MINISTERUL EDUCAŢIEI NAŢIONALE

Prof. univ. dr. **Constantin Năstăsescu**
Membru coresp. al Academiei Române

Prof. univ. dr. **Constantin Niţă**

Prof. univ. dr. **Ion Chiţescu**

Prof. gr. I **Dan Mihalca**

Prof. univ. dr. **Monica Dumitrescu**

Matematică

Trunchi comun şi curriculum diferenţiat

Manual pentru clasa a X - a

EDITURA DIDACTICĂ ŞI PEDAGOGICĂ, R.A.

O proprietate importantă a compunerii funcţiilor este următoarea:

Compunerea funcţiilor este asociativă, adică fiind date funcţiile $f : A \to B$, $g : B \to C$ şi $h : C \to D$, are loc egalitatea:

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f.$$

Funcţii pare, funcţii impare

O mulţime $A \subseteq \mathbb{R}$ se numeşte *simetrică* faţă de origine dacă oricare ar fi $x \in A$, atunci şi $-x \in A$.

Fie $A \subseteq \mathbb{R}$ o mulţime simetrică faţă de origine şi o funcţie $f : A \to \mathbb{R}$.

Funcţia f se numeşte *pară* dacă $f(-x) = f(x)$ oricare ar fi $x \in A$.

Funcţia f se numeşte *impară* dacă $f(-x) = -f(x)$ oricare ar fi $x \in A$.

După cum ştim din clasa a IX-a, graficul unei funcţii pare este simetric faţă de axa Oy. Dacă f este o funcţie impară şi $0 \in A$, atunci $f(0) = 0$, iar graficul său este simetric faţă de origine.

Funcţii numerice monotone

Fie $f : A \to B$ o funcţie numerică şi $I \subset A$ o submulţime nevidă a lui A. Spunem că *f este crescătoare pe mulţimea I* dacă oricare ar fi $x_1, x_2 \in I$, astfel încât $x_1 < x_2$, avem $f(x_1) \leqslant f(x_2)$.

Funcţia f se numeşte *descrescătoare pe mulţimea I* dacă oricare ar fi $x_1, x_2 \in I$ astfel încât $x_1 < x_2$, avem $f(x_1) \geqslant f(x_2)$.

Spunem că f este *strict crescătoare* (respectiv *strict descrescătoare*) *pe mulţimea I* dacă oricare ar fi $x_1, x_2 \in I$, astfel încât $x_1 < x_2$, să rezulte $f(x_1) < f(x_2)$ (respectiv $f(x_1) > f(x_2)$).

O funcţie numerică $f : A \to B$ crescătoare sau descrescătoare (respectiv strict crescătoare sau strict descrescătoare) pe mulţimea I se numeşte *monotonă* (respectiv *strict montonă*) pe mulţimea I.

Dacă $I = A$ vom spune simplu că funcţia $f : A \to B$ este *monotonă* (respectiv *strict montonă*).

Funcţii periodice

Fie $A \subseteq \mathbb{R}$ o mulţime de numere reale. O funcţie $A \to \mathbb{R}$ se numeşte *periodică* de perioadă $T \neq 0$, dacă pentru orice $x \in A$ avem $x + T \in A$ şi $f(x + T) = f(x)$.

Dacă există o cea mai mică perioadă pozitivă T^*, aceasta se numeşte *perioada principală* a lui f.

Este suficient ca studiul unei funcţii periodice având perioada principală $T > 0$ să fie efectuat numai pe un interval de lungime egală cu T.

Observaţie. Noţiunile amintite mai înainte sunt utile în studiul claselor de funcţii prezentate în acest manual.

1.2. Acum vom da noi concepte şi rezultate privind funcţiile. Acestea vor fi folosite în continuare în manualele de matematică.

Definiţie. Fie $f: A \to B$ o funcţie. Vom spune că f este o funcţie *injectivă* sau că este o *injecţie*, dacă pentru oricare două elemente x şi y ale lui A, $x \neq y$, avem $f(x) \neq f(y)$.

Faptul că funcţia f este injectivă se mai exprimă şi astfel: dacă x şi y sunt elemente oarecare din A cu proprietatea $f(x) = f(y)$, atunci rezultă că $x = y$.

Din definiţie rezultă că o funcţie $f: A \to B$ *nu este injectivă* dacă există cel puţin două elemente x şi y din A, $x \neq y$, astfel încât $f(x) = f(y)$.

Exemple

1. Funcţia $f: A \to B$, asociată diagramei din figura 1 este o funcţie injectivă.

2. Funcţia $g: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, definită prin formula $g(x) = x^2$, este injectivă.

Într-adevăr, să presupunem că $g(x) = g(y)$ unde $x, y \in \mathbb{N}$. Atunci $x^2 = y^2$, de unde $(x - y)(x + y) = 0$.

Din această egalitate rezultă că $x - y = 0$ sau $x + y = 0$. Din prima egalitate avem că $x = y$. Dacă are loc egalitatea $x + y = 0$, cum x şi y sunt numere naturale, obţinem că $x = y = 0$. Oricum, din egalitatea $g(x) = g(y)$ rezultă că $x = y$ şi deci g este o funcţie injectivă.

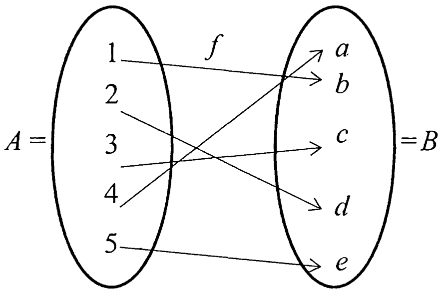


Fig. 1

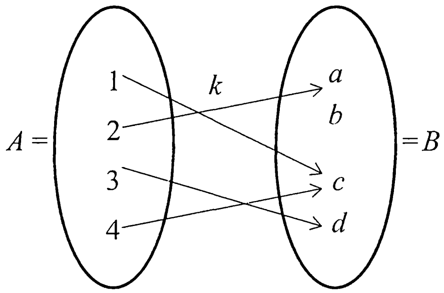


Fig. 2

3. Funcţia $h: \mathbb{Z} \to \mathbb{N}$, $h(x) = x^2$ nu este o funcţie injectivă deoarece $h(-2) = h(2) = 4$.

4. Funcţia $k: A \to B$ asociată diagramei din figura 2 nu este injectivă, deoarece $k(1) = k(4) = c$.

Definiţie. O funcţie $f: A \to B$ este o funcţie *surjectivă* sau, simplu, este o *surjecţie* dacă pentru orice element $b \in B$ există cel puţin un element $a \in A$, astfel încât $f(a) = b$.

Rezultă că o funcţie $f : A \to B$ *nu este surjectivă* dacă există cel puţin un element $b \in B$, astfel încât pentru orice element $x \in A$, avem $f(x) \neq b$.

Dată fiind funcţia $f : A \to B$, am notat cu $f(A)$ sau Imf submulţimea lui B definită astfel: $f(A) = \{f(x) \mid x \in A\} = \{y \in B \mid (\exists)\ x \in A \text{ astfel încât } y = f(x)\}$; $f(A)$ se numeşte *imaginea* funcţiei f. Din definiţia lui $f(A)$ rezultă că:

f este surjectivă dacă şi numai dacă $f(A) = B$.

Exemple

1. Funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definită prin relaţia $f(x) = ax$ ($a \neq 0$) este surjectivă. Într-adevăr, fie $y \in \mathbb{R}$. Atunci $x = \dfrac{y}{a} \in \mathbb{R}$ şi avem $f\left(\dfrac{y}{a}\right) = a\dfrac{y}{a} = y$.

2. Funcţia $g : A \to B$, asociată diagramei din figura 3 este, de asemenea, surjectivă.

$g(1) = a, g(2) = g(3) = b, g(4) = c, g(5) = a.$

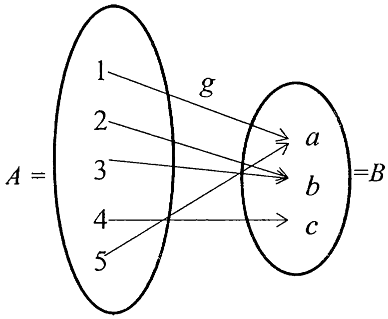


Fig. 3

3. Funcţia $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definită prin formula $h(x) = x^2$ nu este surjectivă. Într-adevăr, pentru orice $x \in \mathbb{R}$ avem $h(x) = x^2 \neq -1$. Deci -1 nu este imaginea nici unui element, prin h, din domeniul de definiţie.

4. Funcţia $k : A \to B$ asociată diagramei din figura 4 nu este surjectivă. Într-adevăr, se vede că elementul $2 \in B$ nu este imaginea prin k a nici unui element din A.

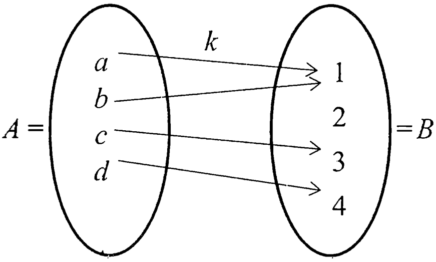


Fig. 4

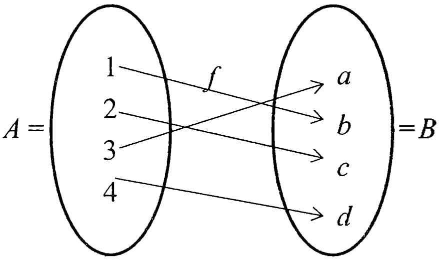


Fig. 5

Definiţie. O funcţie $f : A \to B$ care este simultan injectivă şi surjectivă se numeşte *funcţie bijectivă* sau, simplu, *bijecţie*.

Exemple

1. Funcţia $f : A \to B$, asociată diagramei din figura 5, este bijectivă:

$$f(1) = b, f(2) = c, f(3) = a, f(4) = d.$$

2. Fie $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\}$. Definim funcţia $g : A \to A$ prin formula $g(x) = x^2$. Funcţia g este bijectivă. Într-adevăr, trebuie să arătăm că g este injectivă şi surjectivă.

Funcţia g este injectivă. Fie $x, y \in A$ astfel încât $g(x) = g(y)$. Atunci $x^2 = y^2$, de unde $(x - y)(x + y) = 0$ şi deci $x - y = 0$ sau $x + y = 0$. Dacă $x - y = 0$, avem $x = y$; dacă $x + y = 0$, avem $x = -y$ şi cum x, y sunt numere reale pozitive, trebuie ca $x = y = 0$. Oricum, din egalitatea $g(x) = g(y)$ rezultă $x = y$.

Funcţia g este surjectivă. Fie $y \in A$. Cum $y \geq 0$, atunci are sens $\sqrt{y}$. Cum $\sqrt{y} \geq 0$, atunci $\sqrt{y} \in A$. Se vede că $g(\sqrt{y}) = (\sqrt{y})^2 = y$ şi deci g este surjectivă.

3. Funcţia $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = ax + b$, unde $a, b \in \mathbb{R}$ şi $a \neq 0$ este bijectivă. Într-adevăr, dacă $f(x_1) = f(x_2)$, atunci $ax_1 + b = ax_2 + b$, de unde obţinem $ax_1 = ax_2$. Cum $a \neq 0$, atunci $x_1 = x_2$ şi deci f este injectivă.

Să arătăm că f este şi surjectivă. Fie $y \in \mathbb{R}$. Are sens numărul real $x = \frac{y}{a} - \frac{b}{a}$.

Atunci $f(x) = a\left(\frac{y}{a} - \frac{b}{a}\right) + b = y$, ceea ce arată că f este şi surjectivă.

1.3. Interpretarea geometrică a injectivităţii şi surjectivităţii unei funcţii numerice

Fie mulţimile nevide $A, B \subset \mathbb{R}$ şi funcţia $f: A \to B$.

Dacă f este injectivă rezultă, conform definiţiei, că pentru orice $x_1, x_2 \in A$ astfel încât $x_1 \neq x_2$ are loc relaţia $f(x_1) \neq f(x_2)$, adică orice două puncte de abscise distincte de pe graficul funcţiei au ordonate distincte. Aceasta înseamnă că dacă o paralelă la axa Ox intersectează graficul funcţiei, atunci îl intersectează într-un singur punct; cu alte cuvinte, dacă f este injectivă, orice paralelă la axa Ox intersectează graficul funcţiei f în cel mult un punct (fig. 6).

Dacă există o paralelă la axa Ox care intersectează graficul funcţiei f în două sau mai multe puncte, funcţia f nu este injectivă (fig. 7).

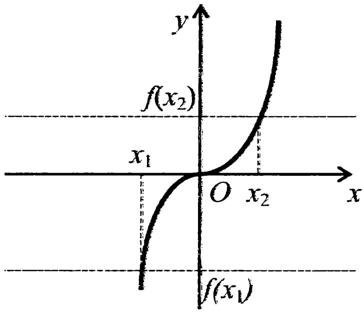


Fig. 6

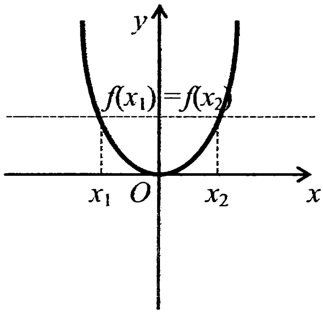


Fig. 7

În concluzie, *funcţia f este injectivă dacă şi numai dacă orice paralelă la axa Ox intersectează graficul funcţiei în cel mult un punct.*

Dacă f este surjectivă rezultă, conform definiţiei, că pentru orice $b \in B$ există (cel puţin un) $a \in A$ astfel încât $f(a) = b$, adică orice paralelă la axa Ox dusă prin punctul de coordonate $(0, b)$, $b \in B$, intersectează graficul funcţiei în cel puţin un punct (fig. 8). Dacă există $b \in B$ astfel încât paralela la axa Ox, dusă prin punctul de coordonate $(0, b)$ nu intersectează graficul funcţiei f, funcţia nu este surjectivă (fig. 9).

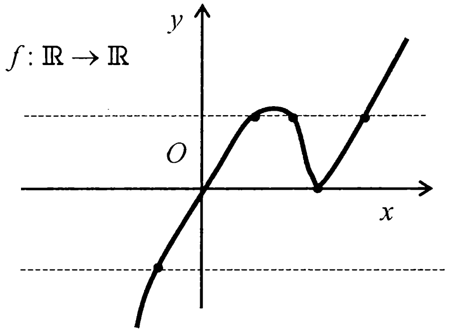


Fig. 8

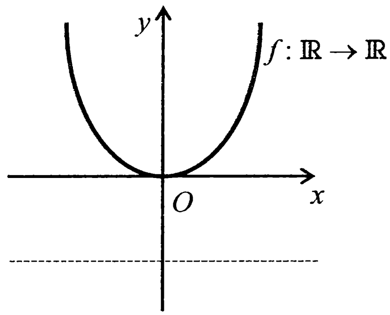


Fig. 9

În concluzie, *funcţia $f : A \to B$ este surjectivă dacă şi numai dacă orice paralelă la axa Ox, dusă prin punctul de coordonate* $(0, b)$, *$b \in B$, intersectează graficul funcţiei în cel puţin un punct.*

Ţinând seama de interpretarea geometrică a injectivităţii şi surjectivităţii unei funcţii, pentru o funcţie bijectivă avem următorul rezultat: *funcţia $f : A \to B$ este bijectivă dacă şi numai dacă oricare ar fi $b \in B$ paralela la Ox, dusă prin punctul de coordonate* $(0, b)$, *intersectează graficul funcţiei într-un singur punct.*

Avem următorul rezultat:

T e o r e m a 1. Dacă $f : A \to B$ este funcţie numerică (adică A şi B sunt submulţimi ale lui $\mathbb{R}$) strict monotonă, atunci f este funcţie injectivă.

Demonstraţie. Într-adevăr, să presupunem că f este strict crescătoare şi fie $x_1, x_2 \in A$ astfel încât $x_1 \neq x_2$. Atunci avem $x_1 < x_2$ sau $x_1 > x_2$. Dacă presupunem că $x_1 < x_2$, rezultă $f(x_1) < f(x_2)$ şi deci $f(x_1) \neq f(x_2)$. Analog, dacă $x_1 > x_2$, rezultă $f(x_1) > f(x_2)$ şi deci $f(x_1) \neq f(x_2)$ şi deci f este injectivă. Dacă f este strict descrescătoare, se procedează analog.

Observaţie. Din definiţie, rezultă că o funcţie periodică nu este funcţie injectivă.

Fie A o mulţime oarecare. Vom nota cu $1_A : A \to A$ funcţia definită astfel: $1_A(a) = a$ pentru orice $a \in A$. 1_A se numeşte *funcţia identică a mulţimii A.*

T e o r e m a 2. Fie A o mulţime şi 1_A funcţia sa identică. Atunci:

1° Pentru orice mulţime B şi pentru orice funcţie $f : A \to B$, avem $f \circ 1_A = f$.

2° Pentru orice mulţime C şi pentru orice funcţie $g : C \to A$, avem $1_A \circ g = g$.

Demonstraţie. Demonstrăm afirmaţia 1°. Funcţiile f şi $f \circ 1_A$ au acelaşi domeniu şi codomeniu aşa că pentru a arăta egalitatea $f \circ 1_A = f$ rămâne să dovedim că pentru orice $a \in A$, $(f \circ 1_A)(a) = f(a)$.

Într-adevăr $(f \circ 1_A)(a) = f(1_A(a)) = f(a)$.

Demonstrăm afirmaţia 2°. Funcţiile $1_A \circ g$ şi g au acelaşi domeniu şi codomeniu, adică mulţimile C respectiv A.

Pentru a arăta egalitatea $1_A \circ g = g$ rămâne să dovedim că pentru orice $c \in C$ avem $(1_A \circ g)(c) = g(c)$.

Într-adevăr $(1_A \circ g)(c) = 1_A(g(c)) = g(c)$.

Definiţie. O funcţie $f : A \to B$ se numeşte inversabilă dacă există o funcţie $g : B \to A$ astfel încât

$$g \circ f = 1_A \text{ şi } f \circ g = 1_B. \tag{1}$$

Observăm că funcţia g definită de relaţiile (1) este unică. Într-adevăr, dacă $g' : B \to A$ este o altă funcţie astfel încât

$$g' \circ f = 1_A \text{ şi } f \circ g' = 1_B, \tag{2}$$

atunci obţinem:

$$g = 1_A \circ g = (g' \circ f) \circ g = g' \circ (f \circ g) = g' \circ 1_B = g',$$

unde s-au utilizat relaţiile (1) şi (2) precum şi asociativitatea compunerii funcţiilor.

Dacă f este o funcţie inversabilă, atunci funcţia g definită de relaţiile (1), care este unică, se numeşte *inversa funcţiei* f şi se notează f^{-1}.

Se pune întrebarea, când este o funcţie inversabilă? Răspunsul este dat de următoarea teoremă.

Teorema 3. O funcţie $f : A \to B$ este inversabilă dacă şi numai dacă este bijectivă.

Demonstraţie. Să presupunem mai întâi că f este inversabilă şi să arătăm că f este injectivă şi surjectivă. Din faptul că f este inversabilă, rezultă că există $f^{-1} : B \to A$ astfel încât

$$f^{-1} \circ f = 1_A \text{ şi } f \circ f^{-1} = 1_B \tag{3}$$

Fie x_1, x_2 din A şi să presupunem că $f(x_1) = f(x_2)$. Din prima dintre relaţiile (3) obţinem că $x_1 = 1_A(x_1) = (f^{-1} \circ f)(x_1) = f^{-1}(f(x_1)) = f^{-1}(f(x_2)) = (f^{-1} \circ f)(x_2) = 1_A(x_2) = x_2$. Deci f este injectivă. Fie $y \in B$. Din a doua dintre relaţiile (3) se obţine: $y = 1_B(y) = (f \circ f^{-1})(y) = f(f^{-1}(y))$. Dacă se notează $x = f^{-1}(y)$, atunci $y = f(x)$, ceea ce arată că f este şi surjectivă.

Reciproc, presupunem că f este bijectivă. Definim funcţia $g : B \to A$ în modul următor. Fie $y \in B$. Deoarece f este surjectivă există $x \in A$ astfel încât $f(x) = y$. Elementul x este unic determinat cu această proprietate, întrucât f este injectivă şi definim $g(y) = x$.

Să dovedim că $g \circ f = 1_A$ şi $f \circ g = 1_B$. Fie $x \in A$. Atunci, notând $y = f(x)$, rezultă din definiţia lui g că $g(y) = x$ şi deci $g(f(x)) = x$ sau $(g \circ f)(x) = 1_A(x)$. Rezultă atunci $g \circ f = 1_A$. Să arătăm acum că $f \circ g = 1_B$. Fie $y \in B$. Din definiţia lui g, $g(y) = x$, unde x este elementul din A pentru care $f(x) = y$. Atunci $(f \circ g)(y) = f(g(y)) = f(x) = y = 1_B(y)$, de unde obţinem că $f \circ g = 1_B$.

Observaţie. Din demonstraţia teoremei precedente rezultă că dacă $f : A \to B$ este o funcţie bijectivă, atunci funcţia sa inversă $f^{-1} : B \to A$ se defineşte după următorul procedeu: dacă $b \in B$, atunci $f^{-1}(b)$ este unicul element $a \in A$ astfel încât $f(a) = b$.

Exemple

1. Fie funcţia $f: A \to B$ asociată diagramei din figura 10.

$$f(1) = c, f(2) = a, f(3) = e, f(4) = d, f(5) = b.$$

Se vede că f este o funcţie bijectivă. Atunci există funcţia inversă $f^{-1}: B \to A$.

Vom avea: $f^{-1}(a) = 2; f^{-1}(b) = 5; f^{-1}(c) = 1; f^{-1}(d) = 4; f^{-1}(e) = 3$. Funcţia f^{-1} are următoarea diagramă (figura 11).

Se observă că diagrama funcţiei f^{-1} se obţine din aceea a lui f, inversând sensul săgeţilor.

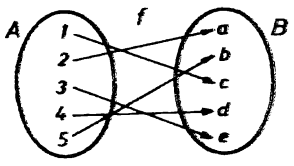


Fig. 10

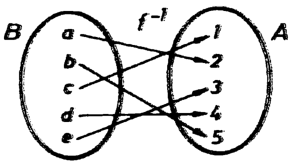


Fig. 11

2. Fie funcţia $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = ax + b$ unde $a, b \in \mathbb{R}$ şi $a \neq 0$.

Această funcţie este bijectivă, deci putem vorbi de inversa sa. Fie $y \in \mathbb{R}$. Atunci $f^{-1}(y) = x$ unde $f(x) = y$. Deci pentru $y \in \mathbb{R}$ trebuie să determinăm $x \in \mathbb{R}$ astfel încât $f(x) = y$ sau $ax + b = y$. Din $ax + b = y$ obţinem pe $x = \frac{y-b}{a} = \frac{1}{a}y - \frac{b}{a}$ şi deci $f^{-1}(y) = \frac{1}{a}y - \frac{b}{a}$. Folosind notaţia cu x, funcţia inversă a lui f este $f^{-1}: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f^{-1}(x) = \frac{1}{a}x - \frac{b}{a}$.

Presupunem că $b \neq 0$.

Considerăm punctele din planul xOy: $P_1(0, b)$; $P_2\left(-\frac{b}{a}, 0\right)$ respectiv $Q_1(b, 0)$, $Q_2\left(0, -\frac{b}{a}\right)$. Se observă că P_1 şi Q_1 (respectiv P_2 şi Q_2) sunt simetrice faţă de prima bisectoare. Cum graficul funcţiei f este dreapta ce trece prin punctele P_1 şi P_2, iar graficul funcţiei f^{-1} este dreapta ce trece prin punctele Q_1 şi Q_2 rezultă că aceste două drepte sunt simetrice faţă de prima bisectoare aşa cum se vede din figura 12.

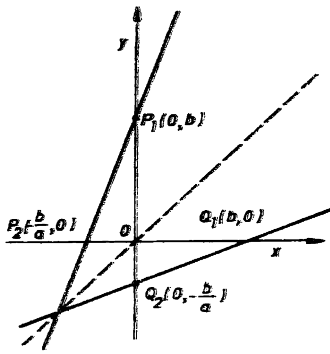


Fig. 12

3. Fie funcţia $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} x-2, & \text{dacă } x \leq 3, \\ 2x-5, & \text{dacă } x > 3 \end{cases}$ Să se arate că funcţia f este bijectivă şi să se calculeze inversa sa.

R: Să arătăm, mai întâi, că f este injectivă. Pentru aceasta, fie $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$. Distingem cazurile:

1° $x_1, x_2 \leq 3$. Dacă $f(x_1) = f(x_2)$, atunci $x_1 - 3 = x_2 - 3$, de unde $x_1 = x_2$.

2° $x_1, x_2 > 3$. Dacă $f(x_1) = f(x_2)$, atunci $2x_1 - 5 = 2x_2 - 5$, de unde $x_1 = x_2$.

3° $x_1 \le 3$, $x_2 > 3$. Avem $x_1 \ne x_2$, iar $f(x_1) = x_1 - 2 \le 1$ şi $f(x_2) = 2x_2 - 5 > 1$, de unde $f(x_1) \ne f(x_2)$.

Deci f este funcţie injectivă.

Să arătăm acum că f este surjectivă. Pentru aceasta, fie $y \in \mathbb{R}$. Distingem cazurile:

1° $y \le 1$. Dacă $f(x) = y$, atunci $x - 2 = y$, de unde $x = y + 2 \le 3$.

2° $y > 1$. Dacă $f(x) = y$, $2x - 5 = y$, de unde $x = \dfrac{y+5}{2} > 3$.

Deci oricare ar fi $y \in \mathbb{R}$ există $x \in \mathbb{R}$ astfel încât $y = f(x)$: dacă $y \le 1$, atunci $x = y + 2$, iar dacă $y > 1$, atunci $x = \dfrac{y+5}{2}$.

Atunci inversa funcţiei f este $f^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f^{-1}(y) = \begin{cases} y+2, & \text{dacă } y \le 1, \\ \dfrac{y+5}{2}, & \text{dacă } y > 1. \end{cases}$

Interpretarea geometrică a inversei unei funcţii numerice

Am văzut că pentru funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = ax + b$ unde $a \ne 0$ şi $b \ne 0$, graficele funcţiilor f şi f^{-1} sunt două drepte simetrice în raport cu prima bisectoare.

Vom arăta acest lucru rămâne valabil pentru orice funcţie numerică.

Fie $f : A \to B$ o funcţie numerică inversabilă şi $f^{-1} : B \to A$ funcţia inversă a lui f. Fie $M(x_0, y_0)$ un punct al graficului funcţiei f. Atunci $y_0 = f(x_0)$ şi deci $x_0 = f^{-1}(y_0)$. Rezultă că punctul $M'(y_0, x_0)$ aparţine graficului funcţiei f^{-1} (reprezentat punctat în figura 13). Dar M şi M' sunt simetrice faţă de bisectoarea unghiului xOy (numită prima bisectoare)*. Rezultă că graficele funcţiilor f şi f^{-1} sunt simetrice faţă de prima bisectoare.

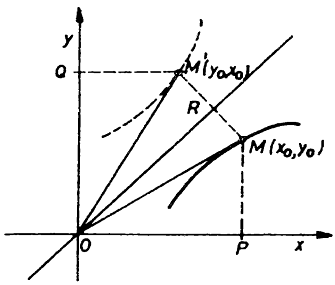


Fig. 13

Monotonia funcţiei numerice inversabile

Fie $f : A \to B$ o funcţie numerică care este inversabilă. În acest caz putem vorbi de inversa sa $f^{-1} : B \to A$. Următorul rezultat caracterizează monotonia unei funcţii inversabile.

T e o r e m a 4. Presupunem că funcţia numerică $f : A \to B$ este inversabilă având inversa $f^{-1} : B \to A$. Atunci f este strict monotonă dacă şi numai dacă f^{-1} este strict monotonă.

* Într-adevăr, cum $OP = OQ$ şi $MP = M'Q$, rezultă că triunghiurile OPM şi OQM' sunt congruente. Deci, $OM = OM'$, Pe de altă parte $POM \equiv QOM'$ şi deci $MOR \equiv M'OR$. În triunghiul MOM' care este isoscel, OR este bisectoare, deci şi mediană. Rezultă că $MR = M'R$, adică M şi M' sunt simetrice faţă de dreapta OR.

Demonstrație. Reamintim că față de compunerea funcțiilor avem egalitățile: $f^{-1} \circ f = 1_A$ și $f \circ f^{-1} = 1_B$ unde 1_A (respectiv 1_B) este funcția identică a mulțimii A (respectiv a mulțimii B).

Presupunem că f este strict crescătoare și fie $b_1, b_2 \in B$ cu $b_1 < b_2$. Punem $a_1 = f^{-1}(b_1)$, $a_2 = f^{-1}(b_2)$. Avem $a_1 \neq a_2$ deoarece în caz că avem $a_1 = a_2$ ar rezulta $f(a_1) = f(f^{-1}(b_1)) = (f \circ f^{-1})(b_1) = 1_B(b_1)$ și analog $f(a_2) = b_2$. Cum $f(a_1) = f(a_2)$ rezultă că $b_1 = b_2$, contradicție.

Cum $a_1 \neq a_2$ și sunt numere reale avem $a_1 < a_2$ sau $a_1 > a_2$. Dacă $a_1 < a_2$, atunci din $b_1 < b_2$ rezultă $f^{-1}(b_1) < f^{-1}(b_2)$.

Dacă $a_1 > a_2$ atunci, cum funcția f este strict crescătoare, avem că $f(a_1) > f(a_2)$. Dar cum $b_1 = f(a_1)$ și $b_2 = f(a_2)$ obținem că $b_1 > b_2$, contradicție.

În concluzie avem $f^{-1}(b_1) < f^{-1}(b_2)$ oricare ar fi $b_1, b_2 \in B$ cu $b_1 < b_2$ și deci f^{-1} este strict crescătoare. Analog, dacă f este strict descrescătoare se arată că f^{-1} este strict descrescătoare.

Cum f este inversa funcției f^{-1} rezultă și reciproca propoziției date.

Am văzut în paragraful 1 al acestui capitol că date două funcții $f : A \rightarrow B$ și $g : B \rightarrow C$ obținem o nouă funcție $g \circ f : A \rightarrow C$, numită compunerea funcțiilor f și g. Compunerea funcțiilor este o operație fundamentală în matematică, deoarece se aplică oricărui tip de funcții (să observăm totuși că operația de compunere a funcțiilor este o „operație parțială”, deoarece ca să obținem funcția $g \circ f$ trebuie ca domeniul valorilor lui f să coincidă cu domeniul de definiție al funcției g).

Totuși în anumite situații particulare se pot face și alte operații cu funcții, operații ce extind, în general, operațiile de pe mulțimea numerelor reale, și anume adunarea și înmulțirea.

În acest caz considerăm A o mulțime nevidă oarecare și vom nota cu $\mathcal{F}(A, \mathbb{R})$ mulțimea tuturor funcțiilor definite pe A cu valori în $\mathbb{R}$, adică $\{f : A \rightarrow \mathbb{R}\}$.

Dacă $f, g \in \mathcal{F}(A, \mathbb{R})$ putem defini funcțiile $f + g$ și $f \cdot g$ în felul următor:

$(f + g)(x) = f(x) + g(x)$, oricare ar fi $x \in \mathbb{R}$;

$(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$, oricare ar fi $x \in \mathbb{R}$.

Este clar că $f + g$ și $f \cdot g$ sunt elemente din $\mathcal{F}(A, \mathbb{R})$ care se numesc *suma* (respectiv *produsul*) funcțiilor f și g.

În continuare, o să dăm unele proprietăți pe care le lăsăm ca exerciții.

1. Cu notațiile de mai sus să se arate că au loc următoarele proprietăți:

1) $f + g = g + f$, oricare ar fi $f, g \in \mathcal{F}(A, \mathbb{R})$.

2) $f \cdot g = g \cdot f$, oricare ar fi $f, g \in \mathcal{F}(A, \mathbb{R})$.

3) $(f + g) + h = f + (g + h)$, oricare ar fi $f, g, h \in \mathcal{F}(A, \mathbb{R})$.

4) $(f \cdot g)\, h = f(g \cdot h)$, oricare ar fi $f, g, h \in \mathcal{F}(A, \mathbb{R})$.

5) $f(g + h) = f \cdot g + f \cdot h$, oricare ar fi $f, g, h \in \mathcal{F}(A, \mathbb{R})$.

Vom nota cu $\mathbb{0} : A \rightarrow \mathbb{R}$ și $\mathbb{1} : A \rightarrow \mathbb{R}$ următoarele funcții constante definite în felul următor:

$\mathbb{0}(x) = 0$ oricare ar fi $x \in \mathbb{R}$ și $\mathbb{1}(x) = 1$, oricare ar fi $x \in \mathbb{R}$.

Funcția $\mathbb{O}$ (respectiv $\mathbb{1}$) se numește funcția nulă sau funcția zero pe mulțimea A (respectiv funcția unitate).

Observație. Funcția unitate $\mathbb{1}$ este diferită de funcția identică $1_A : A \to A$ a mulțimii A.

6) $f + \mathbb{O} = f$ și $f \cdot \mathbb{1} = f$, oricare ar fi $f \in \mathscr{F}(A, \mathbb{R})$.

Dată o funcție $f : A \to \mathbb{R}$, notăm cu $-f : A \to \mathbb{R}$ funcția definită astfel: $(-f)(x) = -f(x)$ oricare ar fi $x \in \mathbb{R}$. Funcția $-f$ se numește *opusa funcției f.*

7) $f + (-f) = \mathbb{O}$ (funcția nulă).

8) Dacă $f : A \to \mathbb{R}$ este o funcție astfel încât $f(x) \neq 0$ oricare ar fi $x \in A$ atunci putem defini funcția $\frac{1}{f} : A \to \mathbb{R}$, punând $\frac{1}{f}(x) = \frac{1}{f(x)}$, oricare ar fi $x \in A$.

9) Să se arate că $f \cdot \frac{1}{f} = \mathbb{1}$.

Date două funcții $f, g \in \mathscr{F}(A, \mathbb{R})$ pentru care există funcția $\frac{1}{f}$ (adică $f(x) \neq 0$ oricare ar fi $x \in A$) putem considera funcția $\frac{g}{f}$ care este prin definiție $g \cdot \frac{1}{f}$.

Deci $\left(\frac{g}{f}\right)(x) = \frac{g(x)}{f(x)}$ oricare ar fi $x \in A$.

10) Presupunem acum că A este o submulțime nevidă a mulțimii numerelor reale $\mathbb{R}$.

Fie $f : A \to \mathbb{R}$ o funcție (numerică). Să se arate că f este crescătoare (respectiv strict crescătoare) pe mulțimea A dacă și numai dacă funcția $(-f)$ este descrescătoare (respectiv strict descrescătoare).

11) Funcția $f : A \to \mathbb{R}$ este pozitivă (respectiv strict pozitivă) pe mulțimea A dacă și numai dacă funcția $-f : A \to \mathbb{R}$ este negativă (respectiv strict negativă) pe mulțimea A.

În continuare să dăm câteva exemple de calcul al sumei și produsului a două funcții.

Exemple

1. Fie funcțiile f; $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 2x + 1$ și $g(x) = 3x - 1$.

Cum $f(x) + g(x) = (2x + 1) + (3x - 1) = 5x$ rezultă că funcția sumă $f + g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ este definită prin egalitatea: $(f + g)(x) = 5x$ oricare ar fi $x \in \mathbb{R}$.

Cum $f(x) \cdot g(x) = (2x + 1) \cdot (3x - 1) = 6x^2 + x - 1$ obținem că funcția produs $f g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ este definită prin egalitatea: $(f \cdot g)(x) = 6x^2 + x - 1$ oricare ar fi $x \in \mathbb{R}$.

2. Fie funcția $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 2x + 1$.

Se vede că oricare ar fi $x \in \mathbb{Z}$, $2x + 1 \neq 0$ și deci putem vorbi de funcția $\frac{1}{f} : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$ care este definită prin egalitatea $\left(\frac{1}{f}\right)(x) = \frac{1}{2x+1}$ oricare ar fi $x \in \mathbb{Z}$.

Să notăm cu A mulţimea oamenilor de pe glob. Definim funcţia $f: A \to \mathbb{R}$ după legea „$f(x)$ = înălţimea lui x". Este f injectivă? Dar surjectivă?

Notăm cu A mulţimea oraşelor ţării noastre, iar cu B mulţimea judeţelor ţării noastre. Definim funcţia $f: A \to B$ după legea „$f(a)$ = judeţul pe teritoriul căruia se află a" şi funcţia $g: B \to A$ după legea „$g(b)$ = oraşul care este reşedinţa judeţului b".

i) Să se determine: f(Galaţi), f(Făgăraş), g(Teleorman) şi g(Mehedinţi).

ii) Să se arăte că f este surjectivă şi g este injectivă.

iii) Să se arate că $f \circ g = 1_B$ şi $g \circ f \neq 1_A$.

Fie mulţimea $A = \{0, 1\}$. Să se construiască toate funcţiile de la A la A şi să se precizeze care sunt injective, surjective sau bijective.

Folosindu-se diagrama asociată unei funcţii, să se determine numărul funcţiilor injective de la mulţimea $A = \{1, 2\}$ în mulţimea $B = \{3, 5, 7\}$. Există funcţii surjective de la A la B?

Fie $A = \{0, 1\}$ şi $B = \{2, 3, 4, 5\}$. Să se scrie toate funcţiile injective de la mulţimea A la mulţimea B şi toate funcţiile surjective de la mulţimea B în mulţimea A.

Fie A o mulţime finită şi $f: A \to A$ o funcţie. Să se arate că:

$$f \text{ bijectivă} \Leftrightarrow f \text{ injectivă} \Leftrightarrow f \text{ surjectivă}.$$

Considerăm funcţiile definite respectiv prin formulele următoare:

a) $f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}, f(n) = n + 5$;

b) $g: \mathbb{N} \to \mathbb{N}, g(n) = n^2 + 1$;

c) $h: \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}, h(x) = 3x + 1$;

d) $k: \mathbb{N} \to \mathbb{Z}, k(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{2} & \text{dacă } x \text{ este par} \\ -\dfrac{x+1}{2} & \text{dacă } x \text{ este impar} \end{cases}$;

e) $l: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, l(x) = x^3 - 2$;

f) $m: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, m(x) = \begin{cases} x^2 & \text{dacă } x \le 0 \\ -x & \text{dacă } x > 0 \end{cases}$.

Să se arate că: f, g, h sunt injective şi nu sunt surjective; k, l, m sunt funcţii bijective.

Fie funcţia $f: \mathbb{R} \to [0, +\infty), f(x) = x^2$. Să se arate că f este surjectivă dar nu este injectivă.

Considerăm funcţiile $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$. Să se arate că:

i) dacă f şi g sunt injective, atunci $g \circ f$ este injectivă.

ii) dacă f şi g sunt surjective, atunci $g \circ f$ este surjectivă.

Să se arate că funcţia de gradul al doilea nu este nici injectivă, nici surjectivă.

Fie $f: A \to B$ o funcţie. Să se arate că:

a) f este injectivă dacă şi numai dacă există funcţia $g: B \to A$ astfel încât $g \circ f = 1_A$;

b) f este surjectivă dacă şi numai dacă există funcţia $h: B \to A$ astfel încât $f \circ h = 1_B$.

Să se construiască de la mulţimea $\mathbb{Z}$ a numerelor întregi în ea însăşi o funcţie injectivă care să nu fie surjectivă şi o funcţie surjectivă care să nu fie injectivă.

Se consideră funcţia $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dată prin: $f(x) = \begin{cases} ax, & x < 1 \\ bx, & x \ge 1 \end{cases}$, a şi b fiind numere reale. Să se studieze monotonia funcţiei f, după valorile lui a şi b.

Considerăm funcţiile definite respectiv prin formulele:

i) $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}; f(x) = -x + 4$;

ii) $g : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}; g(x) = x + 1$;

iii) $h : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}; h(x) = x^2$;

iv) $k : \mathbb{Z} \to \mathbb{N}; k(x) = x^2$.

