia $f$ este continuă în punctul $x_0$, dar nu este derivabilă în $x_0$, distingem următoarele cazuri:

i) dacă $f$ are derivate laterale infinite de semn contrar, atunci punctul $M_0(x_0, f(x_0))$ este *punct de întoarcere* al graficului;

ii) dacă $f$ are derivate laterale diferite şi cel puţin una este finită, atunci punctual $M_0(x_0, f(x_0))$ este *punct unghiular* al graficului.

**8.** Studiul derivatei a doua:

a) Se determină mulţimea $F \subset E \subset D$ pe care $f$ este de două ori derivabilă şi se calculează $f''(x)$, $x \in F$.

b) Se rezolvă ecuaţia $f''(x) = 0$. Unele din soluţiile acestei ecuaţii sunt puncte de inflexiune.

c) Se determină intervalele pe care $f''$ are semn constant:

i) dacă $f'' > 0$ pe intervalul $I_1 \subset F$, atunci $f$ este convexă pe $I_1$;

ii) dacă $f'' < 0$ pe intervalul $I_2 \subset F$, atunci $f$ este concavă pe $I_2$.

Punctul $x_0 \in F$ este punct de inflexiune dacă $f''(x_0) = 0$ şi funcţia $f$ îşi schimbă concavitatea la trecerea prin $x_0$.

**9.** Vom sistematiza rezultatele obţinute mai sus într-un tabel de variaţie.

| | |
|---|---|
| $x$ | |
| $f'(x)$ | |
| $f(x)$ | |
| $f''(x)$ | |

**10)** Trasarea graficului:

Conform tabelului de variaţie al funcţiei $f$, vom trasa graficul acestei funcţii, raportat la un sistem de coordonate ortogonale.

## Exerciţii rezolvate

**I.** Să se traseze graficele următoarelor funcţii:

**1.** $f(x) = -x^3 + 3x^2$; $D = \mathbb{R}$.

Intersecţia graficului cu $Ox$ : $x^2(-x + 3) = 0$, $x_1 = 0$, $x_2 = 3$;

$f(x) \le 0$ pentru $x \in [3, \infty)$, $f(x) > 0$ pentru $x \in (-\infty, 3)$;

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$; $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = -\infty$. Funcţia nu admite asimptote.

$f'(x) = -3x^2 + 6x$, $f'(x) = 0 \Rightarrow -3x(x-2) = 0 \Rightarrow x_1 = 0, x_2 = 2$;

$f''(x) = -6x + 6$, $f''(x) = 0 \Rightarrow x = 1$; $f(1) = 2$.

| $x$ | $-\infty$ | | $0$ | | $1$ | | $2$ | | $3$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $-$ | $-$ | $0$ | $+$ | $+$ | $+$ | $0$ | $-$ | $-$ | $-$ | $-$ |
| $f''(x)$ | $+$ | $+$ | $+$ | $+$ | $2$ | $-$ | $-$ | $-$ | $-$ | $-$ | $-$ |
| $f(x)$ | $+\infty$ | $\searrow$ | $0$ $\smile$ | $\nearrow$ | $2$ | $\nearrow$ $\frown$ | $4$ | $\searrow$ | $0$ $\frown$ | $\searrow$ | $-\infty$ |

Graficul funcţiei este prezentat în figura următoare.

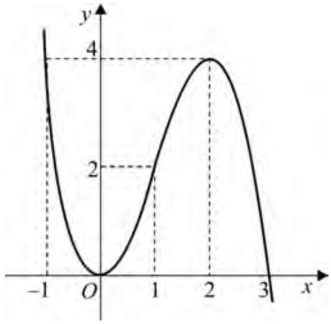



**Figura 1**

**2.** $f(x) = x^4 - 8x^2,\ D = \mathbb{R}$.

Intersecția graficului cu axa $Ox$ : $f(x) = 0 \Rightarrow x^2(x^2 - 8) = 0, x_1 = 0, x_{2,3} = \pm\ 2\sqrt{2}$.

Intersecția graficului cu axa $Oy$ : $f(0) = 0$.

$f(-x) = f(x), \forall x \in \mathbb{R}$; funcția este pară.

$\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = +\infty$; funcția nu admite asimptote.

$f'(x) = 4x^3 - 16x,\ f'(x) = 0 \Rightarrow 4x(x^2 - 4) = 0, x_1 = 0, x_{2,3} = \pm 2, f(\pm 2) = -16$.

$f''(x) = 12x^2 - 16, f''(x) = 0 \Rightarrow\ x_{1,2} = \pm\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$;

| $x$ | $-\infty$ | | $-2\sqrt{2}$ | | $-2$ | | $-\frac{2\sqrt{3}}{3}$ | | $0$ | | $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ | | $2$ | | $2\sqrt{2}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $-$ | $-$ | $-$ | $-$ | $0$ | $+$ | $+$ | $+$ | $0$ | $-$ | $-$ | $-$ | $0$ | $+$ | $+$ | $+$ | $+$ |
| $f''(x)$ | $+$ | $+$ | $+$ | $+$ | $+$ | $+$ | $0$ | $-$ | $-$ | $-$ | $0$ | $+$ | $+$ | $+$ | $+$ | $+$ | $+$ |
| $f(x)$ | $+\infty$ | $\searrow$ | $0$ | $\searrow$ | $-16$ $\smile$ | $\nearrow$ | $-\frac{80}{9}$ | $\nearrow$ | $0$ $\frown$ | $\searrow$ | $-\frac{80}{9}$ | $\searrow$ | $-16$ $\smile$ | $\nearrow$ | $0$ | $\nearrow$ | $+\infty$ |

Graficul funcției este prezentat în figura următoare.

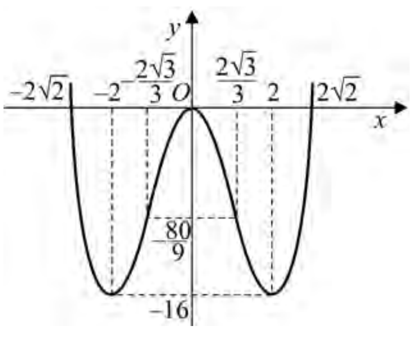



**Figura 2**

**II.** Să se traseze graficele următoarelor funcții:

**1.** $f(x) = \dfrac{2x}{x^2+1}$, $D = \mathbb{R}$.

Intersecția graficului cu axa $Ox$ : $f(x) = 0 \Rightarrow x = 0$.

$f(x) \leq 0$ pentru $x \leq 0$, $f(x) > 0$ pentru $x > 0$.

$f(-x) = -f(x)$, funcția este impară; $f(0) = 0$, $f(1) = 1$.

$\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = 0$; dreapta $y = 0$ este asimptotă orizontală spre $-\infty$ şi spre $+\infty$.

$f'(x) = \dfrac{2(1-x^2)}{(x^2+1)^2}$, $f'(x) = 0 \Rightarrow x_{1,2} = \pm 1$;

$f''(x) = \dfrac{4x(x^2-3)}{(x^2+1)^3}$, $f''(x) = 0 \Rightarrow x_1 = 0$ şi $x_{2,3} = \pm\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

| $x$ | $-\infty$ | | $-\sqrt{3}$ | | $-1$ | | $0$ | | $1$ | | $\sqrt{3}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $-$ | $-$ | $-$ | $-$ | $0$ | $+$ | $+$ | $+$ | $0$ | $-$ | $-$ | $-$ | $-$ |
| $f''(x)$ | $-$ | $-$ | $0$ | $+$ | $+$ | $+$ | $0$ | $-$ | $-$ | $-$ | $0$ | $+$ | $+$ |
| $f(x)$ | $0$ | $\searrow \frown$ | $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $\searrow$ | $-1$ $\smile$ | $\nearrow$ | $0$ | $\nearrow$ | $1$ $\frown$ | $\searrow$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $\searrow \smile$ | $0$ |

Graficul funcției este prezentat în figura următoare.

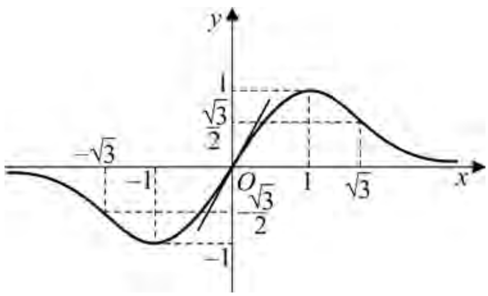



**Figura 3**

**2.** $f(x) = \dfrac{7x^2+20x}{x^2+2x-3}$, $D = \mathbb{R} \setminus \{-3, 1\}$.

Intersecția graficului cu axa $Ox$ : $f(x) = 0 \Rightarrow x(7x+20) = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow x_1 = 0$, $x_2 = \dfrac{-20}{7}$

$f(x) \geq 0$ pentru $x \in (-\infty, -3) \cup [\frac{-20}{7}, 0\,] \cup (1, \infty)$;

$f(x) < 0$ pentru $x \in (-3, \frac{-20}{7}) \cup (0, 1)$;

$l_s(-3) = +\infty$; $l_d(-3) = -\infty$; $l_s(1) = -\infty$; $l_d(1) = +\infty$

Dreptele $x = -3$ şi $x = 1$ sunt asimptote verticale.

$\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = 7$; dreapta $y = 7$ este asimptotă orizontală spre $-\infty$ şi spre $+\infty$.

$f\,'(x) = \frac{-6x^2 - 42x - 60}{(x^2 + 2x - 3)^2} = \frac{-6(x^2 + 7x + 10)}{(x^2 + 2x - 3)^2}$; $f\,'(x) = 0 \Rightarrow x_1 -5$; $x_2 = -2$.

| $x$ | $-\infty$ | | $-5$ | | $-3$ | | $-\frac{20}{7}$ | | $-2$ | | $0$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f\,'(x)$ | $-$ | $-$ | $0$ | $+$ | \|\| | $+$ | $+$ | $+$ | $0$ | $-$ | $-$ | $-$ | \|\| | $-$ $-$ | |
| $f(x)$ | $7$ | ↘ | $\frac{25}{4}$ | ↗ | $+\infty$ \|\| $-\infty$ | ↗ | $0$ | ↗ | $4$ | ↘ | $0$ | ↘ | $-\infty$ \|\| $+\infty$ | ↘ | $7$ |

Graficul funcției este prezentat în figura de mai jos.

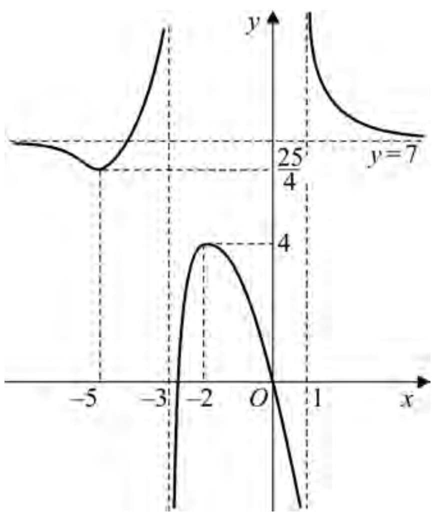



**Figura 4**

**3.** $f(x)=\dfrac{2|x|-3}{|x|+1}$; $D=\mathbb{R}$.

Funcția $f$ este funcție pară.

$y=2$ asimptotă orizontală la $\pm\infty$.

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{2x+3}{x-1}, & x<0\\ \dfrac{2x-3}{x+1}, & x\geq 0\end{cases};\quad f'(x)=\begin{cases}\dfrac{-5}{(x-1)^2}, & x\in(-\infty,0)\\ \dfrac{5}{(x+1)^2}, & x\in(0,+\infty)\end{cases};\quad f''(x)=\begin{cases}\dfrac{10}{(x-1)^3}, & x<0\\ -\dfrac{10}{(x+1)^3}, & x>0\end{cases}.$$

| $x$ | $-\infty$ | | $-\frac{3}{2}$ | | $0$ | | $\frac{3}{2}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $-$ | $-$ | $-$ | $-$ \| | | $+$ | $+$ | $+$ | |
| $f''(x)$ | $-$ | $-$ | $-$ | $-$ \| | | $-$ | $-$ | $-$ | |
| $f(x)$ | 2 | $\searrow$ | 0 | $\searrow$ | $-3$ | $\nearrow$ | 0 | $\nearrow$ | 2 |

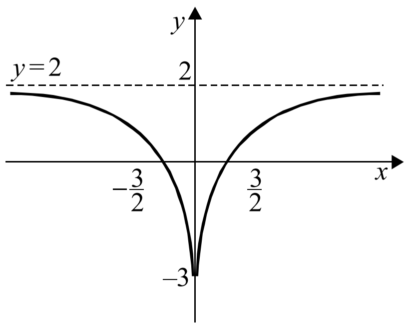



**Figura 5**

**III.** Să se reprezinte grafic următoarele funcții:

**1.** $f(x)=\dfrac{\ln x}{x-1}$; $D=(0,\infty)\setminus\{1\}$.

Graficul funcției nu intersectează axele de coordonate.

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x) = +\infty; \quad \lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x}}{1} = 0.$$

Dreapta $x = 0$ este asimptotă verticală, iar dreapta $y = 0$ este asimptotă orizontală spre $+\infty$.

$$l_s(1) = \lim_{\substack{x\to 1\\ x<1}} \frac{\ln x}{x-1} = \lim_{\substack{x\to 1\\ x<1}} \frac{\frac{1}{x}}{1} = 1; \quad l_d(1) = \lim_{\substack{x\to 1\\ x>1}} \frac{\frac{1}{x}}{1} = 1.$$

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{x}(x-1) - \ln x}{(x-1)^2} = \frac{x-1-x\ln x}{x(x-1)^2}.$$

| $x$ | 0 | | 1 | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $-$ | $-$ | \| | $-$ | $-$ |
| $f(x)$ | $+\infty$ | $\searrow$ | 1\|1 | $\searrow$ | 0 |

Graficul funcției este prezentat în fig. 6.

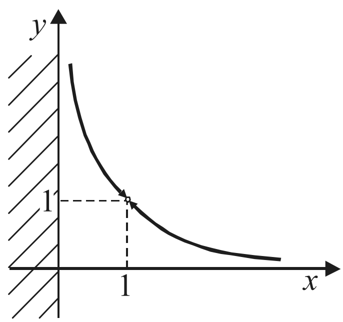



**Figura 6**

**2.** $f(x) = (x^2 + x)e^{-x}$; $D = \mathbb{R}$.

Intersecția graficului cu axa $Ox$ : $f(x) = 0 \Rightarrow x^2 + x = 0 \Rightarrow x_1 = -1$, $x_2 = 0$.

$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2+x}{e^x} = 0.$ Dreapta $y = 0$ este asimptotă orizontală spre $+\infty$.

$$f'(x) = (2x+1)e^{-x} - (x^2+x)e^{-x} = e^{-x}(-x^2+x+1).$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow -x^2+x+1 = 0 \Rightarrow \alpha = \frac{1-\sqrt{5}}{2},\ \beta = \frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

| $x$ | $-\infty$ | | $-1$ | | $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$ | | $0$ | | $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $-$ | $-$ | $-$ $-$ | $-$ $-$ | $0$ | $+$ $+$ | $+$ | $+$ $+$ | $0$ | $-$ $-$ | $-$ |
| $f(x)$ | $+\infty$ | $\searrow$ | $0$ | $\searrow$ | $f\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)$ | $\nearrow$ | $0$ | $\nearrow$ | $f\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$ | $\searrow$ | $0$ |

Graficul funcției este prezentat în fig. 7.