Să se arate că f, g sunt bijective. Cum sunt h şi k?

Să se determine funcţiile inverse pentru f şi g.

Fie mulţimile $A = \{0, 1, 2\}$ şi $B = \{a, b, c\}$. Să se determine toate funcţiile bijective de la A în B şi apoi să se scrie pentru fiecare inversa sa.

Considerăm funcţia $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, definită astfel:

$$f(n) = \begin{cases} n + 1, \text{ dacă } n \text{ este număr par.} \\ n - 1, \text{ dacă } n \text{ este număr impar.} \end{cases}$$

Arătaţi că f este funcţie bijectivă şi construiţi inversa sa.

Fie funcţia $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}, f(x) = \begin{cases} x + 3 \text{ dacă } x \text{ este par} \\ x - 3 \text{ dacă } x \text{ este impar} \end{cases}$.

Să se arate că f este bijectivă şi să se determine inversa sa f^{-1}.

Fie funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} 2x, \text{ dacă } x \geq 0, \\ 3x, \text{ dacă } x < 0. \end{cases}$

Să se arate că f este bijectivă şi să se determine inversa sa.

Fie funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} 2x + 1, & \text{dacă } x \leq 1, \\ x + 2, & \text{dacă } x > 1. \end{cases}$

Să se arate că f este bijectivă şi să se determine inversa sa.

Fie funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} x^2 \text{ dacă } x \leq 0 \\ -2x \text{ dacă } x > 0 \end{cases}$.

Să se arate că f este bijectivă şi să se determine inversa sa f^{-1}.

Fie funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} 2x^2 + 1 \text{ dacă } x \leq 0 \\ -x + 1 \text{ dacă } x > 0 \end{cases}$.

Să se arate că f este bijectivă şi să se determine inversa sa f^{-1}.

Fie funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} -x + 3, & \text{dacă } x \leq 2, \\ -2x + m, & \text{dacă } x > 2. \end{cases}$

Să se determine parametrul real m astfel încât funcţia să fie bijectivă şi apoi să se găsească inversa sa.

Se consideră funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dată prin: $f(x) = \begin{cases} ax^2, & x < 0 \\ bx, & x \geq 0 \end{cases}$, a şi b fiind numere reale. Să se determine a şi b astfel încât f să fie bijectivă şi în acest caz să se determine inversa sa.

Fie funcţiile $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $f(x) = |x|$ şi $g(x) = 2x$. Să se calculeze: $f + g$, $f \cdot g$, $f^2 = f \cdot f$, $f^3 = f \cdot f \cdot f$.

1.1. Puteri cu exponent natural nenul

Fie a un număr real şi n un număr natural mai mare sau egal cu 2. Se numeşte *puterea n a numărului a* produsul a n numere, fiecare număr fiind egal cu a. Acest număr *se notează cu* a^n. Deci:

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \; ... \; a}_{n \text{ ori}}.$$

În reprezentarea a^n, a se numeşte *baza* puterii, iar n *exponentul* puterii. Convenim să punem $a^1 = a$.

Exemple

1. $(-2)^3 = (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) = -8$;

2. $\left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{16} = 0{,}0625$.

1. ***Semnul puterii cu exponentul natural***

Puterea unui număr real pozitiv cu exponent natural nenul este pozitivă. Puterea unui număr real negativ cu exponent natural par este pozitivă, iar cu exponent natural impar este negativă.

Într-adevăr dacă $a > 0$, atunci a^n fiind produsul a n numere pozitive este pozitiv. Dacă $a < 0$, atunci din regula semnelor rezultă că a^{2n}, care este produsul unui număr par de numere negative, este pozitiv, iar a^{2m+1}, care este produsul unui număr impar de numere negative, este negativ.

De exemplu $(-2)^9$ are semnul (–) iar $(-2)^{12}$ are semnul (+).

2. ***Puterea produsului şi a câtului a două numere reale***

Fie a, b două numere reale şi n număr natural nenul. Atunci:

$$(ab)^n = a^n b^n$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n} \; (b \neq 0).$$

Într-adevăr: $(ab)^n = \underbrace{(ab) \cdot (ab) \cdot ... \cdot (ab)}_{n \text{ ori}} = \underbrace{(a \cdot a \cdot ... \cdot a)}_{n \text{ ori}} \cdot \underbrace{(b \cdot b \cdot ... \cdot b)}_{n \text{ ori}} = a^n b^n$

(am folosit asociativitatea şi comutativitatea înmulţirii a două numere reale).

De asemenea: $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b} \cdot ... \cdot \frac{a}{b} = \frac{a \cdot a \cdot ... \cdot a}{b \cdot b \cdot ... \cdot b} = \frac{a^n}{b^n}$.

Observaţie. În calcule, deseori, folosim egalităţile de mai sus sub forma:

$$a^n b^n = (ab)^n \text{ şi } \frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n.$$

De exemplu: $6^5 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^5 = \left(6 \cdot \frac{1}{4}\right)^5 = \left(\frac{3}{2}\right)^5 = \frac{3^5}{2^5} = \frac{243}{32}.$

3. *Înmulţirea puterilor care au aceeaşi bază*

Dacă a este un număr real şi m, n numere naturale nenule, atunci:

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}.$$

Într-adevăr $a^m \cdot a^n = \underbrace{(a \cdot a \cdot \ldots \cdot a)}_{m \text{ ori}} \cdot \underbrace{(a \cdot a \cdot \ldots \cdot a)}_{n \text{ ori}} = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{m+n \text{ ori}} = a^{m+n}$

De exemplu: $2^3 \cdot 2^4 = 2^7 = 128$; $(-2) \cdot (-2)^4 = (-2)^5 = -32$.

4. *Ridicarea unei puteri la altă putere*

Dacă a este un număr real şi m, n numere naturale nenule, atunci:

$$(a^m)^n = a^{mn}.$$

Într-adevăr $\left(a^m\right)^n = \underbrace{a^m \cdot a^m \cdot \ldots \cdot a^m}_{n \text{ ori}} = a^{\overbrace{m+m+\ldots+m}^{}_{n \text{ ori}}} = a^{mn}$. .

(Am folosit proprietatea 3.)

De exemplu: $\left(2^3\right)^2 = 2^{3\cdot 2} = 2^6 = 64$; $\left[\left(-\frac{1}{2}\right)^4\right]^2 = \left(-\frac{1}{2}\right)^8 = \frac{1}{256}.$

5. *Împărţirea a două puteri cu aceeaşi bază*

Dacă a este un număr real nenul şi m, n numere naturale nenule, astfel încât $m > n$, atunci:

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}.$$

Într-adevăr, folosind proprietatea 3, avem: $a^{m-n} \cdot a^n = a^{(m-n)+n} = a^m$, de unde rezultă că $a^{m-n} = \frac{a^m}{a^n}$.

De exemplu: $\frac{3^{10}}{3^8} = 3^{10-8} = 3^2 = 9$; $\frac{4^5}{4^3} = 4^{5-3} = 4^2 = 16.$

6. *Compararea puterilor*

1° dacă a şi b sunt numere reale pozitive astfel încât $a < b$ şi n număr natural nenul, atunci

$$a^n < b^n.$$

Această proprietate este o consecinţă imediată a unei proprietăţii a inegalităţilor între numere reale, cunoscută din clasa a IX-a.

Exemplu Care dintre numerele 2^{30} sau 3^{20} este mai mare?

Avem $2^{30} = 2^{3\cdot 10} = (2^3)^{10} = 8^{10}$; $3^{20} = 3^{2\cdot 10} = (3^2)^{10} = 9^{10}$.

Deoarece $8 < 9$, atunci $8^{10} < 9^{10}$, adică $2^{30} < 3^{20}$.

2° Fie a un număr real pozitiv şi m, n numere naturale nenule, astfel încât $m > n$.

i) Dacă $0 < a < 1$, atunci $a^m < a^n$;

ii) Dacă $a > 1$, atunci $a^m > a^n$.

Într-adevăr, avem $m = n + k$, cu k număr natural nenul. Deci $a^m = a^{n+k} = a^n \cdot a^k$.

Dacă $0 < a < 1$, atunci $0 < a^k < 1$. Prin urmare, $a^m = a^n \cdot a^k < a^n$.

Dacă $a > 1$, atunci $a^k > 1$. Prin urmare, $a^m = a^n \cdot a^k > a^n$.

De exemplu, $\left(\frac{1}{5}\right)^{60} < \left(\frac{1}{5}\right)^{30}$; $5^{60} > 5^{30}$.

1.2. Funcţia putere

Definiţie. Fie n un număr natural nenul. Definim funcţia

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = x^n.$$

Această funcţie se numeşte *funcţia putere de gradul n.*

Observaţii. 1. Funcţia putere este o funcţie numerică.

2. Pentru $n = 1$ se obţine funcţia de gradul întâi $f(x) = x$, iar pentru $n = 2$ se obţine funcţia de gradul al doilea $f(x) = x^2$.

Teorema 1

1° Dacă n este un număr par nenul, atunci funcţia $f(x) = x^n$ este strict descrescătoare pe intervalul $(-\infty, 0]$ şi strict crescătoare pe intervalul $[0, \infty)$.

2° Dacă n este un număr impar atunci funcţia $f(x) = x^n$ este strict crescătoare pe $\mathbb{R}$.

Demonstraţie. 1° Presupunem că n este par, adică $n = 2m$ şi fie $x_1, x_2 \in [0, +\infty)$ astfel încât $x_1 < x_2$. Folosind proprietatea 6 privind compararea puterilor, avem că $x_1^n < x_2^n$ unde n este număr natural nenul oarecare. În particular, $x_1^{2m} < x_2^{2m}$, adică $f(x_1) < f(x_2)$.

Rezultă că funcţia $f(x) = x^{2m}$ este strict crescătoare pe intervalul $[0, \infty)$.

Fie acum $x_1, x_2 \in (-\infty, 0]$ astfel încât $x_1 < x_2$. Cum $x_1 < x_2 \leqslant 0$, atunci $(-x_1) > (-x_2) \geqslant 0$ şi deci $(-x_1)^{2m} > (-x_2)^{2m}$, adică $x_1^{2m} > x_2^{2m}$. Prin urmare $f(x_1) > f(x_2)$, ceea ce ne arată că f este strict descrescătoare pe intervalul $(-\infty, 0]$.

2° Presupunem acum că n este impar, adică $n = 2m + 1$ şi fie $x_1 < x_2$. Dacă $0 \leqslant x_1 < x_2$, la fel ca mai sus avem $x_1^{2m+1} < x_2^{2m+1}$. Dacă $x_1 < x_2 \leqslant 0$, atunci $(-x_1) > (-x_2) \geqslant 0$ şi deci $(-x_1)^{2m+1} > (-x_2)^{2m+1}$, adică $-x_1^{2m+1} > -x_2^{2m+1}$. Prin urmare, $x_1^{2m+1} < x_2^{2m+1}$.

Dacă $x_1 < 0$ şi $x_2 \geqslant 0$, atunci x_1^{2m+1} este un număr negativ, iar $x_2^{2m+1} \geqslant 0$ şi deci în acest caz avem $x_1^{2m+1} < x_2^{2m+1}$. În concluzie, din $x_1 < x_2$ se obţine $x_1^{2m+1} < x_2^{2m+1}$, adică $f(x_1) < f(x_2)$, adică funcţia $f(x) = x^{2m+1}$ este strict crescătoare pe $\mathbb{R}$.

Teorema 2. Dacă n este un număr par, funcţia putere $f(x) = x^n$ este o funcţie pară. Dacă n este un număr impar, funcţia putere $f(x) = x^n$ este impară.

Demonstrație. Dacă $n = 2m$, atunci $f(-x) = (-x)^{2m} = x^{2m} = f(x)$ și deci funcția $f(x) = x^{2m}$ este pară. Dacă $n = 2m + 1$, atunci $f(-x) = (-x)^{2m+1} = -x^{2m+1} = -f(x)$ și deci funcția $f(x) = x^{2m+1}$ este impară.

Interpretare geometrică. Fie $f: A \to B$ o funcție numerică unde mulțimea A este simetrică. Am amintit în primul capitol că în clasa a IX-a s-a arătat: dacă f este o funcție pară, atunci $y'y$ este axă de simetrie pentru graficul funcției f, iar dacă f este o funcție impară, atunci originea axelor O este centru de simetrie al graficului funcției f.

Graficul funcției putere $f(x) = x^n$ pentru $n = 3, 4$

1. *Funcția* $f(x) = x^3$. Trasarea graficului funcție $f(x) = x^3$ se face prin „puncte". Mai exact, funcției $f(x) = x^3$ i se asociază următorul tabel de valori:

x	$-\infty$	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	$+\infty$
$f(x) = x^3.$		-64	-27	-8	-1	0	1	8	27	64	

Reprezentăm într-un sistem de axe xOy, punctele ale căror coordonate sunt valorile din tabel. Punctele obținute le unim printr-o linie continuă. În figura 1 este schițat graficul funcției $f(x) = x^3$.

Graficul acestei funcții se numește *parabolă cubică.*

Parabola cubică are următoarele proprietăți:

1) Trece prin originea axelor, care este un centru de simetrie (deoarece $f(x) = x^3$ este funcție impară);

2) Ramura din dreapta a graficului se găsește deasupra axei $x'x$, iar ramura din stânga se găsește sub axa $x'x$.

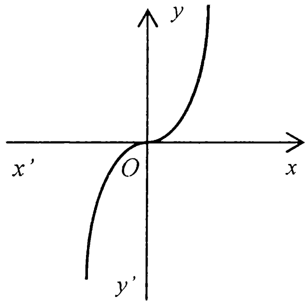


Fig. 1

Observație. Graficul funcției $f(x) = x^{2m+1}$ $(m \geqslant 1)$ are o comportare asemănătoare cu graficul funcției $f(x) = x^3$.

2. *Funcția* $f(x) = x^4$. Graficul acestei funcții se trasează tot prin „puncte". Pentru această funcție se ascociază următorul tabel de valori:

x	$-\infty$	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	$+\infty$
$f(x) = x^4.$		256	81	16	1	0	1	16	81	256	

Punctele ale căror coordonate sunt valorile din tabel le reprezentăm într-un sistem rectangular de axe xOy. Punctele obținute le unim printr-o linie continuă. În figura 2 este schițat graficul funcției $f(x) = x^4$.

Graficul acestei funcţii are următoarele proprietăţi:

1° Se găseşte deasupra axei $x'x$ şi trece prin originea axelor.

2° Axa $y'y$ este axă de simetrie pentru graficul funcţiei $f(x) = x^4$ (deoarece $f(x) = x^4$ este o funcţie pară).

Observaţie. Graficul funcţiei $f(x) = x^{2m}$ $(m \geqslant 1)$ are o comportare asemănătoare cu graficul funcţiei $f(x) = x^4$.

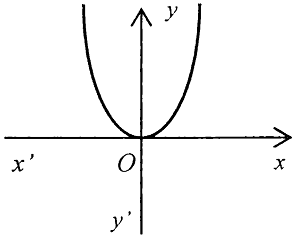


Fig. 2

1.3. Puteri cu exponent întreg

Am demonstrat că pentru $m > n$

$$a^m : a^n = a^{m-n} \ (a \neq 0).$$

Vom căuta să lărgim noţiunea de putere astfel încât $a^m : a^n = a^{m-n}$ $(a \neq 0)$ să aibă loc şi pentru cazul când $m \leqslant n$.

1) *Exponentul* 0. Dacă $a \neq 0$, prin definiţie vom pune $a^0 = 1$.

Dacă $m = n$, atunci $a^m : a^n = 1$ şi $a^{m-n} = a^0 = 1$. Rezultă că formula $a^m : a^n = a^{m-n}$ are loc şi pentru cazul $m = n$.

Observaţie. Expresia 0^0 nu are nici un sens.

2) *Exponentul negativ.* Dacă n este număr natural nenul şi a un număr real nenul, prin definiţie vom pune $a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$.

De exemplu, $2^{-3} = \dfrac{1}{2^3} = \dfrac{1}{8} = 0{,}125$; $3^{-1} = \dfrac{1}{3} = 0,(3)$.

Dacă m, n sunt numere naturale astfel încât $m < n$, atunci

$$\frac{a^m}{a^n} = \frac{a^m}{a^{m+(n-m)}} = \frac{a^m}{a^m \cdot a^{n-m}} = \frac{1}{a^{n-m}} = a^{-(n-m)} = a^{m-n}.$$

Rezultă că formula $a^m : a^n = a^{m-n}$ are loc şi pentru cazul $m < n$.

3) *Exponent întreg.* În urma definirii puterilor cu exponent 0 şi negativ puterea a^n cu a număr real şi n număr întreg este bine precizată exceptând cazul $a = 0$. Vom arăta că proprietăţile puterilor cu exponent natural se păstrează şi pentru exponent întreg:

1° $(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$; 3° $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$; 5° $a^m : a^n = a^{m-n}$;

2° $\left(\dfrac{a}{b}\right)^n = \dfrac{a^n}{b^n}$; 4° $(a^m)^n = a^{mn}$.

Să verificăm 1°. Pentru exponent $n > 0$ am demonstrat egalitatea 1°. Dacă $n = 0$, atunci $(a \cdot b)^0 = 1$ şi $a^0 \cdot b^0 = 1 \cdot 1 = 1$. Deci:

$(a \cdot b)^n = a^n \cdot a^n$, are loc şi pentru $n = 0$.

Presupunem $n < 0$. Atunci $(ab)^n = \dfrac{1}{(ab)^{-n}}$.

Cum $-n > 0$, atunci $\dfrac{1}{(ab)^{-n}} = \dfrac{1}{a^{-n} \cdot b^{-n}} = \dfrac{1}{a^{-n}} \cdot \dfrac{1}{b^{-n}} = a^n \cdot b^n$. Deci egalitatea $(ab)^n = a^n b^n$ are loc şi pentru $n < 0$.

În acelaşi fel se verifică egalitatea 2^0.

Să verificăm egalitatea

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n} \; (a \neq 0). \qquad (1)$$

Deoarece pentru $m > 0$ şi $n > 0$ egalitatea (1) este adevărată, rămâne de arătat pentru următoarele trei cazuri:

Cazul $m > 0$ şi $n < 0$. Atunci $a^m \cdot a^n = a^m \cdot \dfrac{1}{a^{-n}} = \dfrac{a^m}{a^{-n}}$.

Dar cum $-n > 0$, am văzut că $\dfrac{a^m}{a^{-n}} = a^{m-(-n)} = a^{m+n}$ şi deci $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$.

Cazul $m < 0$ şi $n < 0$. Avem $a^m \cdot a^n = \dfrac{1}{a^{-m}} \cdot \dfrac{1}{a^{-n}} = \dfrac{1}{a^{-m} \cdot a^{-n}}$.

Cum $-m > 0$ şi $-n > 0$, atunci $a^{-m} \cdot a^{-n} = a^{-(m+n)}$.

Deci $a^m \cdot a^n = \dfrac{1}{a^{-(m+n)}} = a^{m+n}$.

Cazul când unul dintre m sau n este zero. Presupunem că $n = 0$.

Atunci $a^m \cdot a^n = a^m \cdot a^0 = a^m \cdot 1 = a^m$ şi $a^{m+n} = a^{m+0} = a^m$.

Deci şi în acest caz avem $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$.

Din egalitatea 3^0 rezultă şi egalitatea $a^m : a^n = a^{m-n}$ $(a \neq 0)$.

Să verificăm egalitatea

$$(a^m)^n = a^{mn} \; (a \neq 0) \qquad (2)$$

Deoarece pentru $m > 0$ şi $n > 0$ egalitatea (2) este adevărată, rămâne de arătat în următoarele cazuri:

Cazul $m < 0$ şi $n > 0$. Avem $(a^m)^n = \left(\dfrac{1}{a^{-m}}\right)^n = \dfrac{1}{a^{(-m)n}}$.

Cum $-m > 0$, atunci $(a^{-m})^n = a^{-mn}$. Deoarece $-mn < 0$ atunci $a^{mn} = \dfrac{1}{a^{-mn}}$ şi deci $(a^m)^n = a^{mn}$.

Cazul $m > 0$ şi $n < 0$. Avem $(a^m)^n = \dfrac{1}{(a^m)^{-n}} = \dfrac{1}{a^{-mn}} = a^{mn}$. Deci $(a^m)^n = a^{mn}$.

Cazul $m < 0$ şi $n < 0$. Avem $(a^m)^n = \dfrac{1}{(a^m)^{-n}}$. Din primul caz obţinem că $(a^m)^{-n} = a^{-mn}$ şi cum $mn > 0$, atunci $\dfrac{1}{a^{-mn}} = \dfrac{1}{\dfrac{1}{a^{mn}}} = a^{mn}$. Deci $(a^m)^n = a^{mn}$.

Cazul când unul dintre m sau n este zero. Dacă $m = 0$, atunci $a^m = 1$ şi deci $(a^m)^n = 1^n = 1$. Dar cum $a^{mn} = a^0 = 1$, rezultă $(a^m)^n = a^{mn}$.

Dacă $n = 0$, atunci $(a^m)^n = (a^m)^0 = 1$ şi $a^{mn} = a^0 = 1$. Deci şi în acest caz avem $(a^m)^n = a^{mn}$.

Exemple

1. $3^{-6} \cdot 3^8 = 3^{-6+8} = 3^2 = 9$;

2. $(4^2)^{-2} = 4^{-4} = \dfrac{1}{4^4} = \dfrac{1}{256}$;

3. $\left[\left(\dfrac{1}{3}\right)^{-2}\right]^3 [(-1)^{-2}]^3 = (3^2)^3 = 3^6 = 729.$

1.4. Funcţia putere de exponent negativ

Vom studia funcţia: $f: \mathbb{R} - \{0\} \to \mathbb{R}, f(x) = x^{-n}, n \in \mathbb{N}^*$.

Vom distinge două cazuri: 1) $n = 2m$; 2) $n = 2m + 1$.

1) $f: \mathbb{R} - \{0\} \to \mathbb{R},\ f(x) = \dfrac{1}{x^{2m}}$.

La punctul 1.2. s-a arătat că dacă $0 < x_1 < x_2$, atunci $x_1^{2m} < x_2^{2m}$, de unde $\dfrac{1}{x_1^{2m}} > \dfrac{1}{x_2^{2m}}$ şi deci f este *strict descrescătoare pe intervalul* $(0, +\infty)$.

Dacă $x_1 < x_2 < 0$, atunci $x_1^{2m} > x_2^{2m}$ şi deci $\dfrac{1}{x_1^{2m}} < \dfrac{1}{x_2^{2m}}$, ceea ce ne arată că f *este strict crescătoare pe intervalul* $(-\infty, 0)$.

Cum $x^{2m} = (-x)^{2m}$, atunci $f(x) = f(-x)$ şi deci f este o funcţie pară.

2) $f: \mathbb{R} - \{0\} \to \mathbb{R},\ f(x) = \dfrac{1}{x^{2m+1}}$.

Dacă $0 < x_1 < x_2$, atunci $0 < x_1^{2m+1} < x_2^{2m+1}$, de unde $\dfrac{1}{x_1^{2m+1}} > \dfrac{1}{x_2^{2m+1}}$ şi deci f este *strict descrescătoare pe intervalul* $(0, +\infty)$.

Dacă $x_1 < x_2 < 0$, atunci $x_1^{2m+1} < x_2^{2m+1} < 0$ şi deci $\dfrac{1}{x_1^{2m+1}} > \dfrac{1}{x_2^{2m+1}}$, ceea ce ne arată că f *este strict descrescătoare şi pe intervalul* $(-\infty, 0)$.

Cum $x^{2m+1} = -(-x)^{2m+1}$, atunci $f(x) = -f(-x)$ şi deci f este o funcţie impară.

Observaţie. Deşi funcţia f este strict descrescătoare pe intervalele $(-\infty, 0)$ şi $(0, +\infty)$ ea nu este strict descrescătoare pe mulţimea $\mathbb{R} - \{0\}$. Într-adevăr, dacă $x_1 = -1$, $x_2 = 1$ atunci $x_1 < x_2$. Dar, $f(x_1) = f(-1) = \dfrac{1}{(-1)^{2m+1}} = -1$ şi $f(x_2) = f(1) = 1$ şi deci $f(x_1) < f(x_2)$.

Graficul funcţiei putere $f(x) = x^n$, pentru $n = -1$ şi $n = -2$.

Funcţia $f: \mathbb{R} - \{0\} \to \mathbb{R}, f(x) = x^{-1}$.

Trasarea graficului se face prin „puncte”. Pentru aceasta asociem următorul tabel de valori:

x	$-\infty$	-100	-10	-2	-1	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{10}$	$-\frac{1}{100}$	$\frac{1}{100}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{2}$	1	2	10	100	$+\infty$
$f(x) = x^{-1}$		$-\frac{1}{100}$	$-\frac{1}{10}$	$-\frac{1}{2}$	-1	-2	-10	-100	100	10	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{100}$	

În acest tabel se vede că pentru valori din ce în ce mai mari ale lui $|x|$, $f(x)$ se „apropie“ de zero, iar pentru valori din ce în ce mai mici ale lui $|x|$, $f(x)$ ia valori din ce în ce mai mari (în valoarea absolută). Graficul funcţiei $f(x) = x^{-1}$ este schiţat în figura 3. Acest grafic se numeşte *hiperbolă*. El este constiuit din două ramuri simetrice faţă de originea axelor (deoarece funcţia $f(x) = x^{-1}$ este o funcţie impară).

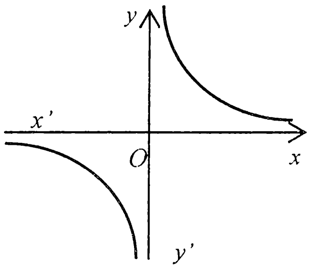


Fig. 3

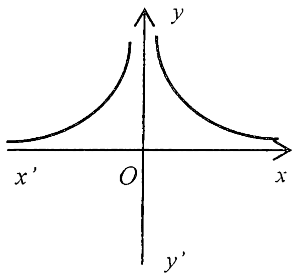


Fig. 4

Funcţia $f: \mathbb{R} - \{0\} \to \mathbb{R}, f(x) = x^{-2}$.

Pentru trasarea graficului, acestei funcţii îi asociem următorul tabel de valori:

x	$-\infty$	-10	-2	-1	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{10}$	$-\frac{1}{100}$	$\frac{1}{100}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{2}$	1	2	10	$+\infty$
$f(x) = x^{-2}$		$\frac{1}{100}$	$\frac{1}{4}$	1	4	100	$10\,000$	$10\,000$	100	4	1	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{100}$	

Din acest tabel se vede că pentru valori ale lui x din ce în ce mai apropiate de 0 (pozitive sau negative) funcţia f ia valori din ce în ce mai mari. Pentru valori ale lui $|x|$ din ce în ce mai mari, funcţia f ia valori din ce în ce mai mici.

Graficul funcţiei $f(x) = x^{-2}$ este schiţat în figura 4.

Acest grafic este constituit din două ramuri simetrice faţă de axa $y'y$ (deoarece funcţia $f(x) = x^{-2}$ este pară) situate deasupra axei $x'x$.

Să se calculeze:

a) $2^2 \cdot 4^2 \cdot 8^2 \cdot \left(\frac{1}{16}\right)^2$; b) $5^3 \cdot 15^2 \cdot 25^3 \cdot \left(\frac{1}{125}\right)^3$; c) $\left[\left(-\frac{1}{3}\right)^5\right]^2$;

d) $\frac{(-5)^{100}}{(-3)^{103}}$; e) $\left(-\frac{10}{17}\right)^5 \cdot \left(-\frac{51}{2}\right)^5 \cdot \left(-\frac{1}{15}\right)^5$; f) $\left[6-4\left(\frac{2}{3}\right)^0\right]^{-2}$

Să se efectueze:

a) $(-2x)^6 - (-8x^3)^2 - [-(2x)^2]^3 - [2 \cdot (-x)^3]^2$;

b) $(-2x)^{10} - (-13x^5)^2 - [-(2x)^2]^5 - [2 \cdot (-x)^5]^2$.

În raport cu valorile lui m să se determine semnul expresiilor:

a) $(1 - m)^{13}$; b) $(2 - 3m)^{125}$; c) $(4 - 2m)^{102}$.

Să se calculeze:

a) $(x^5y^3)^2 : (x^3y)^3$, $(x, y \neq 0)$; b) $[a^3 + b^3 + 3ab\,(a + b)]^4 : (a^2 + b^2 + 2ab)^5$, $(a + b \neq 0)$;

c) $(10^n - 4^n) : (5^n - 2^n)$.

Să se arate că: $a^{2n+1} + b^{2n+1} = (a+b)(a^{2n} - a^{2n-1}b + a^{2n-2}b^2 + \ldots - ab^{2n-1} + b^{2n})$

Să se arate că: $(a + b)(a^2 + b^2)(a^4 + b^4)(a^8 + b^8)(a^{16} + b^{16}) = \frac{a^{32} - b^{32}}{a - b}$ $(a \neq b)$.

Să se descompună în produs de doi factori:

a) $x^{2m} + x^{m+n} + x^{m-n} + 1\,(m > n)$; b) $x^m(x^n - 1) - x^n(x^m - 1)$.

Care dintre următoarele numere este mai mare:

a) 4^2 sau 2^6; b) 27^3 sau 9^6; c) 125^2 sau 25^3; d) 4^{300} sau 3^{400};

e) $-\frac{1}{8}$ sau $\left(-\frac{1}{32}\right)^3$; f) $\left(\frac{1}{16}\right)^{100}$ sau $\left(\frac{1}{2}\right)^{500}$; g) 5^{-63} sau 6^{-63}; h) $\left(\frac{1}{5}\right)^{63}$ sau 5^{-63}?

Să se reprezinte grafic funcţiile:

a) $f_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f_1(x) = 2x^3$; b) $f_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f_2(x) = x^3 - 1$;

c) $f_3 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f_3(x) = (x - 1)^3$; d) $f_4 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f_4(x) = (x + 2)^4$;

e) $f_5 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f_5(x) = |x^3|$; f) $f_6 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f_6(x) = |(x - 1)^3|$.

Să se arate că funcţia putere $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = x^{2m}$, $m \in \mathbb{N}$, nu este nici injectivă, nici surjectivă.

Să se scrie, folosind exponentul negativ:

i) $\frac{1}{a^3b^4}$; $\frac{1}{(a+b)^3(a^2-b^2)^2}$; $\frac{3}{a^5b^6c^2}$; $(a, b, c \neq 0; |a| \neq |b|)$;

ii) 0, 0002;

iii) 0,000003; 0,00015.

Să se efectueze:

a) $(a^2 + 1)(a^4 - a^2 + 1)$; $(a \neq 0)$;

b) $(a^2 + 1)^2 - (a^2 - 1)^2$, $(a \neq 0)$;

c) $a(a + b)^{-1} + b(a + b)^{-1}$, $(a + b \neq 0)$.

Să se calculeze:

a) $\left\{x+\left[1+\left(\frac{3-x}{x+1}\right)^{-1}\right]^{-1}\right\}^{-1}$, pentru $x=-\frac{1}{3}$;

b) $\dfrac{\frac{1}{2}-x^{-1}}{4-\left(\frac{1}{x}\right)^{-2}} : \left[\dfrac{1}{2^{-2}(2+x)}-2x^{-1}-1\right]$, pentru $x=-\frac{1}{2}$;

c) $\dfrac{[1{,}5(x-1)]^{-1}}{[3(x-y)]^{-2}} : \left[1+x^{-1}-2y^{-1}+\dfrac{(1-y^{-1})^{2}}{x^{-1}-1}\right]$, pentru $x=-4$, $y=-\frac{1}{2}$.

Să se simplifice expresiile:

a) $\dfrac{x^{-1}+(y+z)^{-1}}{x^{-1}-(y+z)^{-1}}\cdot\left[1+\left(\dfrac{2yz}{y^{2}+z^{2}-x^{2}}\right)^{-1}\right]$;

b) $\dfrac{x^{-2}y^{-1}+x^{-1}y^{-2}}{x^{-2}-y^{-2}}+x^{3}(x^{2}-2xy+y^{2})^{-2}$.

Să se reprezinte grafic funcţiile:

a) a) $f_1 : \mathbb{R}-\{0\}\to\mathbb{R}, f_1(x)=x^{-3}+1$; b) $f_2 : \mathbb{R}-\{0\}\to\mathbb{R}, f_2(x)=x^{-2}-1$;

c) $f_3 : \mathbb{R}-\{-1\}\to\mathbb{R}, f_3(x)=\dfrac{1}{x+1}$ d) $f_4 : \mathbb{R}-\{1\}\to\mathbb{R}, f_4(x)=\dfrac{1}{(x-1)^{2}}$;

Fie $n\geqslant 2$ un număr natural, iar a un număr real. Să considerăm ecuaţia

$$x^{n}-a=0. \qquad (1)$$

În continuare ne punem problema existenţei şi a numărului rădăcinilor (soluţiilor) reale ale acestei ecuaţii. O *rădăcină reală* a ecuaţiei (1) este un număr real α, astfel încât $\alpha^{n}-a=0$.

2.1. Radicalul unui număr pozitiv

Fie ca mai sus $n\geqslant 2$ un *număr natural*, $a>0$ un *număr real pozitiv* şi ecuaţia $x^{n}-a=0$. Atunci avem

T e o r e m a 3. Dacă $n\geqslant 2$ este un număr natural şi $a>0$ un număr real pozitiv atunci ecuaţia

$$x^{n}-a=0. \qquad (2)$$

are o rădăcină reală pozitivă şi numai una.

Demonstraţia riguroasă a faptului că există o rădăcină pozitivă a ecuaţiei (2) depăşeşte programa clasei a X-a. Ea necesită noţiunea de continuitate şi se va face la Analiză matematicvă în clasa a XI-a. Vom indica totuşi mai jos pe un exemplu cum poate fi găsită o valoare aproximativă a rădăcinii pozitive a unei astfel de ecuaţii.

Să demonstrăm acum unicitatea. Într-adevăr, să presupunem prin absurd, că ecuaţia (2) ar avea mai multe rădăcini pozitive diferite. Fie atunci x_1 şi x_2, $x_1 \neq x_2$ două astfel de rădăcini, adică

$$x_1^n = x_2^n = a. \tag{3}$$

Cum $x_1 \neq x_2$, atunci unul dintre aceste numere este mai mic decât celălalt. Fie, de exemplu, $x_1 < x_2$. Atunci din proprietăţile puterilor rezultă $x_1^n < x_2^n$, ceea ce contrazice relaţia (3). Această contradicţie arată că există o singură rădăcină pozitivă a ecuaţiei (2).

Cu alte cuvinte, teorema precedentă spune că *pentru orice număr real pozitiv $a > 0$* şi *orice număr natural $n \geqslant 2$, există un unic număr real pozitiv cu proprietatea că puterea a n-a a sa să fie a.*

Atunci putem da următoarea definiţie:

Definiţie. Dacă $a > 0$ este un număr real pozitiv şi $n \geqslant 2$ un număr natural, se numeşte radical de ordin n din a, numărul pozitiv a cărui putere a n-a este a.

Conform teoremei precedente există un astfel de număr şi este unic.

Notaţie. Vom nota radicalul de ordin n din a prin $\sqrt[n]{a}$. Pentru $\sqrt[2]{a}$, de obicei, se omite 2 şi se scrie, simplu, $\sqrt{a}$.

Aşadar, $\sqrt[n]{a}$ este un număr care verifică relaţiile:

$$\sqrt[n]{a} > 0, (\sqrt[n]{a})^n = a \ (a > 0).$$

Exemple

1. $\sqrt{9} = 3$; $\sqrt[3]{125} = 5$; $\sqrt[4]{16} = 2$; $\sqrt[5]{32} = 2$; $\sqrt[4]{81} = 3$.

2. Să arătăm, acum, cum poate fi găsită o valoare aproximativă a numărului $\sqrt[3]{2}$.

Deoarece $1 = 1^3 < 2 < 2^3 = 8$, rezultă că $1 < \sqrt[3]{2} < 2$ şi deci 1, respectiv 2 sunt valorile aproximative prin lipsă, respectiv prin adaos, ale lui $\sqrt[3]{2}$, cu o eroare mai mică decât 1. Ca să găsim valorile aproximative cu o eroare mai mică decât 0,1 ale lui $\sqrt[3]{2}$, procedăm în modul următor. Scriem şirul de numere

$$1{,}0;\ 1{,}1;\ 1{,}2;\ 1{,}3;\ 1{,}4;\ 1{,}5;\ 1{,}6;\ 1{,}7;\ 1{,}8;\ 1{,}9;\ 2{,}0.$$

Căutăm în acest şir două numere consecutive, astfel încât cubul primului dintre ele să fie mai mic decât 2, iar cubul celui de-al doilea să fie mai mare decât 2.

Pentru aceasta să rădicăm la cub numărul din mijloc.

Obţinem $1{,}5^3 = 3{,}375$, care este mai mare decât 2. Deoarece toate numerele de la dreapta lui 1,5 prin ridicare la cub dau numere mai mari decât 2, perechea de numere căutată va fi printre numerele

$$1{,}1;\ 1{,}2;\ 1{,}3;\ 1{,}4.$$

Ridicăm la cub 1,2 şi obţinem 1,728 care este mai mic decât 2, şi deci cubul lui 1,1 va fi şi mai mic. Calculăm atunci cubul lui 1,3 şi obţinem $(1{,}3)^3 = 2{,}197$ care este mai mare decât 2. Deci $1{,}2 < \sqrt{2} < 1{,}3$. Aşadar 1,2 respectiv 1,3 vor fi valorile aproximative prin lipsă, respectiv prin adaos ale lui $\sqrt[3]{2}$, cu o eroare mai mică decât 0,1.

Dacă vrem să găsim valorile aproximative cu o eroare mai mică decât 0,01 ale lui $\sqrt[3]{2}$, procedăm ca mai înainte pentru şirul de numere următor:

1,21; 1,22; 1,23; 1,24;...; 1,29.

Deoarece $(1,25)^3 = 1,953125$ este mai mic decât 2, o să luăm în considerare numai numerele:

1,26; 1,27; 1,28; 1,29.

Cum $(1,26)^3 = 2,00376$ este mai mare decât 2, avem $1,25 < \sqrt[3]{2} < 1,26$. Aşadar 1,25 respectiv 1,26 vor fi valorile aproximative prin lipsă, respectiv prin adaos, ale lui $\sqrt[3]{2}$, cu o eroare mai mică decât 0,01.

Continuând procedeul putem găsi valori aproximative ale lui $\sqrt[3]{2}$, cu o eroare oricât de mică dorim.

În general, ecuaţia $x^n - a = 0$ $(a > 0)$ poate să aibă şi alte rădăcini (care evident trebuie să fie negative). De exemplu, ecuaţia $x^2 - 4 = 0$ are rădăcinile $x_1 = -2 < 0$ şi $x_2 = 2 > 0$. În acest sens avem în general:

1° Dacă $n = 2k + 1$, atunci ecuaţia $x^{2k+1} - a = 0$ $(a > 0)$ nu are rădăcini negative.

Această afirmaţie rezultă uşor observând că oricare ar fi $\alpha < 0$ avem $\alpha^{2k+1} < 0$ şi deci $\alpha^{2k+1} \neq a$ $(a > 0)$.

2° Dacă $n = 2k$ atunci ecuaţia $x^{2k} - a = 0$ $(a > 0)$ are o singură rădăcină negativă şi anume $-\sqrt[2k]{a}$.

Într-adevăr, avem $(-\sqrt[2k]{a})^{2k} = \left(\sqrt[2k]{a}\right)^{2k} = a$ şi deci $-\sqrt[2k]{a}$ este o rădăcină a ecuaţiei $x^{2k} - a = 0$. Un raţionament analog celui folosit la demonstrarea unicităţii în teorema precedentă, ne arată că $-\sqrt[2k]{a}$ este unica rădăcină negativă.