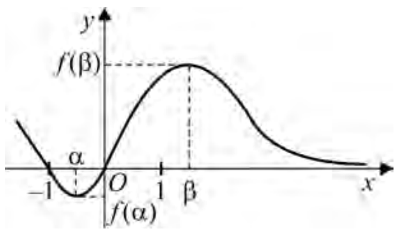



**Figura 7**

**3.** $f(x) = 2\ln(x^2+4)$; $D = \mathbb{R}$.

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} f(x) = \infty.$$

$$f'(x) = 2\cdot\frac{2x}{x^2+4} = \frac{4x}{x^2+4}$$

$$f''(x) = 4\cdot\left(\frac{x}{x^2+4}\right)' = 4\cdot\frac{x^2+4-2x^2}{(x^2+4)^2} = 4\cdot\frac{4-x^2}{(x^2+4)^2}$$

$f''(x) = 0 \Rightarrow x = \pm 2.$

| | |
|---|---|
| $x$ | $-\infty$ $\quad$ $-2$ $\quad$ $0$ $\quad$ $2$ $\quad$ $+\infty$ |
| $f'(x)$ | $-\ -\ -\ -\ -$ $\quad 0 + + \ + + \ + + \ + +$ |
| $f''(x)$ | $-\ -\ -$ $\quad 0 + + + + +$ $\quad 0 - - - - - - -$ |
| $f(x)$ | $+\infty \searrow 6\ln 2 \searrow 4\ln 2 \nearrow 6\ln 2 \nearrow +\infty$ <br> $\frown$ $\quad$ $\smile$ $\quad$ $\frown$ |

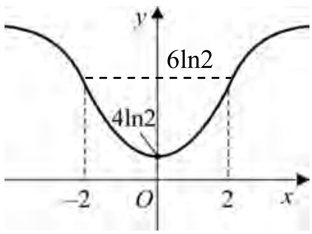



**Figura 8**

**IV.** Să se traseze graficele următoarelor funcții iraționale:

**1.** $f(x) = x\sqrt{x-2}$ ; $D = [2, \infty)$

$\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = +\infty$; $f(x) = 0 \Rightarrow x = 2$.

$$f'(x) = \sqrt{x-2} + x\frac{1}{2\sqrt{x-2}} = \frac{2(x-2)+x}{2\sqrt{x-2}} = \frac{3x-4}{2\sqrt{x-2}};$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow 3x - 4 = 0 \Rightarrow x = \frac{4}{3} \notin [2,\infty).$$

$$f''(x) = \frac{1}{2}\cdot\frac{3\sqrt{x-2} - \dfrac{3x-4}{2\sqrt{x-2}}}{x-2} = \frac{1}{2}\cdot\frac{6(x-2)-3x+4}{2(x-2)\sqrt{x-2}};$$

$$f''(x) = \frac{1}{2\cdot 2}\cdot\frac{6x-3x+4-12}{(x-2)\sqrt{x-2}} = \frac{1}{4}\cdot\frac{3x-8}{(x-2)\sqrt{x-2}}$$

$$f''(x) = 0 \Rightarrow 3x - 8 = 0 \Rightarrow x = \frac{8}{3} \in [2,\infty).$$

| $x$ | $2$ | | $\frac{8}{3}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | \| | $+ + + + +$ | $+ +$ | $+ + + + +$ | |
| $f''(x)$ | \| | $- - - - - - -$ | $0$ | $+ + + + + + +$ | |
| $f(x)$ | $0$ | ⌒ | ↗ | ⌣ | $+\infty$ |

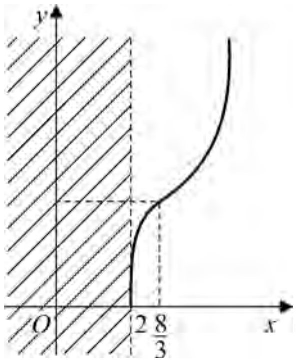



Figura 9

**2.** $f(x)=\sqrt{\dfrac{x-1}{x+1}}$, $D=(-\infty,-1)\cup[1,\infty)$; $f(x)=0\Rightarrow x=1$.

$\lim\limits_{\substack{x\to-1\\x<-1}}\sqrt{\dfrac{x-1}{x+1}}=+\infty$, $\lim\limits_{x\to\pm\infty}f(x)=1$; dreapta $y=1$ este asimptotă orizontală spre $-\infty$ şi spre $+\infty$.

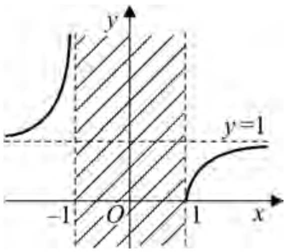



Figura 10

$$f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{\dfrac{x-1}{x+1}}}\cdot\left(\frac{x-1}{x+1}\right)'=\frac{1}{\sqrt{\dfrac{x-1}{x+1}}\cdot(x+1)^2}>0.$$

| $x$ | $-\infty$ | | $-1$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $+$ | $+$ | $+$ | | \| | $+$ | $+$ |
| $f(x)$ | $1$ | ↗ | $+\infty$ | | $0$ | ↗ | $+1$ |

Graficul funcției este prezentat în fig. 10.

**3.** $f(x)=\dfrac{x+1}{\sqrt{x^2+1}}$, $D=\mathbb{R}$; $f(x)=0 \Rightarrow x=-1$; $f(0)=1$.

$\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=1$; dreapta $y=1$ este asimptotă orizontală spre $+\infty$.

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-1$; dreapta $y=-1$ este asimptotă orizontală spre $-\infty$.

$$f'(x)=\frac{\sqrt{x^2+1}-(x+1)\cdot\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}}{x^2+1}=\frac{1-x}{(x^2+1)^{\frac{3}{2}}}.$$

| $x$ | $-\infty$ | | $-1$ | | $0$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $+$ | $+$ | $+$ | $+$ | $+$ | $+$ | $0$ | $-$ | $-$ |
| $f(x)$ | $-1$ | $\nearrow$ | $0$ | $\nearrow$ | $1$ | $\nearrow$ | $\sqrt{2}$ | $\searrow$ | $1$ |

Graficul funcției este prezentat în fig. 11.

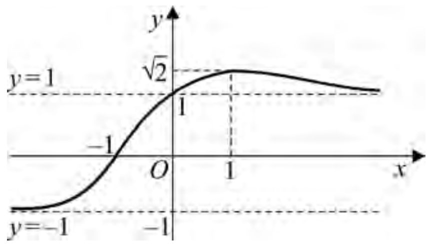



**Figura 11**

**4.** $f(x)=\sqrt[3]{x^3-3x+2}$, $D=\mathbb{R}$. $f(x)=0 \Rightarrow x_1=1$, $x_2=2$;

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$; $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$; $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{f(x)}{x}=1$;

$$\lim_{x\to\pm\infty}[f(x)-x]=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^3-3x+2-x^3}{\sqrt[3]{(x^3+3x+2)^2}+x\sqrt[3]{x^3-3x+2}+x^2}=0.$$

Dreapta $y=x$ este asimptotă oblică spre $-\infty$ şi spre $+\infty$.

$f'(x)=\dfrac{x+1}{\sqrt[3]{(x-1)(x+2)^2}}$; $f'(x)=0 \Rightarrow x=-1$, $f(-1)=\sqrt[3]{4}$.

Deoarece $\lim\limits_{\substack{x\to1\\x<1}} f'(x)=-\infty$ şi, $\lim\limits_{\substack{x\to1\\x>1}} f'(x)=+\infty$ rezultă că $x=1$ este punct de întoarcere.

| $x$ | $-\infty$ | | $-2$ | | | $-1$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $+$ | $+$ | $+\infty \mid +\infty$ | $+$ | | $0$ | $-$ | $\mid$ | $+$ | $+$ |
| $f(x)$ | $-\infty$ | $\nearrow$ | $0$ | $\nearrow$ | | $\sqrt[3]{4}$ | $\searrow$ | $0$ | $\nearrow$ | $+\infty$ |

Graficul funcției este prezentat în fig. 12.

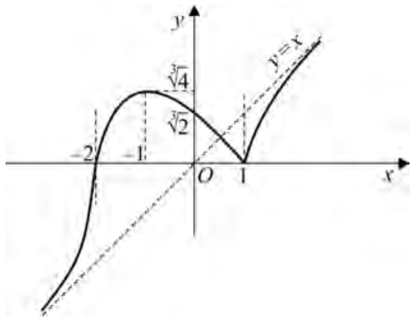



**Figura 12**

**V.**

**1.** Să se reprezinte grafic funcția:

$f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \arcsin x - x\sqrt{1-x^2}$ .

Avem $f(-1) = -\dfrac{\pi}{2}$, $f(0) = 0$ și $f(1) = \dfrac{\pi}{2}$.

Derivata întâi $f'(x) = \dfrac{2x^2}{\sqrt{1-x^2}}$ se anulează în $x = 0$.

Avem $\lim\limits_{x\to\pm1} f(x) = +\infty$.

Derivata a doua este $f''(x) = \dfrac{2x(2-x^2)}{\sqrt{(1-x^2)^3}}$, $x \in (-1, 1)$. Ea se anulează în $x = 0$ (punct de inflexiune). Punctele $x'' = \pm\sqrt{2} \notin [-1, 1]$.

Tabelul de variație:

| $x$ | $-1$ | | $0$ | | $1$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $\mid +\infty$ | $+$ | $0$ | $+$ | $+\infty$ |
| $f(x)$ | $-\dfrac{\pi}{2}$ | $\nearrow$ | $0$ | $\nearrow$ | $\dfrac{\pi}{2}$ |
| $f''(x)$ | $\mid$ | $-$ | $0$ | $+$ | $\mid$ |

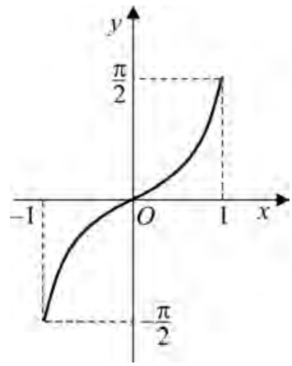



**Figura 13**

**2.** Să se reprezinte grafic funcția:

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{\sin x}{2-\cos x}$

Funcția este definită pentru orice $x \in \mathbb{R}$, are perioada $2\pi$ şi este simetrică față de origine, pentru că $f(x) = -f(-x)$. O vom studia pentru $x \in (0, \pi)$.

Derivata întâi $f'(x) = \dfrac{2\cos x - 1}{(2-\cos x)^2}$

se anulează pentru $x \in [0, \pi]$ în $x = \dfrac{\pi}{3}$.

Acesta este un punct de maxim, iar $f\left(\dfrac{\pi}{3}\right) = \left(\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)$.

Derivata a doua este:

$$f''(x) = \frac{-2\sin x(1+\cos x)}{(2-\cos x)^3} < 0,$$

pentru $x \in (0, \pi)$, deci $f$ este concavă pe $(0, \pi)$.

**Observație:** Punctele $x_k = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ sunt puncte de inflexiune.

Tabelul de variație al funcției studiate anterior este:

| $x$ | $0$ | | $\frac{\pi}{3}$ | | $\frac{\pi}{2}$ | | $\pi$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | $-$ | $-$ | |
| $f(x)$ | $0$ | $\nearrow$ | $\frac{\sqrt{3}}{3}$ | $\searrow$ | $\frac{1}{2}$ | $\searrow$ | $0$ |

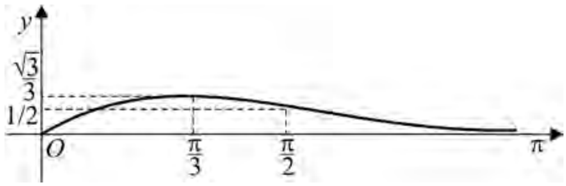



**Figura 14**

Lăsăm în seama cititorului trasarea graficului pe intervalul $(-\pi, 0)$.

În $\pi$ graficul intersectează axa orizontală.

**3.** Să se reprezinte grafic funcția:

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \cos^3 x - 3\cos x + 2$.

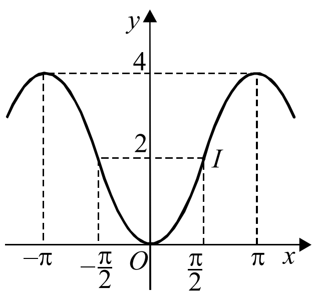
Funcția $f$ este definită pe $\mathbb{R}$.

Cum $f(x) = f(-x)$ (deci funcția este simetrică față de $Oy$) și are perioada $2\pi$, vom studia funcția doar pe intervalul $[0, \pi]$.

Avem $f'(x) = -3\cos^2 x \cdot \sin x + 3\sin x = 3\sin^3 x$, deci pe intervalul $[0, \pi]$ funcția $f$ este crescătoare. Apoi $f'(x) = 0 \Rightarrow x = 0$ și $x = \pi$, când $f(0) = 0$ și $f(\pi) = 4$.

Derivata a doua $f''(x) = 9\sin^2 x \cdot \cos x$ se anulează pentru $x \in (0, \pi)$ în $x = \frac{\pi}{2}$. Punctul $I\left(\frac{\pi}{2}, 2\right)$ de pe grafic este punct de inflexiune. Panta tangentei în acest punct este $f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 3$. Avem $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2$.

Tabelul de variație și graficul sunt prezentate mai jos:




| $x$ | $0$ | | $\frac{\pi}{2}$ | | $\pi$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $0$ | $+$ | | $+$ | $0$ |
| $f(x)$ | $0$ | $\nearrow$ | $2$ | $\nearrow$ | $4$ |
| $f''(x)$ | $-$ | $-$ | $0$ (i) | $+$ | $+$ |

**Figura 15**

# 4.2. Rezolvarea grafică a ecuațiilor, utilizarea reprezentării grafice a funcțiilor în determinarea numărului de rădăcini reale ale unei ecuații

În capitolul despre derivabilitate, a fost prezentat *şirul lui Rolle* ca metodă de stabilire a numărului de rădăcini reale ale ecuației $f(x) = 0$, unde $f : I \to \mathbb{R}$ era o funcție derivabilă pe intervalul $I$.

Există însă şi altă cale pentru determinarea numărului de rădăcini reale ale unei ecuații, aceea oferită de reprezentarea grafică a funcțiilor, numită *metoda grafică.*

Fie ecuația $g(x) = h(x)$, unde $g$, $h : E \to \mathbb{R}$ sunt funcții derivabile. Se reprezintă grafic funcțiile $g$ şi $h$ şi se intersectează cele două grafice. Abscisele punctelor de intersecție reprezintă soluțiile ecuației.

Dacă graficele $G_g$ şi $G_h$ nu se intersectează, ecuația $g(x) = h(x)$ nu are soluții.

Echivalent, ecuația $g(x) = h(x)$ se poate scrie $f(x) = 0$, unde:

$$f : E \to \mathbb{R},\ f = g - h.$$

Se reprezintă grafic funcția $f$, se consideră graficul $G_f$ şi intersecția acestuia cu axa $Ox$ ($y = 0$). Soluțiile ecuației $f(x) = 0$ sunt abscisele punctelor de intersecție.

În particular, dacă $h(x) = m \in \mathbb{R}$ este o funcție constantă, se reprezintă grafic funcția $g$ şi se consideră intersecția graficului $G_g$ cu dreapta de ecuație $y = m$.

Evident, dacă dreapta $y = m$ nu intersectează $G_g$ ecuația $g(x) = m$ nu are soluții reale.

# Ecuații fără parametri

Determinăm numărul rădăcinilor reale ale ecuației următoare, stabilind cu aproximație şi intervalele în care se află aceste rădăcini.

Vrem să determinăm numărul rădăcinilor ecuației: $x^3 - 4x - \ln|x| = 0,\ x \neq 0$.

Ecuația este echivalentă cu: $x^3 - 4x = \ln|x|$. Se reprezintă grafic funcțiile $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = x^3 - 4x$, şi $h : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$, $h(x) = \ln|x|$.

După parcurgerea etapelor de studiu, se obțin următoarele tabele de variație:

| $x$ | $-\infty$ | | $-2$ | | $-\frac{2}{\sqrt{3}}$ | | $0$ | | $\frac{2}{\sqrt{3}}$ | | $2$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $g'(x)$ | + + | + + | + + | + | 0 | − − | − − | − − | 0 | + + | + | + + | |
| $g(x)$ | $+\infty$ | ↗ | 0 | ↗ | $\frac{16\sqrt{3}}{9}$ | ↘ | 0 | ↘ | $-\frac{16\sqrt{3}}{9}$ | ↗ | 0 | ↗ | $+\infty$ |
| $g''(x)$ | − − | − − | − − | − − | − − | − − | 0 | + + | + + | + + | + + | + + | |

| $x$ | $-\infty$ | | $-1$ | | $0$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $h'(x)$ | − − | − − | − − | − − | \| | + + | + + | + + | + + |
| $h(x)$ | $+\infty$ | ↘ | 0 | ↘ | $-\infty$ \| $-\infty$ | ↗ | 0 | ↗ | $+\infty$ |
| $h''(x)$ | − − | − − | − − | − − | \| | − − | − − | − − | − − |

Graficele funcțiilor $g$ şi $h$ sunt redate în fig. 17.