Prin definiţie, avem $\sqrt[n]{0} = 0$ ($n \geqslant 2$, număr natural).

Evident, $\sqrt[n]{0} = 0$ este unica rădăcină a ecuaţiei $x^n = 0$.

Observaţii. 1. În clasele anterioare s-a definit radicalul de ordin doi (rădăcina pătrată) dintr-un număr pozitiv. De asemenea, s-a studiat proprietăţile acestuia şi operaţiile cu radicali de ordinul doi.

2. Având în vedere definiţia radicalului, mai precis că radicalul unui număr pozitiv (sau nul) este pozitiv (sau nul) este folositor de remarcat următoarea formulă importantă:

$$\sqrt{x^2} = \begin{cases} x, & \text{dacă } x > 0, \\ 0, & \text{dacă } x = 0, \\ -x, & \text{dacă } x < 0. \end{cases}$$

Cu alte cuvinte, $\sqrt{x^2} = |x|$.

Exemple

1. $\sqrt{(2-a)^2} = |2-a| = \begin{cases} 2-a, & \text{dacă } a < 2, \\ 0, & \text{dacă } a = 2, \\ a-2, & \text{dacă } a > 2. \end{cases}$

2. $\sqrt{(x^2+1)^2} = |x^2+1| = x^2+1$, deoarece pentru orice x, avem $x^2 + 1 > 0$.

2.2. Funcţia radical

Definind noţiunea de radical de ordin *n,* fiecărui număr pozitiv (sau nul) a i s-a asociat un număr bine determinat, pozitiv (sau nul) $\sqrt[n]{a}$.

Definiţie. Fie $n \geqslant 2$ un număr natural. Funcţia $f: [0, +\infty) \to [0, +\infty), f(x) = \sqrt[n]{x}$ se numeşte *funcţie radical.*

Iată câteva proprietăţi ale funcţiei radical:

1° Funcţia radical este *strict crescătoare.*

Într-adevăr fie $x_1, x_2 \in [0, +\infty)$, astfel încât $x_1 < x_2$. Deoarece $x_1 = \left(\sqrt[n]{x_1}\right)^n$ şi $x_2 = \left(\sqrt[n]{x_2}\right)^n$, avem $\left(\sqrt[n]{x_1}\right)^n < \left(\sqrt[n]{x_2}\right)^n$. Dar funcţia putere fiind strict crescătoare pe $[0, +\infty)$ rezultă că $\left(\sqrt[n]{x_1}\right)^n < \left(\sqrt[n]{x_2}\right)^n$ adică $f(x_1) < f(x_2)$.

2° Funcţia radical este bijectivă.

Deoarece funcţia radical este strict crescătoare (proprietatea 1°) rezultă că ea este injectivă (vezi teorema 1 din cap. 1). Fie acum $y \in [0, +\infty)$. Deoarece $f(y^n) = \sqrt[n]{y^n} = y$, rezultă că f este surjectivă.

Observaţii. 1. Deoarece funcţia radical

$$f: [0, +\infty) \to [0, +\infty), f(x) = \sqrt[n]{y^n},$$

este bijectivă, rezultă (vezi teorema 3 din cap. I) că ea este inversabilă. Din relaţiile $(\sqrt[n]{x})^n = x$ şi $\sqrt[n]{y^n} = y$, $(x \geqslant 0, y \geqslant 0)$ rezultă că inversa sa nu este alta decât funcţia:

$$g: [0, +\infty) \to [0, +\infty); g(x) = x^n.$$

(a nu se confunda funcţia g cu funcţia putere, ele neavând acelaşi domeniu de definiţie.)

Într-adevăr, $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(\sqrt[n]{x}) = \sqrt[n]{x^n} = x, x \in [0, +\infty)$.

$(f \circ g)(y) = f(g(y)) = f(y^n) = \sqrt[n]{y^n} = y,\ y \in [0, +\infty)$.

2. Din punctul **1.** rezultă că g este inversabilă şi, conform teoremei 3 din capitolul 1, este deci bijectivă.

***Graficul funcţiei radical* $f(x) = \sqrt[n]{x}$ *pentru* $n = 2, 3$.**

1) Funcţia $f\colon [0, +\infty) \to [0, +\infty)$, $f(x) = \sqrt{x}$. Din proprietăţile 1° şi 2° de mai sus rezultă, în particular, că funcţia f este strict crescătoare şi bijectivă. Graficul acestei funcţii (construit prin „puncte“) este reprezentat în figura 5.

2) Funcţia $f\colon [0, +\infty) \to [0, +\infty)$, $f(x) = \sqrt[3]{x}$. De asemenea, această funcţie este strict crescătoare şi inversabilă. Graficul său (construit prin „puncte”) este reprezentat în figura 6.

Se observă din aceste figuri că graficele celor două funcţii radical considerate sunt asemănătoare.

În cele două figuri am reprezentat prin linie întreruptă graficul funcţiei inverse. Cele două grafice (al funcţiei f şi al inversei sale g) sunt simetrice faţă de prima bisectoare (vezi teorema 4, cap. 1).

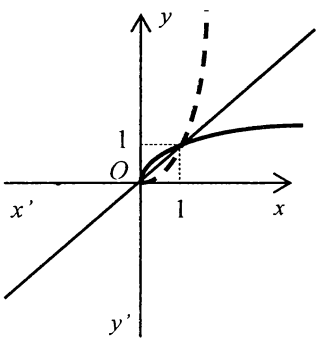


Fig. 5

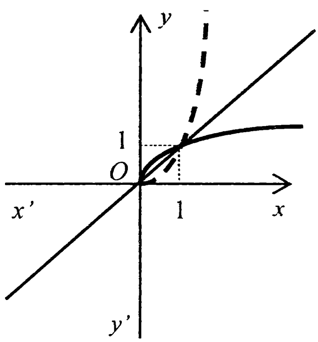


Fig. 6

2.3. Radicalul (de ordin impar) al unui număr negativ

Fie $n \geqslant 2$ un *număr natural*, $a < 0$ un *număr real negativ şi ecuaţia* $x^n - a = 0$. Atunci avem:

T e o r e m a 4. Fie $n \geqslant 2$ un număr natural, $a < 0$ un număr real negativ şi ecuaţia $x^n - a = 0$ (1)

Atunci:

1° Dacă $n = 2k$ ($k \geqslant 1$), ecuaţia (1) nu are rădăcini reale.

2° Dacă $n = 2k + 1$ ($k \geqslant 1$), ecuaţia (1) are o rădăcină reală negativă şi numai una.

Demonstraţie. Afirmaţia 1° rezultă uşor observând că oricare ar fi $\alpha \in \mathbb{R}$ avem $\alpha^{2k} = (\alpha^2)^k \geqslant 0$ şi deci $\alpha^{2k} \neq a$ ($a < 0$), adică $\alpha^{2k} - a \neq 0$.

Să demonstrăm acum 2°. Fie pentru aceasta $y = -x$. Cum $y^{2k+1} = (-x)^{2k+1} = -x^{2k+1}$, ecuaţia devine $-y^{2k+1} - a = 0$ sau încă $y^{2k+1} - (-a) = 0$.

Cum $a < 0$ rezultă $-a > 0$ şi după teorema din paragraful 2, rezultă că ecuaţia în y are o rădăcină reală pozitivă unică. Aceasta este tocmai $\sqrt[n]{-a}$ ($-a > 0$). Dar, atunci este clar că ecuaţia în x are o rădăcină negativă unică şi anume $x = -\sqrt[n]{-a}$ ($-a > 0$).

Având în vedere afirmaţia 2° a teoremei precedente putem da următoarea definiţie:

Definiţie. Dacă $a < 0$ este un număr real negativ şi $n \geqslant 3$ un număr natural impar, se numeşte radical de ordin n din a, numărul negativ a cărui putere a n-a este a.

Un astfel de număr există şi este unic. Îl notăm prin $\sqrt[n]{a}$. Aşadar $\sqrt[n]{a}$ ($a < 0$, $n \geqslant 3$, impar) este un număr care verifică relaţiile: $\sqrt[n]{a} < 0$, $(\sqrt[n]{a})^n = a$.

Din consideraţiile anterioare rezultă:

Dacă $a < 0$, $n = 2k + 1$, atunci $\sqrt[n]{a} = -\sqrt[n]{-a}$.

Exemple

1. Ecuaţiile $x^4 + 81 = 0$ şi $x^{100} + 125 = 0$ nu au rădăcini reale.

2. Ecuaţiile $x^5 + 32 = 0$ şi $x^3 + 125 = 0$ au câte o rădăcină reală negativă şi anume:

$$\sqrt[5]{-32} = -2, \text{ respectiv } \sqrt[3]{-125} = -5.$$

Observaţie. Pentru un număr natural impar, $n = 2k + 1$, am definit radicalul de ordin n din orice număr real (pozitiv, negativ sau zero). Astfel se obţine o funcţie

$$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \sqrt[n]{x}$$

Această funcţie este *inversabilă*, inversa sa fiind funcţia putere $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, g(x) = x^n$.

2.4. Proprietăţile radicalilor

În cele ce urmează vom vedea că radicalii au o serie de proprietăţi asemănătoare puterilor.

Amintim, la început, că dacă x şi y sunt numere reale, iar n un număr natural nenul, atunci $x^n y^n = (xy)^n$.

De asemenea, dacă $x, y \geqslant 0$ sunt numere reale, iar n este un număr natural nenul, atunci din $x^n = y^n$ rezultă $x = y$.

În cele ce urmează m, n, k vor fi numere naturale nenule, iar atunci când ele indică ordinul unui radical, vor fi mai mari sau egale decât 2.

1. Oricare ar fi numerele reale $a, b \geqslant 0$, atunci:

$$\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}. \qquad (1)$$

Într-adevăr, fie $x = \sqrt[n]{ab}$ şi $y = \sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b}$. Atunci $x \geqslant 0, y \geqslant 0$ şi $x^n = \left(\sqrt[n]{ab}\right)^n = ab$, $y^n = \left(\sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b}\right)^n = \left(\sqrt[n]{a}\right)^n\left(\sqrt[n]{b}\right)^n = ab$. Deci $x^n = y^n$, de unde $x = y$, ceea ce trebuia demonstrat.

Cerinţa $a \geqslant 0$ şi $b \geqslant 0$ este esenţială numai pentru n par.

Dacă n este impar, formula (1) este valabilă pentru orice numere reale a şi b (inclusiv negative).

Exemple

$$\sqrt{25 \cdot 49} = \sqrt{25}\sqrt{49} = 5 \cdot 7 = 35;$$
$$\sqrt[3]{-125 \cdot 8} = \sqrt[3]{-125}\sqrt[3]{8} = -5 \cdot 2 = -10.$$

Remarcăm că formula (1) rămâne adevărată pentru orice număr finit de numere $a_1, a_2, \ldots, a_k \geqslant 0$ ($k \geqslant 2$), adică

$$\sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_k} = \sqrt[n]{a_1}\sqrt[n]{a_2}\ldots\sqrt[n]{a_k}. \tag{2}$$

2. Oricare ar fi numerele reale $a \geqslant 0$, $b > 0$, atunci

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}. \tag{3}$$

Într-adevăr, fie $x = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$, $y = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$. Atunci $x \geqslant 0$ şi $y \geqslant 0$ şi $x^n =$ $= \left(\sqrt[n]{\frac{a}{b}}\right)^n = \frac{a}{b}$ şi $y^n = \left(\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}\right)^n = \frac{\left(\sqrt[n]{a}\right)^n}{\left(\sqrt[n]{b}\right)^n} = \frac{a}{b}$. Deci $x^n = y^n$, de unde $x = y$ ceea ce trebuia demonstrat.

Cerinţa $a \geqslant 0$ şi $b > 0$ este esenţială numai pentru n număr par.

Dacă n este impar formula (3) este valabilă pentru orice număr real a şi orice număr real $b \neq 0$.

Exemple $\sqrt{\frac{36}{49}} = \frac{\sqrt{36}}{\sqrt{49}} = \frac{6}{7}$; $\sqrt[3]{\frac{-64}{27}} = -\sqrt[3]{\frac{64}{27}} = -\frac{\sqrt[3]{64}}{\sqrt[3]{27}} = -\frac{4}{3}$.

3. Oricare ar fi numărul real $a \geqslant 0$, atunci

$$\sqrt[n]{a^{mn}} = a^m. \tag{4}$$

Într-adevăr,

$$\sqrt[n]{a^{nm}} = \sqrt[n]{(a^n)^m} = \underbrace{\sqrt[n]{a^n}\cdot\sqrt[n]{a^n}\cdot\ldots\cdot\sqrt[n]{a^n}}_{m\text{ ori}} = \underbrace{a\cdot a\cdot\ldots\cdot a}_{m\text{ ori}} = a^m.$$

Exemple $\sqrt[3]{4^6} = \sqrt[3]{4^{3\cdot 2}} = 4^2 = 16$; $\sqrt[4]{2^{12}} = \sqrt[4]{2^{4\cdot 3}} = 2^3 = 8$.

4. Oricare ar fi numărul real $a \geqslant 0$, atunci:

$$\left(\sqrt[n]{a}\right)^m = \sqrt[n]{a^m} \tag{5}$$

Într-adevăr,

$$\left(\sqrt[n]{a}\right)^m = \underbrace{\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{a}\cdot\ldots\cdot\sqrt[n]{a}}_{m\text{ ori}} = \sqrt[n]{\underbrace{a\cdot a\cdot\ldots\cdot a}_{m\text{ ori}}} = \sqrt[n]{a^m}.$$

Dacă n este impar, formula (5) este valabilă şi pentru $a < 0$.

Exemple $\left(\sqrt[4]{3}\right)^3 = \sqrt[4]{3^3} = \sqrt[4]{27}$; $\left(\sqrt[6]{16}\right)^3 = \sqrt[6]{2^{12}} = 2^2 = 4$;

$$(\sqrt[3]{-2})^5 = \sqrt[3]{(-2)^5} = \sqrt[3]{-32}.$$

5. Oricare ar fi numărul $a \geqslant 0$, atunci:

$$\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[nk]{a^{mk}}. \tag{6}$$

Într-adevăr, fie $x = \sqrt[nk]{a^{mk}}$ şi $y = \sqrt[n]{a^m}$. Atunci $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$ şi $x^n =$ $= \left(\sqrt[nk]{a^{mk}}\right)^n = \sqrt[nk]{a^{(nk)m}} = a^m$ şi $y^n = \left(\sqrt[n]{a^m}\right)^n = a^m$. Deci $x^n = y^n$, de unde $x = y$, ceea ce trebuia demonstrat.

Exemple $\sqrt[4]{5} = \sqrt[12]{5^3}$; $\sqrt[25]{a^{10}} = \sqrt[5]{a^2}$.

6. Oricare ar fi numărul real $a \geqslant 0$, atunci:

$$\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[nm]{a}.$$

Într-adevăr, fie $x = \sqrt[n]{\sqrt[m]{a}}$ şi $y = \sqrt[nm]{a}$. Atunci $x \geqslant 0$ şi $y \geqslant 0$. După proprietăţile 4 şi 5 avem $y^n = (\sqrt[nm]{a})^n = \sqrt[nm]{a^n} = \sqrt[m]{a}$. Cum $x^n = \sqrt[m]{a}$, după definiţia radicalului de ordin n rezultă că $y = \sqrt[n]{\sqrt[m]{a}}$.

Deci $y = x$, ceea ce trebuia demonstrat.

Exemple $\sqrt[3]{\sqrt[4]{2}} = \sqrt[12]{2}; \sqrt[3]{\sqrt[5]{7}} = \sqrt[15]{7}$.

2.5. Operaţii cu radicali

1. *Scoaterea unui factor de sub semnul radical şi introducerea unui factor sub semnul radical.*

Uneori numărul de sub semnul radical se descompune în factori, caz în care radicalul este uşor de calculat. În aceste cazuri, expresia radicalului devine mai simplă (se simplifică), dacă scoatem aceşti factori de sub semnul radical. În efectuarea unei astfel de operaţii, ne bazăm pe proprietăţile 1 şi 3 ale radicalilor.

De exemplu: $\sqrt{12} = \sqrt{4 \cdot 3} = \sqrt{4}\sqrt{3} = 2\sqrt{3}$;

$\sqrt[4]{1250} = \sqrt[4]{625 \cdot 2} = \sqrt[4]{5^4 \cdot 2} = \sqrt[4]{5^4}\sqrt[4]{2} = 5\sqrt[4]{2}$;

$\sqrt[4]{2a^{12}} = |a^3|\sqrt[4]{2}$.

Uneori este folositor să introducem factori sub semnul radical. Pentru efectuarea unui astfel de operaţii ne bazăm pe aceleaşi proprietăţi menţionate mai sus.

De exemplu: $\sqrt[3]{16\sqrt{2}} = \sqrt[3]{\sqrt{16^2 \cdot 2}} = \sqrt[3]{\sqrt{2^8 \cdot 2}} = \sqrt[3]{\sqrt{2^9}} = \sqrt[6]{2^9} = \sqrt{2^3} = 2\sqrt{2}$.

2. ***Înmulţirea radicalilor.*** Proprietatea 1 a radicalilor ne dă legea de înmulţire a radicalilor de acelaşi ordin:

$$\sqrt[n]{a_1} \cdot \sqrt[n]{a_2} \cdot \ldots \cdot \sqrt[n]{a_k} = \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_k}. \quad (1)$$

Ca să înmulţim radicali de ordine diferite, este necesar să-i aducem la acelaşi ordin şi, apoi, să-i înmulţim după formula (1). Fie, de exemplu, $\sqrt[n]{a}$ şi $\sqrt[m]{b}$. Folosind proprietatea 5 a radicalilor avem:

$$\sqrt[n]{a} = \sqrt[nm]{a^m}; \sqrt[m]{b} = \sqrt[nm]{b^n}.$$

Atunci $\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[m]{b} = \sqrt[nm]{a^m} \cdot \sqrt[nm]{b^n} = \sqrt[nm]{a^m \cdot b^n}$.

De exemplu: $\sqrt{3}\sqrt[3]{9} = \sqrt[6]{3^3}\sqrt[6]{9^2} = \sqrt[6]{3^3 \cdot 9^2} = \sqrt[6]{3^3 \cdot 3^4} = \sqrt[6]{3^7} = 3\sqrt[6]{3}$.

Observăm că se poate lua ca ordin comun al radicalilor $\sqrt[n]{a}$ şi $\sqrt[m]{b}$, tocmai cel mai mic multiplu comun al numerelor n şi m.

De exemplu, putem lua ca ordin comun pentru radicalii $\sqrt[4]{2}$ şi $\sqrt[6]{32}$ pe 12, care este cel mai mic multiplu comun al numerelor 4 şi 6. Atunci avem:

$$\sqrt[4]{2} \cdot \sqrt[6]{32} = \sqrt[12]{2^3} \cdot \sqrt[12]{2^{10}} = \sqrt[12]{2^{13}} = 2\sqrt[12]{2}.$$

3. *Împărţirea radicalilor.* Proprietatea 2 a radicalilor ne dă legea de împărţire a radicalilor de acelaşi ordin.

$$\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}. \qquad (2)$$

Ca să împărţim radicali de ordine diferite, îi aducem mai întâi la acelaşi ordin şi apoi îi împărţim după formula (2).

De exemplu: $\frac{\sqrt[3]{4}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt[6]{4^2}}{\sqrt[6]{2^3}} = \sqrt[6]{\frac{2^4}{2^3}} = \sqrt[6]{2}.$

4. *Raţionalizarea numitorilor.* Înţelegem prin raţionalizarea numitorilor, operaţia de eliminare (prin transformări) a radicalilor de la numitorul unei fracţii. Vom clarifica aceasta prin câteva cazuri speciale, pe care le vom prezenta mai jos.

Să precizăm mai întâi noţiunea de *expresie conjugată.* Astfel, o expresie, care conţine radicali se numeşte *conjugata* unei alte expresii care conţine radicali, dacă produsul acestor expresii se poate scrie fără radicali. Atunci cele două expresii se numesc *conjugate.*

În cazurile următoare, raţionalizarea numitorului se realizează prin amplificarea fracţiei cu conjugata numitorului. De aceea vom pune în evidenţă pentru fiecare caz în parte, conjugatele numitorului.

1^0 *Numitorul este un radical.* În acest caz radicalul de la numitor se elimină printr-o amplificare.

De exemplu: $\frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{\left(\sqrt{3}\right)^2} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$; $\frac{5}{\sqrt[3]{12}} = \frac{5\sqrt[3]{2\cdot 3^2}}{\sqrt[3]{2^3\cdot 3^3}} = \frac{5\sqrt[3]{18}}{6}.$

2^0 *Numitorul este de forma;* $\sqrt{a} \pm \sqrt{b}$ $(a, b > 0)$.

Observăm că $\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right) = a - b$. Expresiile $\sqrt{a}+\sqrt{b}$ şi $\sqrt{a}-\sqrt{b}$ sunt conjugate. Pentru a raţionaliza numitorul amplificăm fracţia cu conjugata numitorului.

De exemplu: $\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}} = \frac{\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)^2}{\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)} = \frac{3-2\sqrt{6}+2}{3-2} = 5 - 2\sqrt{6}.$

3^0 *Numitorul este de forma:* $\sqrt{a} \pm \sqrt{b} \pm \sqrt{c}$ $(a, b, c > 0)$. În acest caz, radicalii de la numitor se elimină succesiv, reducând problema la cazul precedent.

De exemplu:

$$\frac{4}{1+\sqrt{3}-\sqrt{2}} = \frac{4\left[\left(1+\sqrt{3}\right)+\sqrt{2}\right]}{\left[\left(1+\sqrt{3}\right)-\sqrt{2}\right]\left[\left(1+\sqrt{3}\right)+\sqrt{2}\right]} = \frac{4\left(1+\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)}{\left(1+\sqrt{3}\right)^2-\left(\sqrt{2}\right)^2} =$$

$$= \frac{4\left(1+\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)}{\left(4+2\sqrt{3}\right)-2} = \frac{4\left(1+\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)}{2+2\sqrt{3}} = \frac{2\left(1+\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)}{1+\sqrt{3}} =$$

$$= \frac{2\left(1+\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)\left(1-\sqrt{3}\right)}{\left(1+\sqrt{3}\right)\left(1-\sqrt{3}\right)} = \frac{2\left(1-\sqrt{3}+\sqrt{3}-3+\sqrt{2}-\sqrt{6}\right)}{1-3} =$$

$$= 2-\sqrt{2}+\sqrt{6}.$$

4° *Numitorul este de forma* $\sqrt[3]{a} \pm \sqrt[3]{b}$ sau $\sqrt[3]{a^2} \pm \sqrt[3]{ab} + \sqrt[3]{b^2}$. Avem:

$$\left(\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b}\right)\left(\sqrt[3]{a^2} - \sqrt[3]{ab} + \sqrt[3]{b^2}\right) = a + b \text{ şi}$$

$$\left(\sqrt[3]{a} - \sqrt[3]{b}\right)\left(\sqrt[3]{a^2} + \sqrt[3]{ab} + \sqrt[3]{b^2}\right) = a - b$$

acestea fiind perechi de expresii conjugate.

Exemplu $$\frac{\sqrt[3]{3}}{\sqrt[3]{5} - \sqrt[3]{3}} = \frac{\sqrt[3]{3}\left(\sqrt[3]{5^2} + \sqrt[3]{5 \cdot 3} + \sqrt[3]{3^2}\right)}{\left(\sqrt[3]{5} - \sqrt[3]{3}\right)\left(\sqrt[3]{5^2} + \sqrt[3]{5 \cdot 3} + \sqrt[3]{3^2}\right)} =$$

$$= \frac{\sqrt[3]{3 \cdot 5^2} + \sqrt[3]{3^2 \cdot 5} + \sqrt[3]{3^3}}{5 - 3} = \frac{3 + \sqrt[3]{45} + \sqrt[3]{75}}{2}.$$

Cazul 4° se poate da mai general, astfel:

5° *Numitorul este de forma* $\sqrt[n]{a} - \sqrt[n]{b}$ sau $\sqrt[n]{a^{n-1}} + \sqrt[n]{a^{n-2}b} + \ldots + \sqrt[n]{b^{n-1}}$.

Avem $\left(\sqrt[n]{a} - \sqrt[n]{b}\right)\left(\sqrt[n]{a^{n-1}} + \sqrt[n]{a^{n-2}b} + \ldots + \sqrt[n]{b^{n-1}}\right) = a - b$

acestea fiind deci expresii conjugate.

6° *Numitorul este de forma:*

$\sqrt[n]{a} + \sqrt[n]{b}$ sau $\sqrt[n]{a^{n-1}} - \sqrt[n]{a^{n-2}b} + \ldots - \sqrt[n]{ab^{n-2}} + \sqrt[n]{b^{n-1}}$, unde $n = 2k + 1$, este impar. Avem:

$$\left(\sqrt[n]{a} + \sqrt[n]{b}\right)\left(\sqrt[n]{a^{n-1}} - \sqrt[n]{a^{n-2}b} + \ldots - \sqrt[n]{ab^{n-2}} + \sqrt[n]{b^{n-1}}\right) = a + b,$$

($n = 2k + 1$) acestea fiind deci conjugate.

Aplicaţie. Să se demonstreze că: $\dfrac{a+b+c}{3} \geq \sqrt[3]{abc}$, unde a, b,c sunt numere reale pozitive oarecare (*media aritmetică* a trei numere pozitive este mai mare sau egală cu *media geometrică* a lor).

Demonstraţie. Se verifică uşor că are loc identitatea:

$x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = (x + y + z)(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - xz)$, unde x, y, z sunt numere reale oarecare.

Deoarece $x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - xz = \frac{1}{2}\left[(x - y)^2 + (y - z)^2 + (z - x)^2\right]$, rezultă identitatea $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = \frac{1}{2}(x + y + z)\left[(x - y)^2 + (y - z)^2 + (z - x)^2\right]$

În această ultimă identitate punem:

$x = \sqrt[3]{a}$, $y = \sqrt[3]{b}$, $z = \sqrt[3]{c}$ şi obţinem:

$$a + b + c - 3\sqrt[3]{abc} = \frac{1}{2}\left(\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b} + \sqrt[3]{c}\right)\left[\left(\sqrt[3]{a} - \sqrt[3]{b}\right)^2 + \left(\sqrt[3]{b} - \sqrt[3]{c}\right)^2 + \left(\sqrt[3]{c} - \sqrt[3]{a}\right)^2\right]$$

Deoarece a, b, c sunt numere pozitive, iar pătratul oricărui număr real este nenegativ, rezultă că $a + b + c - 3\sqrt[3]{abc} \geq 0$, adică

$$\frac{a+b+c}{3} \geq \sqrt[3]{abc}.$$

Inegalitatea dată devine egalitatea dacă şi numai dacă $a = b = c$.

Observaţie. Dacă a, b, c sunt numere reale pozitive oarecare, atunci:

$$\sqrt[3]{abc} \geq \frac{3}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}}$$

(*media geometrică* a trei numere reale pozitive este mai mare sau egală cu *media armonică* a lor). Folosind faptul că media aritmetică a numerelor $\frac{1}{a}, \frac{1}{b}$ şi $\frac{1}{c}$ este mai mare sau egală cu media lor geometrică, rezultă inegalitatea cerută.

2.6. Ecuaţii iraţionale

1. Se numesc *ecuaţii iraţionale*, ecuaţiile care conţin necunoscuta sub semnul radical. Aşa, de exemplu, ecuaţiile

$$\sqrt{x-2} = 5 + \sqrt{x}; \ \sqrt{x} = 1 - 2x;$$

$$\sqrt[3]{4-x} = \sqrt[4]{x+10} + 5x$$

sunt ecuaţii iraţionale.

Amintim că radicalii de ordin par sunt definiţi numai pentru numere nenegative, aceştia fiind de asemenea numere nenegative. Să considerăm, de exemplu, ecuaţiile iraţionale:

1^0 $\sqrt{x-3} + \sqrt{2-x} = 3$. Cum radicalii de ordinul doi sunt definiţi numai pentru numere nenegative, rezultă că soluţiile ecuaţiei trebuie să verifice sistemul de inecuaţii:

$$x - 3 \geqslant 0, 2 - x \geqslant 0. \qquad (1)$$

De aici rezultă: $x \geqslant 3$ şi $x \leqslant 2$ şi deci sistemul (1) evident nu are soluţii. Aşadar ecuaţia dată nu are soluţii reale.

2^0 $\sqrt{x} + \sqrt{3-x} = -5$. Cum $\sqrt{x}$ şi $\sqrt{3-x}$ sunt nenegative, avem $\sqrt{x} + \sqrt{3-x} \geq 0$ pentru x real. Însă $-5 < 0$ şi deci ecuaţia nu are soluţii reale.

Observaţie. Cele două exemple precedente ne arată că este necesar ca înainte de a trece la găsirea, prin diferite metode, a soluţiilor unei ecuaţii iraţionale, să ne asigurăm dacă astfel de soluţii pot să existe.

2. *Metode de rezolvare a ecuaţiilor iraţionale.* Calea obişnuită de rezolvare a ecuaţiilor iraţionale constă în eliminarea radicalilor, prin diferite transformări, reducându-le astfel la ecuaţii deja studiate (de exemplu, de gradul întâi sau al doilea). Mai jos prezentăm câteva exemple de ecuaţii iraţionale a căror rezolvare se poate efectua prin ridicarea la putere sau înmulţire cu expresii conjugate.

Exemple

1. Să se rezolve ecuaţia:

$$x = \sqrt{2 - x}, \tag{2}$$

Pentru ca radicalul să existe trebuie ca $2 - x \geqslant 0$, de unde $x \leqslant 2$. Deci soluţiile ecuaţiei trebuie să verifice această inegalitate. Ridicăm ambii membri ai ecuaţiei la pătrat şi obţinem: $x^2 = 2 - x$, sau $x^2 + x - 2 = 0$. de unde $x_1 = -2$ şi $x_2 = 1$.

Cu toate că $x_1 \leqslant 2$ şi $x_2 \leqslant 2$, nu putem încă trage concluzia că acestea sunt rădăcini ale ecuaţiei (2).

Aceasta pentru că la acelaşi rezultat am fi ajuns (prin ridicare la pătrat, membru cu membru) chiar dacă am fi considerat ecuaţia iraţională $x = -\sqrt{2 - x}$, care evident este diferită de ecuaţia dată (2). Deci printre rădăcinile ecuaţiei obţinute prin ridicare la pătrat (membru cu membru) a ecuaţiei (2) se găsesc şi rădăcinile ecuaţiei $x = -\sqrt{2 - x}$, care pot să nu fie rădăcini ale ecuaţiei (2). De aceea, trebuie să verificăm dacă, într-adevăr, $x_1 = -2$ şi $x_2 = 1$ sunt rădăcini ale ecuaţiei iraţionale date. Pentru $x = -2$, membrul stâng al ecuaţiei (2) are valoarea -2, iar cel drept $\sqrt{4} = 2$. Cum $-2 \neq 2$, rezultă că -2 nu este rădăcină a ecuaţiei (2). Pentru $x = 1$, ambii membrii ai ecuaţiei (2) iau valoarea 1. Deci 1 este rădăcină a ecuaţiei iraţionale date.

2. Să se rezolve ecuaţia:

$$\sqrt{x - 5} + \sqrt{10 - x} = 3. \tag{3}$$

Din condiţiile de existenţă a radicalilor rezultă că soluţiile ecuaţiei trebuie să verifice inegalitatea: $5 \leqslant x \leqslant 10$. Prin ridicare la pătrat se obţine:

$$x - 5 + 2\sqrt{(x - 5)(10 - x)} + 10 - x = 9, \text{ sau}$$

$$2\sqrt{(x - 5)(10 - x)} = 4, \text{ sau } \sqrt{(x - 5)(10 - x)} = 2.$$

Printr-o nouă ridicare la pătrat se obţine:

$(x - 5)(10 - x) = 4$, sau $-x^2 + 15x - 50 = 4$, sau încă $x^2 - 15x + 54 = 0$.

Această ecuaţie are rădăcinile: $x_1 = 6$, $x_2 = 9$, deci cuprinse între 5 şi 10. Verificarea arată că atât 6 cât şi 9 sunt rădăcini ale ecuaţiei date.

3. Să se rezolve ecuaţia:

$$\sqrt{x + 7} + \sqrt{x - 1} = 4. \tag{4}$$

Din condiţiile de existenţă a radicalilor rezultă $x \geqslant 1$.

Să rezolvăm această ecuaţie prin înmulţirea ambilor membri cu expresia conjugată a membrului stâng, adică cu $\sqrt{x + 7} - \sqrt{x - 1}$. Astfel obţinem:

$$\left(\sqrt{x + 7} + \sqrt{x - 1}\right)\left(\sqrt{x + 7} - \sqrt{x - 1}\right) = 4\left(\sqrt{x + 7} - \sqrt{x - 1}\right) \text{ de unde}$$

$$(x + 7) - (x - 1) = 4\left(\sqrt{x + 7} - \sqrt{x - 1}\right).$$

De aici, avem

$$\sqrt{x + 7} - \sqrt{x - 1} = 2. \tag{5}$$

Adunând membru cu membru ecuaţiile (4) şi (5) se obţine $2\sqrt{x+7}=6$, de unde $x+7=9$, adică $x=2$. Prin verificare, se obţine că 2 este o rădăcină a ecuaţiei date.

4. Să se rezolve ecuaţia:

$$\sqrt[3]{2x-1}+\sqrt[3]{x-1}=1 \tag{6}$$

Fiind de ordin 3, radicalii există pentru orice x real.

Pentru rezolvarea ecuaţiei folosim identitatea

$$(a+b)^3=a^3+b^3+3ab(a+b).$$

Ridicând la puterea a treia ambii membri ai ecuaţiei (6), obţinem:

$$2x-1+x-1+3\sqrt[3]{2x-1}\sqrt[3]{x-1}\left(\sqrt[3]{2x-1}+\sqrt[3]{x-1}\right)=1, \text{ sau}$$

$$3x-2+3\sqrt[3]{(2x-1)(x-1)}\cdot 1=1, \text{ sau încă } 3\sqrt[3]{(2x-1)(x-1)}=3(1-x).$$

Atunci $\sqrt[3]{(2x-1)(x-1)}=1-x$ şi printr-o nouă ridicare la puterea treia, obţinem $(2x-1)(x-1)=(1-x)^3$, sau $(2x-1)(x-1)-(1-x)^3=0$, adică $(2x-1)(x-1)+(x-1)^3=0$. Scoţând factor comun pe $x-1$, rezultă $(x-1)\left[(2x-1)+(x-1)^2\right]=0$, sau $(x-1)x^2=0$, de unde $x_1=1$ şi $x_2=0$. Verificarea arată că $x_1=1$ este rădăcină a ecuaţiei (6) (pentru $x=1$ ambii membri ai ecuaţiei sunt egali cu 1), iar $x_2=0$ nu este rădăcină (pentru $x=0$, membrul stâng al ecuaţiei (6) ia valoarea -2, iar membrul drept este 1 şi avem $-2\neq 1$). Deci 1 este singura rădăcină a ecuaţiei date.

Observaţie. Prin metodele de rezolvare a ecuaţiilor iraţionale, indicate în exemplele de mai sus, nu se pot pierde rădăcini ale ecuaţiei iraţionale date. Dimpotrivă, ecuaţia (fără radicali), la care se ajunge prin transformări ale ecuaţiei iraţionale date, poate avea rădăcini în plus faţă de ecuaţia iniţială. De aceea remarcăm încă o dată necesitatea de a verifica dacă rădăcinile ecuaţiei obţinute (prin transformări) sunt rădăcini ale ecuaţiei iraţionale date (în forma iniţială), această etapă făcând parte din însăşi rezolvarea ecuaţiilor iraţionale.

În acest paragraf vom prezenta o extindere a noţiunii de putere, care cuprinde în particular, atât noţiunea de putere cu exponent întreg, cât şi cea de radical.

3.1. Puteri cu exponent raţional pozitiv

Definiţie. *Fie $a\geqslant 0$ un număr real nenegativ şi $\frac{m}{n}$ un număr raţional pozitiv, atunci definim*

$$a^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{a^m} \tag{1}$$

(citim a la puterea $\frac{m}{n}$).

Observăm că în această definiţie intervin numerele naturale m şi n care definesc numărul raţional dat.

Cum numărul raţional $\frac{m}{n} > 0$ este egal, de exemplu, cu numărul raţional $\frac{km}{kn}$, pentru k număr natural nenul, se pune în mod firesc problema de a arăta că această definiţie este corectă, adică nu depinde de alegerea reprezentanţilor.

Cu alte cuvinte, trebuie arătat că dacă $\frac{m}{n} = \frac{m'}{n'}$, atunci $a^{\frac{m}{n}} = a^{\frac{m'}{n'}}$.

Într-adevăr, avem $\frac{m}{n} = \frac{m'}{n'}$ dacă şi numai dacă $mn' = m'n$.

Atunci folosind proprietatea 5 a radicalilor, avem:

$$a^{\frac{m'}{n'}} = \sqrt[n']{a^{m'}} = \sqrt[n'm]{a^{m'm}} = \sqrt[m'n]{a^{m'm}} = \sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}.$$

Obţinem astfel noţiunea de putere cu exponent raţional pozitiv.

De exemplu:

$$9^{\frac{5}{4}} = \sqrt[4]{9^5} = \sqrt[4]{9^4 \cdot 9} = 9\sqrt[4]{9} = 9\sqrt{3};\ 8^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{8^2} = \sqrt[3]{2^6} = 4.$$

Din noţiunea de putere cu exponent raţional pozitiv particularizată la numerele naturale n, respectiv la numerele raţionale pozitive $\frac{1}{n}$, se obţine noţiunea de putere cu exponent natural, respectiv noţiunea de radical pentru numerele pozitive.

Observaţie. Cerinţa $a \geqslant 0$, din definiţie, este esenţială deoarece în caz contrar, formula (1) ar putea să nu aibă sens. De exemplu, $(-2)^{\frac{1}{4}}$ după formula (1) ar trebui să fie radical de ordinul 4 din -2, care nu are sens.

Proprietăţi ale puterilor cu exponent raţional pozitiv

În cele ce urmează presupunem că $\frac{m}{n}$ şi $\frac{p}{q}$ sunt numere raţionale pozitive. Atunci:

1^o $a^{\frac{m}{n}} \cdot a^{\frac{p}{q}} = a^{\frac{m}{n}+\frac{p}{q}}\ (a \geq 0)$;

3^o $\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{m}{n}} = \frac{a^{\frac{m}{n}}}{b^{\frac{m}{n}}}\ (a \geq 0, b > 0)$;

2^o $(a \cdot b)^{\frac{m}{n}} = a^{\frac{m}{n}} \cdot b^{\frac{m}{n}}\ (a, b \geq 0)$;

4^o $\left(a^{\frac{m}{n}}\right)^{\frac{p}{q}} = a^{\frac{m}{n}\cdot\frac{p}{q}}\ (a \geqslant 0)$;

5^o Dacă $\frac{m}{n} > \frac{p}{q}$, *atunci* $\frac{a^{\frac{m}{n}}}{a^{\frac{p}{q}}} = a^{\frac{m}{n}-\frac{p}{q}}\ (a > 0)$.

Aceste proprietăţi se demonstrează uşor folosind proprietăţile radicalilor. Să demonstrăm prima proprietate. Avem:

$$a^{\frac{m}{n}}\cdot a^{\frac{p}{q}}=\sqrt[n]{a^m}\sqrt[q]{a^p}=\sqrt[nq]{a^{mq}}\sqrt[nq]{a^{np}}=\sqrt[nq]{a^{mq+np}}=a^{\frac{mq+np}{nq}}=a^{\frac{m}{n}+\frac{p}{q}}.$$

Lăsăm ca exerciţiu, verificarea celorlalte proprietăţi.