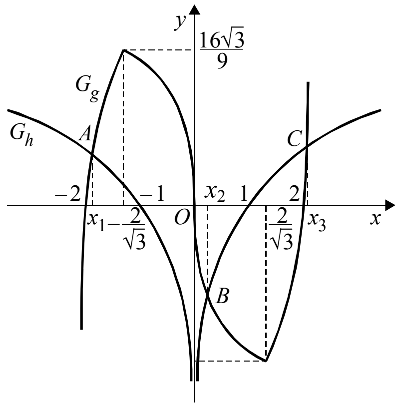



**Figura 17**

Există trei puncte de intersecție ale graficelor, deci ecuația are trei rădăcini reale şi diferite: $x_1 \in (-2, -1)$, $x_2 \in (0, 1)$ şi $x_3 \in (2, +\infty)$.

## Ecuații care conțin parametri

În exercițiile următoare, vom discuta numărul rădăcinilor unor ecuații care conțin parametri şi intervalele în care sunt situate aceste rădăcini.

**1.** Să se determine numărul de rădăcini ale ecuației:

$x^3 - (m + 2)x^2 - 3m - 1 = 0$, $m \in \mathbb{R}$, în funcție de parametrul real $m$.

*Soluție*

Ecuația se scrie $f(x) = m$, unde $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{x^3 - 2x^2 - 1}{x^2 + 3}$ şi se obține următorul tabel de variație:

| $x$ | $-\infty$ | | $0$ | | $1$ | | $x_0$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | + + + + + + | $0$ | – – | $0$ | + + + + | | + + + + + + | |
| $f(x)$ | $-\infty$ | $\nearrow$ | $-\frac{1}{3}$ | $\searrow$ | $-\frac{1}{2}$ | $\nearrow$ | $0$ | $\nearrow$ | $+\infty$ |

Graficul funcției admite dreapta $y = x - 2$ ca asimptotă oblică spre $+\infty$ şi $-\infty$. Graficul este redat în fig. 18.

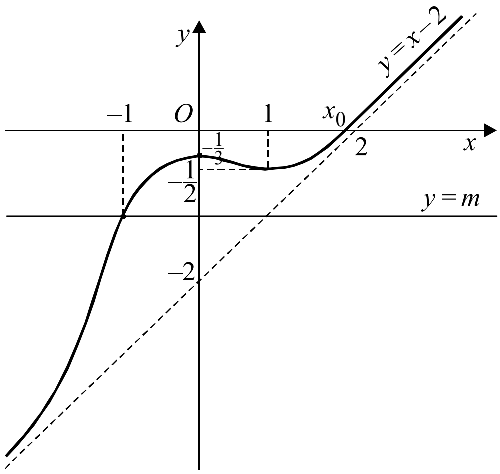



**Figura 18**

Dreapta $y = m$ intersectează graficul funcției în unul, două sau trei puncte, obținându-se următorul tabel:

| $m$ | **Numărul de rădăcini reale** |
|---|---|
| $m<-\frac{1}{2}$ | $x_1 \in (-\infty, 0)$ |
| $m=-\frac{1}{2}$ | $x_1 \in (-\infty, 0), x_2 = x_3 = 1$ |
| $-\frac{1}{2}<m<-\frac{1}{3}$ | $x_1 \in (-\infty, 0), x_2 \in (0, 1), x_3 \in (1, 2)$ |
| $m=-\frac{1}{3}$ | $x_1 = x_2 = 0, x_3 \in (1, 2)$ |
| $m>-\frac{1}{3}$ | $x_1 \in (1, +\infty)$ |

**2.** Să se determine numărul rădăcinilor ecuației $ax^2 + 1 - \ln|x| = 0$, $x \neq 0$, $a \in \mathbb{R}$, în funcție de parametrul real $a$.

*Soluție*

Ecuația se scrie: $\frac{\ln|x|-1}{x^2} = a$.

Se studiază funcția pară: $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{\ln|x|-1}{x^2}$ și se obține următorul tabel de variație:

| $x$ | $-\infty$ | | $-e^{\frac{3}{2}}$ | | $-e$ | | $0$ | | $e$ | | $e^{\frac{3}{2}}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $+$ | $+$ | $0$ | $-$ | $-$ | $-$ | \| | $+$ | $+$ | $+$ | $0$ | $-$ | $-$ |
| $f(x)$ | $0$ | $\nearrow$ | $\frac{1}{2e^3}$ | $\searrow$ | $0$ | $\searrow$ $-\infty$ \| $-\infty$ | | $\nearrow$ | $0$ | $\nearrow$ | $\frac{1}{2e^3}$ | $\searrow$ | $0$ |

Graficul funcției $f$ este redat în figura următoare.

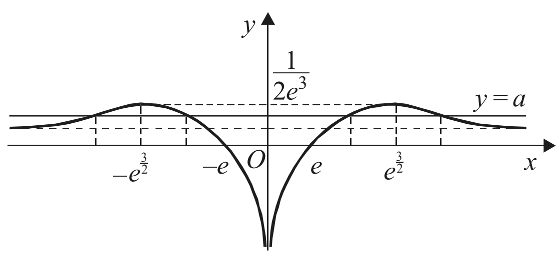



**Figura 19**

Discuție în funcție de parametrul real $a$:

• dacă $a < 0$, atunci $x_1 \in (-e, 0)$, $x_2 \in (0, e)$;

• dacă $a = 0$, atunci $x_1 = -e$, $x_2 = e$;

• dacă $0 < a < \dfrac{1}{2e^3}$, atunci $x_1 \in \left(-\infty, -e^{\frac{3}{2}}\right)$, $x_2 \in \left(-e^{\frac{3}{2}}, -e\right)$, $x_3 \in \left(e, e^{\frac{3}{2}}\right)$, $x_4 \in \left(e^{\frac{3}{2}}, +\infty\right)$;

• dacă $a = \dfrac{1}{2e^3}$, atunci $x_1 = -e^{\frac{3}{2}}$, $x_2 = e^{\frac{3}{2}}$;

• dacă a > $\dfrac{1}{2e^3}$, atunci ecuația nu are rădăcini reale.

## Exerciții propuse

**1.** Folosind metoda grafică, să se determine numărul rădăcinilor reale ale ecuațiilor următoare şi intervalele cărora aparțin aceste rădăcini:

a) $\ln(x^2 + 1) - x^4 + 1 = 0$, $x \in \mathbb{R}$; b) $\sin x - (x + 1)\cos x + x = 0$, $x \in [0, 4\pi]$;

c) $xe^{-x} + 1 - x = 0$, $x \in \mathbb{R}$; d) $\ln\dfrac{1+x}{1-x} - 3\,\mathrm{arctg}\,x = 0,\ x \in (-1, 1)$;

e) $2^x + x^2 - 2 = 0$, $x \in \mathbb{R}$; f) $2 - x^2 - \mathrm{arctg}\,x = 0$, $x \in \mathbb{R}$.

**2.** Să se discute, după valorile parametrului $m$, numărul rădăcinilor reale ale ecuațiilor (folosind metoda grafică):

a) $x^3 - mx^2 - 3x + 2 = 0$, $x \in \mathbb{R}$; b) $m(x + 1) - xe^x = 0$, $x \in \mathbb{R}$;

c) $2(x + 2) - 3\ln\dfrac{x-1}{x+1} = m = 0$, $x \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$;

d) $\arcsin\dfrac{x}{2} - \dfrac{x}{4}\cdot\sqrt{4-x^2} - m = 0,\ x \in [-2, 2]$;

e) $ex - mx^3 = 0$, $x \in \mathbb{R}$.

**3.** Să se discute, după valorile parametrului real $m$, numărul rădăcinilor reale ale ecuațiilor (folosind metoda grafică şi şirul lui Rolle):

a) $x^2 - 4x - 6 \ln(x - 2) + m = 0,\ x \in (1, +\infty)$; b) $e^{-x} + mx = 0,\ x \in \mathbb{R}$;

c) $2\ \mathrm{sh}x + \mathrm{ch}x + m = 0,\ x \in \mathbb{R}$.

# 4.3. Reprezentarea grafică a conicelor

În această secțiune, vom defini cercul, elipsa, hiperbola, parabola (numite *conice*) prin considerații de ordin geometric (ca loc geometric), vom determina ecuațiile carteziene corespunzătoare sub formă implicită, aşa cum sunt studiate în geometria analitică, vom obține ecuații explicite şi funcțiile corespunzătoare ataşate, pe care le vom reprezenta grafic respectând etapele necesare construirii graficului unei funcții.

## Cercul

| | |
|---|---|
| **Definiție** | **Cercul** este locul geometric al punctelor din plan egal depărtate de un punct fix, numit *centru*. |

Fie date un punct fix $M_0(x_0, y_0)$ şi un număr real $r > 0$. Locul geometric al punctelor din plan cu proprietatea că se află la distanța $r$ față de $M_0$ este cercul cu centrul în punctul $M_0(x_0, y_0)$ şi de rază $r$, notat cu $C(M_0, r)$.

**Propoziție.** *Punctele $M(x, y)$ sunt situate pe cercul de centru $M_0(x_0, y_0)$ şi rază $r$ dacă şi numai dacă verifică ecuația $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$,* ***numită ecuația carteziană implicită a cercului.***

*Demonstrație*

În raport cu sistemul de axe de coordonate carteziene $xOy$, se consideră punctele $M(x, y)$ şi $M_0(x_0, y_0)$, ca în figura de mai jos.

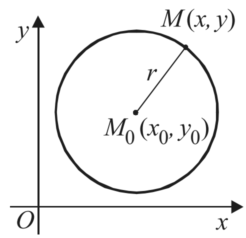



**Figura 20**

Aplicând formula care exprimă distanța dintre două puncte din plan, obținem: $M_0M^2 = (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$. Deci $M(x, y) \in C(M_0, r)$ verifică ecuația: $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$ şi reciproc.

Dacă $M(x, y)$ verifică ecuația $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$, se deduce succesiv:

$(y - y_0)^2 = r^2 - (x - x_0)^2 \Rightarrow y - y_0 = \varepsilon\sqrt{r^2 - (x - x_o)^2}$ ,

unde $\varepsilon \in \{-1, 1\} \Rightarrow y = y_0 + \varepsilon\sqrt{r^2 - (x - x_o)^2}$ .

Pentru $\varepsilon = 1$, obținem $y = y_0 + \sqrt{r^2 - (x - x_o)^2}$ ; funcția ataşată este:

$f : [x_0 - r, x_0 + r] \to \mathbb{R}$, $f(x) = y_0 + \sqrt{r^2 - (x - x_o)^2}$ .

Construim graficul acestei funcții. Avem de parcurs următoarele etape:

**1.** Pentru $x = x_0$, rezultă $f(x_0) = x_0 + r$; $f(x) = y_0$ implică $x = x_0 - r$ sau $x = x_0 + r$.

**2.** Derivata de ordinul întâi este: $f'(x) = -\dfrac{x - x_0}{\sqrt{r^2 - (x - x_0)^2}}$ , $\forall x \in (x_0 - r, x_0 + r)$.

Ecuația $f'(x) = 0$ are soluția $x = x_0 \in [x_0 - r, x_0 + r]$.

Avem $f\,'(x) > 0$, $\forall x \in (x_0 - r, x_0)$ şi $f\,'(x) < 0$, $\forall x \in (x_0, x_0 + r)$.

**3.** Derivata de ordinul doi este: $f''(x) = -\dfrac{r^2}{\left[r^2 - (x - x_0)^2\right]\sqrt{r^2 - (x - x_0)^2}}$.

Avem $f\,''(x) < 0$, $\forall x \in (x_0 - r, x_0 + r)$, deci $f$ este concavă.

**4.** Tabelul de variaţie:

| $x$ | $x_0 - r$ | | | | $x_0$ | | | | $x_0 + r$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $-\infty$ | + | + | + | 0 | − | − | − | $-\infty$ |
| $f(x)$ | $y_0$ | | $\nearrow$ | | $y_0 + r$ | | $\searrow$ | | $y_0$ |
| $f''(x)$ | − | − | − | − | $\frown$ | − | − | − | − |

**5.** Graficul este semicercul superior reprezentat în figura 21.

Pentru ε = – 1, funcţia

$$f_- : [x_0 - r, x_0 + r] \to \mathbb{R},\ f_-(x) = y_0 - \sqrt{r^2 - (x - x_0)^2}.$$

Vom observa că graficul funcţiei $f_-$ este cel din fig. 21, simetric faţă de graficul funcţiei $f$ în raport cu dreapta $y = y_0$.

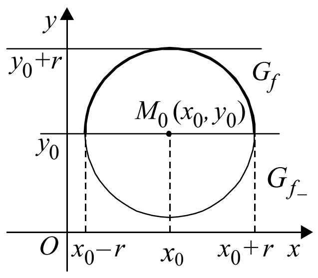



**Figura 21**

Funcţiile ataşate cercului $C(M_0, r)$ sunt:

i) $f : [x_0 - r, x_0 + r] \to \mathbb{R},\ f(x) = y_0 + \sqrt{r^2 - (x - x_0)^2}$,

pentru semicercul superior;

ii) $f_- : [x_0 - r, x_0 + r] \to \mathbb{R},\ f_-(x) = y_0 - \sqrt{r^2 - (x - x_0)^2}$,

pentru semicercul inferior.

### *Exemple*

**1.** Considerăm $f:[-3,3]\to\mathbb{R},\ f(x)=2+\sqrt{-x^2+2x+3}$.

Fie $y=2+\sqrt{-x^2+2x+3}$.

Avem $y-2=\sqrt{-x^2+2x+3}\ \Rightarrow\ (y-2)^2=-x^2+2x+3\ \Rightarrow$

$x^2-2x+(y-2)^2=3\ \Rightarrow (x-1)^2+(y-2)^2=4$, care reprezintă ecuația cercului având centrul în punctul $M_0(1,2)$ şi raza $r=2$.

**2.** Dacă $M_0(x_0, y_0) = O(0, 0)$, atunci $x_0 = 0$ şi $y_0 = 0$.

Ecuația cercului $C(O(0,0),\ r)$ este: $x^2+y^2=r^2$. Obținem $y=\varepsilon\sqrt{r^2-x^2}$, cu $\varepsilon\in\{-1,1\}$. Funcțiile ataşate ecuației cercului sunt:

$f:[-r,r]\to\mathbb{R},\ f(x)=\sqrt{r^2-x^2}$, pentru $\varepsilon = 1$ şi

$-f:[-r,r]\to\mathbb{R},\ -f(x)=-\sqrt{r^2-x^2}$, pentru $\varepsilon = -1$.

| $x$ | $-r$ | | $0$ | | $r$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $-\infty$ | $+\ +\ +$ | $0$ | $-\ -\ -$ | $-\infty$ |
| $f(x)$ | $0$ | $\nearrow$ | $r$ | $\searrow$ | $0$ |
| $f''(x)$ | $-\ -$ | $-\ -\ -$ | | $-\ -\ -$ | $-\ -$ |

Pentru construirea graficului funcției ataşate ecuației cercului pentru $\varepsilon = 1$, avem tabelul de variație alăturat.

În punctul $B(0,r)$, funcția admite un maxim $M = r$.

**Observație:** Deoarece $\lim\limits_{x\to -r} f'(x)=-\infty$ şi $\lim\limits_{x\to r} f'(x)=-\infty$, rezultă că tangentele la curbă în punctele $A(r,0)$, $A'(-r,0)$ sunt paralele cu axa $Oy$.