Observaţie. Proprietatea 1° este adevărată şi pentru un număr finit de factori, adică:

$$a^{\frac{m_1}{n_1}}\cdot a^{\frac{m_2}{n_2}}\cdot\ldots\cdot a^{\frac{m_k}{n_k}}=a^{\frac{m_1}{n_1}+\frac{m_2}{n_2}+\ldots+\frac{m_k}{n_k}}.$$

Exemple $5^{\frac{1}{5}}\cdot 5^{\frac{4}{5}}=5^{\frac{1}{5}+\frac{4}{5}}=5^1=5;\quad a^{\frac{6}{7}}\cdot a^{\frac{5}{6}}=a^{\frac{6}{7}+\frac{5}{6}}=a^{\frac{71}{42}}(a\geq 0).$

Pentru $a\neq 0$, am convenit să punem $a^0=1$. Expresiei 0^0 nu i se dă nici un sens.

3.2. Puteri cu exponent raţional negativ

Aşa cum am definit puterea cu exponent întreg negativ (vezi pct. 1.3), definim şi puterea cu exponent raţional negativ.

Fie $a>0$, un număr real pozitiv şi $\frac{m}{n}$ un număr raţional pozitiv. Atunci prin definiţie, $a^{-\frac{m}{n}}=\dfrac{1}{a^{\frac{m}{n}}}$

De exemplu:

$$8^{-\frac{2}{3}}=\frac{1}{8^{\frac{2}{3}}}=\frac{1}{\sqrt[3]{8^2}}=\frac{1}{4};\ 27^{-\frac{5}{6}}=\frac{1}{27^{\frac{5}{6}}}=\frac{1}{\sqrt[6]{27^5}}=\frac{1}{\sqrt[6]{3^{15}}}=\frac{1}{\sqrt{3^5}}=\frac{1}{9\sqrt{3}}.$$

Acum ştim ce înseamnă puterea cu exponent raţional oarecare a oricărui număr real pozitiv. Puterile cu exponent raţional oarecare au următoarele proprietăţi de bază:

1° $a^{\frac{m}{n}}\cdot a^{\frac{p}{q}}=a^{\frac{m}{n}+\frac{p}{q}}(a>0);$

2° $(ab)^{\frac{m}{n}}=a^{\frac{m}{n}}\cdot b^{\frac{m}{n}}(a,b>0);$

3° $\left(\dfrac{a}{b}\right)^{\frac{m}{n}}=\dfrac{a^{\frac{m}{n}}}{b^{\frac{m}{n}}}(a,b>0);$

4° $\left(a^{\frac{m}{n}}\right)^{\frac{p}{q}}=a^{\frac{m}{n}\cdot\frac{p}{q}}(a>0);$

5° $\dfrac{a^{\frac{m}{n}}}{a^{\frac{p}{q}}}=a^{\frac{m}{n}-\frac{p}{q}}(a>0).$

Am demonstrat în paragraful precedent aceste proprietăţi pentru cazul exponenţilor raţionali pozitivi. Ele se pot demonstra şi pentru exponenţi raţionali oarecare.

Să demonstrăm, de exemplu, proprietatea 1). Fie pentru aceasta $\frac{m}{n}$ şi $\frac{p}{q}$ numere raţionale. Cazul în care ambele numere sunt pozitive a fost dat la punctul precedent. Rămân atunci de considerat următoarele cazuri:

1° ambii exponenţi sunt negativi;

2° unul dintre exponenţi este negativ, iar celălalt pozitiv;

3° cel puţin unul dintre exponenţi este zero.

Să le analizăm pe rând:

1° Dacă $\frac{m}{n}, \frac{p}{q} < 0$, atunci $-\frac{m}{n}, -\frac{p}{q} > 0$. După definiţie şi aplicând proprietatea analoagă a puterilor cu exponent raţional pozitiv, avem:

$$a^{\frac{m}{n}} \cdot a^{\frac{p}{q}} = \frac{1}{a^{-\frac{m}{n}}} \cdot \frac{1}{a^{-\frac{p}{q}}} = \frac{1}{a^{-\frac{m}{n}+\left(-\frac{p}{q}\right)}} = \frac{1}{a^{-\left(\frac{m}{n}+\frac{p}{q}\right)}} = a^{\frac{m}{n}+\frac{p}{q}}.$$

2° În cazul al doilea fie, de exemplu,

$$\frac{m}{n} > 0 \text{ şi } \frac{p}{q} < 0; \text{ deci } -\frac{p}{q} > 0.$$

Să presupunem mai întâi că $\frac{m}{n} > -\frac{p}{q}$.

Atunci, după definiţie şi proprietatea 5° a puterilor cu exponent pozitiv, avem:

$$a^{\frac{m}{n}} \cdot a^{\frac{p}{q}} = a^{\frac{m}{n}} \cdot \frac{1}{a^{-\frac{p}{q}}} = \frac{a^{\frac{m}{n}}}{a^{-\frac{p}{q}}} = a^{\frac{m}{n}-\left(-\frac{p}{q}\right)} = a^{\frac{m}{n}+\frac{p}{q}}.$$

Dacă $\frac{m}{n} < -\frac{p}{q}$, atunci

$$a^{\frac{m}{n}} \cdot a^{\frac{p}{q}} = a^{\frac{m}{n}} \cdot \frac{1}{a^{-\frac{p}{q}}} = \frac{1}{a^{-\frac{m}{n}}} \cdot \frac{1}{a^{-\frac{p}{q}}}$$

Dar $-\frac{p}{q} > \frac{m}{n} = -\left(-\frac{m}{n}\right)$ şi după situaţia precedentă, avem:

$$\frac{1}{a^{-\frac{m}{m}} \cdot a^{-\frac{p}{q}}} = \frac{1}{a^{-\frac{m}{n}-\frac{p}{q}}} = \frac{1}{a^{-\left(\frac{m}{n}+\frac{p}{q}\right)}} = a^{\frac{m}{n}+\frac{p}{q}}.$$

În sfârşit, dacă:

$$\frac{m}{n} = -\frac{p}{q} \text{ adică } \frac{m}{n} + \frac{p}{q} = 0, \text{ atunci } a^{\frac{m}{n}} \cdot a^{\frac{p}{q}} = \frac{a^{\frac{m}{m}}}{a^{-\frac{p}{q}}} = 1 = a^0 = a^{\frac{m}{n}+\frac{p}{q}}.$$

3° Dacă unul sau ambii exponenţi sunt zero proprietatea este evidentă (avem în vedere că $a^0 = 1$).

Lăsăm ca exerciţiu demonstrarea celorlalte proprietăţi.

Observaţie. Dacă în cazul puterilor cu exponent raţional pozitiv am putut vorbi despre proprietatea 5, doar pentru $\frac{m}{n} > \frac{p}{q}$, în acest paragraf (după ce am definit puterile cu exponent raţional negativ) ea se poate demonstra şi pentru $\frac{m}{n} \leq \frac{p}{q}$ (când $a > 0$), de exemplu:

$$\frac{16^{\frac{3}{4}}}{16^{\frac{4}{5}}} = 16^{\frac{3}{4}-\frac{4}{5}} = 16^{-\frac{1}{20}} = \left(2^4\right)^{-\frac{1}{20}} = 2^{-\frac{1}{5}} = \frac{1}{2^{\frac{1}{5}}} = \frac{1}{\sqrt[5]{2}}.$$

3.3. Funcţia putere cu exponent raţional

Definiţie. Fiind dat un număr raţional $\frac{m}{n}$, nenul, funcţia:

$f:(0, +\infty) \to (0, +\infty), f(x) = x^{\frac{m}{n}}$, se numeşte *funcţie putere cu exponent raţional.*

Putem presupune $n > 0$ şi atunci $f(x) = \left(\sqrt[n]{x}\right)^m$. Rezultă că funcţia putere cu exponent raţional are proprietăţi asemănătoare cu ale funcţiei putere. Astfel:

a) dacă $\frac{m}{n}$ este pozitiv, atunci funcţia f este strict crescătoare;

b) dacă $\frac{m}{n}$ este negativ, atunci funcţia f este strict descrescătoare;

c) funcţia f este inversabilă, inversa sa fiind:

$$g : (0, +\infty) \to (0, +\infty), f(x) = x^{\frac{n}{m}}.$$

Să demonstrăm proprietatea a). Fie $x_1, x_2 \in (0, +\infty)$ cu $x_1 < x_2$.

Folosind proprietatea analoagă de monotonie a funcţiilor radical şi putere deducem că:

$$\sqrt[n]{x_1} < \sqrt[n]{x_2}, \text{ de unde } \left(\sqrt[n]{x_1}\right)^m < \left(\sqrt[n]{x_2}\right)^m, \text{ adică } f(x_1) < f(x_2).$$

Analog se demonstrează b).

Să arătăm acumt proprietatea c). Dacă $x \in (0, +\infty)$, atunci $g(f(x)) = \left(x^{\frac{m}{n}}\right)^{\frac{n}{m}} = x$, iar dacă $y \in (0, +\infty)$, atunci $f(g(y)) = \left(y^{\frac{n}{m}}\right)^{\frac{m}{n}} = y$. Deci $g \circ f$ şi $f \circ g$ sunt egale cu funcţia identică a lui $(0, +\infty)$. Aşadar, f este inversabilă, g fiind inversa sa.

Mai mult, fiind inversabilă, funcţia putere cu exponent raţional este bijectivă (vezi teorema 3, cap. 1).

În figura 7 am reprezentat graficul funcţiei $f: (0, +\infty) \to (0, +\infty)$, $f(x) = x^{-\frac{1}{2}}$ (construit prin „puncte"). Cu linie întreruptă am reprezentat graficul funcţiei inverse $g:(0,+\infty) \to (0,+\infty)$, $g(x) = x^{-2}$.

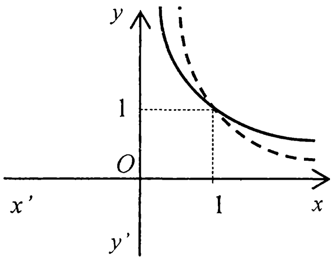


Fig. 7

Să se găsească radicalii:
a) $\sqrt{(x-1)^2}$; b) $\sqrt{(x+5)^2}$; c) $\sqrt{(2x^2-3x+1)^2}$; d) $\sqrt{(-3x^2+x-1)^2}$.

Să se găsească valorile lui x, pentru care sunt definite expresiile:
a) $\sqrt{x-2}$; b) $\sqrt[5]{x-2}$; c) $\sqrt[3]{3-x}+\sqrt[4]{5x-5}$; d) $\sqrt[4]{x^2+1}$; e) $\sqrt[6]{x^2-x+1}$.

Să se calculeze:
a) $\sqrt{173^2-52^2}$; b) $\sqrt[3]{373^2-252^2}$; c) $\sqrt{(242{,}5)^2-(46{,}5)^2}$.

Să se simplifice expresiile:
$$\sqrt[10]{2^5};\ \sqrt[12]{(-5)^4};\ \sqrt[8]{a^4};\ \sqrt{\frac{625}{256}};\ \sqrt[6]{\left(\sqrt{7}-2\right)^3};$$
$$\sqrt[4]{\left(1-\sqrt{2}\right)^2};\ \sqrt[9]{\left(\sqrt{3}-\sqrt{5}\right)^3};\ \sqrt[10]{\left(\sqrt{3}-4\right)^2};\ \sqrt[6]{\left(1-\sqrt{2}\right)^2}.$$

Să se simplifice expresiile:
a) $\sqrt[8]{(x-2)^4}$; b) $\sqrt[8]{[(x-1)(x+1)]^4}$; c) $\sqrt[8]{\left[(x-1)(x^2+1)\right]^4}$.

Fără a calcula radicalii, să se găsească care dintre numerele următoare este mai mare:
a) $2\sqrt{3}$ sau $3\sqrt{2}$; b) $5\sqrt{7}$ sau $8\sqrt{3}$; c) $3\sqrt[3]{4}$ sau $4\sqrt[3]{2}$.

Să se simplifice expresiile:
a) $\sqrt{5\sqrt[3]{625}}$; b) $\sqrt[5]{2\sqrt[4]{4\sqrt[3]{8}}}$; c) $\sqrt{\frac{2+\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}}\sqrt{\frac{2-\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}}}$; d) $\sqrt{\frac{a+1}{a-1}\sqrt{\frac{a-1}{a+1}}}$.

Să se calculeze:
a) $\sqrt{50}-5\sqrt{8}+\sqrt{2}+\sqrt{128}$; b) $\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{250}-\sqrt[3]{686}-\sqrt[3]{16}$;
c) $\left(2\sqrt{3}-3\sqrt{2}+\sqrt{6}\right)\cdot\left(\sqrt{6}-\sqrt{2}-2\sqrt{3}\right)$;
d) $\left(\sqrt{8}-3\sqrt{2}+\sqrt{10}\right)\cdot\left(\sqrt{2}+\sqrt{1{,}6}+3\sqrt{0{,}4}\right)$.

Să se raţionalizeze numitorii fracţiilor:
a) $\frac{1-\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}}$; b) $\frac{1}{\sqrt[3]{25}-\sqrt[3]{24}}$; c) $\frac{12}{3+\sqrt{2}-\sqrt{5}}$; d) $\frac{15}{\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{7}}$; e) $\frac{\sqrt[3]{5}+\sqrt[3]{3}}{\sqrt[3]{5}-\sqrt[3]{3}}$;

f) $\frac{31}{2+\sqrt{2}-\sqrt{6}}$; g) $\frac{1}{\sqrt{5+\sqrt{2}}}$; h) $\frac{1}{2-\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{6}}$; i) $\frac{\sqrt{\sqrt{a}-\sqrt{b}}}{\sqrt{\sqrt{a}+\sqrt{b}}}$.

Să se simplifice expresiile:

i) $\frac{3\sqrt{a}}{a}+a^{\frac{1}{6}}\sqrt[3]{a}-\frac{a^{\frac{2}{7}}}{\sqrt[2]{a}}-\frac{3a^{0}}{\sqrt{a}}(a>0)$; ii) $\frac{x-y}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}-\frac{x^{\frac{3}{2}}-y^{\frac{3}{2}}}{x-y}(x>0,\ y>0, x\neq y)$.

Să se aşeze în ordine crescătoare radicalii:

a) $\sqrt{2}$, $\sqrt[3]{3}$, $\sqrt[4]{4}$; b) $\sqrt{3}, \sqrt[3]{6}, \sqrt[6]{30}$; c) $\sqrt{6}, \sqrt[4]{12}, \sqrt[8]{72}$.

Să se rezolve (în $\mathbb{R}$) ecuaţiile:

a) $\sqrt{x+1}=2$ b) $\sqrt{x-3}=x-3$; c) $\sqrt{x-1}+1=\sqrt{x+\sqrt{x+8}}$; d) $\sqrt{7-\sqrt{x-3}}=2$;

e) $\sqrt{4-x}+\sqrt{5+x}=3$; f) $\sqrt{7-x}+\sqrt{x-5}=\sqrt{2}$; g) $\sqrt{2x+1}=2\sqrt{x}-\sqrt{x-3}$;

h) $\sqrt{1+x\sqrt{x^2+24}}=x+1$; i) $\sqrt{a+x}+\sqrt{a-x}=\sqrt{2a}$; j) $\sqrt{x-3}-\sqrt{x+3}=2-\sqrt{10}$;

k) $\sqrt{x-1}+\sqrt{x-2}+\sqrt{x-3}+1=0$; l) $x+\sqrt{6+\sqrt{x^2}}=0$.

Să se rezolve (în $\mathbb{R}$) ecuaţiile:

a) $\sqrt[3]{x+1}+\sqrt[3]{x+2}+\sqrt[3]{x+3}=0$;

b) $\sqrt[3]{\sqrt{x}+3}+\sqrt[3]{13-\sqrt{x}}=4$; c) $\sqrt[3]{x+45}-\sqrt[3]{x-16}=1$.

Să se rezolve (în $\mathbb{R}$) ecuaţia $\sqrt[4]{97-x}+\sqrt[4]{x}=5$.

Să se arate că $\sqrt[3]{20+14\sqrt{2}}+\sqrt[3]{20-14\sqrt{2}}=4$.

Să se rezolve (în $\mathbb{R}$) inecuaţiile:

a) $\sqrt{2-x}>x$; b) $\sqrt{2-x}\leq x$;

c) $\sqrt{x^2-55x+250}<x-14$; d) $\sqrt{x^2-3x+2}>2-x$.

Să se rezolve (în $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$) sistemul de ecuaţii:

a) $\begin{cases}\sqrt{x+y}+\sqrt[3]{x-y}=6,\\ \sqrt[6]{(x+y)^3(x-y)^2}=8;\end{cases}$ b) $\begin{cases}\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y}=4,\\ x+y=28.\end{cases}$

Să se construiască graficele funcţiilor:

a) $f_1:[1,+\infty)\to\mathbb{R}, f_1(x)=\sqrt{x-1}$; b) $f_2:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f_2(x)=\sqrt[3]{x-2}$;

c) $f_3:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f_3(x)=\sqrt[3]{x}-2$.

Să se aşeze în ordine crescătoare numerele:

a) $\left(\frac{4}{7}\right)^{-\frac{2}{3}}$; $\left(\frac{49}{16}\right)^{\frac{4}{3}}$; $\left(\frac{16}{49}\right)^{-\frac{1}{4}}$; b) $\left(\frac{9}{4}\right)^{-0,1}$; $\left(\frac{9}{4}\right)^{0,2}$; $\left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{1}{6}}$.

Să se demonstreze identităţile (formulele radicalilor compuşi):

$$\sqrt{a+\sqrt{b}}=\sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2-b}}{2}}+\sqrt{\frac{a-\sqrt{a^2-b}}{2}}.$$

$$\sqrt{a-\sqrt{b}}=\sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2-b}}{2}}-\sqrt{\frac{a-\sqrt{a^2-b}}{2}},$$

unde a, b şi a^2-b sunt numere reale nenegative.

Folosind formulele radicalilor compuşi să se transforme expresiile:

a) $\sqrt{5+2\sqrt{6}}$; b) $\sqrt{6-\sqrt{20}}$; c) $\sqrt{10-2\sqrt{21}}$; d) $\sqrt{9-\sqrt{45}}$; e) $\sqrt{x-\sqrt{x^2-y^2}}$

Să se demonstreze că, pentru $1 \leqslant x \leqslant 2$, $\sqrt{x+2\sqrt{x-1}}+\sqrt{x-2\sqrt{x-1}}=2$.

Să se calculeze: $\dfrac{\sqrt[4]{x}}{\sqrt[12]{y^{10}}}\cdot\left(\dfrac{x^{-\frac{1}{2}}\sqrt[3]{y}}{\sqrt[4]{xy^{-1}}}\right)^{\frac{1}{3}}\cdot\left(\dfrac{x^{-\frac{3}{8}}}{y^{-\frac{2}{3}}}\right)^{\frac{4}{3}}$, pentru $x=5$; $y=20$.

Să se calculeze: $\left(x^{-2}+a^{-\frac{2}{3}}x^{-\frac{4}{3}}\right)^{-\frac{1}{2}}+\left(a^{-2}+a^{-\frac{4}{3}}x^{-\frac{2}{3}}\right)^{-\frac{1}{2}}$ pentru $x=\left(1-a^{-\frac{2}{3}}\right)^{-\frac{3}{2}}$

Să se calculeze: $\left(x^{\frac{1}{2}}+y^{\frac{1}{2}}\right)^{-2}\cdot\left(x^{-1}+y^{-1}\right)+\dfrac{2}{\left(x^{\frac{1}{2}}+y^{\frac{1}{2}}\right)^{3}}\cdot\left(x^{-\frac{1}{2}}+y^{-\frac{1}{2}}\right),$

dacă se dă că: $\sqrt[3]{x}=\left(\dfrac{2\sqrt{3}}{9}\right)^{-\frac{1}{3}}$; $\sqrt[7]{y}=\sqrt[7]{2}\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)^{-1}$.

Să se arate că, pentru orice $a>0$, $b>0$, $c>0$ şi $\sqrt{abc}>2$, are loc identitatea

$$\frac{\sqrt{\dfrac{abc+4}{a}-4\sqrt{\dfrac{bc}{a}}}}{\sqrt{abc}-2}=\frac{1}{\sqrt{a}}.$$

Să se arate că funcţia putere $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^{2m+1}$ este bijectivă.

Să se arate că funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=ax^4+bx+c$, $a\neq 0$ nu este injectivă.

Fie funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^{2000}-2x+1$. Să se arate că f nu este injectivă.

Fie funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2\cdot\sqrt[3]{x}$. Să se arate că f este bijectivă şi să se determine inversa sa f^{-1}.

1.1. Puteri cu exponent real

În capitolul precedent s-a definit puterea cu exponent raţional şi s-au studiat o serie de proprietăţi ale puterilor cu exponent raţional oarecare. În cele ce urmează, vom folosi în special proprietăţile date de următoarea teoremă.

T e o r e m a 1. *1°* Dacă $a > 1$ este un număr real, atunci dintre două puteri cu exponent raţional pozitiv ale acestui număr, este mai mare aceea al cărei exponent este mai mare.

2° Dacă $0 < a < 1$ este un număr real, atunci dintre două puteri cu exponent raţional pozitiv ale acestui număr, este mai mare aceea al cărei exponent este mai mic.

Demonstraţie. *1°* Într-adevăr, fie $\frac{m}{n} > \frac{p}{q} > 0$ două numere raţionale pozitive. Avem $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$ şi $a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{a^p}$. Aducem aceşti radicali la radicali de acelaşi ordin:

$$\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[nq]{a^{mq}}, \quad \sqrt[q]{a^p} = \sqrt[nq]{a^{np}}.$$

Cum $\frac{m}{n} > \frac{p}{q}$, rezultă că $mq > np$. Dar cum $a > 1$, rezultă $a^{mq} > a^{np}$, de unde $\sqrt[nq]{a^{mq}} > \sqrt[nq]{a^{np}}$ sau $a^{\frac{m}{n}} > a^{\frac{p}{q}}$.

2° Demonstraţia este analoagă cu cea de la punctul *1°* şi, de aceea, o omitem.

Exemple

1. Avem $1{,}21 < 1{,}22$. De aceea $2^{1,21} < 2^{1,22}$; $\left(\frac{1}{2}\right)^{1,21} > \left(\frac{1}{2}\right)^{1,22}$.

2. Avem $0{,}3 < 0{,}4$. De aceea $\left(\sqrt{3}\right)^{0,3} < \left(\sqrt{3}\right)^{0,4}$; $\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^{0,3} > \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^{0,4}$

În continuare vom defini puterea cu exponent real oarecare de bază pozitivă, astfel încât aceasta să coincidă pentru exponent raţional cu cea introdusă mai înainte.

Mai precis, dacă $a > 0$ este un număr real pozitiv, iar x un număr real oarecare, ne propunem să dăm sens expresiei a^x.

Amintim, mai întâi, câteva cunoştinţe privind aproximările zecimale ale numerelor reale.

Fie x un număr real oarecare reprezentat sub formă de fracție zecimală infinită, adică $x = x_0, x_1x_2x_3 \dots x_n \dots$. Pentru numărul x, aproximările zecimale cu o eroare mai mică decât 10^{-n} sunt:

i) prin lipsă: $x_n^{'} = x_0, x_1x_2x_3 \dots x_n$;

ii) prin adaos: $x_n^{''} = x_0, x_1x_2x_3 \dots x_n + 10^{-n}$.

Așadar, numărului x i-am asociat aproximările sale zecimale:

$$\text{prin lipsă: } x_0^{'}, x_1^{'}, x_2^{'}, x_3^{'}, \dots,$$

$$\text{prin adaos: } x_0^{''}, x_1^{''}, x_2^{''}, x_3^{''}, \dots,$$

astfel încât

$$x_0^{'} \le x < x_0^{''},$$
$$x_1^{'} \le x < x_1^{''},$$
$$x_2^{'} \le x < x_2^{''},$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots$$

Observăm că aproximările zecimale prin lipsă și prin adaos ale unui număr real x sunt întotdeauna numere raționale.

1. Puteri cu exponent real pozitiv

Pentru definirea puterii de bază $a > 0$, cu exponent real, distingem două cazuri, după cum baza este supraunitară sau subunitară:

1° $a > 1$. Fie $x > 0$ un număr real și să considerăm aproximările zecimale prin lipsă și prin adaos cu o eroare mai mică decât 10^{-n}. Atunci, pentru orice n, avem

$$x_n^{'} \le x < x_n^{''}.$$

După cum am observat, numerele $x_n^{'}$, $x_n^{''}$ sunt raționale pozitive și deci conform definiției puterilor cu exponent rațional, au sens puterile $a^{x_n^{'}}$ și $a^{x_n^{''}}$, pentru orice n.

Mai mult, după punctul *1°* al teoremei 1, rezultă că $a^{x_n^{'}} < a^{x_n^{''}}$.

Definiție. Fie $a > 1$ și x un număr real pozitiv. Se numește *puterea x a lui a* un număr real y care, pentru orice număr natural n, satisface inegalitățile:

$$a^{x_n^{'}} \le y < a^{x_n^{''}}.$$

Se poate demonstra că un astfel de număr real y există și, mai mult, este unic. Demonstrația riguroasă a acestui fapt depășește programa clasei a X-a. Ea necesită noțiunea de limită și se va studia la Analiză matematică în clasa a XI-a.

Numărul y dat de definiția precedentă se notează a^x și se citește *a la puterea x*.

Exemplu

Să explicăm ce trebuie înțeles prin $3^{\sqrt{2}}$. Aproximările zecimale ale lui $\sqrt{2}$ sunt următoarele:

prin lipsă: 1; 1,4; 1,41; 1,414; ...,

prin adaos: 2; 1,5; 1,42; 1,415; ...;

astfel încât

$$\begin{aligned}
1 &\le \sqrt{2} < 2,\\
1{,}4 &\le \sqrt{2} < 1{,}5,\\
1{,}41 &\le \sqrt{2} < 1{,}42,\\
1{,}414 &\le \sqrt{2} < 1{,}415,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

Numărul care ne interesează $y = 3^{\sqrt{2}}$ îndeplineşte inegalităţile:

$$\begin{aligned}
3^{1} &\le y < 3^{2},\\
3^{1,4} &\le y < 3^{1,5},\\
3^{1,41} &\le y < 3^{1,42},\\
3^{1,414} &\le y < 3^{1,415},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

2° $0 < a < 1$. Dacă $x > 0$ este un număr real, avem: $x_n' \le x < x_n''$.

După punctul *2°* al teoremei 1, rezultă că $a^{x_n''} < a^{x_n'}$.

Definiţie. Fie $0 < a < 1$ şi x un număr real pozitiv. Se numeşte *puterea x a lui a* un număr real y care, pentru orice număr natural n, satisface inegalităţile:

$$a^{x_n''} < y \le a^{x_n'}.$$

Se poate demonstra că un astfel de număr real y există şi, mai mult, este unic.

Exemplu

Să explicăm ce trebuie înţeles prin $\left(\frac{1}{3}\right)^{\sqrt{2}}$. Având în vedere cele de mai înainte, precum şi tabelul aproximărilor zecimale ale lui $\sqrt{2}$ din exemplul precedent, numărul care ne interesează $y = \left(\frac{1}{3}\right)^{\sqrt{2}}$ îndeplineşte inegalităţile:

$$\begin{aligned}
\left(\frac{1}{3}\right)^{2} &< y \le \left(\frac{1}{3}\right)^{1},\\
\left(\frac{1}{3}\right)^{1,5} &< y \le \left(\frac{1}{3}\right)^{1,4},\\
\left(\frac{1}{3}\right)^{1,42} &< y \le \left(\frac{1}{3}\right)^{1,41},\\
\left(\frac{1}{3}\right)^{1,415} &< y \le \left(\frac{1}{3}\right)^{1,414},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

Vom adăuga că, pentru orice număr real x, $1^{x} = 1$.

În final, trebuie menţionată o proprietate importantă a puterilor cu exponent pozitiv, şi anume:

Oricare ar fi $a > 0$ şi $x > 0$, avem $a^x > 0$.

Într-adevăr, fie x_n', x_n'' aproximările zecimale ale lui x prin lipsă, respectiv prin adaos. Atunci, pentru orice n, avem:

1° Dacă $a > 1$, atunci

$$a^{x_n'} \leq a^x < a^{x_n''}.$$

2° Dacă $0 < a < 1$, atunci

$$a^{x_n''} < a^x \leq a^{x_n'}.$$

Numerele x_n', x_n'' sunt raţionale şi pozitive. De aceea $a^{x_n''} > 0$ şi $a^{x_n'} > 0$, pentru orice $a > 0$. Atunci, evident $a^x > 0$, deoarece este cuprins între două numere pozitive.

2. Puteri cu exponent real negativ

Dacă $a > 0$ şi x este un număr real negativ, atunci prin definiţie

$$a^x = \frac{1}{a^{-x}} \tag{1}$$

Deoarece numărul $-x$ este pozitiv, a^{-x} a fost definit la punctul 1. Mai mult, am demonstrat că $a^{-x} \neq 0$, pentru $-x > 0$.

Exemplu

$3^{-\sqrt{5}} = \frac{1}{3^{\sqrt{5}}}$; $\left(\frac{1}{3}\right)^{-\sqrt{5}} = \frac{1}{\left(\frac{1}{3}\right)^{\sqrt{5}}}$. Am demonstrat că dacă $x > 0$, atunci $a^{-x} > 0$.

Cum $a^{-x} = \frac{1}{a^x}$, rezultă că şi pentru $x < 0$, avem $a^x > 0$.

Amintim că pentru $a \neq 0$, am convenit să punem $a^0 = 1$.

Astfel am definit puterea unui număr pozitiv cu orice exponent real. Puterea unui număr negativ cu exponent real, în general, nu este definită.

3. Proprietăţi ale puterilor cu exponent real

Fie $a > 0$ şi $b > 0$ (numere reale pozitive). Atunci , pentru x şi y numere reale, avem:

1. $a^x \cdot a^y = a^{x+y}$;
2. $\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$;
3. $(ab)^x = a^x b^x$;
4. $\left(\frac{a}{b}\right)^x = \frac{a^x}{b^x}$;
5. $(a^x)^y = a^{xy}$.

Pe baza definiţiei puterii cu exponent real dată mai înainte şi folosind proprietăţile corespunzătoare ale puterii cu exponent raţional, verificarea acestora se face fără dificultate. Lăsăm ca exerciţiu demonstrarea lor.

Exemple

1. $\left(\frac{1}{2}\right)^{-\sqrt{3}} = (2^{-1})^{-\sqrt{3}} = 2^{\sqrt{3}}$.

2. $\left[\left(\frac{1}{2}\right)^{\sqrt{3}}\right]^{-\sqrt{27}} = \left(\frac{1}{2}\right)^{-\sqrt{81}} = \left(\frac{1}{2}\right)^{-9} = (2^{-1})^{-9} = 2^{9} = 512$.

3. $\frac{7^{\sqrt{8}}}{7^{\sqrt{2}}} = 7^{\sqrt{8}-\sqrt{2}} = 7^{2\sqrt{2}-\sqrt{2}} = 7^{\sqrt{2}}$.

1.2. Funcţia exponenţială

Fie $a > 0$ un număr real pozitiv. Am văzut în paragraful 1.1. că oricare ar fi numărul real x, avem $a^x > 0$.

Definiţie. Funcţia $f : \mathbb{R} \to (0, \infty), f(x) = a^x$, unde $a > 0$, se numeşte *funcţie exponenţială (de bază a).*

Observaţie. Pentru $a = 1$ se obţine funcţia constantă $f : \mathbb{R} \to (0, \infty), f(x) = 1$ şi de aceea acest caz nu prezintă un interes special.

Enunţăm în continuare o serie de proprietăţi importante ale funcţiei exponenţiale.

1. Dacă $a > 1$, atunci pentru $x > 0$ avem $a^x > 1$, iar pentru $x < 0$ avem $a^x < 1$. Dacă $a < 1$, atunci pentru $x > 0$ avem $a^x < 1$, iar pentru $x < 0$ avem $a^x > 1$.

Demonstraţie. Fie $a > 1$ şi $x > 0$. Dacă x este raţional, adică $x = \frac{m}{n}$, atunci $a^x = a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$. Cum $a > 1$, rezultă că şi $a^m > 1$, dar atunci şi $\sqrt[n]{a^m} > 1$. Dacă x este un număr real pozitiv oarecare, fie x_n' şi x_n'', pentru orice n, aproximările zecimale prin lipsă şi prin adaos ale lui x. Atunci

$$x_n' \le x < x_n''.$$

Cum $a > 1$, rezultă că pentru orice n avem

$$a^{x_n'} \le a^x < a^{x_n''}.$$

Dar x_n' este raţional pozitiv şi, după cum am observat mai înainte, $a^{x_n'} > 1$, de unde $a^x > 1$.

Dacă $x < 0$, atunci avem $a^x = \frac{1}{a^{-x}}$. Dar $-x > 0$ şi deci $a^{-x} > 1$. Prin urmare,

$$a^x = \frac{1}{a^{-x}} < 1.$$

Cazul în care $0 < a < 1$ se tratează analog; îl lăsăm ca exerciţiu.

2. Dacă $x = 0$, atunci independent de $a > 0$ avem $a^x = 1$. Aceasta rezultă din definţia puterii nule.

3. Pentru $a > 1$, funcţia exponenţială $f(x) = a^x$ este strict crescătoare, iar pentru $0 < a < 1$ este strict descrescătoare.

Demonstraţie. Fie $a > 1$ şi $x_1 < x_2$. Să arătăm că

$$a^{x_1} < a^{x_2}.$$

Într-adevăr, din $x_1 < x_2$ rezultă că există $u > 0$ astfel încât $x_2 = x_1 + u$. Atunci

$$a^{x_1} - a^{x_2} = a^{x_1} - a^{x_1+u} = a^{x_1}(1 - a^u).$$

Deoarece $u > 0$, după proprietatea 1 a funcţiei exponenţiale rezultă $a^u > 1$. Aşadar, $a^{x_1} > 0$ şi $1 - a^u < 0$, de unde $a^{x_1}(1 - a^u) < 0$. Înseamnă că $a^{x_1} - a^{x_2} < 0$ sau $a^{x_1} < a^{x_2}$. Deci din $x_1 < x_2$ rezultă $a^{x_1} < a^{x_2}$, adică funcţia $f(x) = a^x$ este strict crescătoare.

Analog se demonstrează că pentru $0 < a < 1$ funcţia $f(x) = a^x$ este strict descrescătoare.

4. Funcţia exponenţială $f: \mathbb{R} \to (0, \infty), f(x) = a^x$ $(a > 0, a \neq 1)$ este bijectivă.

Demonstraţie. Să arătăm mai întâi că f este injectivă. Fie, pentru aceasta, $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ astfel încât $x_1 \neq x_2$. Atunci avem $x_1 < x_2$ sau $x_1 > x_2$. Să presupunem, de exemplu, că $x_1 < x_2$. Atunci, după monotonia funcţiei exponenţiale (proprietatea 3) rezultă:

1. dacă $a > 1$, atunci $f(x_1) < f(x_2)$ şi deci $f(x_1) \neq f(x_2)$;
2. dacă $0 < a < 1$, atunci $f(x_1) > f(x_2)$ şi deci $f(x_1) \neq f(x_2)$.

Analog, rezultă pentru $x_1 > x_2$. Deci f este injectivă. Demonstraţia faptului că funcţia exponenţială f este surjectivă depăşeşte programa clasei a X-a. Ea necesită noţiunea de continuitate şi se va face la Analiză matematică în clasa a XI-a. Cu alte cuvinte, se poate demonstra că oricare ar fi $y_0 > 0$ un număr real pozitiv, există un număr real x_0 astfel încât $a^{x_0} = y_0$ (conform injectivităţii funcţiei f, rezultă că x_0 este unic).

5. Funcţia exponenţială $f(x) = a^x$ este inversabilă. Această proprietate este evidentă, deoarece orice funcţie bijectivă este inversabilă.

În §2 ne vom ocupa de studiul inversei funcţiei exponenţiale.

1.3. Graficul funcţiei exponenţiale

Pe aceeaşi figură vom reprezenta graficul funcţiilor $f(x) = 2^x$ şi $g(x) = 5^x$, iar pe alta al funcţiilor $h(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ şi $k(x) = \left(\frac{1}{5}\right)^x$. Trasarea fiecărui grafic se face „prin puncte”. Asociem tabelele de valori următoare:

x	$-\infty$	-3	-2	-1	0	1	2	3	$+\infty$
$f(x) = 2^x$		$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8	
$h(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$		8	4	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	

Observăm că pentru $x = \pm 2, \pm 3$ şi, în general, pentru x întreg diferit de ± 1, valorile funcţiilor $g(x) = 5^x$ şi $k(x) = \left(\frac{1}{5}\right)^x$ sunt ori foarte mari, ori foarte mici, deci punctele corespunzătoare sunt greu de figurat pe grafic. De aceea, în acest caz, vom lua pentru x valori fracţionare cuprinse între -1 şi 1, ca de exemplu: $x = -1, -\frac{3}{4}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}, 0, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, 1.$

Valorile funcţiilor vor fi calculate aproximativ. Astfel:

$$5^0 = 1;$$
$$5^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{5} = \sqrt{\sqrt{5}} \approx \sqrt{2{,}2360} \approx 1{,}5;$$
$$5^{\frac{1}{2}} = \sqrt{5} \approx 2{,}24;$$
$$5^{\frac{3}{4}} = \sqrt[4]{5^3} = \left(\sqrt[4]{5}\right)^3 \approx 3{,}34;$$
$$5^1 = 5;$$
$$5^{-\frac{1}{4}} = \frac{1}{5^{\frac{1}{4}}} \approx \frac{1}{1{,}5} \approx 0{,}66; \text{ ş.a.m.d.}$$

x	$-\infty$	-1	$-\frac{3}{4}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{4}$	1	$+\infty$
$g(x) = 5^x$		0,2	0,3	0,45	0,66	1	1,5	2,24	3,34	5	
$k(x) = \left(\frac{1}{5}\right)^x$		5	3,34	2,24	1,5	1	0,66	0,45	0,3	0,2	

Prezentăm într-un sistem de axe xOy punctele ale căror coordonate sunt valorile din tabelele de mai sus. Punctele obţinute le unim printr-o linie continuă.

În figura 1 sunt reprezentate graficele funcţiilor $f(x) = 2^x$ şi $g(x) = 5^x$, iar în figura 2 sunt reprezentate graficele funcţiilor $h(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ şi $k(x) = \left(\frac{1}{5}\right)^x$.

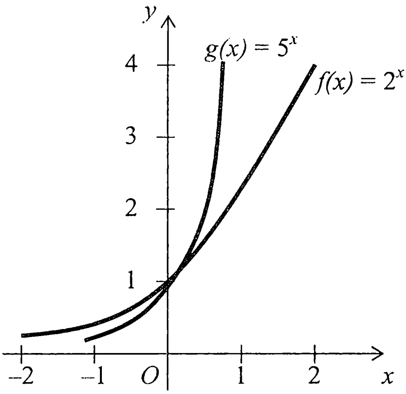


Fig. 1

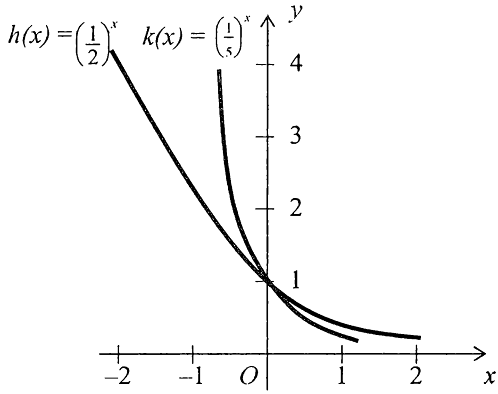


Fig. 2

Analizând graficul funcţiei exponenţiale pentru diverse baze, constatăm că el are următoarele proprietăţi:

1) Trece prin punctul de coordonate (0, 1) de pe axa Oy.

2) Graficul funcţiei exponenţiale este constituit dintr-o singură ramură care „urcă" pentru baza $a > 1$ şi „coboară" pentru baza $0 < a < 1$.

3) Graficul funcţie exponenţiale este din ce în ce mai „apropiat" de axele Ox şi Oy cu cât a este mai mare, dacă $a > 1$, sau cu cât a este mai mic, dacă $0 < a < 1$.