**2.** Trasarea graficului

Graficul funcției $f$ este semicercul $\overset{\frown}{A'MA}$ situat în semiplanul $y \geq 0$, ca în fig. 22.

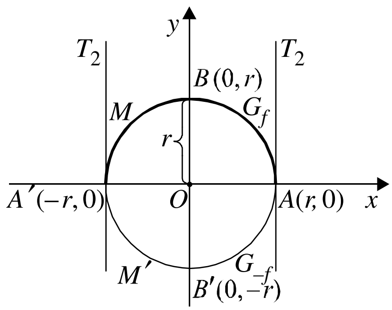



**Figura 22**

Pentru ε = −1, avem $-f:[-r,r]\to \mathbb{R}$, $-f(x) = -\sqrt{r^2 - x^2}$, care este simetrica față de $Ox$ a funcției obținute pentru ε = 1. Datorită acestei simetrii, se obține semicercul $\overset{\frown}{A'M'A}$ situat în semiplanul $y \leq 0$. Cele două semicercuri reunite reprezintă graficul cercului.

Ecuația tangentei într-un punct $L(\alpha, \beta)$ situat pe cerc este $y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$. Înlocuind valoarea lui $f\,'(x_0)$ şi făcând toate calculele se obține în final formula:

$$(x - x_0)(\alpha - x_0) + (y - y_0)(\beta - y_0) - r^2 = 0.$$

**Observație:** Pentru a se reține uşor formula se aplică regula de dedublare: scriem ecuația cercului sub forma $(x - x_0)(x - x_0) + (x - y_0)(x - y_0) = r^2$. Se înlocuieşte în primul produs într-un factor $x$ cu α şi în al doilea produs într-un factor $y$ cu β şi se obține: $(x - x_0)(\alpha - x_0) + (x - y_0)(\beta - y_0) - r^2 = 0$.

## Exerciții rezolvate

**1.** Fie cercul de ecuație $x^2 + y^2 = 1$. Să se scrie ecuațiile tangentelor în punctele de pe cerc cu abscisa $\frac{1}{2}$.

**2.** Să se scrie ecuațiile tangentelor la cercul de ecuație $(x - 1) + y^2 = 1$ în punctele de pe cerc cu ordonata $\frac{1}{2}$.

*Soluții:*

**1.** Dreapta de ecuație $x = \frac{1}{2}$ intersectează cercul în două puncte

$$L\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \text{ și } L'\left(\frac{1}{2}, \frac{-\sqrt{3}}{2}\right).$$

Ecuațiile tangentelor sunt: $t : x + y\sqrt{3} - 2 = 0$; $t' : x - y\sqrt{3} - 2 = 0$.

**2.** Cercul este $C(1, 0)$: Dreapta de ecuație $y = \frac{1}{2}$ intersectează cercul în punctele $L\left(\frac{2+\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$: $L'\left(\frac{2-\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$.

Aplicând formula obținem ecuațiile celor două tangente:

i) $(x - 1)(x_0 - 1) + y \cdot y_0 = 1$, unde $x_0 = \frac{2+\sqrt{3}}{2}$; $y_0 = \frac{1}{2}$;

ii) $(x - 1)(x_0 - 1) + y \cdot y_0 = 1$, unde $x_0' = \frac{2-\sqrt{3}}{2}$; $y_0 = \frac{1}{2}$.

## Exerciții propuse

Să se scrie ecuațiile tangentelor la cercurile date de următoarele ecuații, în punctele precizate:

a) $x^2 + y^2 = 1, x_0 = -\frac{1}{2}$;  b) $x^2 + y^2 - 2x = 0, y_0 = \frac{1}{2}$;

c) $x^2 + y^2 - 2x - 2y = 0, x_0 = 0$.

## Elipsa

| **Definiție** | **Elipsa** este locul geometric al punctelor din plan pentru care suma distanțelor la două puncte fixe, numite *focare*, este constantă. |
|---|---|

Fie $c > 0$ un număr real pozitiv.

Alegem un sistem de coordonate carteziene *xOy* astfel încât focarele elipsei sunt punctele $F(c, 0)$ și $F'(-c, 0)$.

Punctele $M(x, y)$ care se află pe elipsă verifică relația: $MF + MF' = 2a$, unde $2a$ este lungimea axei mari a elipsei, $a > c$ (fig. 23).

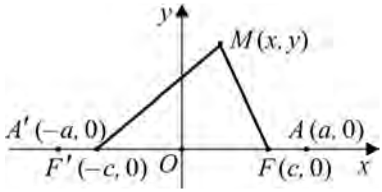



**Figura 23**

**Stabilirea ecuației elipsei**

**Propoziție.** *Punctele $M(x, y)$ sunt situate pe elipsa de focare $F(c, 0)$ şi $F'(-c, 0)$ şi axă mare de lungime $2a$, cu $a > c$, dacă şi numai dacă verifică ecuația:*

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0, \qquad (1)$$

*unde $b^2 = a^2 - c^2$.*

*Ecuația* (1) *este* ***ecuația carteziană sub formă implicită a elipsei****, iar 2a reprezintă* ***lungimea axei mari a elipsei*** *şi 2b reprezintă* ***lungimea axei mici a elipsei****.*

*Demonstrație*

În raport cu sistemul de axe de coordonate carteziene $xOy$, considerăm punctele fixe $F(c, 0)$ şi $F(-c, 0)$, $c > 0$, şi punctul $M(x, y)$ astfel încât $MF + MF' = 2a$, $a > c$. Folosind formula distanței dintre două puncte şi ridicând succesiv la pătrat, obținem:

$$\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + \sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a \Rightarrow x^2\left(a^2 - c^2\right) + y^2a^2 = a^2\left(a^2 - c^2\right).$$

Împărțim egalitatea cu $a^2\left(a^2 - c^2\right) \neq 0$ şi obținem: $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{a^2 - c^2} = 1$.

Notând $b^2 = a^2 - c^2 > 0$, rezultă $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} - 1 = 0$, adică ecuația (1).

Exprimând pe $y$ din (1), obținem **ecuația carteziană sub formă explicită a elipsei**:

$$y = \varepsilon \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}, \text{ unde } \varepsilon \in \{-1, 1\} \text{ şi } x \in [-a, a].$$

Din ecuația (1), se observă că graficul corespunzător este simetric față de axele de coordonate şi față de origine. De aceea, este suficient să se construiască graficul funcției $f:[-a,a]\to\mathbb{R},\ f(x)=\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}$ , (pentru ε = 1). Avem:

$$f'(x)=-\frac{bx}{a\sqrt{a^2-x^2}},\ \forall x\in(-a,a),\ \text{şi}\ f''(x)=-\frac{ab}{\left(a^2-x^2\right)\sqrt{a^2-x^2}}.$$

Deoarece funcția este definită pe un interval închis şi mărginit (care este o mulțime compactă), funcția nu admite asimptote orizontale sau oblice. Se constată că nu admite nici asimptote verticale.

| $x$ | $-a$ | | | | $0$ | | | | $a$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $-\infty$ | + | + | + | 0 | − | − | − | $-\infty$ |
| $f(x)$ | 0 | ↗ | | | $b$ | | ↘ | | 0 |
| $f''(x)$ | − | − | − | − | ⌢ | − | − | − | − |

Tabelul de variație al funcției $f$ este cel alăturat.

Din analiza tabelului de variație al funcției, rezultă următoarele proprietăți geometrice:

**1.** Graficul funcției intersectează axele de coordonate în punctele: $A(a,0), A'(-a,0)\in Ox$ şi $B(0,b)\in Oy$.

**2.** În punctele $x = a$ şi $x = -a$, funcția nu este derivabilă şi tangentele la grafic în $A(a,0), A'(-a,0)$ sunt paralele cu axa $Oy$.

**3.** Funcția $f$ este concavă pentru orice $x \in (-a, a)$.

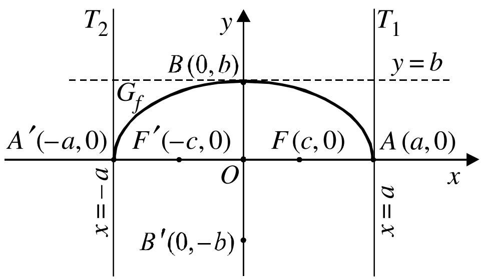



**Figura 24**

**4.** Punctul $B(0, b)$ este punct de maxim. Bazându-ne pe aceste informații, trecem la trasarea graficului funcției $f$ (fig. 24). Ținând seama de simetria elipsei față de axa $Ox$ obținem forma din fig. 25 (se propune ca exercițiu trasarea graficului funcției $-f$).

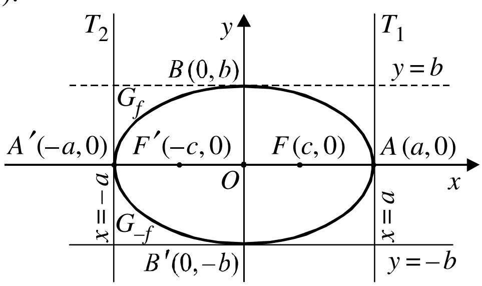



**Figura 25**

**Observații:** **1.** Pentru $a = b$, se obține cercul cu centrul în origine şi raza egală cu $a$, de ecuație $x^2 + y^2 = a^2$.

**2.** Pentru diferite valori ale lui $a$ şi $b$, $a > b$, se obțin ecuații care vor reprezenta elipse raportate la axele de coordonate cu centrul de simetrie în originea sistemului de axe de coordonate.

Ecuația tangentei la elipsa de ecuație $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$ într-un punct $M_0(x_0, y_0)$ situat pe elipsă. Dacă folosim pentru ecuația tangentei formula $y - y_0 = f\,'(x_0)(x - x_0)$ obținem în final ecuația $\frac{x \cdot x_0}{a^2} + \frac{y \cdot y_0}{b^2} - 1 = 0$, cu condiția $\frac{x_0^{\ 2}}{a^2} + \frac{y_0^{\ 2}}{b^2} - 1 = 0$. Pentru a reține, se aplică regula de dedublare. Se scrie ecuația elipsei sub forma: $\frac{x \cdot x}{a^2} + \frac{y \cdot y}{b^2} - 1 = 0$ şi se înlocuieşte un $x$ cu $x_0$ şi un $y$ cu $y_0$.

## Exerciții rezolvate

**1.** Să se reprezinte grafic elipsa de ecuație $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} - 1 = 0$.

*Rezolvare*

Avem $a = 4$, $b = 3$ şi $c^2 = 9 - 4 = 5$. Punctele de intersecție cu axele de coordonate: $A(4, 0)$, $A'(-4, 0) \in Ox$ şi $B(0, 3)$, $B'(0, -3) \in Oy$. Focarele: $F\left(\sqrt{5}, 0\right)$ şi $F\left(-\sqrt{5}, 0\right)$.

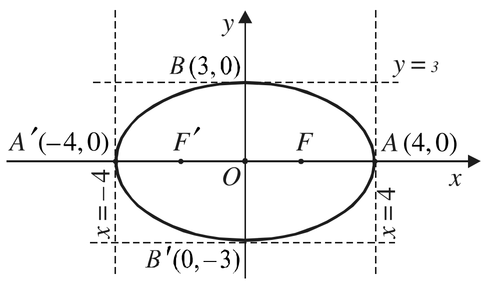



**Figura 26**

Funcțiile asociate ecuației elipsei sunt: $f : [-4, 4] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{3}{4}\sqrt{16 - x^2}$, şi $-f : [-4, 4] \to \mathbb{R}$, $-f(x) = -\frac{3}{4}\sqrt{16 - x^2}$ (fig. 26).

**2.** Să se scrie ecuația tangentei la elipsa:

$\frac{x^2}{4}+y^2-1=0$, în punctul $L\left(1,\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$. Aplicând formula obținem:

$$\frac{x\cdot 1}{4}+\frac{y\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}}{1}-1=0 \Rightarrow x+\ 2\sqrt{3}y\ -4=0.$$

## Exerciții propuse

**1.** a) Să se construiască graficul elipsei de ecuație:

$$16x^2+25y^2-400=0.$$

b) Să se scrie ecuațiile tangentelor la elipsa de ecuație:

$$\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}-1=0 \text{ în punctul de abscisă } x_0=\sqrt{5}.$$

**2.** a) Să se construiască graficul funcției:

$$f:[0,+\infty)\to\mathbb{R},\ f(x)=\begin{cases}\sqrt{5-4x^2},\ x\geq 1\\ \sqrt{2-x^2},\ 0\leq x<1\end{cases}.$$

b) Să se calculeze tangenta unghiului ascuțit format de semitangentele la graficul funcției $f$ în punctul $x = 1$.

## Hiperbola

| | |
|---|---|
| **Definiție** | **Hiperbola** este locul geometric al punctelor din plan pentru care diferența, în valoare absolută, a distanțelor la două puncte fixe, numite *focare*, este constantă. |

Fie $c > 0$ un număr real pozitiv. Alegem un sistem de coordonate carteziene $xOy$ astfel încât focarele hiperbolei sunt punctele

$F(c, 0)$ şi $F'(-c, 0)$.

Punctele $M(x, y)$ care se află pe hiperbolă conform definiției verifică

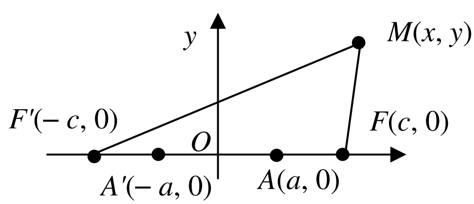



**Figura 27**

relația: $|MF - MF'| = 2a$, unde $2a$ este distanța dintre cele două vârfuri ale hiperbolei, $a < c$ (fig. 27).

**Stabilirea ecuației hiperbolei**

**Propoziție.** *Punctele M(x, y) sunt situate pe hiperbola de focare F(c, 0) şi F '(− c, 0) şi distanța dintre vârfuri 2a, 0 < a < c, dacă şi numai dacă verifică ecuația:*

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0, \qquad (1)$$

*unde* $b^2 = c^2 - a^2$ $(a < c)$.
*Ecuația* (1) *este* ***ecuația carteziană sub formă implicită a hiperbolei.***

În sistemul de axe de coordonate $xOy$, fie două puncte fixe $F(c, 0)$ *şi* $F'(-c, 0)$, $c > 0$, şi $M(x, y)$ un punct mobil în plan astfel încât $|MF - MF'| = 2a$, $0 < a < c$. Folosind formula distanței dintre două puncte şi ridicând succesiv la pătrat, obținem:

$$\left|\sqrt{(x-c)^2 + y^2} - \sqrt{(x+c)^2 + y^2}\right| = 2a \Rightarrow x^2\left(c^2 - a^2\right) - y^2 - a^2\left(c^2 - a^2\right) = 0$$

Împărțim egalitatea cu $a^2\left(c^2 - a^2\right) \neq 0$ şi obținem: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{c^2 - a^2} - 1 = 0$.

Notând $b^2 = c^2 - a^2 > 0$, rezultă: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$.

Scoțând pe $y$ din (1), obținem **ecuația carteziană sub formă explicită a hiperbolei**: $y = \varepsilon\frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}$, unde $\varepsilon \in \{-1, 1\}$.

Din ecuația (1), se observă că graficul corespunzător este simetric față de axele de coordonate şi față de origine. Hiperbola este reuniunea graficelor funcțiilor opuse:

$$f : (-\infty, -a] \cup [a, +\infty) \to \mathbb{R},\ f(x) = \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2} \text{ (pentru } \varepsilon = 1\text{) şi}$$

$$-f : (-\infty, -a] \cup [a, +\infty) \to \mathbb{R},\ -f(x) = -\frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2} \text{ (pentru } \varepsilon = -1\text{).}$$

De aceea, este suficient să construim graficul funcției $f$, urmând ca graficul pentru $-f$ să se traseze prin simetrie.

Pentru reprezentarea grafică a funcției $f$ avem următoarele etape:

**1.** Domeniul de definiție: $x \in (-\infty, -a] \cup [a, +\infty)$.

**2.** Intersecția cu axele de coordonate: $A(a,\ 0)$ şi $A'(-a,\ 0)$, numite *vârfurile hiperbolei.*

**3.** Asimptote: Graficul nu admite asimptote verticale sau orizontale. Studiem existența asimptotelor oblice spre $-\infty$ şi $+\infty$.

$$m=\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\frac{b}{a}\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2-a^2}}{x}=\frac{b}{a}\lim_{x\to-\infty}\frac{|x|\sqrt{1-\frac{a^2}{x^2}}}{x}=\frac{b}{a}\lim_{x\to-\infty}\frac{-x\sqrt{1-\frac{a^2}{x^2}}}{x}=-\frac{b}{a},$$

$$n=\lim_{x\to-\infty}\left[f(x)-mx\right]=\lim_{x\to-\infty}\frac{b}{a}\left(\sqrt{x^2-a^2}+x\right)=\frac{b}{a}\lim_{x\to-\infty}\frac{-a^2}{\sqrt{x^2-a^2}-x}=0.$$

Deci, dreapta de ecuație $y=-\frac{b}{a}x$ este asimptotă oblică spre $-\infty$.

Analog avem $m=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\frac{b}{a}$ şi $n=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)-\frac{b}{a}x\right)=0$.

Deci, dreapta de ecuație $y=\frac{b}{a}x$ este asimptotă oblică spre $+\infty$.

**4.** Studiul continuității:

Avem: $f(-a-0)=\lim\limits_{\substack{x\to-a\\x<-a}}f(x)=\frac{b}{a}\cdot\lim\limits_{\substack{x\to-a\\x<-a}}\sqrt{x^2-a^2}=0$ şi

$$f(a+0)=\lim_{\substack{x\to a\\x<a}}f(x)=\frac{b}{a}\cdot\lim_{\substack{x\to a\\x<a}}\sqrt{x^2-a^2}=0,$$

deci $f$ este continuă pe $(-\infty,\ -a]\cup[a,\ +\infty)$.

**5.** Derivata de ordinul întâi: $f'(x)=\frac{b}{a}\frac{\left(x^2-a^2\right)'}{2\sqrt{x^2-a^2}}=\frac{bx}{a\sqrt{x^2-a^2}}$.

Avem $f'(x)<0,\ \forall x\in(-\infty,-a)$ şi $f'(x)>0,\ \forall x\in(a,+\infty)$.

**6.** Derivata de ordinul doi:

$$f''(x)=\left(\frac{b}{a}\cdot\frac{x}{\sqrt{x^2-a^2}}\right)'=-\frac{ab}{\left(x^2-a^2\right)\sqrt{x^2-a^2}}.$$

Observăm că derivata de ordinul doi nu se anulează, deci nu există puncte de inflexiune.

Avem $f''(x)<0,\ \forall x\in(-\infty-a)\cup(\infty,+\infty)$, deci $f$ este concavă.

Tabelul de variație al funcției $f$ este cel de mai jos.

| $x$ | $-\infty$ | | $-a$ | $0$ | $a$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $- - - - - - -$ | | $-\infty$ | | $+\infty$ | $+ + + + +$ | |
| $f(x)$ | $+\infty$ | $\searrow \searrow$ | $0$ | | $0$ | $\nearrow \nearrow$ | $+\infty$ |
| $f''(x)$ | $- - - - - - - -$ | $\frown$ | | | $- - - - - - - -$ | $\frown$ | |

**Observație:** În punctele $x=-a$ și $x=a$, funcția $f$ nu este derivabilă, însă admite derivate laterale infinite. În aceste puncte, tangentele la grafic sunt paralele cu axa $Oy$.

**7. Graficul funcției** $f$ este reprezentat în fig. 28.

Graficul hiperbolei de ecuație $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-1=0$ va fi format din reuniunea graficelor funcțiilor $f$ și $-f$ și va arăta ca în fig. 29

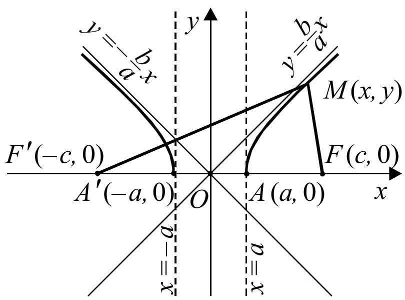



**Figura 28**

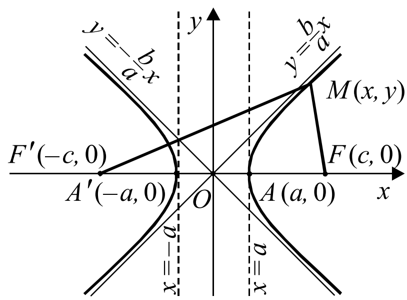



**Figura 29**

*Cazuri particulare*

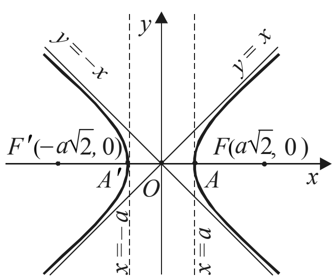



**Figura 30**

**1.** Dacă $a=b$, atunci ecuația carteziană sub formă implicită a hiperbolei este: $x^2-y^2=a^2$.

Hiperbola care are această ecuație se numește **hiperbolă echilateră** și admite ca asimptote oblice dreptele de ecuații: $y=x$ și $y=-x$ (bisectoarele axelor de coordonate). În acest caz, focarele hiperbolei sunt $F\left(a\sqrt{2},\ 0\right)$ și $F'\left(-a\sqrt{2},\ 0\right)$.

Graficul este reprezentat în fig. 30.

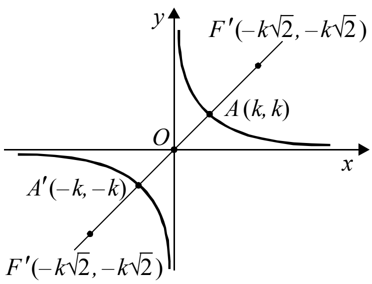



**Figura 31**

**2.** Un alt tip de hiperbolă echilateră, cu aplicații în fizică (legea lui Boyle-Mariotte: $p \cdot v =$ constant la temperaturi constante), în geometrie etc. are ecuația implicită: $x \cdot y = k^2$, $k \in \mathbb{R}$, $k \neq 0$. Reprezentând grafic funcția $g : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$, $g(x) = \dfrac{k^2}{x}$, se obține graficul hiperbolei echilatere de ecuație $x \cdot y = k^2$, care admite ca asimptote axele de coordonate (fig. 31).

**Tangenta la hiperbola de ecuație** $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} - 1 = 0$**, într-un punct** $M(x_0, y_0)$ **situat pe hiperbolă**. Ca şi în cazul elipsei, vom scrie ecuația tangentei utilizând formula $y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$, unde $y = f(x) = \dfrac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}$ (cazul ε = 1).

Înlocuind şi efectuând toate calculele se obține formula:

$$\frac{x \cdot x_0}{a^2} - \frac{y \cdot y_0}{b^2} - 1 = 0 \text{ (regulă de dedublare)}$$

cu condiția $\dfrac{x_0^2}{a^2} - \dfrac{y_0^2}{b^2} - 1 = 0$ (fig. 33).

**Observație:** Regula de dedublare se aplică astfel: scriem ecuația hiperbolei sub forma $\dfrac{x \cdot x}{a^2} - \dfrac{y \cdot y}{b^2} - 1 = 0$. Apoi se înlocuieşte un $x$ cu $x_0$ şi un $y$ cu $y_0$.

**Observație:** În mod asemănător se procedează şi pentru cazul ε = – 1. (Se propune ca temă).

## Exerciţiu rezolvat

Se dă hiperbola de ecuație $\dfrac{x^2}{8} - \dfrac{y^2}{6} - 1 = 0$.

**1.** Să se determine elementele hiperbolei şi să se construiască graficul său.

**2.** Să se determine coordonatele punctelor unde paralela prin unul dintre focare la axa $Oy$ intersectează hiperbola şi să se scrie ecuația tangentelor la hiperbolă în aceste puncte.

**3.** Să se arate că cele două tangente la hiperbolă se intersectează pe axa $Ox$.

*Rezolvare*:

**1.** Elementele hiperbolei sunt:

$a^2 = 8 \Rightarrow a = 2\sqrt{2};\ b^2 = 6 \Rightarrow b = \sqrt{6};\ a^2 + b^2 = 100 \Rightarrow c = 10.$

a) Coordonatele vârfurilor sunt: $A\left(-2\sqrt{2}, 0\right)$ şi $A'\left(2\sqrt{2}, 0\right)$.

b) Coordonatele focarelor sunt: $F(10, 0)$ şi $F'(-10, 0)$.

c) Ecuațiile asimptotelor sunt: $y = \frac{\sqrt{3}}{2}x$ şi $y = -\frac{\sqrt{3}}{2}x$.

**2.** Rezolvând sistemul: $\begin{cases} x = 10 \\ \frac{x^2}{8} - \frac{y^2}{6} - 1 = 0 \end{cases}$, se obțin punctele: $M\left(10,\ \sqrt{69}\right)$ şi $M'\left(10,\ -\sqrt{69}\right)$.

Ecuațiile tangentelor sunt:

$15x - 2\sqrt{69}y - 12 = 0$ şi $15x + 2\sqrt{69}y - 12 = 0$.

**3.** Se observă că punctul de intersecție a celor două tangente este $P\left(\frac{4}{5},\ 0\right) \in Ox$.

## Probleme propuse

**1.** Să se construiască graficul funcției

$$f : (0, +\infty) \to \mathbb{R},\quad f(x) = \begin{cases} \sqrt{x^2 - 1}, & x \geq 1 \\ \frac{1}{x} - 1, & 0 < x < 1 \end{cases}.$$

**2.** Să se determine ecuațiile tangentelor la următoarele hiperbole în punctele indicate:

a) $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} - 1 = 0;\ x_0 = \sqrt{5},\ y_0 = \frac{3}{2}$; b) $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} - 1 = 0;\ x_0 = -3\sqrt{2},\ y_0 = 2$.

# Parabola

| **Definiție** | **Parabola** este locul geometric al punctelor din plan egal depărtate de un punct fix, numit *focar*, şi o dreaptă fixă, numită *directoare.* |
|---|---|

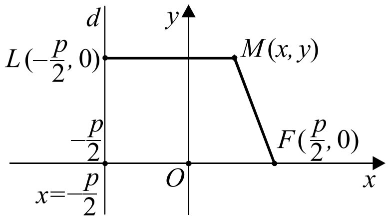



**Figura 32**

Fie $p > 0$ un număr real dat. Alegem un sistem de coordonate carteziene $xOy$ astfel încât focarul parabolei este punctul de coordonate $F\left(\frac{p}{2},0\right)$, iar dreapta directoare are ecuația $x=-\frac{p}{2}$.

Punctele $M(x, y)$ care se află pe parabolă verifică relația: $MF = ML$ unde $ML$ este distanța de la punctul $M$ la dreapta $d$ (fig. 32).

## Stabilirea ecuației parabolei

> **Propoziție.** *Punctele $M(x, y)$ sunt situate pe parabola de focar $F\left(\frac{p}{2},0\right)$, $p > 0$, şi directoare $x=-\frac{p}{2}$ dacă şi numai dacă verifică ecuația:*
>
> $$y^2 = 2px \quad (1)$$ *şi reciproc,*
>
> *numită* ***ecuația carteziană sub formă implicită a parabolei.***

*Demonstrație*

În raport cu sistemul de axe de coordonate, se consideră punctul fix $F\left(\frac{p}{2},0\right)$ şi dreapta $d$ de ecuație: $x=-\frac{p}{2}$ şi $M(x, y)$ un punct mobil în plan astfel încât $MF = ML$, unde $ML$ este distanța de la punctul $M(x, y)$ la dreapta $d$.

Deoarece $M(x, y)$ este pe parabolă, condiția geometrică $MF = ML$ se transformă în ecuația: $y^2 = 2px$, $p > 0$.

Vrem să reprezentăm grafic curba de ecuație $y^2 = 2px$, $p > 0$.

Evident $x \geq 0$ şi explicitând pe $y$ din (1), obținem **e***cuația carteziană sub formă explicită a parabolei:* $y = \varepsilon\sqrt{2px}$, unde $\varepsilon \in \{-1, 1\}$.

Parabola va fi reuniunea graficelor funcțiilor:

$f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{2px}$ şi $-f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$, $-f(x) = -\sqrt{2px}$.

Reprezentăm grafic funcția $f$, parcurgând etapele următoare:

**1.** Domeniul de definiție: $x \in [0, +\infty)$.

**2.** Intersecția cu axele de coordonate: Graficul funcției $f$ trece prin originea axelor de coordonate.

**3.** Funcția $f$ nu admite asimptote.

**4.** Derivata de ordinul întâi:

$f'(x) = \sqrt{2p} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} = \sqrt{\frac{p}{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{x}}$; $f'(x) > 0$, $\forall\, x \in (0, +\infty)$.

**5.** Derivata de ordinul doi: $f''(x) = \sqrt{\frac{p}{2}} \cdot \left(x^{\frac{1}{2}}\right)' = \frac{-\sqrt{p}}{2\sqrt{2} \cdot x\sqrt{x}}$.

Derivata de ordinul doi nu se anulează; $f$ nu are puncte de inflexiune.

$f''(x) < 0$, $\forall x \in (0, +\infty)$.

**6.** Tabelul de variație al funcției $f$ este cel de mai jos:

| $x$ | $0$ | | | | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | \| | + + | + + | + + | + + | + + |
| $f(x)$ | $0$ | ↗ | ↗ | ↗ | ↗ | ↗ $+\infty$ |
| $f''(x)$ | \| | − − | − − | − − ⌒ | − − | − − |

**7.** Graficul funcției $f$ este reprezentat în figura 33.

În punctul $x = 0$, funcția nu este derivabilă, $f'_d(0) = +\infty$ şi tangenta este axa $Oy$. Parabola este reuniunea dintre graficul funcției $f$ şi al funcției $-f$ şi se reprezintă grafic ca în figura 34.

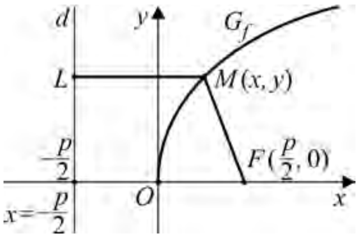



**Figura 33**

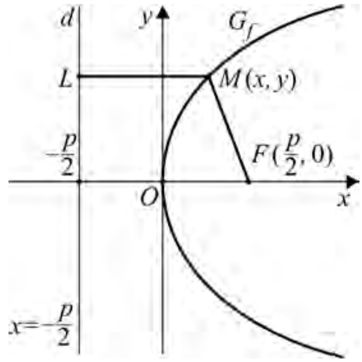



**Figura 34**

*Observație*

Elementele parabolei de ecuație $y^2 = 2px$ sunt: coordonatele focarului şi ecuațiile directoarei la parabolă. Este suficient să se cunoască o singură condiție pentru determinarea parametrului $p$ şi, implicit, pentru determinarea ecuației parabolei.

Pentru stabilirea ecuației tangentei la parabola $y^2 = 2px$, $p > 0$ într-un punct $M(x_0, y_0)$ se utilizează formula pentru ecuația tangentei $y - y_0 = f\,'(x_0)(x - x_0)$, unde $y = f(x) = \sqrt{2p\,x}$.

După înlocuire şi efectuarea tuturor calculelor se ajunge la formula: $y \cdot y_0 = p(x + x_0)$ cu condiția $y_0^2 = 2px_0$ (se aplică regula de dedublare:

$$y \cdot y = p(x + x) \Rightarrow y \cdot y_0 = p(x + x_0)).$$

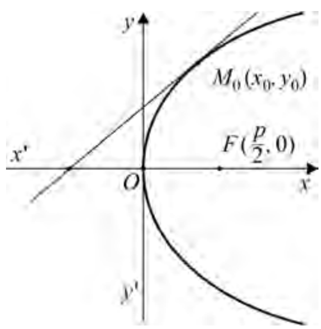



**Figura 35**

## Exerciţii propuse

**I.**

**1.** Să se construiască graficele funcţiilor:

$f:[0,+\infty)\to\mathbb{R},\ f(x)=\sqrt{5x}$ şi $g:(-\infty,0)\to\mathbb{R},\ g(x)=\sqrt{-5x}$ .