Să se afle care număr din perechile de numere următoare este mai mare:

a) $3^{\frac{4}{5}}$ şi $3^{\frac{5}{6}}$;

b) $\sqrt[11]{6^3}$ şi $\sqrt[15]{6^7}$;

c) $\left(\frac{2}{5}\right)^{\frac{7}{2}}$ şi $\left(\frac{2}{5}\right)^4$;

d) $(0,5)^{-13}$ şi 2^{13};

e) $\left(\sqrt{3}\right)^{-6}$ şi $\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^6$;

f) $2^{-\sqrt{5}}$ şi $2^{-\sqrt{3}}$.

g) $5^{\sqrt{3}}$ şi $5^{\sqrt{2,5}}$;

h) $\sqrt[6]{\left(\frac{7}{8}\right)^{38}}$ şi $\sqrt[5]{\left(\frac{7}{8}\right)^{33}}$;

Să se aducă la forma cea mai simplă expresiile:

a) $\left(\frac{1}{2}\right)^{13}\cdot 4^{\frac{\sqrt{3}}{2}}\cdot\left(\frac{1}{8}\right)^{\sqrt{27}}\cdot 16^3$;

b) $\frac{12^{\sqrt{48}}}{4^{\sqrt{108}}}\cdot\frac{2^{27\sqrt{3}}}{6^{\sqrt{27}}}$;

c) $\left[\left(\sqrt[3]{5}\right)^{\sqrt{5}}\right]^{-3\sqrt{5}}$;

d) $\left[\left(\sqrt{8}\right)^{-4\frac{1}{3}}\right]^{\frac{\sqrt{6}}{26}}$.

Să se afle mulţimea valorilor lui x pentru care este adevărată inegalitatea:

a) $3^x \geq 729$;

b) $2^x \leq 0,25$;

c) $2^x > \frac{1}{128}$;

d) $3^x < 3$;

e) $\left(\sqrt{2}\right)^x\cdot 2 > \frac{1}{8}$;

f) $(0,01)^2\left(\sqrt{10}\right)^x < 1$;

g) $\left(\frac{1}{81}\right)^x\sqrt{3} > 1$;

h) $\left(\frac{1}{\sqrt[5]{0,5}}\right)^x < \frac{1}{4}$;

i) $32\left(\sqrt[3]{2}\right)^x > 0,25$.

Să se compare m şi n dacă este adevărată inegalitatea:

a) $(3\pi)^m > (3\pi)^n$; c) $\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)^m \geq \left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)^n$;

b) $\left(\frac{5\pi}{16}\right)^m < \left(\frac{5\pi}{16}\right)^n$; d) $\left(\sqrt{7}-\sqrt{3}\right)^m \leq \left(\sqrt{7}-\sqrt{3}\right)^n$.

Deduceţi care din numerele următoare este mai mare decât 1 şi care este mai mic decât 1:

a) $\left(\frac{1}{5}\right)^{\sqrt{5}}$; c) $\left(\frac{1}{5}\right)^{\sqrt{3}}$; e) $\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)^{-\frac{3}{2}}$;

b) $\left(\sqrt{5}\right)^{\frac{1}{2}}$; d) $\left(\sqrt{2}-1\right)^{-\frac{3}{2}}$; f) $\left(\frac{\pi+1}{4}\right)^{-\sqrt{2}}$

Să se afle care număr din perechile de numere următoare este mai mare:

a) $\pi^{-\sqrt{2}}$ şi $\left(\frac{1}{\pi}\right)^{-\sqrt{2}}$; c) $\left(\frac{2}{5}\right)^{1+\sqrt{6}}$ şi $\left(\frac{2}{5}\right)^{\sqrt{2}+\sqrt{5}}$;

b) $\left(\frac{\pi}{6}\right)^{1+\sqrt{3}}$ şi $\left(\frac{\pi}{6}\right)^{2}$; d) $\left(\sqrt{5}\right)^{\sqrt{2}-\sqrt{5}}$ şi $\left(\sqrt{5}\right)^{\sqrt{3}-2}$.

Să se afle x astfel încât $a^x > \left(\frac{1}{a}\right)^x$, unde $a > 0$ este un număr real pozitiv.

Să se spună dacă sunt echivalente inegalităţile următoare:

a) $a^x > a^4$ şi $x > 4$; c) $\left(\frac{1}{9}\right)^x > \left(\frac{1}{3}\right)^{x-1}$ şi $2x < x-1$;

b) $6^{x^2} < 6^x$ şi $x^2 < x$; d) $8^{x^2} < 4$ şi $3x^2 \geq 2$.

Să se traseze graficul funcţiilor $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, unde:

a) $f(x) = 2^{x-2}$; c) $f(x) = 2^{|x|}$; e) $f(x) = 2^x - 2$;

b) $f(x) = 2^{x+2}$; d) $f(x) = 2^{-|x|}$; f) $f(x) = 2^x + 2$.

Să se traseze graficul funcţiilor $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, unde:

a) $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^{x-1}$; c) $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^{|x|}$; e) $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^{x} - 1$;

b) $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^{x+1}$; d) $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^{-|x|}$; f) $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^{x} + 1$.

2.1. Definiţia logaritmului unui număr pozitiv

Fie $a > 0$ un număr real pozitiv, $a \neq 1$. Considerăm ecuaţia exponenţială

$$a^x = N, \quad N > 0. \tag{1}$$

Din proprietatea 4 (punctul 1.2.) rezultă că ecuaţia (1) are o soluţie care este unic determinată. Această soluţie se notează

$$x = \log_a N \tag{2}$$

şi se numeşte *logaritmul numărului pozitiv N în baza a.*

Din (1) şi (2) obţinem egalitatea

$$a^{\log_a N} = N \tag{3}$$

care ne arată că logaritmul unui număr real pozitiv este exponentul la care trebuie ridicată baza a ($a > 0$, $a \neq 1$) *pentru a obţine numărul dat.*

Dacă în (1) facem $x = 1$, obţinem $a^1 = a$ şi deci

$$\log_a a = 1. \tag{4}$$

Exemple

1. Să calculăm $\log_2 32$. Cum $2^5 = 32$, atunci din definiţia logaritmului avem $\log_2 32 = 5$.

2. Să determinăm $\log_2 \frac{1}{16}$. Din egalitatea $2^{-4} = \frac{1}{16}$, obţinem $\log_2 \frac{1}{16} = -4$.

3. Să determinăm $\log_{\frac{1}{3}} 27$. Să considerăm ecuaţia exponenţială $\left(\frac{1}{3}\right)^x = 27$.

Cum $\left(\frac{1}{3}\right)^{-3} = \frac{1}{3^{-3}} = 27$, obţinem $x = -3$ şi deci $\log_{\frac{1}{3}} 27 = -3$.

4. Să determinăm $\log_4 256$. Cum $4^4 = 256$, atunci din definiţia logaritmului obţinem $\log_4 256 = 4$.

Observaţii. 1. În practică se folosesc logaritmii în bază zece care se mai numesc şi logaritmi zecimali. Aceştia se notează lg în loc de $\log_{10}$; de aceea nu mai este nevoie să se specifice baza. Astfel, vom scrie lg106 în loc de $\log_{10} 106$ şi lg5 în loc de $\log_{10} 5$ etc.

2. În matematica superioară apar foarte des logaritmi care au ca bază numărul iraţional, notat cu e, $e = 2{,}718281828\ldots$. Folosirea acestor logaritmi permite simplificarea multor formule matematice. Logaritmii în baza e apar în rezolvarea unor probleme fizice şi intră în mod natural în descrierea matematică a unor procese chimice, biologice ş.a. De aceea aceşti logaritmi se numesc naturali. Logaritmul natural al numărului a se notează $\ln a$.

2.2. Funcţia logaritmică

Fie $a > 0$, $a \neq 1$ un număr real. La punctul 2.1 am definit noţiunea de logaritm în baza a; fiecărui număr pozitiv N i s-a asociat un număr real bine determinat.

Definiţie. Funcţia $f: (0, +\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \log_a x$, $a > 0$, $a \neq 1$ se numeşte *funcţie logaritmică.*

Iată câteva proprietăţi ale funcţiei logaritmice:

1° $f(1) = 0$.

Într-adevăr, cum $a^0 = 1$, rezultă că $\log_a 1 = 0$ şi deci $f(1) = 0$.

2° Funcţia logaritmică este monotonă. Mai exact, dacă $a > 1$, *atunci funcţia logaritmică este strict crescătoare, iar dacă* $0 < a < 1$, *funcţia logaritmică este strict descrescătoare.*

Într-adevăr, să considerăm cazul $a > 1$ şi fie $x_1, x_2 \in (0, +\infty)$ astfel încât $x_1 < x_2$. Cum $x_1 = a^{\log_a x_1}$ şi $x_2 = a^{\log_a x_2}$, rezultă că $a^{\log_a x_1} < a^{\log_a x_2}$.

Dar funcţia exponenţială fiind crescătoare (a se vedea §1) obţinem că $\log_a x_1 < \log_a x_2$, adică $f(x_1) < f(x_2)$.

În cazul $0 < a < 1$, din inegalitatea $a^{\log_a x_1} < a^{\log_a x_2}$ şi din faptul că funcţia exponenţială cu baza un număr real $0 < a < 1$ este strict descrescătoare, rezultă că $\log_a x_1 > \log_a x_2$, adică $f(x_1) > f(x_2)$.

3° Funcţia logaritmică este bijectivă.

Într-adevăr, dacă $x_1, x_2 \in (0, +\infty)$ astfel încât $f(x_1) = f(x_2)$, atunci din $\log_a x_1 = \log_a x_2$. Dar din egalitatea (3) din §2 obţinem $x_1 = a^{\log_a x_1}$ şi $x_2 = a^{\log_a x_2}$, adică $x_1 = x_2$. Deci f este o funcţie injectivă.

Fie $y \in \mathbb{R}$ un număr real oarecare. Notăm $x = a^y$. Se vede că $x \in (0, +\infty)$ şi $\log_a x = \log_a a^y = y$. Deci $f(x) = y$, ceea ce ne arată că f este şi surjectivă. Aşadar, f este bijectivă.

4° Inversa funcţiei logaritmice este funcţia exponenţială.

Funcţia logaritmică $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \log_a x$, fiind bijectivă, este inversabilă. Inversa ei este funcţia exponenţială $g : \mathbb{R} \to (0, +\infty)$, $g(x) = a^x$.

Într-adevăr, dacă $x \in (0, +\infty)$ avem $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(\log_a x) = a^{\log_a x} = x$ şi dacă $y \in \mathbb{R}$, atunci $(f \circ g)(y) = f(g(y)) = f(a^y) = \log_a a^y = y$.

Graficul funcţiei logaritmice $f(x) = \log_a x$ *pentru* $a = 2, 5, \frac{1}{2}, \frac{1}{5}$.

Considerăm tabelele de valori:

x	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8	16
$\log_2 x$	–4	–3	–2	–1	0	1	2	3	4
$\log_{\frac{1}{2}} x$	4	3	2	1	0	–1	–2	–3	–4

x	$\frac{1}{625}$	$\frac{1}{125}$	$\frac{1}{25}$	$\frac{1}{5}$	1	5	25	125	625
$\log_5 x$	–4	–3	–2	–1	0	1	2	3	4
$\log_{\frac{1}{5}} x$	4	3	2	1	0	–1	–2	–3	–4

Reprezentăm într-un sistem de axe xOy punctele ale căror coordonate sunt valorile din tabelele de mai sus. Punctele obţinute le unim printr-o linie continuă.

În figura 3 sunt reprezentate graficele funcţiilor $f(x) = \log_2 x$ şi $g(x) = \log_5 x$, iar în figura 4 sunt reprezentate graficele funcţiilor $h(x) = \log_{\frac{1}{2}} x$ şi $k(x) = \log_{\frac{1}{5}} x$.

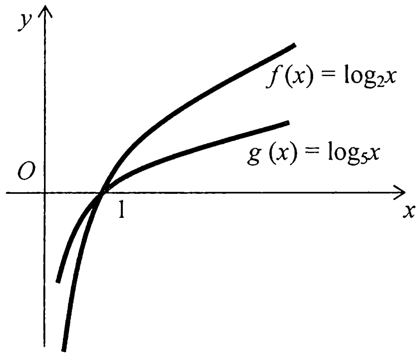


Fig. 3

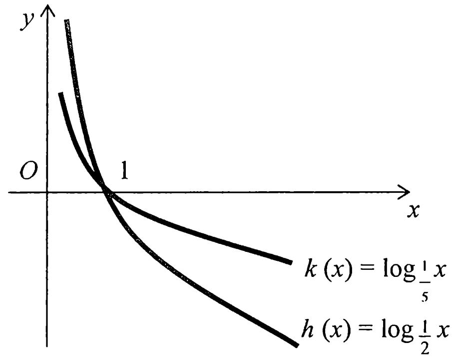


Fig. 4

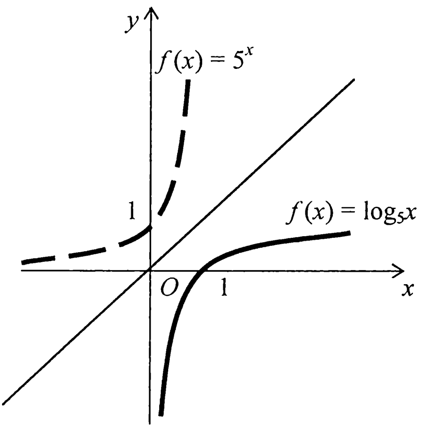


Fig. 5

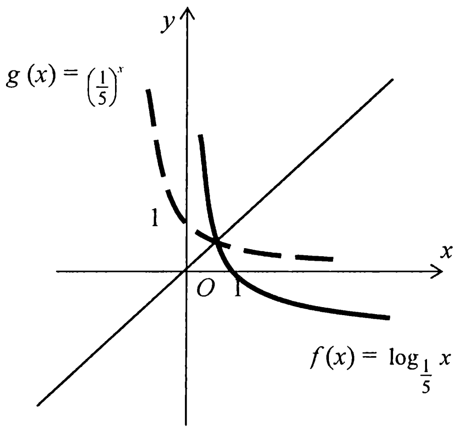


Fig. 6

Deoarece funcţia logaritmică este inversa funcţiei exponenţiale, graficele celor două funcţii sunt simetrice faţă de prima bisectoare. În figura 5 am reprezentat grafic funcţiile $f(x) = \log_5 x$ şi $g(x) = 5^x$, iar în figura 6 am reprezentat grafic funcţiile $f(x) = \log_{\frac{1}{5}} x$ şi $g(x) = \left(\frac{1}{5}\right)^x$.

Graficul funcţiei logaritmice are următoarele proprietăţi:

1) Trece prin punctul de coordonate (1, 0) de pe axa Ox.
2) Graficul funcţiei logaritmice este constituit dintr-o singură ramură care „urcă“ dacă baza $a > 1$ şi „coboară“ dacă $0 < a < 1$.

3) Graficul funcţiei logaritmice este din ce în ce mai „apropiat" de axele Ox şi Oy cu cât a este mai mare, dacă $a > 1$, sau cu cât a este mai mic, dacă $0 < a < 1$.
4) Graficul funcţiei logaritmice este simetricul graficului funcţiei exponenţiale faţă de bisectoarea unghiului xOy.

2.3. Proprietăţile logaritmilor

Folosind proprietăţile puterilor cu exponenţi reali obţinem următoarele proprietăţi pentru logaritmi:

1° Dacă A şi B sunt două numere pozitive, atunci

$$\log_a(AB) = \log_a A + \log_a B$$

(logaritmul produsului a două numere este egal cu suma logaritmilor celor două numere).

Într-adevăr, dacă $\log_a A = x$ şi $\log_a B = y$, atunci $a^x = A$ şi $a^y = B$. Cum $a^{x+y} = a^x \cdot a^y$, obţinem $a^{x+y} = A \cdot B$ şi deci $\log_a(AB) = x + y = \log_a A + \log_a B$.

Observaţie. Proprietatea se poate da pentru n numere pozitive $A_1, A_2, \ldots, A_n$, adică

$$\log_a(A_1 A_2 \ldots A_n) = \log_a A_1 + \log_a A_2 + \ldots + \log_a A_n.$$

2° Dacă A şi B sunt două numere pozitive, atunci

$$\log_a \frac{A}{B} = \log_a A - \log_a B$$

(logaritmul câtului a două numere este egal cu diferenţa dintre logaritmul numărătorului şi cel al numitorului).

Într-adevăr, ţinând cont de proprietatea 1°, avem $\log_a A = \log_a\left(\frac{A}{B} \cdot B\right) = \log_a \frac{A}{B} + \log_a B$, de unde rezultă că $\log_a \frac{A}{B} = \log_a A - \log_a B$.

Observaţie. Dacă punem $A = 1$ şi ţinem cont că $\log_a 1 = 0$, obţinem egalitatea:

$$\log_a \frac{1}{B} = -\log_a B$$

3° Dacă A este un număr pozitiv şi m un număr real arbitrar, atunci

$$\log_a A^m = m \log_a A$$

(logaritmul puterii unui număr este egal cu produsul dintre exponentul puterii şi logaritmul numărului).

Într-adevăr, dacă $\log_a A = x$, atunci $a^x = A$. Dar atunci $A^m = (a^x)^m = a^{mx}$ şi deci $\log_a A^m = mx = m \log_a A$.

4° Dacă A este un număr pozitiv şi n un număr natural ($n \geq 2$), atunci

$$\log_a \sqrt[n]{A} = \frac{\log_a A}{n}$$

(logaritmul unui radical dintr-un număr este egal cu câtul dintre logaritmul numărului şi ordinul radicalului).

Într-adevăr, proprietatea 4° este un caz particular al proprietăţii 3°, punând $m = \frac{1}{n}$.

Exemple

1. Să calculăm $\log_3 75$. Cum $\log_3 75 = \log_3(3 \cdot 25) = \log_3 3 + \log_3 25 = 1 + \log_3 5^2 = 1 + 2\log_3 5$.

2. Să determinăm $\log_2 1000 - \log_2 125$.

Avem $\log_2 1000 - \log_2 125 = \log_2 \frac{1000}{125} = \log_2 8 = \log_2 2^3 = 3$.

3. Să calculăm $\lg 0,18 - \lg 180$.

Avem $\lg 0,18 - \lg 180 = \lg \frac{0,18}{180} = \lg \frac{1}{1000} = \lg 10^{-3} = -3$.

4. Să calculăm $\log_6 \frac{1}{18} + \log_6 \frac{1}{12}$.

Avem $\log_6 \frac{1}{18} + \log_6 \frac{1}{12} = -\log_6 18 - \log_6 12 = -(\log_6 18 + \log_6 12) = -\log_6(18 \cdot 12) = -\log_6 6^3 = -3$.

5. Să calculăm $\log_2 \sqrt[4]{8}$. Avem $\log_2 \sqrt[4]{8} = \frac{1}{4}\log_2 8 = \frac{1}{4}\log_2 2^3 = \frac{3}{4}\log_2 2 = \frac{3}{4}$.

6. Să calculăm $\log_2 \sqrt[5]{81}$. Avem $\log_2 \sqrt[5]{81} = \frac{1}{5}\log_2 81 = \frac{1}{5}\log_2 3^4 = \frac{4}{5}\log_2 3$.

2.4. Schimbarea bazei logaritmului aceluiaşi număr

Dacă a şi b sunt două numere pozitive diferite de 1, iar A un număr pozitiv oarecare, are loc egalitatea:

$$\log_a A = \log_b A \cdot \log_a b$$

Într-adevăr, dacă $\log_a A = x$ şi $\log_b A = y$, atunci avem $a^x = A$ şi $b^y = A$, de unde obţinem $a^x = b^y$. Dar atunci $\log_a a^x = \log_a b^y$ sau $x \log_a a = y \log_a b$.

Cum $\log_a a = 1$, avem $x = y \log_a b$, adică $\log_a A = \log_b A \cdot \log_a b$.

Observaţie. Dacă în egalitatea de mai sus $A = a$, obţinem $\log_a a = \log_b a \cdot \log_a b$. Cum $\log_a a = 1$, rezultă că:

$$\log_a b = \frac{1}{\log_b a}$$

Exemple

1. Să se scrie $\log_2 x$ în funcţie de $\log_4 x$. Avem $\log_2 x = \log_4 x \cdot \log_2 4 = 2\log_4 x$.

2. Să se arate că expresia $E = \dfrac{\log_2 x}{\log_5 x}$ nu depinde de x.

Într-adevăr, $E = \dfrac{\log_2 x}{\log_2 x \cdot \log_5 2} = \dfrac{1}{\log_5 2} = \log_2 5$.

3. Să se arate că $\log_2 6 + \log_6 2 > 2$. Avem $\log_2 6 + \log_6 2 = \log_2 6 + \dfrac{1}{\log_2 6}$.

Deci trebuie să arătăm că $\log_2 6 + \dfrac{1}{\log_2 6} > 2$ sau $(\log_2 6)^2 - 2\log_2 6 + 1 > 0$, sau încă $(\log_2 6 - 1)^2 > 0$, inegalitate evidentă deoarece $\log_2 6 \neq 1$.

2.5. Operaţia de logaritmare a unei expresii

Să considerăm expresia:

$$E = \frac{17^3 \sqrt[4]{131} \cdot \sqrt[3]{92}}{\sqrt[5]{37 \cdot 98 \cdot 23}}$$

Vom logaritma expresia într-o anumită bază convenabilă a. Folosind proprietăţile logaritmilor, obţinem:

$$\log_a E = \log_a \left(17^3 \sqrt[4]{131}\, \sqrt[3]{92}\right) - \log_a \sqrt[5]{37 \cdot 98 \cdot 23} = \log_a 17^3 + \log_a \sqrt[4]{131} +$$

$$+ \log_a \sqrt[3]{92} - \frac{\log_a (37 \cdot 98 \cdot 23)}{5} = 3\log_a 17 + \frac{1}{4}\log_a 131 + \frac{1}{3}\log_a 92 -$$

$$-\frac{1}{5}\log_a 37 - \frac{1}{5}\log_a 98 - \frac{1}{5}\log_a 23.$$

Deci am obţinut egalitatea:

$$\log_a E = 3\log_a 17 + \frac{1}{4}\log_a 131 + \frac{1}{3}\log_a 92 - \frac{1}{5}\log_a 37 - \frac{1}{5}\log_a 98 - \frac{1}{5}\log_a 23.$$

În general, dacă E este o expresie algebrică în care apar produse de puteri şi radicali, putem să-i asociem, exact ca în exemplul de mai sus, o expresie, notată $\log E$, în care apar sume (diferenţe) de logaritmi înmulţite eventual cu anumite numere raţionale. Operaţia prin care expresiei E i se asociază expresia $\log E$ se numeşte „operaţie de logaritmare".

Exemple

1. Fie $E = a^2 \sqrt[7]{ab^6}$. Prin operaţia de logaritmare, obţinem:

$\log_c E = \log_c(a^2 \sqrt[7]{ab^6}) = \log_c a^2 + \log_c \sqrt[7]{ab^6} = 2\log_c a + \frac{1}{7}\log_c a + \frac{6}{7}\log_c b.$

2. Fie $E=\sqrt[4]{\frac{a^3}{b^5}}$. Prin operaţia de logaritmare, obţinem:

$$\log_c E=\log_c\sqrt[4]{\frac{a^3}{b^5}}=\frac{1}{4}\log_c\frac{a^3}{b^5}=\frac{1}{4}(\log_c a^3-\log_c b^5)=\frac{3}{4}\log_c a-\frac{5}{4}\log_c b.$$

Adesea în calcule este nevoie să se facă şi operaţia inversă, adică unei expresii în care intervin logaritmi să-i asociem o expresie fără logaritmi.

De exemplu, să considerăm expresia $\log_c E=2\log_c a-\frac{1}{2}\log_c b-3\log_c 3$. Folosind proprietăţile logaritmilor, avem:

$$\log_c E=\log_c a^2-\log_c\sqrt{b}-\log_c 3^3=\log_c\frac{a^2}{\sqrt{b}\cdot 3^3}=\log_c\frac{a^2}{27\sqrt{b}},$$

de unde obţinem că $E=\frac{a^2}{27\sqrt{b}}$.

Să se determine valorile lui x pentru ca următorii logaritmi să aibă sens:

a) $\log_2(1-x)$; d) $\log_4(x^2+x-2)$; g) $\log_4(\log_2 x)$;
b) $\log_2(1-x^2)$; e) $\log_3(-x^2+5x-6)$; h) $\log_{\frac{1}{2}}(\log_3 x)$;
c) $\log_{\frac{1}{2}}(1+x^2)$; f) $\log_5(x^2-x+1)$; i) $\log_{\frac{1}{2}}(\log_{\frac{1}{2}}x)$.

Care dintre următoarele numere este mai mare?

a) $\log_2 4$ sau $\log_2 5$; c) $\log_5\frac{1}{2}$ sau $\log_5\frac{1}{7}$;
b) 2 sau $\log_3 10$; d) 3 sau $\log_2 7$.

Determinaţi valorile lui x pentru care au loc inegalităţile:

a) $\log_3 x>\log_3 4$; c) $\log_2 x^2\geq\log_2 8$;
b) $\log_{\frac{1}{2}}(2x)\geq\log_{\frac{1}{2}}5$; d) $\log_6(x^2-1)\leq\log_6(4x+4)$.

Pornind de la graficul funcţiei logaritmice să se construiască graficele următoarelor funcţii:

a) $f:(-1,+\infty)\to\mathbb{R}, f(x)=\log_2(1+x)$;
b) $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}, f(x)=\log_2 x^3$;
c) $f:(1,+\infty)\to\mathbb{R}, f(x)=\log_5(x-1)$;
d) $f:\mathbb{R}\setminus\{0\}\to\mathbb{R}, f(x)=\log_5 x^2$;
e) $f:(2,+\infty)\to\mathbb{R}, f(x)=\log_{\frac{1}{2}}(x-2)$;
f) $f:\mathbb{R}\setminus\{3\}\to\mathbb{R}, f(x)=\log_6|x-3|$.

Să se calculeze:

a) $\log_2 5+\log_2\frac{4}{5}$; b) $\log_{12}2+\log_{12}72$;
c) $\log_5 1000-\log_5 40$; d) $\log_6 7-\log_6\frac{7}{36}$;
e) $\log_{0,1}50-\log_{0,1}0{,}5$; f) $\log_4 6+\log_4 8-\log_4 3$;
g) $\log_{\frac{1}{2}}3-\log_{\frac{1}{2}}12+\log_{\frac{1}{2}}2$; h) $\log_{0,1}5+\log_{0,1}4-\log_{0,1}2$.

Ştiind că lg 7 p şi lg 5 = q, să se exprime în funcţie de p şi q:

a) $\lg 0{,}7$; b) $\lg\sqrt[3]{7}$; c) $\lg 35$; d) $\lg 175$; e) $\lg 7\sqrt{5}$.

Să se arate că expresiile următoare nu depind de x:

a) $E = \dfrac{\log_7 x^2}{\log_8 x^2}$; b) $E = \dfrac{\log_2 x + \log_2 \sqrt{x}}{\log_3 x + \log_3 \sqrt{x}}$; c) $E = \dfrac{\log_x \sqrt{7}}{\log_x 7}$.

Să se logaritmeze expresiile:

a) $E = 41^2 \sqrt[13]{41\cdot 37^5}$; b) $E = \dfrac{31^3 \sqrt[7]{41\cdot 33^4}}{17^2 \sqrt[3]{23^2\cdot 29}}$; c) $E = a^2 \sqrt[5]{ab^3c}$.

d) $E = 23a^2 \sqrt[3]{b^2a^5}$; e) $E = \sqrt[6]{\left(\dfrac{a}{5b}\right)^7}$; f) $E = \left(\sqrt{\dfrac{a^3}{2b}}\right)^3$; g) $E = \dfrac{21}{4}\sqrt[5]{a\sqrt[3]{a}}$;

h) $E = \dfrac{a\sqrt{b\sqrt{a\sqrt{b\sqrt{a}}}}}{b\sqrt{a\sqrt{b\sqrt{a\sqrt{b}}}}}$; i) $E = \dfrac{2(a-b)}{3(a+b)}\sqrt{\dfrac{a+b}{a-b}}$; j) $E = \dfrac{\sqrt{a\sqrt[3]{a\sqrt{a}}}}{\sqrt{a\sqrt[3]{a\sqrt[4]{a}}}}$.

Să se determine expresia lui x astfel încât să avem:

a) $\log_a x = \log_a 3 + \log_a 4 - \log_a 5$; b) $\log_a x = 2\log_a 7 + 3\log_a 6 - 4\log_a 5$;

c) $\log_2 x = 2\log_2 a + 3\log_2(a+b) - 4\log_2(a-b)$;

d) $\log_4 x = -\dfrac{1}{2}\log_4(a+b) + \dfrac{1}{4}\left[\log_4(a-b) - \dfrac{2}{3}\log_4(a+b) + \dfrac{2}{3}\log_4(2b) - \right.$

$\left. - \dfrac{1}{2}\log_4(2a)\right]$.

3.1. Ecuaţii exponenţiale

Ecuaţia exponenţială este o ecuaţie în care necunoscuta este exponent sau o ecuaţie în care este exponent o expresie care conţine necunoscuta.

Astfel, ecuaţiile: $3^x = 2^{x-1}$; $5^{x^2-6} - 1 = 0$ şi $2^{x+3} + 4^{x+1} = 320$ sunt ecuaţii exponenţiale.

În practică, atunci când avem de rezolvat o ecuaţie exponenţială, vom proceda astfel: folosind diverse substituţii precum şi proprietăţile funcţiei exponenţiale, vom căuta s-o reducem la rezolvarea unor ecuaţii simple, de regulă de gradul întâi sau gradul al doilea.

Cele mai multe ecuaţii exponenţiale sunt reductibile la forma $a^{f(x)} = b$, cu $a > 0, b > 0, a \neq 1$.

Datorită injectivităţii funcţiei logaritmice, această ecuaţie este echivalentă cu:

$$f(x) = \log_a b.$$

În aplicaţiile practice, în aceste ecuaţii b se poate exprima, de obicei, ca putere a lui a, $b = a^\alpha$, de unde rezultă ecuaţia

$$f(x) = \alpha.$$

Exemplu

Să se rezolve ecuaţiile $2^{2x} = 64$; $3^{2^x} = 81$; $5^{x^2-x-2} = 625$.

Vom avea $2^{2x} = 2^6$, de unde rezultă $2x = 6$, adică $x = 3$.

Din ecuaţia $3^{2^x} = 81$, $3^{2^x} = 3^4$, deducem $2^x = 4$, $2^x = 2^2$ şi deci $x = 2$.

Pentru ultima ecuaţie, obţinem $5^{x^2-x-2} = 5^4$, deci $x^2 - x - 2 = 4$, de unde rezultă $x^2 - x - 6 = 0$. Avem, în final, $x_1 = 3$ şi $x_2 = -2$.

Unele ecuaţii exponenţiale se aduc la forma mai generală $a^{f(x)} = a^{g(x)}$. Din această ecuaţie ţinând cont de injectivitatea funcţiei exponenţiale, deducem că $f(x) = g(x)$, care apoi se rezolvă.

Exemple

1. Să se rezolve ecuaţia $3^{x-6} = 3^{15-2x}$.
Obţinem $x - 6 = 15 - 2x$, deci $3x = 21$, $x = 7$.

2. Să se rezolve ecuaţia $49^x = \left(\frac{1}{7}\right)^{x^2}$.

Obţinem $7^{2x} = 7^{-x^2}$, deci $2x = -x^2$, de unde deducem $x_1 = 0$, $x_2 = -2$.

Există ecuaţii exponenţiale care nu se pot reduce la nici una dintre formele discutate.

Exemple

1. $2^x = 3^{2x+1}$. Ţinând cont de injectivitatea funcţiei logaritmice, obţinem prin logaritmare ecuaţia echivalentă $x \lg 2 = (2x + 1) \lg 3$ şi deci $x(2 \lg 3 - \lg 2) = -\lg 3$, $x = \dfrac{-\lg 3}{2\lg 3 - \lg 2}$.

2. $5^{7^x} = 7^{5^x}$. Logaritmând, deducem $7^x \lg 5 = 5^x \lg 7$; logaritmând din nou, obţinem $x \lg 7 + \lg\lg 5 = x \lg 5 + \lg\lg 7$ şi deci $x = \dfrac{\lg\lg 7 - \lg\lg 5}{\lg 7 - \lg 5}$.

3. $3^{2x} \cdot 5^{2x-3} = 7^{x-1} \cdot 4^{x+3}$.

Deducem că $2x \lg 3 + (2x - 3) \lg 5 = (x - 1) \lg 7 + (x + 3) \lg 4$, prin urmare $x(2 \lg 3 + 2 \lg 5 - \lg 7 - \lg 4) = 3 \lg 5 - \lg 7 + 3 \lg 4$. În final, avem:

$$x = \frac{3\lg 5 - \lg 7 + 3\lg 4}{2\lg 3 + 2\lg 5 - \lg 7 - \lg 4} = \frac{\lg \dfrac{125 \cdot 64}{7}}{\lg \dfrac{225}{28}}.$$

4. Să considerăm în cele ce urmează ecuaţia $4^x + 2^x = 272$.

Pentru a rezolva ecuaţii de acest tip vom observa mai întâi că putem scrie $2^{2x} + 2^x - 272 = 0$ şi deci făcând substituţia $2^x = y$, obţinem: $y^2 + y - 272 = 0$, deci $y_1 = 16$, $y_2 = -17$.

Deoarece $2^x > 0$, rezultă că -17 nu poate fi egal cu 2^x şi deci singura soluţie se obţine din $2^x = 16$, $2^x = 2^4$, deci $x = 4$.

În unele situaţii, substituţia efectuată la exerciţiul precedent nu se poate face imediat în forma iniţială a exerciţiului. Să luăm, de exemplu, ecuaţia $6^x + 4^x = 9^x$.

Vom împărţi ambii termeni cu 9^x şi obţinem $\left(\frac{6}{9}\right)^x + \left(\frac{4}{9}\right)^x = 1$, $\left(\frac{2}{3}\right)^x + \left(\frac{2}{3}\right)^{2x} = 1$.

Făcând substituţia $\left(\frac{2}{3}\right)^x = y$, obţinem $y^2 + y - 1 = 0$ şi deci $y_{1,\,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$.

Deoarece $\frac{-1-\sqrt{5}}{2} < 0$, rezultă că singura soluţie a ecuaţiei o obţinem din

$$\left(\frac{2}{3}\right)^x = \frac{-1+\sqrt{5}}{2} \text{ şi deci } x = \frac{\lg\frac{\sqrt{5}-1}{2}}{\lg\frac{2}{3}}.$$

3.2. Ecuaţii logaritmice

Ecuaţiile logaritmice sunt ecuaţii în care expresiile ce conţin necunoscute apar ca bază sau ca argument al unor logaritmi.

De exemplu: $\log_{x+1}(x+2) = 1$; $\lg(x^2+x-2) = 3$; $\log_x(5x^2+3) = \lg(2x+3) - 1$.

Folosind injectivitatea funcţiei exponenţiale, avem că rezolvarea unei ecuaţii de tipul $\log_{g(x)} f(x) = b$ este echivalentă cu rezolvarea ecuaţiei $f(x) = g(x)^b$. Vom avea însă grijă ca soluţiile obţinute să satisfacă $f(x) > 0$, $g(x) > 0$, $g(x) \neq 1$, pentru care expresia $\log_{g(x)} f(x)$ are sens.

La fel ca la ecuaţiile exponenţiale, în practică atunci când avem de rezolvat o ecuaţie logaritmică, vom proceda astfel: folosind diverse substituţii precum şi proprietăţile logaritmilor, vom căuta s-o reducem la rezolvarea unor ecuaţii simple, de regulă de gradul întâi sau de gradul al doilea.

Exemplu

Să se rezolve ecuaţia: $\log_x(x^2 - 3x + 9) = 2$. Obţinem $x^2 - 3x + 9 = x^2$ şi deci $3x = 9$, $x = 3$. Deoarece pentru $x = 3 > 0$, expresia $x^2 - 3x + 9$ este pozitivă, rezultă că $x = 3$ este soluţie a ecuaţiei.

Rezolvarea altor ecuaţii se bazează pe injectivitatea funcţiei logaritmice, şi anume din $\log_a f(x) = \log_a g(x)$, deducem $f(x) = g(x)$, impunând condiţiile: $f(x) > 0$, $g(x) > 0$.

Exemple

1. Să se rezolve ecuaţia: $\lg(x^2 - 15) = \lg(x - 3)$. Deducem că $x^2 - 15 = x - 3$, deci $x^2 - x - 12 = 0$, adică $x_1 = 4$, $x_2 = -3$. Deoarece pentru $x_2 = -3$ obţinem $x - 3 = -3 - 3 = -6 < 0$, rezultă că $x_2 = -3$ nu este soluţie a ecuaţiei. Deci numai 4 este soluţie.

2. Să se rezolve ecuaţia: $2\lg(x-1) = \frac{1}{2}\lg x^5 - \lg\sqrt{x}$. În această ecuaţie punem de la început condiţiile $x - 1 > 0$, $x > 0$, pentru a avea sens expresiile $\lg(x-1)$, $\lg x^5$, $\sqrt{x}$, $\lg\sqrt{x}$.

Ecuaţia se mai scrie $2\lg(x-1) = \frac{5}{2}\lg x - \frac{1}{2}\lg x$ şi deci $2\lg(x-1) = 2\lg x$. Prin urmare, $\lg(x-1) = \lg x$, de unde obţinem $x - 1 = x$, $-1 = 0$, contradicţie; rezultă deci că ecuaţia dată nu are soluţii.

3. Să se rezolve ecuaţia: $\lg(x+7) + \lg(3x+1) = 2$. Punem condiţiile de existenţă a logaritmilor: $x + 7 > 0$ şi $3x + 1 > 0$, deci $x > -\frac{1}{3}$. Obţinem $\lg(x+7)(3x+1) = 2$ şi deci $(x+7)(3x+1) = 10^2 = 100$. Rezultă ecuaţia de gradul al doilea $3x^2 + 22x - 93 = 0$, de unde rezultă $x_1 = 3$ şi $x_2 = -\frac{31}{3}$. Deoarece $-\frac{31}{3} < -\frac{1}{3}$, obţinem că 3 este singura soluţie a ecuaţiei date.

Observaţie. Ecuaţia precedentă nu este echivalentă cu ecuaţia $\lg(x+7)(3x+1) = 2$, care are două soluţii $x_1 = 3$, $x_2 = -\frac{31}{3}$, deoarece pentru amândouă aceste valori ale lui x, $\lg(x+7)(3x+1)$ are sens.

4. Să se rezolve ecuaţia: $\log_3^2 x - 3\log_3 x - 4 = 0$. Avem condiţia $x > 0$ şi făcând substituţia $\log_3 x = y$, obţinem $y^2 - 3y - 4 = 0$. Deci $y_1 = 4$, $y_2 = -1$. Din $\log_3 x = 4$, obţinem $x = 3^4$, $x = 81$, iar din $\log_3 x = -1$, obţinem $x = 3^{-1}$, $x = \frac{1}{3}$.

În continuare vom rezolva câteva ecuaţii care nu se pot încadra într-un anumit tip. Astfel, pot apărea ecuaţii cu logaritmi scrişi în diferite baze, ecuaţii în care apar expresii conţinând necunoscute şi la exponenţi şi la logaritmi etc.

5. Să se rezolve ecuaţia: $\log_2 x + \log_3 x = 1$. Deducem, aplicând formula de schimbare a bazei, $\frac{\lg x}{\lg 2} + \frac{\lg x}{\lg 3} = 1$ sau $\lg x = \frac{\lg 2 \lg 3}{\lg 2 + \lg 3} = \frac{\lg 2 \lg 3}{\lg 6}$. Deci $x = 10^{\frac{\lg 2 \lg 3}{\lg 6}}$.