**2.** Se dă parabola de ecuaţie $y^2=9x$ . Să se construiască graficul tangentei la parabolă în punctul $x_0=1$ şi $y_0>0$.

**3.** a) Să se construiască graficul funcţiei

$$f:[0,+\infty)\to\mathbb{R},\ f(x)=\begin{cases}\sqrt{2-x^2}, & x\in[0,1)\\ \sqrt{x}, & x\geq 1\end{cases}.$$

b) Să se construiască graficele funcţiilor

$f:[-2,2]\to\mathbb{R},\ f(x)=\dfrac{3}{2}\sqrt{4-x^2}$ şi $g:[0,+\infty)\to\mathbb{R},\ g(x)=\sqrt{3x}$ şi să se determine coordonatele punctelor de intersecţie ale acestora.

**II.** Să se reprezinte grafic următoarele funcţii $f:D\to\mathbb{R}$, unde $D$ este domeniul de definiţie corespunzător fiecărei funcţii (urmând a fi determinat).

**1.** $f(x)=\dfrac{1-4x}{x^2-2x+2}$.

**2.** $f(x)=\dfrac{x}{1+|x|}$.

**3.** $f(x)=4x^3-3x$.

**4.** $f(x)=|\,(x+|x|)^2-x^2\cdot|x|\,|$.

**5.** $f(x)=\dfrac{|x|\cdot(x+1)+x\cdot|x+1|}{x(x+2)}$.

**6.** $f(x)=3x^2+\dfrac{2}{x^2}$.

**7.** $f(x)=|x|+|2x-x^2|$.

**8.** $f(x)=|x-1|+\dfrac{1}{x}$.

**9.** $f(x)=\dfrac{1}{x^3}-\dfrac{1}{x}$.

**10.** $f(x)=\left|\dfrac{x^2-1}{x^2+1}\right|$.

**11.** $f(x)=\dfrac{(x-1)^2\cdot(x+2)}{x^2}$.

**12.** $f(x)=\dfrac{2(x-1)}{x^2-3x+2}$.

**13.** $f(x)=\dfrac{x^4+2}{2x^2+1}$.

**14.** $f(x)=\dfrac{\sqrt{3x+1}}{x}$.

**15.** $f(x)=x\cdot\sqrt{\dfrac{|x|-1}{|x|}}$.

**16.** $f(x)=x^2-\sqrt{x^2-2x+1}$.

**17.** $f(x)=x+\sqrt{|1-x^2|}$.

**18.** $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x^2}\cdot\sqrt{x+2}$.

**19.** $f(x)=(x+1)\cdot\sqrt{x+2}$ .

**20.** $f(x)=\sqrt{x^2+4x+29}-\sqrt{x^2-2x+2}$.

**21.** $f(x)=x-\sqrt{9+6x-3x^2}$ .

**22.** $f(x)=\sqrt{x+4x-4\sqrt{x}}-\sqrt{x+9-6\sqrt{x}}$ .

**23.** $f(x)=\dfrac{b}{a}\sqrt[3]{a^3-x^3}$ , unde $0<b<2a$.

**24.** $f(x)=\dfrac{1}{\ln x}$.

**25.** $f(x) = 2\ln|x + 2|$.

**26.** $f(x)=\dfrac{2x}{1-x^2}+\ln\dfrac{1+x}{1-x}$.

**27.** $f(x)=\ln\dfrac{e^x+1}{2}$.

**28.** $f(x)=\dfrac{2+e^x}{1+e^x}$.

**29.** $f(x) = x - 2 - 2\ln|x|$.

**30.** $f(x)=\arcsin\dfrac{x}{\sqrt{2(x^2+2x+2)}}$.

**31.** $f(x)=\arcsin x-x\cdot\sqrt{1-x^2}$.

**32.** $f(x)=\dfrac{\sin x}{2-\cos x}$.

**33.** $f(x)=\dfrac{1-\cos^2 x}{(\cos x+\sin x)(\cos x-\sin x)}$.

**34.** $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin 3x}{\sin x}, & x\neq k\pi\\ 0, & x=k\pi\end{cases}$.

**35.** $f(x)=\dfrac{\cos x}{\cos 2x}$.

**36.** $f(x)=\dfrac{1-\sin x}{1-\cos x}$.

# Exerciţii recapitulative

## Test 1

**1.** Să se calculeze:

$\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{[1\cdot 2^2\cdot a]+[2\cdot 3^2\cdot a]+\ldots+[n(n+1)^2\cdot a]}{an^4}$, $a > 0$, unde $[x]$ reprezintă partea întreagă a numărului real $x$.

**2.** Să se arate că următoarele funcții sunt periodice şi să se indice pentru fiecare funcție perioada principală:

a) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \cos^2 x - 3 \sin x \cos x$;

b) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 2x - [2x]$.

Demonstrați că funcțiile menționate nu admit asimptote.

**3.** Se consideră funcția

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{3}x^3 + bx + a, & \text{dacă } x\in(-\infty,3) \\ ax^2 + b\ln(x-2), & \text{dacă } x\in[3,+\infty) \end{cases}.$$

Să se determine $a$, $b \in \mathbb{R}$, ştiind că funcția este derivabilă pe $\mathbb{R}$. Scrieți ecuația tangentei la graficul funcției în $P(3, f(3))$.

**4.** a) Să se reprezinte grafic $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{2\ln x - 1}{x^2}$.

b) Folosind şirul lui Rolle sau metoda grafică, să se discute ecuația:

$$mx^2 = 2\ln x - 1,\ m \in \mathbb{R}.$$

## Test 2

**1.** Aplicând criteriul majorării şirului $(a_n)_{n\geq 1}$, de termen general

$$a_n = \frac{5\cdot 11\cdot\ldots\cdot(6n-1)}{8\cdot 14\cdot\ldots\cdot(6n+2)},$$ să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

**2.** Stabiliți care dintre funcțiile următoare au proprietatea lui Darboux pe domeniul maxim de definiție:

a) $f(x) = \begin{cases} 3-x, & 0\leq x\leq 1 \\ 2x+2, & x>1 \end{cases}$; b) $f(x) = \min(2x, x^2 - 3)$.

**3.** Fie funcția $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, $0 < a < b$, continuă pe $[a, b]$ şi derivabilă pe $(a, b)$. Să se arate că există $c \in (a, b)$ astfel încât

$$\frac{1}{a-b}\begin{vmatrix} a & b \\ f(a) & f(b) \end{vmatrix} = f(c) - cf'(c).$$

**4.** Să se reprezinte grafic funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{3-x}{2} e^{|x+1|}$.

## Test 3

**1.** Fie şirul $(x_n)_{n\geq 0}$ astfel încât $x_0 = a \in [2, 3]$, $x_{n+1} = x_n^2 - 4n + 6$, pentru orice $n \in \mathbb{N}$.

a) Să se demonstreze că şirul este convergent şi să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

b) Să se stabilească forma termenului general $x_n$.

**2.** Se consideră funcția $f : [a, b] \to [a, b]$, continuă pe $[a, b]$. Să se demonstreze că există cel puțin un punct $u \in [a, b]$ astfel încât $f(u) = u$.

**3.** Se consideră funcția

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \max(x^2 + 3x + 2, - x^2 + 6x + 7)$, $x \in \mathbb{R}$.

Să se studieze continuitatea şi derivabilitatea funcției pe $\mathbb{R}$ şi apoi să se indice punctele de extrem.

**4.** Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \setminus \{-1, 3\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{ax^2 + bx}{x^2 - 2x - 3}$; $a, b \in \mathbb{R}$.

a) Să se determine $a$ şi $b$ ştiind că funcția admite un singur punct de extrem, şi anume $P\left(1, \frac{1}{4}\right)$.

b) Pentru $a = 1$, $b = -2$ să se reprezinte grafic funcția.

c) Să se discute ecuația $m(x^2 - 2x - 3) = x^2 - 2x$, $m \in \mathbb{R}$.

## Test 4

**1.** Fie şirul $(a_n)_{n\geq 1}$ astfel încât $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k = 2n^2 + 3n$.

a) Să se calculeze: $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sum_{k=1}^{n} k \cdot a_k}{n^3}$; b) Să se calculeze: $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} \ln\left(1 - \frac{4}{(2k+1)^2}\right)$.

**2.** Să se arate că ecuația cu coeficienți reali $a_0x^{2n} + a_1x^{2n-1} + \ldots + a_{2n-1}x + a_{2n} = 0$ admite cel puțin o rădăcină în $(-1, 1)$ dacă este verificată relația:

$$\frac{a_0}{2n+1} + \frac{a_2}{2n-1} + \frac{a_4}{2n-3} + \ldots + \frac{a_{2n}}{1} = 0.$$

**3.** Să se calculeze parametrii reali $a$ şi $b$ astfel încât graficul funcţiei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt[3]{ax^3 + bx^2}$ să admită dreapta de ecuaţie $y = 2x - \frac{1}{3}$ ca asimptotă oblică (spre $-\infty$ şi spre $+\infty$).

**4.** Se consideră funcţia $f : D \to \mathbb{R}$, $f(x) = \arcsin \frac{x-1}{\sqrt{2(x^2+1)}}$, $D$ fiind domeniul maxim de definiţie.

a) Să se determine mulţimea $D$.

b) Să se calculeze $f'$, $f''$ şi asimptotele funcţiei.

## Test 5

**1.** Să se calculeze:

a) $\lim\limits_{n \leftarrow \infty}(a\sqrt[3]{n+1} + b\sqrt[3]{n+2} + c\sqrt[3]{n+3})$, dacă $a, b, c \in \mathbb{R}$. Discuţie după $a, b, c \in \mathbb{R}$.

b) $\lim\limits_{n\to\infty} n^k\left(\sqrt{\frac{n+1}{n+2}} - \sqrt{\frac{n+3}{n+4}}\right)$, discuţie după $k \in \mathbb{N}$.

**2.** Folosind proprietăţile funcţiilor continue pe intervale, să se rezolve inecuaţiile pe $[0, 2\pi]$:

a) $2\cos x - 1 \le 0$; b) $\sin 2x - \cos 2x \ge 0$.

**3.** Să se calculeze derivatele de ordinul $n$ pentru următoarele funcţii definite pe domeniul maxim:

a) $f(x) = \frac{2-3x}{x^2+x-2}$; b) $f(x) = (x^2 - x + 1)e^{-x}$;

**4.** Să se arate că oricare ar fi $x \in [0, +\infty)$ are loc inegalitatea:

$$1 + \frac{x}{3} - \frac{x^2}{9} \le \sqrt[3]{1+x} \le 1 + \frac{x}{3}.$$

## Test 6

**1.** Se consideră şirul $(x_n)_{n\ge1}$ pentru care $x_0 = \frac{a}{2}$, $0 < a \le 1$, $x_n = \frac{a}{2} + \frac{x_{n-1}^2}{2}$, oricare ar fi $n \ge 2$.

Să se demonstreze că şirul este convergent şi să se determine $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

**2.** Să se calculeze:

a) $\lim\limits_{x\to0}\frac{x^n - (\sin x)^n}{x^{n+2}}$, $n \in \mathbb{N}^*$; b) $\lim\limits_{x\to0}\frac{(1+x)^{\frac{1}{x}} - e}{x}$;

**3.** Se consideră funcţia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continuă pe $[a, b]$ şi derivabilă pe $(a, b)$. Să se arate că există cel puţin un punct $c \in (a, b)$ astfel încât

$$f'(c) = \frac{f(a) - f(c)}{c - b}.$$

**4.** a) Să se reprezinte funcția

$$f : \mathbb{R} \setminus \{-2\} \to \mathbb{R},\ f(x) = \frac{x^2 - 4x + 4}{2|x+2|}.$$

b) Să se determine valorile parametrului $a \in \mathbb{R}$, astfel încât mulțimea $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - 4x + 4 = 2a\,|x + 2|\}$ să conțină trei elemente.

## Test 7

**1.** Fie $(a_n)_{n\geq 0}$ un şir de numere reale astfel încât $a_{n+1} = a_n - a_n^3$, oricare ar fi $n \geq 0$. Să se arate că dacă $0 < a_0 < 1$, atunci $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ şi apoi să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} n a_n^2$.

**2.** Să se demonstreze că funcția $f : (1, +\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$ este crescătoare, iar funcția $g : (1, +\infty) \to \mathbb{R}$, $g(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{x+1}$ este descrescătoare.

**3.** Să se calculeze:

a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1 - \cos^3 x \cdot \cos 2x}{x \cos x}$; b) $\lim\limits_{x\to \frac{2\pi}{3}} (2\sin^2 2x - 3\cos x)$;

**4.** Să se reprezinte grafic funcția $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ definită prin:

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{\ln x + x^n(x^2 - 8)}{x(x^n + 1)}.$$

## Test 8

**1.** Să se calculeze limita şirului $(x_n)_{n\geq 1}$ pentru care

$$x_n = \frac{(1 + a + \ldots + a^n)^2}{1 + a^2 + a^4 + \ldots + a^{2n}} \text{ (discuție după } a \in \mathbb{R}_+\text{)}.$$

**2.** Să se demonstreze că dacă $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ este o funcție continuă pe $\mathbb{R}$ şi $f\left(\frac{3}{2}x\right) = f(x)$, oricare ar fi $x \in \mathbb{R}$, atunci $f$ este constantă pe $\mathbb{R}$.

**3.** Fie funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} x^3 + ax^2 + bx + c, & x < 1 \\ \operatorname{arctg}(x - 1), & x \geq 1 \end{cases}$.

Ştiind că $f$ este de două ori derivabilă pe $\mathbb{R}$, să se determine $a$, $b$, $c$.

**4.** Să se demonstreze inegalitatea:

$$\ln(3x + 3) \geq \frac{2(3x + 2)}{3x + 4}, \text{ oricare ar fi } x \geq -\frac{2}{3}.$$

## Test 9

**1.** a) Fie $(a_n)_{n\geq 0}$ un şir de numere reale astfel încât $a_0 = 1$ şi $a_{n+1} = \frac{3}{4}a_n + \frac{1}{2}$, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}$.

Să se demonstreze că şirul este convergent şi să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$

b) Să se arate că şirul $(b_n)_{n\geq 1}$, $b_n = a_n - 2$ constituie o progresie geometrică şi apoi să se determine $a_n$ în funcție de $n$.

**2.** a) Să se cerceteze continuitatea funcției $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,
$f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1+(2x-x^2)e^{nx}}{1+e^{nx}}$, oricare ar fi $x \in \mathbb{R}$.

b) Reprezentați grafic funcția $f$.

**3.** Fie funcția $f : (-\infty, 4) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \ln(4 - x)$.

a) Calculați $f^{(n)}(x)$, $n \in \mathbb{N}^*$.

b) Determinați $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{k}{(k-1)!} \cdot f^{(k)}(3)$, $n \in \mathbb{N}^*$.

c) Calculați $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} S_n$.

**4.** Se consideră funcția $f : (-1, +\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = -x^2 + x - \ln(x + 1)$.

a) Să se reprezinte grafic funcția.

b) Să se discute rădăcinile reale ale ecuației: $x^2 - x + \ln(x + 1) + m = 0$, $m \in \mathbb{R}$.

# Probleme date la examenele de bacalaureat din anii anteriori

**1.** Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2e^x$.

a) Să se calculeze $f'(x)$, $x \in \mathbb{R}$.

b) Utilizând metoda inducției matematice, să se arate că
$f^{(n)}(x) = e^x \cdot (x^2 + 2nx + n(n - 1))$, $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$.

c) Să se arate că $1\cdot 2 + 2\cdot 3 + \ldots + (n-1)\cdot n = \frac{(n-1)\cdot n\cdot(n+1)}{3}$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$.

d) Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{f'(0) + f''(0) + \ldots + f^{(n)}(0)}{n^3}$.

**2.** Se consideră funcțiile $f$ , $g$ : $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \text{arctg } x$, $g(x) = \text{arctg } x - x$ și șirul $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$, definit prin $a_0 = 1$ și $a_{n+1} = f(a_n)$, $\forall\ n \in \mathbb{N}$.

a) Să se calculeze $f'(x)$ și $g'(x)$, $x \in \mathbb{R}$.

b) Să se arate că funcția $f$ este strict crescătoare pe $\mathbb{R}$ și că funcția $g$ este strict descrescătoare pe $\mathbb{R}$.

c) Să se arate că $g(x) = 0$ dacă și numai dacă $x = 0$.

d) Să se arate că șirul $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ este strict descrescător și mărginit.

e) Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

f) Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n}$.

**3.** Se consideră funcțiile $f : (-1, \infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \ln(1 + x) - x$ și

$g : (-1, \infty) \to \mathbb{R}$, $g(x) = \ln(1+x) - x + \dfrac{x^2}{2}$.

a) Să se verifice că $f'(x) = \dfrac{-x}{1+x}$ și $g'(x) = \dfrac{x^2}{1+x}$, $\forall\ x > -1$.

b) Să se calculeze $f'(0)$ și $g'(0)$.

c) Să se arate că $f(x) < 0 < g(x)$, $\forall\ x > 0$.

d) Să se arate că $1 + 3 + 5 + ... + (2n - 1) = n^2$, $\forall\ n \in \mathbb{N}^*$.

e) Utilizând metoda inducției matematice, să se arate că

$1^2 + 3^2 + 5^2 + \ldots (2n-1)^2 = \dfrac{n(4n^2-1)}{3}$, $\forall\ n \in \mathbb{N}^*$.

f) Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\ln\left(1+\dfrac{1}{n^2}\right)+\ln\left(1+\dfrac{3}{n^2}\right)+\ldots+\ln\left(1+\dfrac{2n-1}{n^2}\right)\right)$.

**4.** Se consideră funcția $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = x\ln a - a\ln x$, unde $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$.

a) Să se calculeze $f'(x)$, $x > 0$.

b) Să se calculeze $f(a)$ și $f'(a)$.

c) Utilizând teorema lui *Fermat* să se determine $a > 0$ cu $f(x) \geq 0$, $\forall\ x \in (0, \infty)$.

d) Să se arate că $e^x \geq x^e$, $\forall\ x \in (0, \infty)$.

e) Să se arate că pentru $x > 0$, avem $e^x = x^e$ dacă și numai dacă $x = e$.

*f*) Să se determine numerele reale $c$, $b > 0$, cu $c^x + b^x \geq x^c + x^b$, $\forall\ x \in (0, \infty)$.

**5.** Se consideră funcțiile $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \text{arctg}x - x + \dfrac{x^3}{3}$,

$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = f(x) - \dfrac{x^5}{5}$, $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $h(x) = \text{arctg } x$.

a) Să se calculeze $f'(x)$, $x \in \mathbb{R}$.

b) Să se calculeze $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x^5}$.

c) Să se calculeze $g'(x)$, $x \in \mathbb{R}$.

d) Să se verifice că $f'(0) = g'(0) = 0$.

e) Să se arate că $x-\dfrac{x^3}{3}<\operatorname{arctg} x<x-\dfrac{x^3}{3}+\dfrac{x^5}{5}$, $\forall\, x > 0$.

**6.** Se consideră funcţia $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ $f(x) = x^{\alpha} - \alpha x$, unde $\alpha \in (0, 1)$.

a) Să se calculeze $f'(x)$, $x > 0$.

b) Să se arate că $f'(x) > 0$, $\forall\, x \in (0, 1)$ şi $f'(x) < 0$, $\forall\, x \in (1, \infty)$.

c) Să se deducă inegalitatea $x^{\alpha} - \alpha x \le 1 - \alpha$, $\forall\, x > 0$.

d) Alegând $x=\dfrac{a}{b}$, $a, b > 0$ şi notând $\beta = 1 - \alpha$, să se arate că $a^{\alpha}b^{\beta} \le \alpha a + \beta b$, $\forall\, \alpha, \beta > 0$ cu $\alpha + \beta = 1$.

e) Să se arate că $st\le\dfrac{s^p}{p}+\dfrac{t^q}{q}$, $\forall\, t > 0$ şi $\forall\, p, q > 1$ cu $\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=1$.

f) Utilizând inegalitatea de la punctul e), să se arate că, dacă $a_1, \ldots, a_n$ şi $b_1, \ldots, b_n$ sunt numere reale strict pozitive şi $p, q > 1$ cu $\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=1$, atunci

$$a_1b_1+\ldots+a_nb_n\le\left(a_1^p+\ldots+a_n^p\right)^{\frac{1}{p}}\cdot\left(b_1^q+\ldots+b_n^q\right)^{\frac{1}{q}}.$$

**7.** Se consideră şirurile

$$(a_n)_{n\in\mathbb{N}},\ a_n=1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}-\ln\left(n+\frac{2}{3}\right),\ \forall\, n\in\mathbb{N}^*,$$

$$(b_n)_{n\in\mathbb{N}},\ b_n=1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}-\ln\left(n+\frac{1}{2}\right),\ \forall\, n\in\mathbb{N}^*$$

şi funcţiile $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ şi $g : (0, \infty) \to \mathbb{R}$,

$$f(x)=\frac{1}{x+1}-\ln\left(x+\frac{3}{2}\right)+\ln\left(x+\frac{1}{2}\right),\quad g(x)=\frac{1}{x+1}-\ln\left(x+\frac{5}{3}\right)+\ln\left(x+\frac{2}{3}\right).$$

a) Să se calculeze $f'(x)$ şi $g'(x)$, $x > 0$.

b) Să se arate că $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=0$ şi $\lim\limits_{x\to\infty} g(x)=0$.

c) Să se verifice că $f'(x) > 0$, $\forall\, x > 0$ şi $g'(x) < 0$, $\forall\, x > 0$.

d) Utilizând rezultatele de la punctele b) şi c), să se arate că $f(x) < 0 < g(x)$, $\forall\, x > 0$.

e) Să se arate că şirul $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ este strict crescător şi şirul $(b_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ este strict descrescător.

f) Să se arate că $0<b_n-a_n<\dfrac{1}{6n}$, $\forall n\in\mathbb{N}^*$.

**8.** Se consideră funcțiile:

$f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = \sin x - x + \dfrac{x^3}{6} - \dfrac{x^5}{120}$ şi $g(x) = \sin x^2$.

a) Să se calculeze $f^{(5)}(x)$, $x \in \mathbb{R}$.

b) Să se verifice că $f(0) = f'(0) = ... = f^{(5)}(0) = 0$.

c) Să se calculeze $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f(x)}{x^7}$.

d) Să se arate că $f^{(5)}(x) \le 0$, $\forall\ x \in \mathbb{R}$.

e) Să se arate că $x - \dfrac{x^3}{6} \le \sin x \le x - \dfrac{x^3}{6} + \dfrac{x^5}{120}$, $\forall\ x \ge 0$.

**9.** Se consideră şirurile

$$(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \text{ şi } (b_n)_{n\in\mathbb{N}^*},\ a_n = \frac{1}{2^{1^2}} + \frac{1}{2^{2^2}} + \frac{1}{2^{3^2}} + \ldots + \frac{1}{2^{n^2}} \text{ şi}$$

$$b_n = a_n + \frac{1}{2n \cdot 2^{n^2}},\ \forall\ n \in \mathbb{N}^*.$$

a) Să se arate că şirul $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ este strict crescător.

b) Să se arate că şirul $(b_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ este strict descrescător.

c) Să se arate că şirurile $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ şi $(b_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sunt mărginite.

d) Să se arate că şirurile $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ şi $(b_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sunt convergente şi au aceeaşi limită.

e) Notăm cu $a \in \mathbb{R}$ limita şirului $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$. Să se arate că numărul $a$ este irațional.

**10.** Se consideră şirurile $(a_n)_{n \ge 1}$ şi $(b_n)_{n \ge 1}$, definite prin

$a_n = 1 + \dfrac{1}{1!} + \dfrac{1}{2!} + \ldots + \dfrac{1}{n!}$ şi $b_n = a_n + \dfrac{1}{n! \cdot n}$, $\forall\ n \in \mathbb{N}^*$.

Admitem cunoscut că şirul $(a_n)_{n \ge 1}$ este convergent către $e$.

a) Să se verifice că şirul $(a_n)_{n \ge 1}$ este strict crescător.

b) Să se arate că şirul $(b_n)_{n \ge 1}$ este strict descrescător.

c) Să se arate că $a_{n+1} < e < b_n$, $\forall\ n \in \mathbb{N}^*$.

d) Utilizând inegalitățile de la punctul c) să se arate că

$$\frac{1}{(n+1)!} < e - a_n < \frac{1}{n!n},\ \forall\ n \in \mathbb{N}^*.$$

e) Utilizând inegalitățile de la punctul d) să se arate că numărul $e$ este irațional.

# Răspunsuri

## Algebră

### *Cap. 1. Permutări*

**Pag. 9**

**1.** a) impară; b) impară; c) pară.

**3.** a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$; b) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$; d) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 2 & 3 & 5 & 4 & 8 & 7 & 6 & 9 & 1 \end{pmatrix}$.

### *Cap. 2. Matrice*

**Pag. 25**

**1.** În general răspunsul este negativ.
Dacă $A$ este inversabilă, atunci afirmația este adevărată.

**2.** a) ${}^t\left(A\cdot {}^tA\right) = {}^t({}^tA)\cdot {}^tA = A\cdot {}^tA.$

${}^t\left(A + {}^tA\right) = {}^tA + {}^t({}^tA) = {}^tA + A = A + {}^tA.$

b) ${}^t(A - {}^tA) = {}^tA - {}^t({}^tA) = {}^tA - A = -(A - {}^tA).$

**3.** $A = B + C$, unde $B = \frac{1}{2}(A + {}^tA)$, $C = \frac{1}{2}(A - {}^tA)$.

**4.** $A \cdot B = (0\ 0\ 0) = O_{1\times 3}$.

**5.** ${}^t(A^k) = \underbrace{{}^t(A\ldots A)}_{k\text{-ori}} = ({}^tA)^k$ .

**9.** $A = I_3 + B$, unde $B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Atunci $B^3 = O_3$.

Pentru $k \in \mathbb{N}^*$, $A^k = (I_3 + B)^k = I_3 + kB + C_k^2 B^2$ .
Analog pentru $k < 0$.

**10.** $B = \frac{1}{2}(A + {}^tA)$, $C = \frac{1}{2}(A - {}^tA)$.

**12.** Răspunsul este negativ.

**14.** $[[A, B], C] + [[B, C], A] + [[C, A], B] = (AB - BA)C - C(AB - BA) +$
$+ (BC - CB)A - A(BC - CB) + (CA - AC)B - B(CA - AC) =$
$= ABC - BAC - CAB + CBA + BCA - CBA - ABC + ACB +$
$+ CAB - ACB - BCA + BAC = 0.$

## *Cap. 3. Determinanți*

### Pag. 32

**1.** a) $a^2 - \frac{1}{a^2}$ ; b) 1; c) = –3; d) 0; e) 0; f) $1 - 2x^2$; g) $x - 1$; h) 4011.

**2.** c) $(b - a)(c - a)(c - b)$; d) $a$; e) 0; g) $\sin(z - y) - 2\sin(z - x) + 3\sin(y - x)$.

### Pag. 49

**1.** Alegem un sistem cartezian de coordonate, astfel încât, $A(0, a)$, $B(b, 0)$, $C(c, 0)$.

**2.** Două drepte paralele cu $AB$.

**3.** $\mathcal{A}[ABCD] = \mathcal{A}[ABD] + \mathcal{A}[ADC]$. Se foloseşte formula ariei unui triunghi.

**7.** $a = \frac{1}{3}$, $b = -\frac{11}{3}$.

## *Cap. 4. Sisteme de ecuații*

### Pag. 54

**1.** $A$, $B$ inversabile, $C$ neinversabilă.

$D$ este neinversabilă $\Leftrightarrow$ $a, b, c, d$ sunt distincte.

**7.** $A^{-1} = BC \Rightarrow (BC)A = A^{-1}A = I_n$. $C^{-1} = AB \Rightarrow C(AB) = I_n$.

**9.** $\det(AB^{-1}C^{-1}A^{-1}BC) = (\det A)(\det B)^{-1} \cdot (\det C)^{-1} \cdot (\det A)^{-1} \cdot (\det B) \cdot (\det C) = 1$.

**10.** $A$ este inversabilă $\Leftrightarrow \det A \neq 0 \Leftrightarrow (1 - m)x^2 + 2x - 2m + 3 \neq 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

Soluția este $m \in (-\infty, \frac{1}{2}) \cup (2, +\infty)$.

### Pag. 69

**1.** a) $x = \frac{6}{23}$, $y = \frac{65}{23}$.

j) $x = 0$, $y = 1$.

**2.** $x = y = z = 1$.

**3.** Se logaritmează în baza 10 şi se obține un sistem liniar cu 3 necunoscute de tip Cramer.

**4.** Se foloseşte determinantul Vandermonde.

### Pag. 96

**1.** $\alpha = 2$, $\beta = 3$, $x = y = 1$.

**2.** Dacă $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{1, -2\}$, sistemul este de tip Cramer.

Dacă $\alpha = 1$, distingem două cazuri:

- $\beta = 0 \Rightarrow x = -\lambda - \mu$, $y = \alpha$, $z = \mu$; $\alpha, \mu \in \mathbb{R}$.
- $\beta \neq 0 \Rightarrow$ sistem incompatibil.

Dacă $\alpha = -2$, $\beta = 0 \Rightarrow x = y = z = \lambda \in \mathbb{R}$.

Dacă $\alpha = -2$, $\beta \neq 0 \Rightarrow$ sistem incompatibil.

**3.** Se foloseşte calculul determinantului Vandermonde.

**11.** Adunând toate ecuațiile, obținem $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 0$.

# Analiză matematică

## *Cap. 1. Limite de funcții*

### Pag. 203

**1.** $a_n \to e$; **2.** $\frac{\pi}{4}$; **3.** $\frac{a_n}{b_n} \to \sqrt{3}$; **4.** 1; **5.** $a_n \to e$; **6.** 1; **7.** $\frac{2}{3}$; **8.** $a_n \to \ln\sqrt{ab}$; **9.** $+\infty$; **10.** se amplifică cu conjugata; **11.** se aplică $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\ln\left(1+\frac{k}{n^2}\right)}{\frac{k}{n^2}} = 1$; **13.** 1; **14.** i) $a_1 + a_2 + \ldots + a_k > 0 \Rightarrow$ $\Rightarrow +\infty$; ii) $a_1 + a_2 + \ldots + a_k = 0$; iii) $a_1 + a_2 + \ldots + a_k < 0 \Rightarrow -\infty$; **15.** $b_n < \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{8n+1}}$, $b_n \to 0$; **16.** $+\infty$; **17.** $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \frac{ac}{(1-bc)(1-c)}$; **18.** $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \ln 2$; **19.** a) $a_n \to e^{\frac{a(a+1)}{2}}$; b) $[f(a)]^{\frac{a+2}{3}}$; **20.** 1; **21.** $x_n$ ste monoton descrescător şi $x_n \to 0$; **22.** $x_n \to \frac{a+b}{2}$; **23.** $\frac{3}{4}$; **25.** $x_n \to 0$; **26.** a) $a_n \to \frac{1}{2}$; b) $\frac{1}{2}$; c) $\frac{1}{2}$; d) $\frac{\pi}{2}$; **28.** şirul $a_n$ este periodic; **29.** $a_{n+1} < a$.

### Pag. 206

**1.** şirul este periodic, deci este mărginit; **2.** Se arată că şirul $(a_n)_{n\geq 1}$, conține un subşir cu limita $+\infty$; **3.** şirul conține două subşiruri cu limita $+\infty$; **4.** $\frac{a}{2}$; **5.** 2; **6.** $b_n \to \pm\infty$;

**7.** $a_n \to \frac{2k+1+\sqrt{4k+1}}{2}$.

## *Cap. 2. Continuitate*

### Pag. 284

**II.** i) Fie $x_0 \in \mathbb{R}$. Pentru ca funcția să fie continuă în punctul $x_0$ trebuie să avem $x_0^2 + ax_0 + b = 0$, care poate admite cel mult două rădăcini distincte şi deci cel mult două puncte de discontinuitate.

ii) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} (x-1)(x-2), & x \in \mathbb{Q} \\ 0, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$.