6. Să se rezolve ecuaţia: $\log_3 x + \log_x 3 = 2$. Deoarece $\log_x 3 = \frac{1}{\log_3 x}$, rezultă $\log_3 x + \frac{1}{\log_3 x} = 2$. Notând $\log_3 x = y$, obţinem $y + \frac{1}{y} = 2$, adică $y^2 - 2y + 1 = 0$; deci $y = 1$, adică $\log_3 x = 1$. Prin urmare, $x = 3$.

7. Să se rezolve ecuaţia: $x^{\lg x + 2} = 1000$. Punem condiţia de existenţă a expresiilor: $x > 0$. Logaritmând, obţinem o ecuaţie echivalentă $\lg\left(x^{\lg x+2}\right) = \lg 1000$ care devine $(\lg x + 2)\lg x = 3$. Notând $\lg x = y$, avem $y^2 + 2y - 3 = 0$ şi deci $y_1 = -3$, $y_2 = 1$. Din $\lg x = -3$, obţinem $x = 10^{-3}$, $x = 0{,}001$, iar din $\lg x = 1$, obţinem $x = 10$.

3.3. Sisteme de ecuaţii exponenţiale şi logaritmice

În astfel de sisteme se aplică metodele arătate anterior la ecuaţiile de tipul respectiv.

Exemple

1. Să se rezolve sistemul: $\begin{cases} 27^{2y-1} = 243 \cdot 3^{4x+2} \\ 3 \cdot 3^{x+y} = \sqrt{81^{2x-1}} \end{cases}$. Deoarece 27 = 3^3, 81 = 3^4, 243 = 3^5, obţinem $\begin{cases} 3^{6y-3} = 3^{4x+7} \\ 3^{x+y} = 3^{4x-3} \end{cases}$. Rezultă sistemul echivalent $\begin{cases} 6y-3=4x+7 \\ x+y=4x-3 \end{cases}$, deci $x = 2, y = 3$ şi soluţia sistemului este perechea (2, 3).

2. Să se rezolve sistemul $\begin{cases} x^2 + y^2 = 425 \\ \lg x + \lg y = 2 \end{cases}$. Obţinem, pe rând sistemele $\begin{cases} x^2 + y^2 = 425 \\ \lg xy = 2 \\ x, y > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = 425 \\ xy = 100 \\ x, y > 0 \end{cases}$. Acest sistem simetric îl putem rezolva pe căile cunoscute din clasa a IX-a: punem $s = x + y$, $p = xy$ şi vom avea $\begin{cases} s^2 - 2p = 425 \\ p = 100 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} s^2 = 625 \\ p = 100 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} s = \pm 25 \\ p = 100 \end{cases}$. Sistemul $\begin{cases} s = 25 \\ p = 100 \end{cases}$ dă soluţiile (5, 20) şi (20, 5) care satisfac şi condiţiile de existenţă ale sistemului iniţial, $x > 0, y > 0$. Sistemul $\begin{cases} s = -25 \\ p = 100 \end{cases}$ dă soluţiile (–20, –5), (–5, –20), care nu convin.

3.4. Inecuaţii exponenţiale şi logaritmice

Rezolvarea inecuaţiilor exponenţiale şi logaritmice se bazează pe proprietăţile de monotonie ale funcţiilor exponenţiale şi logaritmice. Am văzut că atât funcţia exponenţială cât şi funcţia logaritmică sunt crescătoare dacă baza este supraunitară şi descrescătoare dacă baza este subunitară.

Exemple

1. Să se rezolve inecuaţia: $3^x > 9$. Inecuaţia se scrie $3^x > 3^2$ şi deoarece funcţia $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 3^x$ este crescătoare, rezultă că $x > 2$.

2. Să se rezolve inecuaţia: $2^{x^2-4x} > \frac{1}{8}$. Deoarece $\frac{1}{8} = 2^{-3}$, inecuaţia se scrie $2^{x^2-4x} > 2^{-3}$, care este echivalentă cu $x^2 - 4x > -3$. Rezolvarea inecuaţiei $x^2 - 4x + 3 > 0$ dă pentru x valorile posibile $x \in (-\infty, 1) \cup (3, +\infty)$.

3. Să se rezolve inecuaţia: $\log_{\frac{1}{3}}(2x-1) > -3$. Avem că $-3 = \log_{\frac{1}{3}} 27$ şi inecuaţia devine $\log_{\frac{1}{3}}(2x-1) > \log_{\frac{1}{3}} 27$. Deoarece baza $\frac{1}{3}$ a logaritmului este subunitară, inecuaţia devine $2x - 1 < 27$, adică $x < 14$. În acelaşi timp, din condiţia de existenţă a logaritmului iniţial, avem $2x - 1 > 0$, adică $x > \frac{1}{2}$. Deci $x \in \left(\frac{1}{2}, 14\right)$.

Exerciţii

Să se rezolve (în $\mathbb{R}$) ecuaţiile (exerciţiile 1–11):

a) $5^x = 125$; b) $4^x = 1024$; c) $9^x = \frac{1}{729}$; d) $25^x = 0{,}2$; e) $2^{x+3} = 32$; f) $8^x = 16$.

a) $\left(\frac{4}{9}\right)^x = \left(\frac{3}{2}\right)^{-5}$; b) $\left(\frac{2}{3}\right)^x \cdot \left(\frac{9}{8}\right)^x = \frac{27}{64}$; c) $3^{2x-1} = 81$; d) $2^{x^2-6x-2,5} = 16\sqrt{2}$.

a) $5^x + 5^{x+1} = 3750$; b) $7^x - 7^{x-1} = 6$; c) $3^{x-1} + 3^{x-2} + 3^{x-3} = 13$; d) $7^{x+2} + 4 \cdot 7^{x-1} = 347$; e) $3^{x+1} + 5 \cdot 3^{x-1} - 7 \cdot 3^x + 21 = 0$.

a) $4^{\sqrt{x+1}} = 64 \cdot 2^{\sqrt{x+1}}$; b) $\sqrt{8^{x-1}} = \sqrt[3]{4^{2-x}}$; c) $16\sqrt{(0{,}25)^{5-\frac{x}{4}}} = 2^{\sqrt{x+1}}$;

5. a) $5^{2x} - 5^x - 600 = 0$;
b) $9^x - 3^x - 6 = 0$;
c) $4^x + 2^{x+1} = 80$;
d) $3^x + 9^{x-1} - 810 = 0$;
e) $4 + \frac{2}{5^x - 1} = \frac{3}{5^{x-1}}$;
f) $\left(\frac{3}{5}\right)^{x+1} + \left(\frac{3}{5}\right)^{1-x} = 1{,}2$;
g) $3^{2\sqrt{x}} - 4 \cdot 3^{\sqrt{x}} + 3 = 0$;
h) $2 \cdot 25^x = 10^x + 4^x$;
i) $3 \cdot 4^x + 2 \cdot 9^x = 5 \cdot 6^x$;
j) $\left(\sqrt{3+2\sqrt{2}}\right)^x - \left(\sqrt{3-2\sqrt{2}}\right)^x = \frac{3}{2}$.

a) $3 \cdot 2^x = 2 \cdot 3^x$; b) $7 \cdot 2^x = 5 \cdot 3^x$; c) $11^x = 17^x$; d) $a^x = b^x$ ($a > 0$, $b > 0$, $a \neq b$); e) $6^{2x+4} = 2^{8+x} \cdot 3^{3x}$.

a) $\lg x = \lg 2$; b) $\lg x = -\lg 2$; c) $\log_2(x-1) = \log_2(x^2 - x - 16)$; d) $\frac{2\lg x}{\lg(5x-4)} = 1$.

8. a) $\log_{x-1}(x^2 - 5x + 7) = 1$; b) $\log_x 2 - \log_x 3 = 2$; c) $\log_x(x+3) = \log_x(x^2+1)$.

9. a) $\frac{1}{12}\lg^2 x = \frac{1}{3} - \frac{1}{4}\lg x$; b) $3\lg^2(x^2) - \lg x - 1 = 0$; c) $2\lg^2(x^3) - 3\lg x - 1 = 0$; d) $4\log_3^2 5x - 7\log_3 15x + 7 = 0$.

10. $5^{\lg x} - 3^{\lg x - 1} = 3^{\lg x + 1} - 5^{\lg x - 1}$.

11. $\sqrt{\log_2 \sqrt[4]{2x} + \log_x \sqrt[4]{2x}} + \sqrt{\log_2 \sqrt[4]{\frac{x}{2}} + \log_x \sqrt[4]{\frac{2}{x}}} = 2$.

Să se rezolve (în $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$) sistemele de ecuaţii:

a) $\begin{cases} x^4 + y^4 = 641, \\ 2\lg x + 2\lg y = 2; \end{cases}$ b) $\begin{cases} 9^{x+y} = 729, \\ 3^{x-y-1} = 1; \end{cases}$ c) $\begin{cases} x - y = 90, \\ \lg x + \lg y = 3; \end{cases}$

d) $\begin{cases} x^y - y^x = 0, \\ 2^x - 4^y = 0; \end{cases}$ e) $\begin{cases} xy = 40, \\ x^{\lg y} = 4; \end{cases}$ f) $\begin{cases} x^{\sqrt{y}} = y^x, \\ y^{\sqrt{x}} = x^y. \end{cases}$

13. Să se rezolve (în $\mathbb{R}$) inecuaţiile:

a) $\lg(x^2 - 3) > \lg(x+3)$; b) $\lg^2 x - 2\lg x - 8 \leq 0$; c) $(0{,}25)^{x-4} \leq \left(\frac{1}{16}\right)^x$.

14. Rezolvaţi (în $\mathbb{R}$) inecuaţiile: $\log_2(9 - 2^x) > 3 - x$; b) $\lg 2 + \lg(4^{x-2} + 9) \leq 1 + \lg(2^{x-2} + 1)$.

15. Să se rezolve (în $\mathbb{R}$) inecuaţia $3^x + 4^x > 5^x$.

16. Să se rezolve (în $\mathbb{R}$) şi să se discute după valorile parametrului real a, inecuaţiile:

a) $\log_a x - \log_{a^2} x + \log_{a^4} x \geq \frac{3}{4}$; b) $\log_a x + \log_a(x+5) + \log_a 0{,}02 < 0$.

Fiind dat $t \in \mathbb{R}$, presupunem cunoscută definiția numărului cos t și a numărului sin t.

Funcția $f : \mathbb{R} \to [-1, 1]$, $f(t) = \cos t$ se numește *funcția cosinus*, iar funcția $g : \mathbb{R} \to [-1, 1]$, $g(t) = \sin t$ se numește *funcția sinus*. Reamintim:

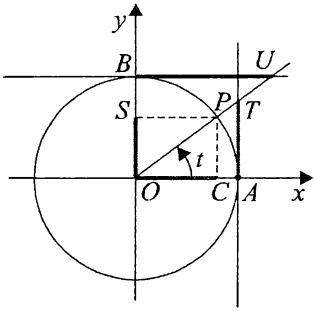
* funcțiile cosinus și sinus sunt periodice și au perioada principală 2π;

* funcția cosinus este pară, iar funcția sinus este impară.

Cu ajutorul cercului trigonometric putem justifica afirmațiile:

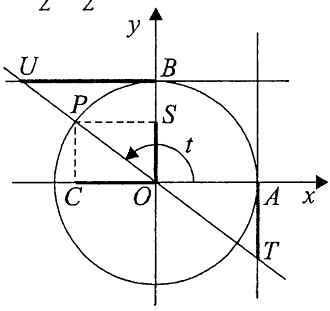
* pentru orice $a \in [-1, 1]$ există $t \in [0, \pi]$, astfel încât $a = \cos t$.

* pentru orice $b \in [-1, 1]$ există $t \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, astfel încât $b = \sin t$.



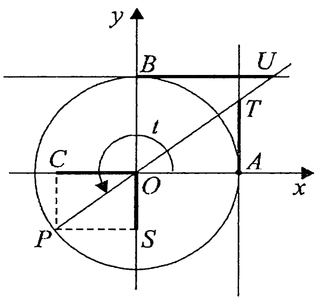
$OC = \cos t$
$OS = \sin t$
$AT = \text{tg}\, t$
$BU = \text{ctg}\, t$

Fig. 1



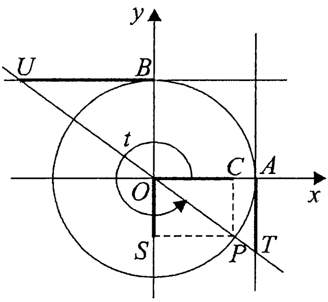
$OC = -\cos t$
$OS = \sin t$
$AT = -\text{tg}\, t$
$BU = -\text{ctg}\, t$

Fig. 2



$OC = -\cos t$
$OS = -\sin t$
$AT = \text{tg}\, t$
$BU = \text{ctg}\, t$

Fig. 3



$OC = \cos t$
$OS = -\sin t$
$AT = -\text{tg}\, t$
$BU = -\text{ctg}\, t$

Fig. 4

Funcția $f : \mathbb{R} - \{(2k+1)\frac{\pi}{2} \mid k \in \mathbb{Z}\} \to \mathbb{R}$, $f(t) = \text{tg}\, t = \frac{\sin t}{\cos t}$ se numește *funcția tangentă*, iar funcția $g : \mathbb{R} - \{(k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\} \to \mathbb{R}$, $g(t) = \text{ctg}\, t = \frac{\cos t}{\sin t}$ se numește *funcția cotangentă*. Reamintim:

* funcțiile tangentă și cotangentă sunt periodice și au perioada principală π.

* funcțiile tangentă și cotangentă sunt *impare*.

Cu ajutorul cercului trigonometric putem justifica afirmaţiile:

* pentru orice $a \in \mathbb{R}$ există $t \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, astfel încât $a = \operatorname{tg} t$.

* pentru orice $b \in \mathbb{R}$ există $t \in (0, \pi)$, astfel încât $b = \operatorname{ctg} t$.

Din cele de mai sus rezultă că funcţiile trigonometrice cosinus, sinus, tangentă şi cotangentă sunt surjective, dar nu sunt injective (fiind periodice), deci nu sunt inversabile.

Completări privind funcţiile periodice

Propoziţia 1. Fie $f: D \to \mathbb{R}$, $D \subseteq \mathbb{R}$ o funcţie periodică. Dacă T este perioadă a lui f, atunci kT este perioadă a lui f, $\forall\ k \in \mathbb{Z}$.

Demonstraţie. a) Vom demonstra: T perioadă a lui $f \Rightarrow nT$ perioadă a lui f, $\forall\ n \in \mathbb{N}^*$. Notăm afirmaţia cu $P(n)$. Evident $P(1)$ este adevărată, iar $P(n)$ implică $P(n + 1)$, deoarece $f(x + (n + 1)T) = f(x + nT + T) = f(x + nT) = f(x)$, $\forall\ x \in D$, Conform principiului inducţiei matematice, rezultă că $P(n)$ este adevărată pentru orice $u \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$.

b) Vom demonstra: T perioadă a lui $f \Rightarrow -T$ perioadă a lui f.

Avem $f(x - T) = f(x - T + T) = f(x)$, $\forall\ x \in D$.

În concluzie, dacă T este perioadă, atunci nT este perioadă, iar de aici rezultă că $-nT$ este perioadă, $\forall\ n \in \mathbb{N}^*$, deci kT este perioadă a lui f, $\forall\ k \in \mathbb{Z}$.

Propoziţia 2. Fie $f: D \to \mathbb{R}$, $D \subseteq \mathbb{R}$ o funcţie periodică care admite perioadă principală. Dacă T_0 este perioada principală a lui f, atunci orice perioadă T a lui f are forma $T = kT_0$, cu $k \in \mathbb{Z}$.

Demonstraţie. Reamintim că perioada principală a unei funcţii, dacă există, este cel mai mic număr strict pozitiv care este perioadă a funcţiei respective.

Fie $k \in \mathbb{Z}$ partea întreagă a numărului T/T_0. Avem $k \leq T/T_0 < k + 1$ sau $kT_0 \leq T < kT_0 + T_0$, de unde $0 \leq T - kT_0 < T_0$. Notăm $T - kT_0 = T^*$, deci $T = T^* + kT_0$. Cum T este perioadă, avem:

$$f(x) = f(x + T) = f(x + T^* + kT_0) = f(x + T^*),\ \forall\ x \in D.$$

Dacă $T^* \neq 0$, rezultă că T^* este perioadă a lui f şi $0 < T^* < T_0$, în contradicţie cu faptul că T_0 este cea mai mică perioadă strict pozitivă. Rezultă că nu putem avea decât $T^* = 0$, deci $T = kT_0$.

Aplicaţie. Funcţia $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = a \sin(bx + c)$, unde $a \neq 0$, $b > 0$ şi $c \in \mathbb{R}$, are perioada principală $2\pi/b$.

Demonstraţie. Fie T o perioadă a funcţiei f, deci $f(x + T) = f(x)$, $\forall\ x \in \mathbb{R}$, de unde $\sin(bx + c + bT) = \sin(bx + c)$, $\forall\ x \in \mathbb{R}$. Dacă notăm $bx + c = y$, avem $\sin(y + bT) = \sin y$, $\forall\ y \in \mathbb{R}$. Rezultă că bT este perioadă a funcţiei sinus. Conform propoziţiei 2, avem $bT = 2k\pi$ sau $T = 2k\pi/b$, $k \in \mathbb{Z}$.

Pentru $k = 1$ obţinem $2\pi/b$. Se arată imediat că $2\pi/b$ este cel mai mic număr strict pozitiv care este perioadă a lui f. În adevăr, dacă $t \in (0, 2\pi/b)$ este perioadă a lui f, se arată analog că $t = 2k\pi/b$, $k \in \mathbb{Z}$, ceea ce contrazice ipoteza.

Observaţie. Analog se arată că funcţia $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = a\cos(bx + c)$, unde $a \neq 0$, $b > 0$, are perioada principală $2\pi/b$.

Formule trigonometrice
Prezentăm formulele studiate în clasa a IX-a, organizate în şase grupuri.

A. Formule de bază

[1] $\cos^2 t + \sin^2 t = 1$;

[2] $\operatorname{tg} t = \dfrac{\sin t}{\cos t}$, $\operatorname{ctg} t = \dfrac{\cos t}{\sin t}$, $\operatorname{tg} t \cdot \operatorname{ctg} t = 1$;

[3] $1 + \operatorname{tg}^2 t = \dfrac{1}{\cos^2 t}$, $1 + \operatorname{ctg}^2 t = \dfrac{1}{\sin^2 t}$.

B.Funcţiile trigonometrice ale sumei şi diferenţei

[4] $\cos(a - b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$
$\cos(a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$

[5] $\sin(a + b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a$
$\sin(a - b) = \sin a \cos b - \sin b \cos a$

[6] $\operatorname{tg}(a + b) = \dfrac{\operatorname{tg} a + \operatorname{tg} b}{1 - \operatorname{tg} a \operatorname{tg} b}$, $\operatorname{tg}(a - b) = \dfrac{\operatorname{tg} a - \operatorname{tg} b}{1 + \operatorname{tg} a \operatorname{tg} b}$

[7] $\sin(\frac{\pi}{2} - t) = \cos t$, $\cos(\frac{\pi}{2} - t) = \sin t$

$\operatorname{tg}(\frac{\pi}{2} - t) = \operatorname{ctg} t$, $\operatorname{ctg}(\frac{\pi}{2} - t) = \operatorname{tg} t$

C. Funcţiile trigonometrice ale argumentului dublu, triplu sau ale jumătăţii argumentului

[8] $\sin 2t = 2\sin t \cos t$

[9] a) $\cos 2t = \cos^2 t - \sin^2 t$
b) $\cos 2t = 2\cos^2 t - 1$, $\cos 2t = 1 - 2\sin^2 t$.

[10] $\operatorname{tg} 2t = \dfrac{2\operatorname{tg} t}{1 - \operatorname{tg}^2 t}$

[11] a) $\cos^2 t = \dfrac{1 + \cos 2t}{2}$, $\sin^2 t = \dfrac{1 - \cos 2t}{2}$

b) $\operatorname{tg}^2 t = \dfrac{1 - \cos 2t}{1 + \cos 2t}$

c) $\operatorname{tg} t = \dfrac{\sin 2t}{1 + \cos 2t} = \dfrac{1 - \cos 2t}{\sin 2t}$

[12] $\sin 3t = 3\sin t - 4\sin^3 t$, $\cos 3t = 4\cos^3 t - 3\cos t$

D. Exprimarea numerelor $\sin t$, $\cos t$, $\operatorname{tg} t$ *în funcţie de* $\operatorname{tg}\frac{t}{2}$

$$[13]\ \sin t = \frac{2\operatorname{tg}\frac{t}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{t}{2}},\quad \cos t = \frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{t}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{t}{2}},\quad \operatorname{tg} t = \frac{2\operatorname{tg}\frac{t}{2}}{1-\operatorname{tg}^2\frac{t}{2}}$$

E. Formule pentru transformarea sumelor în produse

$$[14]\ \sin p + \sin q = 2\sin\frac{p+q}{2}\cos\frac{p-q}{2}$$

$$\sin p - \sin q = 2\sin\frac{p-q}{2}\cos\frac{p+q}{2}$$

$$[15]\ \cos p + \cos q = 2\cos\frac{p+q}{2}\cos\frac{p-q}{2}$$

$$\cos p - \cos q = -2\sin\frac{p+q}{2}\sin\frac{p-q}{2}$$

$$[16]\ \operatorname{tg} p + \operatorname{tg} q = \frac{\sin(p+q)}{\cos p\cos q},\quad \operatorname{tg} p - \operatorname{tg} q = \frac{\sin(p-q)}{\cos p\cos q}$$

$$[17]\ 1+\cos a = 2\cos^2\frac{a}{2},\quad 1-\cos a = 2\sin^2\frac{a}{2}$$

$$[18]\ \sin a + \cos a = \sqrt{2}\cos(a-\frac{\pi}{4}),\ \sin a - \cos a = \sqrt{2}\sin(a-\frac{\pi}{4})$$

F. Formule pentru transformarea produselor în sume

$$[19]\ \sin a\cos b = \frac{1}{2}[\sin(a+b)+\sin(a-b)]$$

$$[20]\ \cos a\cos b = \frac{1}{2}[\cos(a+b)+\cos(a-b)]$$

$$[21]\ \sin a\sin b = \frac{1}{2}[\cos(a-b)-\cos(a+b)]$$

Demonstraţi relaţiile:

a) $\dfrac{5\cos a-4}{3-5\sin a} = \dfrac{3+5\sin a}{4+5\cos a}$; b) $\dfrac{\sin^6 x+\cos^6 x-1}{\sin^4 x+\cos^4 x-1} = \dfrac{3}{2}$.

Calculaţi numerele $\sin t$, $\cos t$, $\operatorname{tg} t$ şi $\operatorname{ctg} t$ dacă:

a) $\operatorname{tg} t = -\frac{3}{4}$, $t\in(\frac{\pi}{2},\pi)$; b) $\operatorname{ctg} t = -2$, $t\in(\frac{\pi}{2},\pi)$.

Dacă $\operatorname{tg} x = 2$, calculaţi $E = \dfrac{\sin x}{\sin^3 x+\cos^3 x}$.

4. Calculaţi $E = 16\sin\frac{a}{2}\sin\frac{3a}{2}$, dacă avem $\cos a = \frac{3}{4}$.

5. Determinaţi perioada principală a funcţiei $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, unde:

a) $f(x) = \sin 4x$; b) $f(x) = \sin(-3x + \frac{\pi}{4})$; c) $f(x) = \sin\frac{x}{5}$;

d) $f(x) = -3\cos(6x + \frac{\pi}{5})$; e) $f(x) = 2 + 5\cos\frac{x}{4}$; f) $f(x) = \cos(\pi x)$.

2. Studiul variaţiei şi reprezentarea grafică

În studiul variaţiei funcţiilor trigonometrice intervin în mod esenţial proprietăţile de periodicitate, paritate sau imparitate, prezentate anterior.

Fie o funcţie $f: D \to \mathbb{R}$, $D \subseteq \mathbb{R}$. Vom considera graficul lui f, în raport cu un sistem de coordonate xOy.

1. Presupunem că f este periodică şi admite perioadă principală. Fie $T > 0$ perioada principală a lui f.

Dacă se cunoaşte graficul lui f pe intervalul $[0, T]$, atunci graficul lui f pe $[T, 2T]$ se trasează imediat (vezi fig. 5).

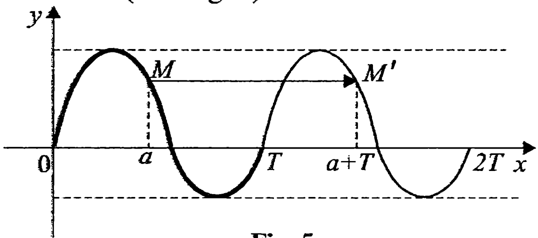


Fig. 5

Fie $a \in [0, T]$ şi punctele $M(a, f(a))$, $M'(a + T, f(a + T))$. Punctul M aparţine graficului lui f pe $[0, T]$. Cum $a + T \in [T, 2T]$ şi $f(a + T) = f(a)$ rezultă că punctul $M'(a + T, f(a))$ aparţine graficului lui f pe $[T, 2T]$.

Constatăm imediat că lungimea segmentului MM' este T, iar dreapta MM' este paralelă cu axa Ox, deoarece $y_M = y_{M'}$. Prin urmare, punctul M' se obţine din punctul M printr-o mişcare de translaţie, de mărime T, după direcţia axei Ox, în sens pozitiv. Prin urmare:

graficul funcţiei f pe $[T, 2T]$ se obţine din graficul funcţiei f pe $[0, T]$ printr-o mişcare de translaţie, de mărime T, după direcţia axei Ox, în sens pozitiv.

Analog se arată:

• graficul funcţiei f pe $[2T, 3T]$, $[3T, 4T]$, ... se obţine din graficul funcţiei f pe $[0, T]$ prin mişcare de translaţie, de mărime, respectiv $2T$, $3T$, ..., după direcţia axei Ox, în sens pozitiv;

• graficul funcţiei f pe $[-T, 0]$, $[-2T, -T]$, ... se obţine din graficul funcţiei f pe $[0, T]$ prin mişcare de translaţie, de mărime, respectiv T, $2T$, $3T$, ... după direcţia axei Ox, în sens negativ.

Concluzie: dacă funcţia f este periodică şi admite perioada principală $T > 0$, atunci este suficient să studiem variaţia şi să trasăm graficul lui f pe un *interval de lungime egală cu T.*

Se alege intervalul $\left[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}\right]$ sau $[0, T]$.

2. Dacă funcţia f este *impară,* atunci graficul său admite originea O a coordonatelor, ca centru de simetrie.

Dacă funcţia f este *pară,* atunci graficul său admite axa Oy ca axă de simetrie (vezi manualul de clasa a IX-a).

3. Fie un punct $a \in D$. Dacă $f(a) = 0$, se spune că $x = a$ este un zero al funcţiei f, iar graficul lui f intersectează axa Ox în punctul $(a, 0)$. Dacă $f(a) > 0$ sau $f(a) < 0$, punctul $(a, f(a))$ se află deasupra, respectiv sub axa Ox.

2.1. Funcţia sinus

Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \sin x$. Fiind periodică, de perioadă principală 2π, va fi suficient să studiem funcţia sinus pe intervalul $[0, 2\pi]$.

Semnul şi *zerourile* funcţiei sinus pe $[0, 2\pi]$ se află în tabelul:

x	0		$\frac{\pi}{2}$		π		$\frac{3\pi}{2}$		2π
$\sin x$	0	+ + + +	1	+ + +	0	– – –	-1	– – – –	0

Sa studiem acum *sensul de variaţie* al funcţiei pe $[0, 2\pi]$. Cu ajutorul unui tabel de variaţie, constatăm;

* dacă argumentul x „creşte“ de la 0 la $\frac{\pi}{2}$, atunci valorile corespunzătoare $\sin x$ „cresc“ de la 0 la 1:

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1

* dacă argumentul x „creşte“ de la $\frac{\pi}{2}$ la $\frac{3\pi}{2}$ atunci valorile corespunzătoare $\sin x$ „scad“ de la 1 la –1:

x	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$
$\sin x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1

* dacă argumentul x „creşte" de la $\frac{3\pi}{2}$ la 2π, atunci valorile corespunzătoare $\sin x$ „cresc" de la -1 la 0.

x	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{7\pi}{4}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π
$\sin x$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0

Se poate demonstra:

T e o r e m ă. Funcţia sinus este strict crescătoare pe intervalele $[0, \frac{\pi}{2}]$ şi $[\frac{3\pi}{2}, 2\pi]$ şi strict descrescătoare pe intervalul $[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$.

Graficul funcţiei sinus se obţine astfel:

1) graficul pe intervalul $[0, 2\pi]$ se obţine unind printr-o curbă continuă punctele graficului din tabelul de variaţie anterior (fig. 6);

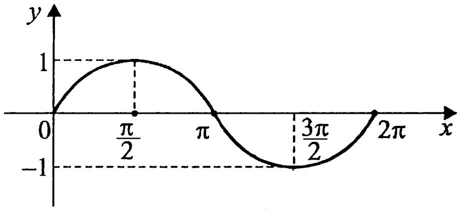


Fig. 6

2) graficul pe intervalele $[2\pi, 4\pi]$, $[4\pi, 6\pi]$, ... se obţine din graficul pe $[0, 2\pi]$, prin mişcare de translaţie, de mărime T, $2T$, ... după direcţia axei Ox, în sens pozitiv (fig. 7).

3) graficul pe intervalul $(-\infty, 0]$ este simetricul graficului pe intervalul $[0, \infty)$ în raport cu originea O, deoarece funcţia sinus este impară (fig. 7).

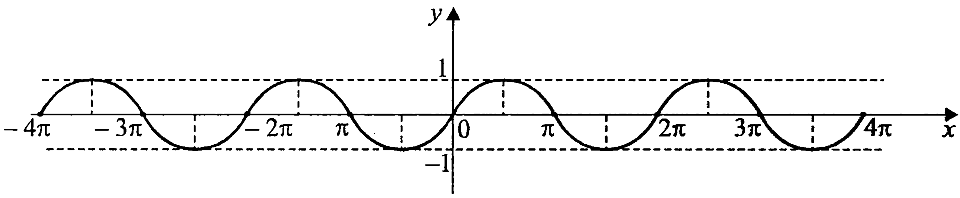


Fig. 7

Graficul funcţiei sinus este o curbă numită *sinusoidă*.

P r o p o z i ţ i e. Funcţia sinus este strict crescătoare pe $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.

Observaţie. Datorită proprietăţii de periodicitate, rezultă că funcţia sinus este strict crescătoare pe $[-\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi]$, $\forall k \in \mathbb{Z}$ şi strict descrescătoare pe $[\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{3\pi}{2} + 2k\pi]$, $\forall k \in \mathbb{Z}$.

2.2. Funcţia cosinus

Fie $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \cos x$. Fiind periodică, de perioadă principală 2π, va fi suficient să studiem funcţia cosinus pe intervalul $[0, 2\pi]$.

Semnul şi *zerourile* funcţiei cosinus pe $[0, 2\pi]$ sunt date în tabelul:

x	0			$\frac{\pi}{2}$			π			$\frac{3\pi}{2}$			2π
$\cos x$	1 +	+	+	0	−	−	−1	−	−	0	+	+	+ 1

Să studiem acum *sensul de variaţie* al funcţiei pe $[0, 2\pi]$. Cu ajutorul unui tabel de variaţie constatăm:

* dacă argumentul x „creşte“ de la 0 la π, atunci valorile corespunzătoare $\cos x$ „scad“ de la 1 la -1;

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1

* dacă argumentul x „creşte“ de la π la 2π, atunci valorile corespunzătoare $\cos x$ „cresc“ de la -1 la 1;

x	π	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{7\pi}{4}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π
$\cos x$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1

Se poate demonstra:

T e o r e m ă. Funcţia cosinus este strict descrescătoare pe intervalul $[0, \pi]$ şi strict crescătoare pe intervalul $[\pi, 2\pi]$.

Observație. Datorită proprietății de periodicitate, rezultă că funcția cosinus este strict descrescătoare pe $[2k\pi, \pi + 2k\pi]$, $\forall\, k \in \mathbb{Z}$ și strict crescătoare pe $[\pi + 2k\pi, 2\pi + 2k\pi]$, $\forall\, k \in \mathbb{Z}$.

Graficul funcției cosinus se obține astfel:

1) graficul pe intervalul $[0, 2\pi]$ se obține unind printr-o curbă continuă punctele graficului din tabelul de variație anterior (fig. 8).

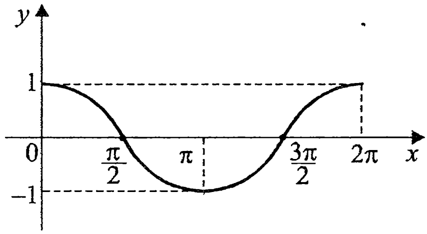


Fig. 8

2) graficul pe intervalele $[2\pi, 4\pi]$, $[4\pi, 6\pi]$, ... se obține din graficul pe $[0, 2\pi]$, prin mișcare de translație, de mărime T, $2T$, ... după direcția axei Ox, în sens pozitiv (fig. 9).

3) graficul pe intervalul $(-\infty, 0]$ este simetricul graficului pe intervalul $[0, \infty)$ în raport cu axa Oy, deoarece funcția cosinus este pară (fig. 9).

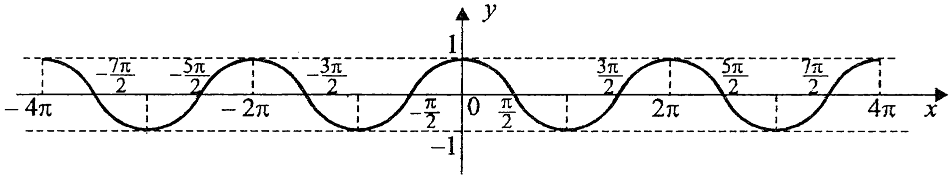


Fig. 9

2.3. Funcția tangentă

Fie $f : E \to \mathbb{R}, f(x) = \operatorname{tg} x$, unde $E = \mathbb{R} - \{(2k+1)\frac{\pi}{2} \mid k \in \mathbb{Z}\}$ este o reuniune de intervale, anume $E = \ldots \cup (-\frac{3\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}) \cup (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \cup (\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}) \cup \ldots$

Fiind periodică, cu perioada principală π, va fi suficient să studiem funcția tangentă pe intervalul $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$.

Semnul și *zerourile* funcției tangentă pe $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ sunt în tabelul:

x	$-\frac{\pi}{2}$		0		$\frac{\pi}{2}$
$\operatorname{tg} x$	$\lvert -\infty$	− − − − − − −	0	+ + + + + + +	$\infty \rvert$

În jurul punctelor $\frac{\pi}{2}$ și $-\frac{\pi}{2}$ funcția tangentă are un comportament special.

Dacă x se apropie de $\frac{\pi}{2}$ prin valori mai mici decât $\frac{\pi}{2}$, constatăm, cu ajutorul axei tangentelor, că tg x are valori din ce în ce mai mari. Vom marca acest lucru scriind $+\infty$ lângă bara din dreptul lui $\frac{\pi}{2}$ şi vom spune că „tg x tinde la $+\infty$ dacă x tinde la $\frac{\pi}{2}$ prin valori mai mici decât $\frac{\pi}{2}$“, iar dreapta $x = \frac{\pi}{2}$ este *asimptotă verticală* pentru graficul funcţiei tangentă.

Analog, „tg x tinde la $-\infty$, dacă x tinde la $-\frac{\pi}{2}$ prin valori mai mari decât $-\frac{\pi}{2}$“, iar dreapta $x = -\frac{\pi}{2}$ este *asimptotă verticală* pentru graficul funcţiei tangentă.

Să studiem sensul de variaţie a funcţiei tangentă cu ajutorul tabelului:

x	$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{6}$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
tg x	$\vert -\infty$	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	$\infty \vert$

Constatăm că dacă argumentul x „creşte“ de la $-\frac{\pi}{2}$ la $\frac{\pi}{2}$, atunci valorile corespunzătoare tg x „cresc“ (de la $-\infty$ la $+\infty$). Se poate demonstra:

T e o r e m ă. Funcţia tangentă este strict crescătoare pe intervalul $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$.

Cu alte cuvinte, avem: $a, b \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}), a < b \Rightarrow \operatorname{tg} a < \operatorname{tg} b$.

Observaţie. Datorită proprietăţii de periodicitate, funcţia tangentă este strict crescătoare pe $(-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi)$, $\forall\, k \in \mathbb{Z}$.

Reprezentarea grafică a funcţiei tangentă se obţine astfel:

a) se trasează graficul pe intervalul $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ unind printr-o curbă continuă punctele graficului din tabelul de variaţie anterior (fig. 10);

b) graficul pe intervalul $((2k-1)\frac{\pi}{2}, (2k+1)\frac{\pi}{2})$, $k \in \mathbb{Z}$ se obţine din graficul pe intervalul $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ prin translaţie de mărime $|k|\pi$ după direcţia axei Ox, în sens pozitiv pentru $k > 0$ sau în sens negativ pentru $k < 0$ (fig. 11).

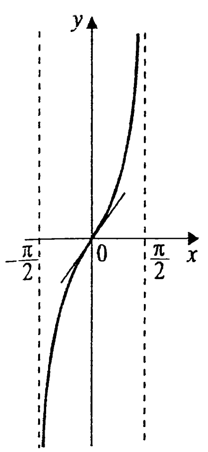


Fig. 10

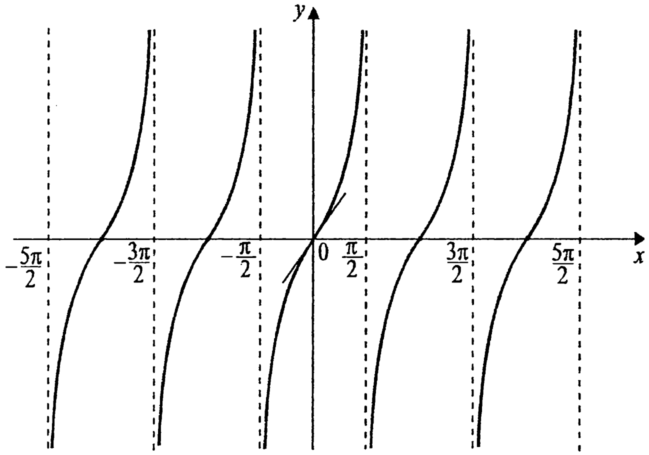


Fig. 11

Exerciţiu rezolvat

Pentru fiecare dintre următoarele funcţii $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, determinaţi perioada principală T, studiaţi variaţia şi trasaţi graficul pe un interval de lungime T, unde:

a) $f(x) = 2\sin x$, $g(x) = -2\sin x$; b) $f(x) = \cos x + 1$, $g(x) = \cos x - 2$

c) $f(x) = \sin(x - \frac{\pi}{3})$; d) $f(x) = \cos 3x$.

R: a) Funcţiile f, g au perioada principală 2π. Construim tabelul de variaţie pe $[0, 2\pi]$ al funcţiilor sinus, f şi g:

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$\sin x$	0	1	0	–1	0
$2\sin x$	0	2	0	–2	0
$-2\sin x$;	0	–2	0	2	0

Graficul funcţiei $f(x) = 2\sin x$ şi al funcţiei $h(x) =$ sinx se află în figura 12, iar graficele funcţiilor f, g se află în figura 13.

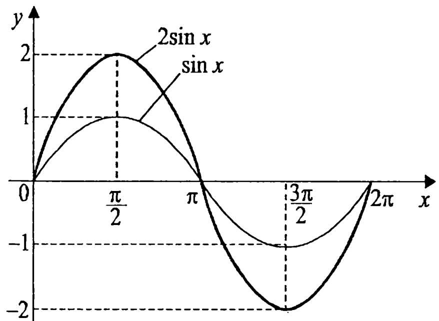


Fig. 12

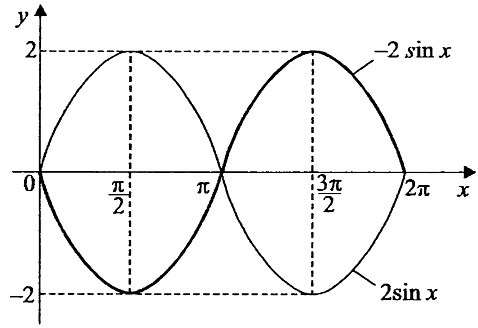


Fig. 13

b) Funcţiile f, g au perioada principală 2π. Construim tabelul de variaţie pe $[0, 2\pi]$ al funcţiilor cosinus, f şi g.

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$\cos x$	1	0	-1	0	1
$\cos x + 1$	2	1	0	1	2
$\cos x - 2$	-1	-2	-3	-2	-1

Fie $h(x) = \cos x$. Graficele funcţiilor f, g şi h se află în figura 14.

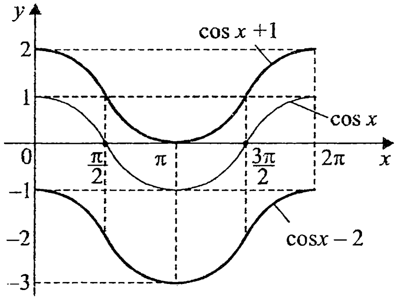


Fig. 14

Graficul lui $f(x) = \cos x + 1$ se obţine din graficul lui $h(x) = \cos x$ prin translaţie de mărime 1, după direcţia Oy, în sens pozitiv.

Graficul lui $g(x) = \cos x - 2$ se obţine din graficul lui $h(x) = \cos x$ prin translaţie de mărime 2, după direcţia Oy, în sens negativ.

c) Se ştie că funcţia $x \to a \sin(bx + c)$, cu $b > 0$ are perioada principală $T = \frac{2\pi}{b}$. Rezultă că funcţia f are perioada principală 2π.

Pentru tabloul de variaţie al lui f vom alege x astfel încât $x - \frac{\pi}{3} \in \{0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}, 2\pi\}$:

x	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{6}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{11\pi}{6}$	$\frac{7\pi}{3}$
$x - \frac{\pi}{3}$	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$\sin(x - \frac{\pi}{3})$	0	1	0	-1	0

Graficele funcţiilor $f(x) = \sin(x - \frac{\pi}{3})$ şi $h(x) = \sin x$ se află în figura 15.

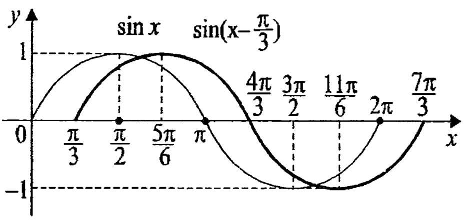


Fig. 15

Graficul lui $f(x) = \sin(x - \frac{\pi}{3})$ se obţine din graficul lui $h(x) = \sin x$ prin translaţie de mărime $\frac{\pi}{3}$, după direcţia axei Ox, în sens pozitiv.

d) Funcţia f are perioada principală $\frac{2\pi}{3}$. Pentru tabelul de variaţie al lui f luăm x astfel încât $3x \in \{0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}, 2\pi\}$, deci:

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$
$3x$	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$\cos 3x$	1	0	-1	0	1

Graficele funcţiilor $f(x) = \cos 3x$ şi $h(x) = \cos x$ se află în figura 16.

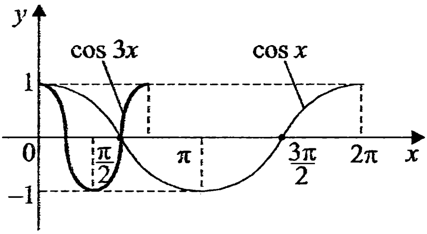


Fig. 16

Reprezentaţi grafic funcţia $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, pe un interval de lungime egală cu perioada principală, unde:

1. a) $f(x) = 3\cos x$. 2. $f(x) = \frac{1}{2}\sin x$. 3. d) $f(x) = |\sin x|$.

$f(x) = 2\cos x - |\cos x|$. $f(x) = \frac{\sin x}{|\sin x|}, x \neq k\pi$. $f(x) = \sin x + 2$.

$f(x) = \cos x - 1$. 8. $f(x) = 2\sin x + 3$. 9. $f(x) = \sin(x + \frac{\pi}{6})$.

10. $f(x) \cos(x - \frac{\pi}{4})$. 11. $f(x) = \sin 2x$ 12. $f(x) = \cos\frac{x}{2}$. 13. $f(x) = \sin(2x - \frac{\pi}{3})$.

3. trigonometrice inverse

Funcţiile F, G şi H definite prin

$F: \mathbb{R} \to [-1, 1], F(x) = \sin x,$

$G: \mathbb{R} \to [-1, 1], G(x) = \cos x,$

$H: E \to \mathbb{R}, H(x) = \operatorname{tg} x$, unde $E = \mathbb{R} - \{(2k+1)\frac{\pi}{2} \mid k \in \mathbb{Z}\}$

sunt surjective, dar nu sunt injective, deoarece sunt periodice. Prin urmare, aceste funcţii nu sunt bijective, deci nu sunt inversabile.

Funcţiile f, g şi h definite după cum urmează

$$f : [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \to [-1, 1], f(x) = \sin x$$
$$g : [0, \pi] \to [-1, 1], g(x) = \cos x$$
$$h : (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \to \mathbb{R}, h(x) = \operatorname{tg} x$$

sunt injective, deoarece sunt strict monotone şi sunt surjective, deci sunt bijective.
Fiind bijective, funcţiile f, g şi h sunt inversabile.

Funcţia arcsinus

Inversa funcţiei f, anume $f^{-1} : [-1, 1] \to [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ se numeşte *arcsinus* şi se notează *arcsin*.

Rezultă: • funcţia $\arcsin : [-1, 1] \to [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ verifică egalităţile

$$\sin(\arcsin x) = x,\ \forall\, x \in [-1, 1];$$
$$\arcsin(\sin x) = x,\ \forall\, x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}].$$

• graficul funcţiei arcsin este simetricul graficului funcţiei f în raport cu dreapta $y = x$ (fig. 17).

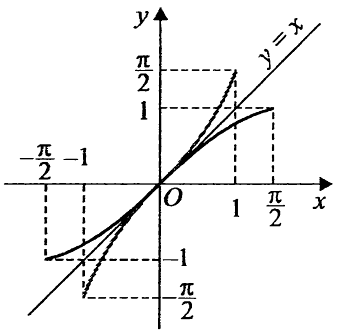


Fig. 17

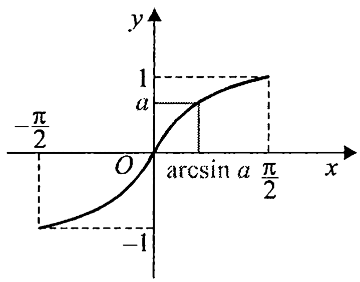


Fig. 18

Observaţie. Funcţia f fiind bijectivă, rezultă:

pentru orice $a \in [-1, 1]$, ecuaţia $\sin x = a$ are soluţie unică în intervalul $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, anume $x = \arcsin a$.

Funcţia arccosinus

Inversa funcţiei g, anume $g^{-1} : [-1, 1] \to [0, \pi]$ se numeşte funcţia *arccosinus* şi se notează *arccos*.

Rezultă: • funcţia $\arccos : [-1, 1] \to [0, \pi]$ verifică egalităţile

$$\cos(\arccos x) = x,\ \forall\, x \in [-1, 1];$$
$$\arccos(\cos x) = x,\ \forall\, x \in [0, \pi].$$

• graficul funcţiei arccos este simetricul graficului funcţiei g în raport cu dreapta $y = x$ (fig. 19).

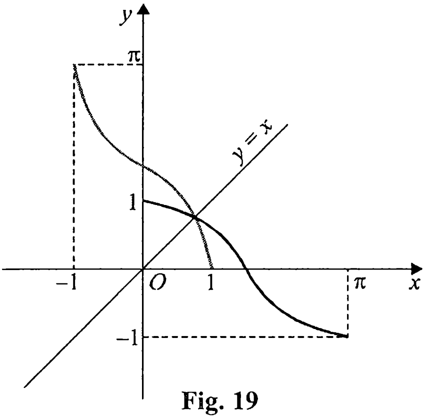


Fig. 19

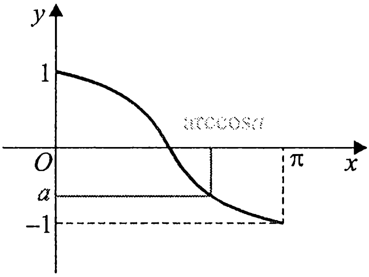


Fig. 20

Observaţie. Funcţia g fiind bijectivă, rezultă:

pentru orice $a \in [-1, 1]$, ecuaţia $\cos x = a$ are soluţie unică în intervalul $[0, \pi]$, anume $x = \arccos a$.

Funcţia arctangentă

Inversa funcţiei h, anume $h^{-1} : \mathbb{R} \to (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ se numeşte funcţia *arctangentă* şi se notează *arctg*.

Rezultă: • funcţia $\text{arctg} : \mathbb{R} \to (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ verifică egalităţile

$$\text{tg}(\text{arctg}x) = x,\ \forall\, x \in \mathbb{R};$$

$$\text{arctg}(\text{tg}x) = x,\ \forall\, x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}).$$

• graficul funcţiei arctg este simetricul graficului funcţiei h în raport cu dreapta $y = x$ (fig. 21).

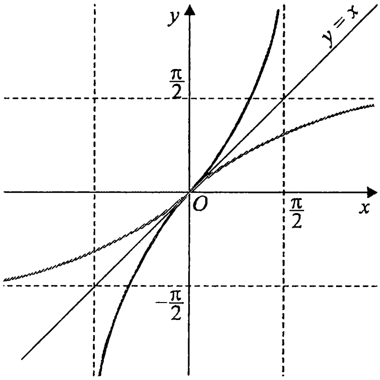


Fig. 21

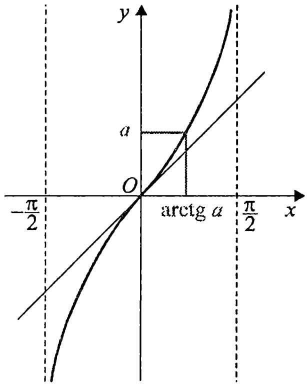


Fig. 22

Observaţie. Funcţia h fiind bijectivă, rezultă:

pentru orice $a \in \mathbb{R}$, ecuaţia $\text{tg}x = a$ are soluţie unică în intervalul $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, anume $x = \text{arctg}a$.

Funcţiile arcsinus, arccosinus şi arctangentă se numesc *funcţii trigonometrice inverse.*

Pentru a calcula valoarea unei funcţii trigonometrice inverse într-un punct din domeniul de definiţie, este util să reţinem:

* $\arcsin x = y \Leftrightarrow x = \sin y$ şi $y \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$;
* $\arccos x = y \Leftrightarrow x = \cos y$ şi $y \in [0, \pi]$;
* $\operatorname{arctg} x = y \Leftrightarrow x = \operatorname{tg} y$ şi $y \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$.

Exemplul 1 Să calculăm: arcsin 1; arccos $\frac{1}{2}$; arctg $\frac{\sqrt{3}}{3}$.

R: Notăm arcsin 1 = y, deci $y \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ şi $\sin y = 1$, adică $y = \frac{\pi}{2}$. Rezultă $\arcsin 1 = \frac{\pi}{2}$ (verificare: $1 = \sin\frac{\pi}{2}$).

Analog obţinem: $\arccos\frac{1}{2} = \frac{\pi}{3}$ (verificare: $\frac{1}{2} = \cos\frac{\pi}{3}$)

$\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{\pi}{6}$ (verificare: $\frac{\sqrt{3}}{3} = \operatorname{tg}\frac{\pi}{6}$).

Exemplul 2 a) Să calculăm $\arcsin(\sin x)$, dacă $x \in \{\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}\}$.

R: Menţionăm că expresia $\arcsin(\sin t)$ are sens pentru $\forall\ t \in \mathbb{R}$, deoarece $\sin t \in [-1, 1]$, $\forall\ t \in \mathbb{R}$, dar egalitatea $\arcsin(\sin t) = t$ are loc numai dacă $t \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. Dacă $t \notin [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, atunci $\arcsin(\sin t) \neq t$.

* $\arcsin(\sin\frac{\pi}{3}) = \frac{\pi}{3}$, deoarece $\frac{\pi}{3} \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$;
* $\arcsin(\sin\frac{2\pi}{3}) = \arcsin(\sin(\pi - \frac{\pi}{3})) = \arcsin(\sin(\frac{\pi}{3})) = \frac{\pi}{3}$;
* $\arcsin(\sin\frac{5\pi}{3}) = \arcsin(\sin(2\pi - \frac{\pi}{3})) = \arcsin(\sin(-\frac{\pi}{3})) = -\frac{\pi}{3}$;

b) Să calculăm $\arccos(\cos x)$, dacă $x \in \{\frac{4\pi}{5}, \frac{23\pi}{5}\}$.

R: Menţionăm că expresia $\arccos(\cos t)$ are sens, pentru $\forall\ t \in \mathbb{R}$, deoarece $\cos t \in [-1, 1]$, $\forall\ t \in \mathbb{R}$, dar egalitatea $\arccos(\cos t) = t$ are loc numai dacă $t \in [0, \pi]$. Dacă $t \notin [0, \pi]$, atunci $\arccos(\cos t) \neq t$.

* $\arccos(\cos\frac{4\pi}{5}) = \frac{4\pi}{5}$, deoarece $\frac{4\pi}{5} \in [0, \pi]$;
* $\arccos(\cos\frac{23\pi}{5}) = \arccos(\cos(4\pi + \frac{3\pi}{5})) = \arccos(\cos(\frac{3\pi}{5})) = \frac{3\pi}{5}$.

c) Să calculăm arctg(tg$x$), dacă $x \in \{\frac{\pi}{3}, 6\}$.

R: Expresia arctg(tg$t$) are sens pentru orice t pentru care tg$t$ are sens, dar arctg(tg$t$) = t numai pentru $t \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$.

$* \operatorname{arctg}(\operatorname{tg}\frac{\pi}{3}) = \frac{\pi}{3}$, deoarece $\frac{\pi}{3} \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$;

$* \operatorname{arctg}(\operatorname{tg} 6) = \operatorname{arctg}(\operatorname{tg}(6 - 2\pi)) = 6 - 2\pi$.

În continuare vom prezenta relații pe care le verifică funcțiile trigonometrice inverse.

P r o p o z i ț i a 1. Au loc relațiile:

a) $\arcsin(-x) = -\arcsin x$, $\forall\, x \in [-1, 1]$;

b) $\arccos(-x) = \pi - \arccos x$, $\forall\, x \in [-1, 1]$;

c) $\operatorname{arctg}(-x) = -\operatorname{arctg} x$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$.

Demonstrație. a) Notăm $\arcsin(-x) = y$, deci $\sin y = -x$ și $y \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.

Din $\sin y = -x$ obținem

$$-\sin y = x \text{ sau } \sin(-y) = x \tag{1}$$

unde am folosit imparitatea funcției sinus. Aplicăm funcția arcsin egalității (1) și obținem $\arcsin(\sin(-y)) = \arcsin x$, sau $-y = \arcsin x$, deoarece

$$y \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \Rightarrow -y \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \Rightarrow \arcsin(\sin(-y)) = -y.$$

Prin urmare $-\arcsin(-x) = \arcsin x$, deci $\arcsin(-x) = -\arcsin x$.

b) Notăm $\arccos(-x) = y$, deci $\cos y = -x$ și $y \in [0, \pi]$.

Din $\cos y = -x$ obținem

$$-\cos y = x \text{ sau } \cos(\pi - y) = x \tag{2}$$

unde am folosit egalitatea $-\cos t = \cos(\pi - t)$, $\forall\, t \in \mathbb{R}$. Aplicăm funcția arccos egalității (2), deci $\arccos(\cos(\pi - y)) = \arccos x$ sau $\pi - y = \arccos x$ deoarece

$$y \in [0, \pi] \Rightarrow \pi - y \in [0, \pi] \Rightarrow \arccos(\cos(\pi - y)) = \pi - y.$$

Prin urmare $\pi - \arccos(-x) = \arccos x$, deci $\arccos(-x) = \pi - \arccos x$.

c) Se demonstrează analog cu a).

Exemple $* \arcsin(-\frac{\sqrt{2}}{2}) = -\arcsin\frac{\sqrt{2}}{2} = -\frac{\pi}{4}$;

$* \arccos(-\frac{\sqrt{3}}{2}) = \pi - \arccos\frac{\sqrt{3}}{2} = \pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6}$;

$* \operatorname{arctg}(-1) = -\operatorname{arctg} 1 = -\frac{\pi}{4}$.

P r o p o z i ţ i a 2. Au loc relaţiile:

a) $\sin(\arccos x) = \sqrt{1-x^2}$, $\forall\, x \in [-1, 1]$;

b) $\cos(\arcsin x) = \sqrt{1-x^2}$, $\forall\, x \in [-1, 1]$;

c) $\operatorname{tg}(\arcsin x) = \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$, $\forall\, x \in (-1, 1)$.

Demonstraţie. a) Cum $\arccos x \in [0, \pi]$, avem $\sin(\arccos x) \geq 0$, deci

$$\sin(\arccos x) = \sqrt{1-\cos^2(\arccos x)} = \sqrt{1-x^2},\ \forall\, x \in [-1, 1].$$

b) Cum $\arcsin x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ avem $\cos(\arcsin x) \geq 0$, deci

$$\cos(\arcsin x) = \sqrt{1-\sin^2(\arcsin x)} = \sqrt{1-x^2},\ \forall\, x \in [-1, 1].$$

c) Avem $\operatorname{tg}(\arcsin x) = \dfrac{\sin(\arcsin x)}{\cos(\arcsin x)} = \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$.

Exemple * $\sin(\arccos\frac{5}{13}) = \sqrt{1-\cos^2(\arccos\frac{5}{13})} = \sqrt{1-\frac{25}{169}} = \frac{12}{13}$;

* $\cos(\arcsin\frac{4}{5}) = \sqrt{1-\sin^2(\arcsin\frac{4}{5})} = \sqrt{1-\frac{16}{25}} = \frac{3}{5}$;

* $\operatorname{tg}(\arcsin\frac{4}{5}) = \dfrac{\sin(\arcsin\frac{4}{5})}{\cos(\arcsin\frac{4}{5})} = \frac{4}{5}\cdot\frac{5}{3} = \frac{4}{3}$.

P r o p o z i ţ i a 3. Are loc relaţia:

$$\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2},\ \forall\, x \in [-1, 1].$$

Demonstraţie. Notăm $\arcsin x = \alpha$, $\arccos x = \beta$, deci $\sin\alpha = x$, $\alpha \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ şi $\cos\beta = x$, $\beta \in [0, \pi]$. Prin urmare, $\sin\alpha = \cos\beta$ sau $\sin\alpha = \sin(\frac{\pi}{2} - \beta)$.

Avem $\alpha \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, iar din $\beta \in [0, \pi]$ rezultă $\frac{\pi}{2} - \beta \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. Cum funcţia sinus este strict crescătoare, deci injectivă, pe intervalul $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ şi $\sin\alpha = \sin(\frac{\pi}{2} - \beta)$, rezultă $\alpha = \frac{\pi}{2} - \beta$, de unde $\alpha + \beta = \frac{\pi}{2}$.

Exerciţii rezolvate

E1. Demonstraţi egalităţile:

a) $\arccos\frac{1}{7} - \arccos\frac{13}{14} = \frac{\pi}{3}$; b) $2\mathrm{arctg}\frac{1}{5} + \mathrm{arctg}\frac{1}{4} = \mathrm{arctg}\frac{32}{43}$;

c) $2\mathrm{arctg}x + \arcsin\frac{2x}{1+x^2} = \pi$, $\forall\, x \in [1, \infty)$.

R: a) Prin calcul găsim $\cos(\arccos\frac{1}{7} - \arccos\frac{13}{14}) = \frac{1}{2}$. Cum $0 < \frac{1}{7} < \frac{13}{14} < 1$ şi funcţia arccos este strict descrescătoare, rezultă $\frac{\pi}{2} > \arccos\frac{1}{7} > \arccos\frac{13}{14} > 0$, deci $\arccos\frac{1}{7} - \arccos\frac{13}{14} \in (0, \frac{\pi}{2}) \subset [0, \pi]$.

Fie $a = \arccos\frac{1}{7} - \arccos\frac{13}{14}$. Avem $\cos a = \frac{1}{2}$ şi $a \in [0, \pi]$, de unde, conform definiţiei funcţiei arccos, rezultă $a = \arccos\frac{1}{2} = \frac{\pi}{3}$.

b) Prin calcul găsim $\mathrm{tg}(2\,\mathrm{arctg}\frac{1}{5} + \mathrm{arctg}\frac{1}{4}) = \frac{32}{43}$ (*)

Cum $0 < \frac{1}{5} < 1$ şi funcţia arctg este strict crescătoare, rezultă $0 < \mathrm{arctg}\frac{1}{5} < \mathrm{arctg}\,1 = \frac{\pi}{4}$, deci $0 < 2\,\mathrm{arctg}\frac{1}{5} < \frac{\pi}{2}$. Analog obţinem $0 < \mathrm{arctg}\frac{1}{4} < \frac{\pi}{4}$, deci $2\mathrm{arctg}\frac{1}{5} + \mathrm{arctg}\frac{1}{4} \in (0, \frac{3\pi}{4})$; mai mult, ţinând cont de relaţia (*), rezultă $2\mathrm{arctg}\frac{1}{5} + \mathrm{arctg}\frac{1}{4} \in (0, \frac{\pi}{2})$.

Fie $a = 2\mathrm{arctg}\frac{1}{5} + \mathrm{arctg}\frac{1}{4}$. Avem $\mathrm{tg}a = \frac{32}{43}$ şi $a \in (0, \frac{\pi}{2}) \subset (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, de unde, conform definiţiei funcţiei arctg, rezultă $a = \mathrm{arctg}\frac{32}{43}$.

c) Prin calcul găsim $\sin(2\mathrm{arctg}x + \arcsin\frac{2x}{1+x^2}) = 0$.

Cum $1 \le x$, avem $\frac{\pi}{4} = \mathrm{arctg}\,1 \le \mathrm{arctg}x < \frac{\pi}{2}$ sau $2\mathrm{arctg}x \in [\frac{\pi}{2}, \pi)$, iar $\arcsin\frac{2x}{1+x^2} \in (0, \frac{\pi}{2})$, deci $2\mathrm{arctg}x + \arcsin\frac{2x}{1+x^2} \in (\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2})$.

Fie $a = 2\mathrm{arctg}x + \arcsin\frac{2x}{1+x^2}$, deci $\sin a = 0 = \sin\pi$, unde $a, \pi \in (\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2})$. Cum funcţia sinus este injectivă pe $(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2})$, avem $a = \pi$.

E2. Rezolvați ecuațiile:

a) $2\arcsin^2 x - \arcsin x - 6 = 0$;

b) $\arccos x\sqrt{3} + \arccos x = \frac{\pi}{2}$;

c) $2\text{arctg}(2x + 1) = \arccos x$.

R: a) Notăm $\arcsin x = t$, deci $t \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. Ecuația $2t^2 - t - 6 = 0$ are soluțiile $t_1 = 2$, $t_2 = -\frac{3}{2}$, deci

* $\arcsin x = 2$ (ecuație fără soluție, deoarece $2 \notin [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$)

* $\arcsin x = -\frac{3}{2} \Leftrightarrow x = \sin(-\frac{3}{2}) \Leftrightarrow x = -\sin\frac{3}{2}$.

Prin urmare, ecuația are soluția $x = -\sin\frac{3}{2}$.

b) Ecuația are sens numai dacă $|x\sqrt{3}| \leq 1$.

Din ecuație rezultă $\cos(\arccos x\sqrt{3} + \arccos x) = \cos\frac{\pi}{2}$ (*) , de unde $x\sqrt{3}\cdot x - \sqrt{1-3x^2}\cdot\sqrt{1-x^2} = 0 \Leftrightarrow x^2\sqrt{3} = \sqrt{1-4x^2+3x^4} \Leftrightarrow 4x^2 = 1$.

Rezultă $x = \pm\frac{1}{2}$. Ecuația dată și relația (*) pot fi echivalente sau nu, motiv pentru care *verificarea* este o etapă obligatorie a rezolvării:

$$x = -\frac{1}{2} \Rightarrow \arccos(-\frac{\sqrt{3}}{2}) + \arccos(-\frac{1}{2}) = \pi - \frac{\pi}{6} + \pi - \frac{\pi}{3} = 2\pi - \frac{\pi}{2} \neq \frac{\pi}{2}.$$

$$x = \frac{1}{2} \Rightarrow \arccos\frac{\sqrt{3}}{2} + \arccos\frac{1}{2} = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{2}.$$

Prin urmare, numai $x = \frac{1}{2}$ este soluție a ecuației.

c) Ecuația are sens numai dacă $|x| \leq 1$.

Din ecuație rezultă

$$\cos[2\text{arctg}(2x+1)] = x \Leftrightarrow \frac{1-(2x+1)^2}{1+(2x+1)^2} = x \Leftrightarrow x[2x^2 + 4x + 3] = 0 \Leftrightarrow x = 0.$$

Verificarea:

$$x = 0 \Rightarrow 2\text{ arctg } 1 = \arccos 0 \Rightarrow 2\frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} \text{ (adevărat).}$$

Prin urmare, ecuația are numai soluția $x = 0$.

Fie $f: E \to F$ o funcţie numerică bijectivă şi strict monotonă. Considerăm funcţia inversă $f^{-1}: F \to E$. Arătaţi că:

a) dacă f strict crescătoare, atunci f^{-1} este strict crescătoare;

b) dacă f strict descrescătoare, atunci f^{-1} este strict descrescătoare.

Aplicaţie: arătaţi că funcţiile arcsin şi arctg sunt strict crescătoare, iar funcţia arccos este strict descrescătoare.

Arătaţi că funcţiile arcsin şi arctg sunt impare, iar funcţia arccos nu este pară.

La exerciţiile 3-5, calculaţi numerele indicate

a) $\arccos(-\frac{1}{2})$; b) $\arccos(-\frac{\sqrt{2}}{2})$; c) $\arccos(-\frac{\sqrt{3}}{2})$;

a) $\arcsin\frac{1}{2}$; b) $\arccos\frac{\sqrt{2}}{2}$; c) $\text{arctg } 1 + \text{arctg}\sqrt{3}$;

d) $-\arcsin(-1)$; e) $\text{arctgt}(-1)$.

Calculaţi:

a) $\arcsin(\sin(-1,43))$; b) $\arcsin(\sin\frac{16\pi}{3})$;

c) $\arccos(\cos 2)$; d) $\arccos(\cos\frac{17\pi}{5})$.

Demonstraţi relaţiile, unde $x \in \mathbb{R}$:

a) $\sin(\text{arctg}x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$; b) $\cos(2\text{arctg}x) = \frac{1-x^2}{1+x^2}$.

Demonstraţi relaţiile, unde $x \in [-1, 1]$:

a) $\sin(2\arcsin x) = 2x\sqrt{1-x^2}$; b) $\cos(2\arccos x) = 2x^2 - 1$.

Calculaţi:

a) $\sin(2\arccos\frac{1}{2})$;

b) $\sin(\frac{3\pi}{2} - 2\text{arctg}\frac{4}{3})$.

Demonstraţi egalitatea: $\cos(2\text{ arctg}\frac{1}{7}) = \sin(4\text{arctg}\frac{1}{3})$.

Calculaţi:

a) $\sin(\arccos\frac{3}{5} + \arccos\frac{15}{17})$; b) $\text{tg}(\text{arctg}2 + \text{arctg}3)$.

La exerciţiile 11-12, demonstraţi egalităţile date.

a) $\arcsin\frac{77}{85} - \arcsin\frac{8}{17} = \arcsin\frac{3}{5}$; b) $\text{arctg}2 + \text{arctg}3 = \frac{3\pi}{4}$.

c) $\arccos\frac{7}{\sqrt{50}} + 2\text{arctg}\frac{1}{3} = \frac{\pi}{4}$.

a) $\operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} \frac{1}{x} = \frac{\pi}{2}, \forall x \in (0, \infty)$;

b) $\operatorname{arctg} \frac{1}{2x-1} - \operatorname{arctg} \frac{1}{2x+1} = \operatorname{arctg} \frac{1}{2x^2}, \forall x \in [1, \infty)$.

Pentru fiecare expresie, determinaţi valorile lui x pentru care expresia are sens.

a) $\arcsin \frac{2x}{1+x^2}$; b) $\arccos \frac{1-x^2}{1+x^2}$; c) $\arcsin(x^2 - 3x + 1)$.

Arătaţi că funcţia f este strict monotonă, unde:

a) $f: [0, 1] \to \mathbb{R}, f(x) = \arcsin(2x - 1)$; b) $f: [1, \frac{3}{5}] \to \mathbb{R}, f(x) = \arccos(3x - 4)$.

La exerciţiile 15 şi 16, rezolvaţi ecuaţiile

a) $2\arcsin^2 x - 5\arcsin x + 2 = 0$; b) $\operatorname{arctg}^2 \frac{x}{3} - 4 \operatorname{arctg} \frac{x}{3} - 5 = 0$;

c) $\frac{6}{\pi} \arcsin x = 1 + \frac{\pi}{3 \arcsin x}$.

a) $\arcsin 6x + \arcsin 6\sqrt{3}\, x = -\frac{\pi}{2}$; b) $\arccos x - \arcsin x = \frac{\pi}{6}$;

c) $\operatorname{arctg} 2x + \operatorname{arctg} 3x = \frac{3\pi}{4}$; d) $\arccos \frac{x}{2} = 2\operatorname{arctg}(x - 1)$;

e) $\arcsin 2x = 3 \arcsin x$.

4.1. Ecuaţii trigonometrice fundamentale

Fie un număr real a. Ecuaţiile în necunoscuta x

$$\sin x = a, x \in \mathbb{R}$$
$$\cos x = a, x \in \mathbb{R}$$
$$\operatorname{tg} x = a, x \in \mathbb{R} - \{(2k + 1)\frac{\pi}{2} \mid k \in \mathbb{Z}\}$$

se numesc *ecuaţii trigonometrice fundamentale.* În legătură cu fiecare dintre ele se pun două probleme:

- existenţa soluţiei: are ecuaţia cel puţin o soluţie?
- mulţimea soluţiilor: dacă ecuaţia are soluţie, care sunt toate soluţiile sale?

***Ecuaţia* $\sin x = a$**

Condiţia de existenţă a soluţiei este: $a \in [-1, 1]$ sau $|a| \le 1$.

Dacă $a \in (-\infty, -1) \cup (1, \infty)$, adică $|a| > 1$, atunci ecuaţia nu are soluţie.

Dacă $|a| \le 1$, ştim că ecuaţia $\sin x = a$ are soluţie unică în $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, anume $\arcsin a$. Cum $\sin(\pi - \arcsin a) = \sin(\arcsin a) = a$, rezultă că $\pi - \arcsin a$ este soluţie a ecuaţiei.

Datorită proprietăţii de periodicitate a funcţiei sinus, rezultă că numerele $\arcsin a + 2k\pi$, $\pi - \arcsin a + 2m\pi$ sunt soluţii, pentru orice $k, m \in \mathbb{Z}$. Reciproc, orice soluţie a ecuaţiei se află printre numerele puse în evidenţă anterior.

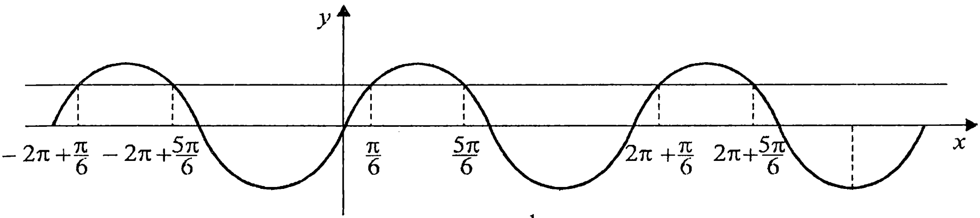


Fig. 23. Soluţiile ecuaţiei $\sin x = \frac{1}{2}$ (pe intervalul $[-2\pi, 4\pi]$)

Prin urmare, mulţimea soluţiilor ecuaţiei $\sin x = a$ este

$$\{\arcsin a + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\} \cup \{\pi - \arcsin a + 2m\pi \mid m \in \mathbb{Z}\} \qquad (1)$$

Avem:

$$\arcsin a + 2k\pi = (-1)^{2k} \arcsin a + 2k\pi$$

$$\pi - \arcsin a + 2m\pi = -\arcsin a + (2m+1)\pi = (-1)^{2m+1} \arcsin a + (2m+1)\pi.$$

Rezultă că reuniunea (1) este egală cu mulţimea $\{(-1)^n \arcsin a + n\pi \mid n \in \mathbb{Z}\}$.

Propoziţia 1. Dacă $|a| \le 1$, atunci mulţimea soluţiilor ecuaţiei $\sin x = a$ este

$$\{(-1)^n \arcsin a + n\pi \mid n \in \mathbb{Z}\}.$$

Dacă $|a| > 1$ ecuaţia nu are soluţie.

Se mai scrie: $\sin x = a \Leftrightarrow x = (-1)^n \arcsin a + n\pi,\ n \in \mathbb{Z}$.

În cazurile când $a = 1$, $a = 0$ sau $a = -1$, obţinem:

Propoziţia 2. $\sin x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + 2n\pi,\ n \in \mathbb{Z}$;

$\sin x = 0 \Leftrightarrow x = n\pi,\ n \in \mathbb{Z}$;

$\sin x = -1 \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{2} + 2n\pi,\ n \in \mathbb{Z}$.

***Ecuaţia* $\cos x = a$**

Condiţia de existenţă a soluţiei este: $a \in [-1, 1]$ sau $|a| \le 1$. Dacă $a \in (-\infty, -1) \cup (1, \infty)$, adică $|a| > 1$, atunci ecuaţia nu are soluţie.

Dacă $|a| \le 1$, ştim că ecuaţia $\cos x = a$ are soluţie unică în intervalul $[0, \pi]$, anume $\arccos a$.

Cum $\cos(-\arccos a) = \cos(\arccos a) = a$, rezultă că $-\arccos a$ este soluţie a ecuaţiei.

Datorită proprietăţii de periodicitate a funcţiei cosinus, rezultă că numerele $\arccos a + 2k\pi$, $-\arccos a + 2m\pi$ sunt soluţii, pentru orice $k, m \in \mathbb{Z}$. Reciproc, orice soluţie a ecuaţiei se află printre numerele puse în evidenţă anterior.

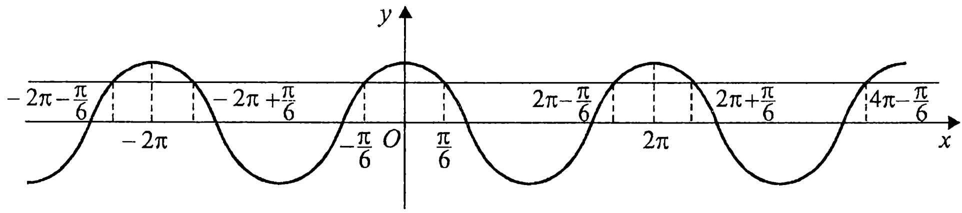


Fig. 24. Soluţiile ecuaţiei $\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ (pe intervalul $[-3\pi, 4\pi]$)

Prin urmare, mulţimea soluţiilor ecuaţiei $\cos x = a$ este

$$\{\arccos a + 2\pi k \mid k \in \mathbb{Z}\} \cup \{-\arccos a + 2m\pi \mid m \in \mathbb{Z}\} \text{ sau}$$

$$\{\pm \arccos a + 2n\pi \mid n \in \mathbb{Z}\}.$$

P r o p o z i ţ i a 3. Dacă $|a| \le 1$, atunci mulţimea soluţiilor ecuaţiei $\cos x = a$ este

$$\{\pm \arccos a + 2n\pi \mid n \in \mathbb{Z}\}.$$

Dacă $|a| > 1$, ecuaţia nu are soluţie.

Se mai scrie: $\cos x = a \Leftrightarrow x = \pm \arccos a + 2n\pi,\ n \in \mathbb{Z}$.

În cazurile când $a = 1$, $a = 0$ sau $a = -1$, obţinem:

P r o p o z i ţ i a 4.

$$\cos x = 1 \Leftrightarrow x = 2n\pi,\ n \in \mathbb{Z};$$

$$\cos x = 0 \Leftrightarrow x = (2n+1)\frac{\pi}{2},\ n \in \mathbb{Z};$$

$$\cos x = -1 \Leftrightarrow x = \pi + 2n\pi,\ n \in \mathbb{Z}.$$

***Ecuaţia* tg$x$ = a**

Ecuaţia are soluţie pentru orice $a \in \mathbb{R}$, deoarece orice număr real este o valoare a funcţiei tangentă. Vom scrie mulţimea soluţiilor.

Ştim că ecuaţia $\operatorname{tg} x = a$ are soluţie unică în intervalul $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, anume $\operatorname{arctg} a$. Datorită proprietăţii de periodicitate a funcţiei tangentă, deducem că $\operatorname{arctg} a + n\pi$ este soluţie pentru orice $n \in \mathbb{Z}$. Reciproc, orice soluţie a ecuaţiei are această formă.

În concluzie:

P r o p o z i ţ i a 5. Pentru orice $a \in \mathbb{R}$, mulţimea soluţiilor ecuaţiei $\operatorname{tg} x = a$ este

$$\{\operatorname{arctg} a + n\pi \mid n \in \mathbb{Z}\}.$$

Se mai scrie: $\operatorname{tg} x = a \Leftrightarrow x = \operatorname{arctg} a + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.

La exerciţiile 1 – 4, rezolvaţi (în $\mathbb{R}$) *ecuaţiile:*

a) $\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$; b) $\sin x = -\frac{1}{2}$; c) $\sin x = -\frac{5}{4}$;
d) $\sin 2x = -1$; e) $\sin 3x = 0$; f) $\sin 5x = 1$;
g) $\sin(4x - \frac{\pi}{3}) = \frac{\sqrt{2}}{2}$; h) $\sin(3x + \frac{\pi}{4}) = -1$; i) $\sin 7x = -7$.

a) $\cos x = \frac{1}{2}$; b) $\cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$; c) $\cos x = -\frac{7}{5}$;
d) $\cos 4x = -\frac{1}{2}$; e) $\cos 5x = -1$; f) $\cos 3x = 0$;
g) $\cos(3x + \frac{\pi}{4}) = \frac{1}{5}$; h) $\cos(2x - \frac{\pi}{3}) = 0$; i) $\cos\frac{5\pi}{3} = -\frac{5}{3}$.

a) $\text{tg}x = \sqrt{3}$;   b) $\text{tg}x = \frac{7}{5}$;   c) $\text{tg}x = -1$;

d) $\text{tg}(2x + \frac{\pi}{3}) = \frac{\sqrt{3}}{3}$;   e) $\text{tg}(4x - \frac{\pi}{4}) = 0$;   f) $\text{tg}3x = -10$;

g) $\text{ctg}x = 2$;   h) $\text{ctg}4x = -3$.

a) $2\sin(x - \frac{\pi}{3}) = 1$;   b) $\cos(2x + \frac{\pi}{4}) = 0$;   c) $3\text{tg}(x - \frac{\pi}{6}) = -\sqrt{3}$.

Pentru fiecare dintre următoarele ecuații, determinați valorile parametrului real m pentru care ecuația are soluții.

a) $\sin 5x = -3 + 4m$;   b) $\cos(3x - \frac{\pi}{4}) = \frac{m-1}{m+2}$, $m \neq -2$;

c) $\sin3x = m + \frac{1}{m}$, $m \neq 0$;   d) $\text{tg}5x = \frac{m}{m-3}$, $m \neq 3$.