**2.** Considerăm funcția $g : [a, b] \to \mathbb{R}$, $g(x) = \frac{\alpha}{\alpha+\beta}[f(a) - f(x)] + \frac{\beta}{\alpha+\beta}[f(b) - f(x)]$.

Evident $g(a) \cdot g(b) < 0$.

**3.** Pentru $y = 0 \Rightarrow f(x) = \dfrac{f(x)+f(0)}{1-f(x)\cdot f(0)} \Rightarrow f(0) = 0$.

Pentru $y = x \Rightarrow f(2x) = \dfrac{2f(x)}{1-f^2(x)}$, $f(x) \neq \pm 1 \Rightarrow f(x) \in (-1, 1), \forall x \in \mathbb{R}$, şi

$|f(2x)| > 2|f(x)|$ şi prin inducţie $|f(2^n x)| > 2^n|f(x)| \Rightarrow |f(x)| \to 0 \Rightarrow f(x) = 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

**4.** Fie $f$ şi $g$ două funcţii care verifică condiţia dată. Scăzând cele două relaţii obţinem:
$f(x + y) - g(x + y) = f(x) - g(x) + f(y) - g(y)$. Fie $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,
$h(x) = f(x) - g(x)$, atunci obţinem ecuaţia funcţională
$h(x + y) = h(x) + h(y)$, ecuaţie funcţională de tip Cauchy, cu soluţia $h(x) = kx$, $k \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}$. În final funcţia $f$ este de forma: $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 + kx + 1$, $k \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}$.

**5.** Putem scrie următoarele relaţii:
$f(x) - f(ax) = x$, $f(ax) - f(a^2x) = ax$, …, $f(a^{n-1}x) - f(a^n x) = a^{n-1} \cdot x$.
Adunând relaţiile obţinem:
$f(x) - f(a^n x) = x(1 + a + a^2 + \ldots + a^n) \Rightarrow$ prin trecere la limită se obţine:

$f(x) = f(0) + \dfrac{x}{1-a} = a + \dfrac{x}{1-a} = \dfrac{a-a^2+x}{1-a}, \forall x \in \mathbb{R}$.

## *Cap. 3. Derivabilitate*

### Pag. 361

**I.**

**1.** a) nu este derivabilă în $x = 1$; b) se poate aplica teorema; c) funcţia nu este derivabilă în $x = 0$; d) nu este derivabilă în $x = \dfrac{\pi}{4}$; e) se poate aplica teorema; f) nu este derivabilă în $x = \dfrac{\pi}{4}$.

**2.** b) $a = c = 3$; $b = 5$; c) nu există valori pentru $m$ şi $n$.

**II.**

**1.** a) se poate aplica teorema; b) da; c) da; d) da.

**2.** a) $p = q = \dfrac{3-e}{e}$; b) $q \in (0, +\infty)$, $p = 1$; c) $p = 1$, $q = 0$.

**III.**

**1.** a) $c = \sqrt{\dfrac{7}{3}}$; b) $c = \sqrt{2}$; c) $c = \dfrac{\sqrt{\pi^2-4}}{\pi}$.

**2.** Se aplică teorema lui Lagrange următoarelor funcţii:
a) $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, $f(t) = t^n$ ($n$ fixat)
b) $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \ln x$
c) Fie $\alpha > 0$ şi $[\alpha, \frac{\pi}{2}]$ un interval $f : [\alpha, \frac{\pi}{2}] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$

d) $[0, x]$, $f : [0, x] \to \mathbb{R}$, $f(t) = \cos t + \dfrac{t^2}{2}$

e) $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \operatorname{tg} x$

f) $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \operatorname{ctg} x$

g) $\dfrac{e^a + e^b}{2} \geq \sqrt{e^a \cdot e^b} = e^{\frac{a+b}{2}}$

h) $f : [0, x] \subset [0, 1]$, $f(t) = \arcsin t - t + \dfrac{t^3}{3!}$

i) $f : [0, x] \to \mathbb{R}$, $f(t) = e^t - t - 1$; $f : [x, 0] \to \mathbb{R}$, $f(t) = e^t - t - 1$

j) se verifică imediat.

**3.** a) $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \arcsin x + \arccos x \Rightarrow f'(x) = 0 \Rightarrow f(x) = \dfrac{\pi}{2}$, $\forall x \in [-1, 1]$;

b) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \operatorname{arctg} x + \operatorname{arcctg} x \Rightarrow f'(x) = 0 \Rightarrow f(x) = \dfrac{\pi}{2}$, $\forall x \in \mathbb{R}$;

c) $f$, $g : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \operatorname{arctg} x$, $g(x) = -\operatorname{arctg}\dfrac{1}{x} \Rightarrow$

$f' = g'$, $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \Rightarrow f(x) - g(x) = \begin{cases} k_1, & x < 0 \\ k_2, & x > 0 \end{cases}$, $x \neq 0$, $x = 1 \Rightarrow k_1 = \dfrac{\pi}{2}$ şi $x = 1$

$\Rightarrow k_2 = \dfrac{\pi}{2}$

$f : \mathbb{R} \setminus [-1, 1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \arcsin\dfrac{2x}{1+x^2} + 2\operatorname{arctg} x \Rightarrow f'(x) = 0 \Rightarrow$

$f(x) = \begin{cases} k_1, & x \leq -1 \\ k_2, & x \geq 1 \end{cases} \Rightarrow k_1 = -\pi$ şi $k_2 = \pi$.

e) $f(x) = 0 \Rightarrow f(x) = \begin{cases} k_1, & x < -1 \\ k_2, & x > -1 \end{cases}$ şi $k_1 = \dfrac{3\pi}{4}$, $k_2 = \dfrac{\pi}{4}$

**4.** a) $g(x) - f(x) = \begin{cases} 1, & x < 0 \\ 2, & x > 0 \end{cases}$; c) $f'(x) - g'(x) = \dfrac{1}{x^2 + 2x + 2}$, $\forall x\ \mathbb{R} \setminus \{-\dfrac{1}{2}\} \Rightarrow$

$\exists\, k_1, k_2 \in \mathbb{R}$ astfel ca $f(x) - g(x) = \begin{cases} k_1, & x < -\dfrac{1}{2} \\ k_2, & x > -\dfrac{1}{2} \end{cases}$

e) $f'(x) = g'(x) \Rightarrow \forall x \in \mathbb{R}\ (-\infty, -1) \cup (1, +\infty) \Rightarrow f - g = \begin{cases} k_1, & x \leq -1 \\ k_2, & x \geq 1 \end{cases} \Rightarrow$

$k_1 = \pi$, $k_2 = -\pi$.

**5.** a) $\lim\limits_{n \to +\infty} c_n = 0$;

b) i) $f : [0, 2\pi] \to \mathbb{R} \Rightarrow c_1 = \dfrac{\pi}{2}$ şi $c_2 = \dfrac{3\pi}{2}$;

ii) $f : [0, b] \to \mathbb{R}$ să fie convexă sau concavă pe $[a, b]$.

c) i) Se consideră funcția $f : [0, x] \to \mathbb{R}$, $f(t) = e^t - t - 1$, $x > 0$ şi
$g : [0, x] \to \mathbb{R}$, $g(t) = e^t - t - 1$ $(x < 0)$ şi se aplică teorema lui Lagrange.

ii) Se consideră funcțiile: $f : [0, x] \to \mathbb{R}$, $f(t) = t - \sin t$ $(x > 0)$ şi

$g : [0, x] \to \mathbb{R}$, $g(t) = \sin t - t + \dfrac{t^3}{6}$ $(x > 0)$

şi se aplică teorema lui Lagrange de două ori.

iv) Se consideră funcția $f(t) = e^t - 1 - \dfrac{t}{1!} - \dfrac{t^2}{2!} - \ldots - \dfrac{t^n}{n!}$, $x > 0$, şi se aplică teorema lui Lagrange. Apoi se aplică succesiv teorema lui Lagrange pe intervale şi funcții alese în mod convenabil.

**Notă:** Scriind formula lui Taylor cu restul din formula lui Lagrange, obținem:

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} e^{\theta x}, \ \theta \in [0, 1]$$

$$\forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow e^x > 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!}$$

e) iii) $\dfrac{9^x - 8^x}{9-8} = \dfrac{2^x - 1}{2-1}$. Se aplică teorema lui Lagrange şi se obține: $x = 0$, $x = 1$.

## *Exerciții recapitulative*

### Pag. 446

### Test 1

**1.** $\frac{1}{4}$; **2.** a) $\pi$; b) $\frac{1}{2}$; **3.** $a = \frac{3}{2}$, $b = 1$; $20x - 2y - 33 = 0$.

### Test 2

**1.** $a_n < \dfrac{\sqrt{5}}{\sqrt{6n+5}} \to 0$; **2.** a) Funcția $f$ admite puncte de discontinuitate de speța întâi, deci nu admite pe $D$ proprietatea lui Darboux; b) Funcția $f$ este continuă pe $D$, deci admite proprietatea lui Darboux; **3.** Se aplică teorema lui Cauchy funcțiilor $u, v : [a, b] \to \mathbb{R}$, $u(x) = \dfrac{f(x)}{x}$ şi $v(x) = \dfrac{1}{x}$.

## Test 3

**1.** Relația de recurență se scrie $x_{n+1} = (x_n - 2)^2$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$. Prin metoda inducției se demonstrează că $x_n = (a-2)^{2^n} + 2$, iar $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 2$;

**3.** Ținem seama că $\max(a, b) = = \dfrac{a+b+|a-b|}{2}$; **4.** $a = 1$, $b = -2$.

## Test 4

**1.** a) Putem scrie $a_k = S_k - S_{k-1} = 4k + 1$, iar limita este $\dfrac{4}{3}$;

**3.** $a = 8$, $b = -4$;

**4.** Rezolvăm inecuațiile $-1 \le \dfrac{x-1}{2\sqrt{x^2+1}} \le 1$ în $D_{\max} = \mathbb{R}$.

## Test 5

**3.** a) $f(x) = -\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{1}{x-1} - \dfrac{8}{3}\cdot\dfrac{1}{x+2}$; b) Folosim formula lui Leibnitz.

## Test 6

**1.** $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 1-\sqrt{1-a}$; **2.** a) $\dfrac{\pi}{6}$; b) $-\dfrac{e}{2}$; **3.** Construim funcția $g : [a, b] \to \mathbb{R}$, $g(x) = [f(x) - f(a)](x - b)$ şi aplicăm teorema lui Rolle; **4.** b) $a = 8$.

## Test 7

**1.** Se foloseşte metoda inducției matematice. Şirul este convergent şi $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$;

**2.** a) Se aplică teorema lui Lagrange funcție: $h : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$, $h(x) = \ln x$ pe $[a, a + 1]$, $a \ge 1$.

## Test 8

**1.** Dacă $a \in (-1, 1)$, $\lim\limits_{n\to\infty} a^n = 0$ şi $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \dfrac{a+1}{1-a}$. Dacă $a \in \mathbb{R} \setminus [-1, 1]$, atunci $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{a^n} = 0$ şi $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \dfrac{a+1}{a-1}$; **3.** $a = -3$, $b = 4$, $c = -2$.

## Test 9

**1.** $a_n = 2 - \left(\dfrac{3}{4}\right)^n$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$; **3.** b) $S_n = -\dfrac{n(n+1)}{2}$; c) $-\dfrac{1}{2}$.

# Bibliografie selectivă

**Alexandrescu, P., Maftei, I. V.** – *Exerciţii şi problema de analiză matematică*, Editura Alcomi, 1992

**Aramă, L., Morozan, T.** – *Probleme de calcul diferenţial şi integral*, Editura Tehnică, Bucureşti, 1978

**Bătineţu, D. M., Maftei, I. V., Stancu, M.** – *Exerciţii şi probleme de analiză matematică pentru clasele XI-XII*, Editura Didactică şi Pedagogică 1981

**Bătineţu, D. M.** – *Probleme de matematică pentru treapta a II-a de liceu*, Editura Albatros, Bucureşti, 1979

**Bătineţu, D. M., Tomescu, I., Maftei, I. V. şi colectiv** – *Olimpiadele naţionale de matematică 1950-2003*, Editura Enciclopedică, Bucureşti, 2005

**Berman, G.** – *Problèmes d'analyse mathématique*, Editions Mir, Moscou, 1977

**Buşneag, D., Maftei, I. V.** – *Teme pentru cercurile şi concursurile de matematică ale elevilor*, Editura Scrisul Românesc, Craiova, 1983

**Coşniţă, C., Turtoiu, F.** – *Culegere de probleme de analiză matematică*, Editura Tehnică, Bucureşti, 1962

**Démidovitch, B., Maro, I.** – *Éléments de calcul numérique*, Èditions Mir, Moscou, 1974

**Démidovitch, B. şi colectiv** – *Recueil d'exercices et de problèmes d'analyse mathématique*, Èditions Mir, Moscou, 1971

**Donciu, N., Flondor, D.** – *Culegere de probleme de algebră şi analiză matematică*, Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1964

**Fabry, E.** – *Problèmes d'analyse mathématique*, Paris, Hermann et fils

**Giurgiu, I., Turtoiu, F.** – *Culegere de probleme de matematică pentru treapta a doua de liceu*, Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1981

**Goursat, E.** – *Cours d'analyse mathématique*, vol. I, Gauthier-Villars, Paris

**Ion, I. D., Radu, N., Niţă, C., Popescu, D.** – *Probleme de algebră,* Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1981

**Ionescu-Ţiu, C., Pârşan, L.** – *Calcul diferenţial şi integral pentru admitere în facultate*, Editura Albatros, Bucureşti, 1975

**Kurosh, A. G.** – *Higher Algebra,* Mir Publ. Moscow, 1975

**Nicolescu, C. P.** – *Teste de analiză matematică*, Editura Albatros, Bucureşti, 1984

**Nicolescu, C. P.** – *Analiză matematică. Aplicaţii*, Editura Albatros, Bucureşti, 1987

**Nicolescu, C. P.** – *Teste recapitulative de matematică*, Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1989

**Nicolescu, C. P.** – *Sinteze de matematică,* Editura Albatros, Bucureşti, 1990

**Nicolescu, C. P.** – *100 lecţii de matematică fără meditator*, Editura ICAR, Bucureşti, 1990-1991

**Nicolescu, M. G. Nicolescu, C. P.,** – *Teste de analiză matematică pentru elevii claselor a XI-a şi a XII-a*, Editura UNIVERSAL PAN, Bucureşti, 2000

**Nicolescu, M. G. Nicolescu, C. P.,** – *Analiză matematică. Exerciţii şi probleme pentru elevii claselor XI-XII. Subiecte pregătitoare pentru examenul de bacalaureat, concursul de admitere în învăţământul superior*, Editura UNIVERSAL PAN, Bucureşti, 2005

**Nicolescu, M., Dinculescu, N., Marcus, S. şi colab.** – *Manual de analiză matematică*, Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1971

**Năstăsescu, C., Niţă, C., Brandiburu, M., Joiţa, D.** – *Exerciţii şi probleme de algebră*, Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1992

**Panaitopol, I., Ottescu, C.** – *Probleme date la olimpiadele de matematică*, Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1977

**Pârşan, L.** – *500 probleme pregătitoare de algebră şi analiză matematică pentru candidaţii la admiterea în învăţământul superior economic*, Editura PAN GENERAL, Bucureşti, 1994

**Rivaud, J.** – *Exercices d'analyse*, tome I, Libraire Vuibert, Paris, 1966

**Roşculeţ, M., Popescu O.** – *Probleme de analiză matematică pentru concursurile de admitere în învăţământul superior*, Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1971

**Manuale şcolare alternative** – 2002-2006

******* – *Gazeta Matematică* (1965-2005)

# Cuprins

# Algebră



# Analiză matematică