Rezolvați (în $\mathbb{R}$) ecuațiile, arătând că fiecare este echivalentă cu o ecuație de forma $\cos y = 0$ sau $\sin y = 0$:

a) $\sin^2 x = 1$;   b) $\cos^2 x = 1$;   c) $\sin^2 4x = 1$;

d) $\cos^2 3x = 1$;   e) $2\cos^2 x - 1 = 0$;   f) $1 - 2\sin^2 x = 0$.

Arătați că funcțiile cosinus și sinus nu se anulează în aceleași puncte, demonstrând implicația: $\cos t = 0 \Rightarrow \sin t \neq 0$.

Rezolvați ecuațiile:

a) $a\sin x + b\cos x = 0$, unde $a, b \in \mathbb{R}^*$;   b) $\sin x - \cos x = 0$;

c) $\sin x + \cos x = 0$;   d) $\sqrt{3}\sin x + \cos x = 0$.

4.2. Ecuații trigonometrice care se reduc la ecuații fundamentale

Nu există o metodă generală pentru rezolvarea ecuațiilor trigonometrice. Există însă diverse procedee particulare, prin care anumite ecuații se reduc la ecuații fundamentale. În cele ce urmează vom prezenta câteva astfel de procedee.

***Ecuații de forma* $\sin u(x) = \sin v(x)$, $\cos u(x) = \cos v(x)$ sau $\text{tg}\, u(x) = \text{tg}\, v(x)$**

Prin transformarea diferențelor în produse, ecuațiile de acest tip se reduc la $\sin t = 0$ sau $\cos t = 0$.

Exerciții rezolvate

E1. Să rezolvăm (în $\mathbb{R}$) ecuațiile:

a) $\sin5x = \sin7x$;   b) $\cos10x = \cos5x$;   c) $\text{tg}5x = \text{tg}3x$.

R: a) Avem: $\sin5x - \sin7x = 0 \Leftrightarrow 2\sin\frac{5x-7x}{2}\cos\frac{5x+7x}{2} = 0 \Leftrightarrow \sin(-x)\cos6x = 0$

$\Leftrightarrow \sin(-x) = -\sin x = 0$ sau $\cos6x = 0 \Leftrightarrow x = k\pi$ sau $x = (2n+1)\frac{\pi}{12}$, $k, n \in \mathbb{Z}$.

Mulțimea soluțiilor ecuației este $S = \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\} \cup \{(2n+1)\frac{\pi}{12} \mid n \in \mathbb{Z}\}$.

b) Avem: $\cos 10x - \cos 5x = 0 \Leftrightarrow (-2)\sin\frac{15x}{2}\sin\frac{5x}{2} = 0 \Leftrightarrow \sin\frac{15x}{2} = 0$ sau

$\sin\frac{5x}{2} = 0 \Leftrightarrow \frac{15x}{2} = k\pi$ sau $\frac{5x}{2} = n\pi, k\, n \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x = 2k\frac{\pi}{15}$ sau $x = 2n\frac{\pi}{5}$, $k, n \in \mathbb{Z}$.

Mulţimea soluţiilor ecuaţiei este $S = A \cup B$, unde $A = \{2k\frac{\pi}{15} \mid k \in \mathbb{Z}\}$, $B = \{2n\frac{\pi}{5} \mid n \in \mathbb{Z}\}$. Să observăm că $A \subset B$ (justificaţi!), deci $A \cup B = B$. În concluzie, $S = \{2n\frac{\pi}{5} \mid n \in \mathbb{Z}\}$.

c) Condiţiile de existenţă pentru tg$5x$ şi tg$3x$ sunt $\cos 5x \neq 0$ şi $\cos 3x \neq 0$, deci $x \neq (2n+1)\frac{\pi}{10}$ şi $x \neq (2m+1)\frac{\pi}{6}$, $\forall\, n, m \in \mathbb{Z}$. Avem:

$$\mathrm{tg}5x - \mathrm{tg}3x = 0 \Leftrightarrow \frac{\sin(5x-3x)}{\cos 5x \cos 3x} = 0 \Leftrightarrow \sin 2x = 0 \Leftrightarrow x = k\frac{\pi}{2},\ k \in \mathbb{Z}.$$

Va trebui să excludem, dacă există, valorile lui k pentru care $k\frac{\pi}{2} = (2n+1)\frac{\pi}{10}$ sau $k\frac{\pi}{2} = (2m+1)\frac{\pi}{6}$, adică $5k = 2n+1$ sau $3k = 2m+1$ (1).

Pentru k impar, $5k$ este impar ($3k$ este impar), deci există $n \in \mathbb{Z}$ cu $5k = 2n+1$ (respectiv, există $m \in \mathbb{Z}$ cu $3k = 2m+1$). Dacă notăm $k = 2p+1$, atunci $5k = 10p + 5 = 10p + 4 + 1 = 2(5p+2) + 1$, deci $n = 5p + 2$.

Pentru k par, ecuaţiile (1) nu au soluţie. În concluzie, vom exclude valorile impare ale lui k, deci $S = \{2q\frac{\pi}{2} \mid q \in \mathbb{Z}\} = \{q\pi \mid q \in \mathbb{Z}\}$.

E2. Să rezolvăm ecuaţiile:

a) $\sin 6x = \cos 4x$; b) $\sin 2x = \cos 2x$; c) $\mathrm{tg}x = \mathrm{ctg}2x$.

R: a) Pentru a rezolva o ecuaţie de tipul $\sin u(x) = \cos v(x)$, avem două variante:

$$\sin u(x) = \cos v(x) \Leftrightarrow \sin u(x) = \sin(\frac{\pi}{2} - v(x))$$

$$\sin u(x) = \cos v(x) \Leftrightarrow \cos(\frac{\pi}{2} - u(x)) = \cos v(x)$$

În cazul nostru alegem prima variantă: $\sin 6x = \sin(\frac{\pi}{2} - 4x) \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow \sin 6x - \sin(\frac{\pi}{2} - 4x) = 0 \Leftrightarrow \sin(5x - \frac{\pi}{4})\cos(x + \frac{\pi}{4}) = 0 \Leftrightarrow 5x - \frac{\pi}{4} = k\pi$ sau $x + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} + n\pi$, $k, n \in \mathbb{Z}$. Prin urmare, mulţimea S a soluţiilor ecuaţiei este:

$$S = \{\frac{\pi}{20} + k\frac{\pi}{5} \mid k \in \mathbb{Z}\} \cup \{\frac{\pi}{4} + n\pi \mid n \in \mathbb{Z}\}.$$

b) Ecuaţia poate fi rezolvată prin metoda indicată la a) sau, mai rapid, astfel (justificaţi!): $\sin 2x = \cos 2x \Leftrightarrow \operatorname{tg} 2x = 1 \Leftrightarrow 2x = \frac{\pi}{4} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{8} + k\frac{\pi}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$. Să reţinem echivalenţa: $a\sin t + b\cos t = 0 \Leftrightarrow \operatorname{tg} t = -\frac{b}{a},\ a \neq 0$.

c) Condiţii de existenţă: $x \neq (2k+1)\frac{\pi}{2}$, $2x \neq n\pi$, pentru $\forall\ k, n \in \mathbb{Z}$, deci $x \neq n\frac{\pi}{2}$, $\forall\ n \in \mathbb{Z}$.

$\operatorname{tg} x = \operatorname{ctg} 2x \Leftrightarrow \operatorname{tg} x = \operatorname{tg}(\frac{\pi}{2} - 2x) \Leftrightarrow \operatorname{tg} x - \operatorname{tg}(\frac{\pi}{2} - 2x) = 0 \Leftrightarrow \sin(3x - \frac{\pi}{2}) = 0$ $\Leftrightarrow 3x - \frac{\pi}{2} = k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x = (2k+1)\frac{\pi}{6},\ k \in \mathbb{Z}$.

Vom exclude, dacă există, acele valori ale lui k pentru care avem

$$(2k+1)\frac{\pi}{6} = n\frac{\pi}{2} \text{ sau } 2k+1 = 3n,\ n \in \mathbb{Z} \tag{1}$$

Dacă (k, n) este soluţie a ecuaţiei(1), atunci n este impar. Fie $n = 2q + 1$, deci $k = \frac{3n-1}{2} = \frac{6q+3-1}{2} = 3q + 1$. Rezultă $k \neq 3q + 1$, $\forall\ q \in \mathbb{Z}$, deci k nu poate lua decât valori de forma $k = 3q$ sau $k = 3q + 2$, $q \in \mathbb{Z}$.

Soluţiile ecuaţiei sunt: $x = (6q+1)\frac{\pi}{6}$ sau $x = (6q+5)\frac{\pi}{6}$, $q \in \mathbb{Z}$.

Altfel. $\operatorname{tg} x = \operatorname{ctg} 2x \Leftrightarrow \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg} 2x = 1 \Leftrightarrow \cos x \cdot \cos 2x = \sin x \cdot \sin 2x \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow \cos(x + 2x) = 0 \Leftrightarrow \cos 3x = 0$, deci $x = (2k+1)\frac{\pi}{6}$, $k \in \mathbb{Z}$.

Rezolvaţi (în $\mathbb{R}$) *ecuaţiile de la exerciţiile 8-13*

a) $\sin 3x = \sin 7x$; b) $\cos 8x = \cos 6x$; c) $\operatorname{tg} 5x = \operatorname{tg} 4x$; d) $\operatorname{tg} 7x = \operatorname{tg} 9x$.

a) $\cos(2x - \frac{\pi}{3}) = \cos(x + \frac{\pi}{4})$; b) $\sin(x - \frac{\pi}{6}) = \sin(\frac{\pi}{3} - 2x)$;

c) $\operatorname{tg}(x + \frac{\pi}{4}) = \operatorname{tg}(\frac{\pi}{3} - 2x)$; d) $\operatorname{tg}(x + \frac{\pi}{3}) = \operatorname{tg}(2x + \frac{\pi}{6})$.

a) $\cos 3x = \sin x$; b) $\sin 3x = \cos 2x$;

c) $\cos 5x = \sin 15x$; d) $\sin(2x - \frac{\pi}{4}) = \cos x$.

a) $\sin x = \cos x$; b) $\sin x = -\cos x$; c) $\sin 4x = \cos 4x$; d) $\sin 3x = -\cos 3x$.

a) $\operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg} 4x = -1$; b) $\operatorname{tg} 3x = \operatorname{ctg} 4x$; c) $\operatorname{tg} 2x = -\operatorname{ctg} 5x$.

a) $\sin 6x + \sin 4x = 0$; b) $\sin 3x + \cos 3x = 0$; c) $\cos 3x + \sin 5x = 0$.

Ecuații trigonometrice care se reduc la ecuații algebrice

Considerăm ecuațiile, unde $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$.

$$a\sin^2 x + b\sin x + c = 0 \quad (\sin x = t)$$

$$a\cos^2 x + b\cos x + c = 0 \quad (\cos x = t)$$

$$a\mathrm{tg}^2 x + b\mathrm{tg} x + c = 0 \quad (\mathrm{tg} x = t)$$

Prin introducerea *necunoscutei auxilare* $\sin x = t$, $\cos x = t$ sau $\mathrm{tg} x = t$ (indicată în paranteză) fiecare dintre aceste ecuații se reduce la o ecuație de gradul al II-lea în t.

Exemplu Să rezolvăm ecuațiile

a) $2\sin^2 x + \sin x - 1 = 0$; b) $3\cos^2 x - 5\cos x - 2 = 0$;

R: a) $2\sin^2 x + \sin x - 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x = t \\ 2t^2 + t - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x = t \\ t = -1 \text{ sau } t = \dfrac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \sin x = -1$ sau $\sin x = \dfrac{1}{2}$. Mulțimea S a soluțiilor ecuației date este

$S = \{-\dfrac{\pi}{2} + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\} \cup \{(-1)^n \dfrac{\pi}{6} + n\pi \mid n \in \mathbb{Z}\}$.

b) $3\cos^2 x - 5\cos x - 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \cos x = t \\ 3t^2 - 5t - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos x = t \\ t = -\dfrac{1}{3} \text{ sau } t = 2 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \cos x = -\dfrac{1}{3}$ sau $\cos x = 2$. Deoarece $2 \notin [-1, 1]$, ecuația $\cos x = 2$ nu are soluții,

deci $S = \{\pm(\pi - \arccos\dfrac{1}{3}) + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$.

Observație. Fie $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ și $a \neq 0$. Fiecare dintre următoarele ecuații se reduce la o ecuație algebrică, după o transformare trigonometrică simplă, indicată în paranteză:

1) $a\sin^2 x + b\cos x + c = 0$ $\quad (\sin^2 x = 1 - \cos^2 x)$

2) $a\cos^2 x + b\sin x + c = 0$ $\quad (\cos^2 x = 1 - \sin^2 x)$

3) $a\mathrm{tg} x + b\mathrm{ctg} x + c = 0, b \neq 0$ $\quad (\mathrm{ctg} x = \dfrac{1}{\mathrm{tg} x}, x \neq m\dfrac{\pi}{2}, m \in \mathbb{Z})$

4) $a\cos 2x + b\cos^2 x + c\sin x + d = 0$ $\quad (\cos^2 x = 1 - \sin^2 x, \cos 2x = 1 - 2\sin^2 x)$

5) $a\cos 2x + b\sin^2 x + c\cos x + d = 0$ $\quad (\sin^2 x = 1 - \cos^2 x, \cos 2x = 2\cos^2 x - 1)$

Rezolvaţi (în $\mathbb{R}$) *ecuaţiile de la exerciţiile 14-18.*

a) $4\cos^2 x - 4\cos x + 1 = 0$; b) $\sin^2 x - 3\sin x + 2 = 0$;

c) $\sin^2 x + \sin x - 6 = 0$; d) $6\cos^2 x + 11\cos x - 7 = 0$;

e) $2\text{tg}^2 x - 7\text{tg} x + 3 = 0$.

a) $\sin^2 x - 2\cos x + 2 = 0$; b) $3\cos^2 x + \sin x + 1 = 0$;

c) $\text{tg} x - 8\,\text{ctg} x = 2$; d) $\cos 2x + 2\cos^2 x + 4\sin x = 0$;

e) $\cos 2x + 2\cos x - 5 = 0$.

a) $3\sin^2 2x + 7\cos 2x - 3 = 0$; b) $2\cos^2 x = 3\sin x$;

c) $3\cos 2x - 8\cos^2 x + 5\sin x - 2 = 0$;

a) $3\cos x + 5\sin\frac{x}{2} + 1 = 0$; b) $\cos 4x + 2\cos^2 2x + 4\sin 2x = 0$;

c) $2\cos 2x + 2\cos 4x + 3\sin^2 2x = 1$; d) $(\sin 2x + \sqrt{3}\cos 2x)^2 - 5 = \cos(\frac{\pi}{6} - 2x)$;

e) $\cos(\frac{\pi}{2} + x) + \cos(2\pi - 2x) + \sin(\pi - x) + \cos(\pi + x) = 0$.

a) $\cos 4x + 2\cos^2 x = 0$; b) $\cos 4x - \sin^2 x = 0$;

c) $\cos 2x - 3\cos x = 4\cos^2\frac{x}{2}$; d) $\sin^4 x + 5\cos 2x + 4 = 0$.

Considerăm ecuaţiile de forma $a\sin^2 x + b\sin x\cos x + c\cos^2 x = d$, unde a, b, c, d sunt numere reale date. Scriind ecuaţia sub forma $a\sin^2 x + b\sin x\cos x + c\cos^2 x = d(\sin^2 x + \cos^2 x)$ obţinem o ecuaţie de forma $A\sin^2 x + B\sin x\cos x + C\cos^2 x = 0$. Împărţind cu $\cos^2 x$ sau $\sin^2 x$ se obţine o ecuaţie de gradul al II-lea în $\text{tg}x$, respectiv $\text{ctg}x$. Rezolvaţi (în $\mathbb{R}$) ecuaţiile:

a) $2\sin^2 x + 3\cos x\sin x = 0$; b) $4\sin x\cos x - 5\cos^2 x = 0$;

c) $2\sin^2 x - 7\sin x\cos x + 3\cos^2 x = 0$; d) $4\sin^2 x - 3\sin x\cos x + 5\cos^2 x = 3$.

Rezolvaţi (în $\mathbb{R}$) *ecuaţiile de la exerciţiile 20 – 22.*

a) $\sin^2 x + 2\sin x\cos x - 3\cos^2 x = 0$;

b) $5\sin^2 x + 3\sin x\cos x - 5\cos^2 x = 2$;

c) $5\sin^2 x + \sqrt{3}\sin x\cos x + 6\cos^2 x = 5$.

a) $7\sin^2 x - 5\cos^2 x + 2 = 0$; b) $\text{tg}^2 x + \text{ctg}^2 x = 2$;

c) $\cos^2 x - 3\sin^2 x = 0$; d) $\sin^2 x - 3\cos^2 x = 0$;

e) $\cos(x + \frac{\pi}{6})\cos(x - \frac{\pi}{6}) = \frac{1}{2}$.

a) $\sin 2x = 1 - 3\cos^2 x$; b) $\cos x(2\sin x + 5\cos x) = 4$;

c) $8\sin 2x - 3\cos^2 x = 4$; d) $\cos^2 x + 3\sin^2 x = 1 - \sqrt{3}\sin 2x$.

Determinaţi soluţiile cuprinse în intervalul $(0, \pi)$ ale ecuaţiei

$$3\text{tg}^2 x + 16\cos^2 x - 13 = 0.$$

Fie ecuaţia $\sin^2 2x - 2\sin 2x - 2(a + 1) = 0$, unde $a \in \mathbb{R}$. Determinaţi valorile parametrului real a pentru care ecuaţia are soluţii.

Rezolvaţi şi discutaţi ecuaţiile, unde m este un parametru real:

a) $2(m + 1) \sin^2 x + (m - 3)\cos x - m - 3 = 0$, $m \neq -1$;

b) $\cos 2x + (2m - 1)\sin x + m - 1 = 0$;

c) $m \cos 2x + 4(m + 1) \sin x - 3m - 4 = 0$, $m \neq 0$;

d) $1 + \cos 4x = m(\sin x - \cos x)^2$.

Fie ecuaţia $(1 - m)\cos 4x - 2(5 - 2m)\cos 2x + 5m + 13 = 0$, $m \in \mathbb{R}$. Determinaţi valorile parametrului m pentru care ecuaţia are soluţii.

Ecuaţii de forma a* cos*x* + *b* sin*x* = *c

Considerăm ecuaţia în necunoscuta x

$$a \cos x + b \sin x = c \tag{1}$$

unde a, b, c sunt numere reale date.

Vom nota cu S mulţimea soluţiilor ecuaţiei.

Cazul I: $a = 0, b = 0$

Acest caz nu este interesant: dacă $c = 0$, avem $S = \mathbb{R}$, iar dacă $c \neq 0$, avem $S = \varnothing$ (ecuaţia nu are soluţii).

Cazul II: $a = 0, b \neq 0$ sau $a \neq 0, b = 0$

Dacă $a = 0$, $b \neq 0$ avem ecuaţia fundamentală $b\sin x = c$ sau $\sin x = \dfrac{c}{b}$, care are soluţie numai dacă $|c| \leq |b|$. (2)

Dacă $a \neq 0$, $b = 0$, avem ecuaţia fundamentală $a\cos x = c$ sau $\cos x = \dfrac{c}{a}$, care are soluţie numai dacă $|c| \leq |a|$. (3)

Cazul III: $a \neq 0$ şi $b \neq 0$

În acest caz, vom prezenta două metode de rezolvare a ecuaţiei, numite metoda algebrică şi metoda unghiului auxiliar.

A. *Metoda algebrică*

Se ştie că numerele $\cos x$, $\sin x$ se pot exprima în funcţie de $\mathrm{tg}\dfrac{x}{2}$ dacă

$$\frac{x}{2} \neq (2k + 1)\frac{\pi}{2} \text{ sau } x \neq (2k + 1)\pi,\ k \in \mathbb{Z}.$$

Făcând substituţia $\mathrm{tg}\dfrac{x}{2} = t$, avem

$$\cos x = \frac{1 - t^2}{1 + t^2},\ \sin x = \frac{2t}{1 + t^2}$$

iar ecuaţia (1) devine o ecuaţie de grad I sau II în necunoscuta t.

Rezolvarea ecuaţiei (1) se desfăşoară după următorul algoritm:

Pasul 1

Se verifică dacă ecuaţia (1) are soluţii de forma $\pi + 2k\pi$ (echivalent, dacă are soluţia $x = \pi$). Aceasta revine la testarea egalităţii

$$-a = c \Leftrightarrow a + c = 0. \tag{4}$$

Pasul 2

A. Dacă egalitatea $a + c = 0$ este adevărată, avem incluziunea

$$\{\pi + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\} \subset S$$

iar ecuaţia (1) se scrie:

$$a\cos x + b\sin x = -a \Leftrightarrow a(1 + \cos x) + b\sin x = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2a\cos^2\frac{x}{2} + 2b\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2\cos\frac{x}{2}\left(a\cos\frac{x}{2} + b\sin\frac{x}{2}\right) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \cos\frac{x}{2} = 0 \text{ sau } a\cos\frac{x}{2} + b\sin\frac{x}{2} = 0 \Leftrightarrow \cos\frac{x}{2} = 0 \text{ sau } \mathrm{tg}\frac{x}{2} = -\frac{a}{b}.$$

Prin urmare, dacă $a + c = 0$, soluţiile ecuaţiei (1) sunt:

$$S = \{\pi + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\} \cup \{-2\mathrm{arctg}\frac{a}{b} + 2m\pi \mid m \in \mathbb{Z}\} \qquad (5)$$

B. Dacă egalitatea $a + c = 0$ nu este adevărată, facem substituţia anunţată $\mathrm{tg}\frac{x}{2} = t$ şi ecuaţia (1) devine:

$$a\frac{1-t^2}{1+t^2} + b\frac{2t}{1+t^2} = c \Leftrightarrow (a + c)t^2 - 2bt + (c - a) = 0 \qquad (6)$$

Cum $a + c \neq 0$, ecuaţia (6) este o ecuaţie de gradul al II-lea în necunoscuta t, cu discriminantul $\Delta = 4(b^2 + a^2 - c^2)$. Prin urmare, (6) are soluţie dacă şi numai dacă

$$a^2 + b^2 \geq c^2 \qquad (7)$$

Avem soluţiile $t_{1,\,2} = \dfrac{b \pm \sqrt{a^2 + b^2 - c^2}}{a + c}$. Cu notaţia $\Delta' = a^2 + b^2 - c^2$ mulţimea soluţiilor ecuaţiei (1) este:

$$S = \{2\mathrm{arctg}\frac{b - \sqrt{\Delta'}}{a + c} + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\} \cup \{2\mathrm{arctg}\frac{b + \sqrt{\Delta'}}{a + c} + 2n\pi \mid n \in \mathbb{Z}\} \qquad (8)$$

Observaţie. În cazul când egalitatea $a + c = 0$ este adevărată, ecuaţia (6) devine o ecuaţie de gradul I, anume

$$-2bt + c - a = 0 \Leftrightarrow bt = -a \Leftrightarrow t = -\frac{a}{b} \Leftrightarrow \mathrm{tg}\frac{x}{2} = -\frac{a}{b}.$$

De fapt, regăsim soluţia (5) şi pe această cale.

*

Examinând condiţiile de existenţă (2), (3) şi (7), precum şi egalitatea (4), putem formula:

Condiţia de existenţă a soluţiilor ecuaţiei (1) exprimată unitar

Ecuaţia $a\cos x + b\sin x = c$ are soluţii dacă şi numai dacă $a^2 + b^2 \geq c^2$.

Exemplul 1 Să rezolvăm ecuaţiile:

a) $2\cos x + 2\sin x = 1+\sqrt{3}$; b) $\cos x + 2\sin x = -1$;

c) $\cos x + \sin x = 2$.

R: a) Coeficienţii $a = 2$, $b = 2$ şi $c = 1 + \sqrt{3}$ îndeplinesc condiţia $a^2 + b^2 \geq c^2$, deci ecuaţia are soluţii.

Pasul 1. Egalitatea $a + c = 0$ revine la $2 + 1 + \sqrt{3} = 0$, deci este falsă. Prin urmare, ecuaţia nu are soluţii de forma $\pi + 2k\pi$.

Pasul 2. Facem substituţia $\operatorname{tg}\frac{x}{2} = t$ şi obţinem

$$2\frac{1-t^2}{1+t^2} + 2\frac{2t}{1+t^2} = 1 + \sqrt{3} \Leftrightarrow (3 + \sqrt{3})t^2 - 4t - 1 + \sqrt{3} = 0.$$

Ecuaţia în t are soluţiile $t_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}$, $t_2 = 2 - \sqrt{3}$. Soluţiile ecuaţiei iniţiale se obţin reunind soluţiile ecuaţiilor:

$$\operatorname{tg}\frac{x}{2} = \frac{1}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow \frac{x}{2} = \operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{3}} + k\pi \Leftrightarrow \frac{x}{2} = \frac{\pi}{6} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z};$$

$$\operatorname{tg}\frac{x}{2} = 2 - \sqrt{3} \Leftrightarrow \frac{x}{2} = \operatorname{arctg}(2 - \sqrt{3}) + k\pi \Leftrightarrow \frac{x}{2} = \frac{\pi}{12} + n\pi,\ n \in \mathbb{Z};$$

(pentru a calcula $\operatorname{arctg}(2 - \sqrt{3})$, notăm $\operatorname{arctg}(2 - \sqrt{3}) = y$ şi calculăm $\operatorname{tg}2y$).

Prin urmare, $S = \{\frac{\pi}{3} + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\} \cup \{\frac{\pi}{6} + 2n\pi \mid n \in \mathbb{Z}\}$.

b) Coeficienţii $a = 1$, $b = 2$ şi $c = -1$ îndeplinesc condiţia $a^2 + b^2 \geq c^2$, deci ecuaţia are soluţii.

Pasul 1. Egalitatea $a + c = 0$ revine la $1 - 1 = 0$, deci este adevărată. Prin urmare, ecuaţia admite soluţii de forma $x = \pi + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

Pasul 2. Ecuaţia se scrie:

$$(1 + \cos x) + 2\sin x = 0 \Leftrightarrow 2\cos^2\frac{x}{2} + 4\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2\cos\frac{x}{2}(\cos\frac{x}{2} + 2\sin\frac{x}{2}) = 0.$$

Obţinem:

* $\cos\frac{x}{2} = 0 \Leftrightarrow x = \pi + 2m\pi$, $m \in \mathbb{Z}$ (soluţiile de la primul pas).

* $\cos\frac{x}{2} + 2\sin\frac{x}{2} = 0 \Leftrightarrow \operatorname{tg}\frac{x}{2} = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow x = -2\operatorname{arctg}\frac{1}{2} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

Mulţimea soluţiilor este:

$$S = \{\pi + 2m\pi \mid m \in \mathbb{Z}\} \cup \{-2\operatorname{arctg}\frac{1}{2} + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}.$$

Altfel. Facem substituţia tg $\frac{x}{2} = t$ şi ecuaţia devine:

$$\frac{1-t^2}{1+t^2} + 2\frac{2t}{1+t^2} = -1 \Leftrightarrow 1 + 4t = -1 \Leftrightarrow t = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow \operatorname{tg}\frac{x}{2} = -\frac{1}{2}.$$

Luând în consideraţie şi soluţiile de forma $\pi + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, aflate la primul pas al rezolvării, obţinem aceeaşi mulţime a soluţiilor.

c) Coeficienţii $a = 1$, $b = 1$, $c = -2$ nu îndeplinesc condiţia $a^2 + b^2 \geq c^2$, deci ecuaţia nu are soluţii.

Exemplul 2 Să rezolvăm şi să discutăm ecuaţia

$$(m-1)\cos 2x + 3m\sin 2x - 1 = 0$$

unde m este un parametru real.

R: Avem $a = m - 1$, $b = 3m$ şi $c = 1$. La început vom afla valorile lui m pentru care este îndeplinită condiţia $a^2 + b^2 \geq c^2$. Obţinem inecuaţia $(m-1)^2 + 9m^2 \geq 1$ sau $5m^2 - m \geq 0$, de unde $m \in (-\infty, 0] \cup [\frac{1}{5}, \infty)$.

Pasul 1. Să aflăm dacă există valori ale lui m pentru care numerele $(2k+1)\frac{\pi}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$ sunt soluţii. Avem:

$$(m-1)\cos(2k+1)\pi + 3m\sin(2k+1)\pi - 1 = 0 \Leftrightarrow -(m-1) - 1 = 0 \Leftrightarrow m = 0.$$

Pasul 2. Pentru $m = 0$, ecuaţia devine $\cos 2x = -1 \Leftrightarrow x = (2k+1)\frac{\pi}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$.

Pentru $m \neq 0$, facem substituţia $\operatorname{tg}x = y$ şi ecuaţia devine

$$(m-1)\frac{1-y^2}{1+y^2} + 3m\frac{2y}{1+y^2} - 1 = 0 \text{ sau } my^2 - 6my - (m-2) = 0.$$

Am obţinut o ecuaţie de gradul al II-lea în y, cu discriminantul

$$\Delta = 8m(5m-1) \text{ deci } \Delta \geq 0,$$

cu soluţiile $y_{1,2} = \dfrac{6m \pm \sqrt{\Delta}}{2m}$.

În concluzie, mulţimea soluţiilor ecuaţiei este:

1) dacă $m \in (-\infty, 0) \cup [\frac{1}{5}, \infty)$,

$$S = \{\operatorname{arctg}\frac{6m-\sqrt{\Delta}}{2m} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\} \cup \{\operatorname{arctg}\frac{6m+\sqrt{\Delta}}{2m} + n\pi \mid n \in \mathbb{Z}\};$$

2) dacă $m = 0$, $S = \{(2k+1)\frac{\pi}{2} \mid k \in \mathbb{Z}\}$;

3) dacă $m \in (0, \frac{1}{5})$, $S = \varnothing$.

B. *Metoda unghiului auxiliar*

Împărţind ecuaţia (1) cu $b \neq 0$, avem: $a\cos x + b\sin x = c \Leftrightarrow \frac{a}{b}\cos x + \sin x = \frac{c}{b}$.

Există un unic unghi $\alpha \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ astfel încât $\frac{a}{b} = \text{tg}\alpha$, anume $\alpha = \text{arctg}\frac{a}{b}$.

Ecuaţia devine: $\text{tg}\alpha \cos x + \sin x = \frac{c}{b} \Leftrightarrow \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\cos x + \sin x = \frac{c}{b} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \sin\alpha \cos x + \sin x \cos\alpha = \frac{c}{b}\cos\alpha \Leftrightarrow \sin(x + \alpha) = \frac{c}{b}\cos\alpha$. (9)

Din relaţia $\frac{a}{b} = \text{tg}\alpha$ deducem $1 + \frac{a^2}{b^2} = \frac{1}{\cos^2\alpha}$ de unde $\cos^2\alpha = \frac{b^2}{a^2+b^2}$ sau $|\cos\alpha| = \frac{|b|}{\sqrt{a^2+b^2}}$. Presupunem $b > 0$ (dacă $b < 0$, înmulţim ecuaţia cu -1 şi obţinem o ecuaţie echivalentă) şi cum $\cos\alpha > 0$ deoarece $\alpha \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, obţinem $\cos\alpha = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$. Ecuaţia devine $\sin(x+\alpha) = \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}$. Dacă $\left|\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}\right| \leq 1$, ceea ce este echivalent cu $a^2 + b^2 \geq c^2$, atunci $x + \alpha = (-1)^k \arcsin\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, deci mulţimea soluţiilor este

$$S = \{(-1)^k \arcsin\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}} - \text{arctg}\frac{b}{a} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}.$$

*

Observaţie. Folosind metoda unghiului auxiliar putem transforma în produs expresia $a\cos x + b\sin x$. Avem: $a\cos x + b\sin x = b(\frac{a}{b}\cos x + \sin x) = b(\text{tg}\alpha \cos x + \sin x) =$

$= \frac{b}{\cos\alpha}(\sin\alpha \cos x + \sin x \cos\alpha)$, unde $\alpha = \text{arctg}\frac{b}{a}$ şi $\frac{b}{\cos\alpha} = \sqrt{a^2+b^2}$.

În concluzie: $a\cos x + b\sin x = \sqrt{a^2+b^2}\sin(x+\alpha)$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

Exemplul 3 Folosind metoda unghiului auxiliar, să rezolvăm ecuaţiile:

a) $2\cos x + 2\sin x = 1 + \sqrt{3}$; b) $\cos x + 2\sin x = -1$.

R: Menţionăm că ecuaţiile au fost rezolvate prin metoda algebrică la *exemplul 1* din acest paragraf.

a) Împărţim cu 2 şi obţinem:

$$\cos x + \sin x = \frac{1+\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \sqrt{2}\sin(x + \frac{\pi}{4}) = \frac{1+\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \sin(x+\frac{\pi}{4}) = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}.$$

Rezultă că mulţimea soluţiilor este $S = A \cup B$, unde

$$A = \{-\frac{\pi}{4} + \arcsin\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4} + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\};$$

$$B = \{-\frac{\pi}{4} + \pi - \arcsin\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4} + 2n\pi \mid n \in \mathbb{Z}\}.$$

Observaţie. Se arată că $\arcsin\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4} = \frac{5\pi}{12}$. Prin urmare,

$$A = \{-\frac{\pi}{4} + \frac{5\pi}{12} + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\} = \{\frac{\pi}{6} + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\};$$

$$B = \{-\frac{\pi}{4} + \pi - \frac{5\pi}{12} + 2n\pi \mid n \in \mathbb{Z}\} = \{\frac{\pi}{3} + 2n\pi \mid n \in \mathbb{Z}\},$$

deci mulţimea soluţiilor obţinută acum coincide cu cea obţinută prin metoda algebrică.

b) Împărţim cu 2 şi avem $\frac{1}{2}\cos x + \sin x = -\frac{1}{2}$. Scriem $\frac{1}{2} = \mathrm{tg}\alpha$, unde $\alpha = \mathrm{arctg}\frac{1}{2}$ şi $\alpha \in (0, \frac{\pi}{2})$. Obţinem ecuaţia $\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\cos x + \sin x = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \sin\alpha \cos x + \sin x \cos\alpha = -\frac{1}{2}\cos\alpha \Leftrightarrow \sin(x + \alpha) = \frac{-1}{\sqrt{5}}$.

Să explicăm: din $\frac{1}{\cos^2\alpha} = 1 + \mathrm{tg}^2\alpha = 1 + \frac{1}{4}$ deducem $\cos\alpha = \frac{2}{\sqrt{5}}$, $\sin\alpha = \frac{1}{\sqrt{5}}$ şi $\alpha = \mathrm{arctg}\,\frac{1}{2} = \arcsin\frac{1}{\sqrt{5}} = \arccos\frac{2}{\sqrt{5}}$.

Prin urmare, mulţimea soluţiilor este $S = A \cup B$, unde

$$A = \{-\alpha - \arcsin\frac{1}{\sqrt{5}} + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\} = \{-2\arcsin\frac{1}{\sqrt{5}} + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\};$$

$$B = \{-\alpha + \pi + \arcsin\frac{1}{\sqrt{5}} + 2n\pi \mid n \in \mathbb{Z}\} = \{\pi + 2n\pi \mid n \in \mathbb{Z}\}.$$

Observaţie. Deoarece $\arcsin\frac{1}{\sqrt{5}} = \mathrm{arctg}\frac{1}{2}$, rezultă că mulţimea soluţiilor obţinută acum coincide cu cea obţinută prin metoda algebrică.

Folosind metoda algebrică, rezolvaţi ecuaţiile:

a) $\sin x - \cos x = 1$; b) $\sin x + 7\cos x = 5$;

c) $\cos x - 8\sin x = 9$; d) $2\sin x - \cos x = 1$.

Folosind metoda unghiului auxiliar, rezolvaţi ecuaţiile:

a) $3\sin x + 4\cos x = 5$; b) $\cos x + \sqrt{3}\sin x = 2$.

Rezolvaţi ecuaţia $\sqrt{3}\cos x + \sin x = 1$ prin două metode şi arătaţi că se obţin aceleaşi soluţii.

Ecuaţiile de forma $a\cos(mx + n) + b\sin(mx + n) = c$, unde a, b, c şi $m \neq 0$, n sunt numere reale date, se reduc la ecuaţii de forma $a\cos t + b\sin t = c$, prin substituţia $mx + n = t$. Rezolvaţi ecuaţiile:

a) $\cos 2x + \sin 2x = \frac{\sqrt{2}}{2}$; b) $\cos 4x - \sin 4x = 1$;

c) $\cos 3x - \sqrt{3}\sin 3x = -1$; d) $\sin 2x + \cos 2x = -1$;

e) $\sin 6x + \sqrt{3}\cos 6x = 2$; f) $\cos(4x + \pi) - \sin(4x + \pi) = 1$.

Rezolvaţi şi discutaţi ecuaţiile, unde m este un parametru real:

a) $\sin x + m\cos x = 2m$; b) $m\cos x - (m + 1)\sin x = m$;

c) $(m - 3)\sin x - 4\cos x = m - 5$.

Fie $a, b \in \mathbb{R}$ cu $a \neq 0$ sau $b \neq 0$. Arătaţi că:

$$|a\cos x + b\sin x| \leq \sqrt{a^2 + b^2},\ \forall x \in \mathbb{R}.$$

Rezolvaţi ecuaţiile:

a) $\sin x + \cos x - 2\sqrt{2}\sin x\cos x = 0$; b) $2\sin 2x - 3\sin x - 3\cos x = 0$;

c) $2\sqrt{6}\sin x\cos x = \sin x - \cos x$; d) $\sin 2x - 5\sin x + 5\cos x + 5 = 0$.

Indicaţie. Fie ecuaţiile

$$a(\cos x + \sin x) + b\cos x\sin x + c = 0 \qquad (1)$$

$$a(\cos x - \sin x) + b\cos x\sin x + c = 0 \qquad (2)$$

unde $a, b, c \in \mathbb{R}$.

Dacă $a = 0$ sau $b = 0$, ecuaţiile se rezolvă imediat.

Dacă $ab \neq 0$, pentru a rezolva (1) introducem necunoscuta auxiliară $\cos x + \sin x = y$. Rezultă $|y| \leq \sqrt{2}$ şi $\cos x\sin x = \frac{1}{2}(y^2 - 1)$. Înlocuind în (1) obţinem

$$by^2 + 2ay + 2c - b = 0 \qquad (1')$$

Dacă $\Delta = 4(a^2 + b^2 - 2bc) \geq 0$, ecuaţia (1') are soluţiile y_1, y_2, iar soluţiile ecuaţiei (1) sunt reuniunea soluţiile ecuaţiilor

$$\cos x + \sin x = y_1,\ \cos x + \sin x = y_2.$$

Pentru a rezolva (2), notăm $\cos x - \sin x = y$ şi procedăm analog.

Prin introducerea numerelor reale se pot exprima rezultatele oricăror măsurători, dar problema soluţiilor ecuaţiilor de orice tip, cu coeficienţi reali, nu este rezolvată. Ecuaţii simple ca $x^2 + 1 = 0$, $x^2 + x + 1 = 0$ nu au soluţii în mulţimea $\mathbb{R}$ a numerelor reale. De aceea, se pune în mod necesar problema extinderii în continuare a noţiunii de număr. Această extindere conduce la noţiunea de număr complex. Vom arăta în acest capitol că mulţimea numerelor complexe este suficient de largă, încât orice ecuaţie de gradul al doilea cu coeficienţi reali să aibă soluţii în această mulţime.

Numerele complexe nu reprezintă rezultatul unor măsurători şi de aceea teoria numerelor complexe are un caracter mai abstract, mai formal decât teoria numerelor reale. Remarcăm că, în pofida acestui grad de abstractizare a noţiunilor, teoria numerelor complexe, prin implicaţiile sale, are multiple aplicaţii practice (de exemplu: în mecanică, electrotehnică, fizică atomică ş.a.).

1.1. Definirea numerelor complexe

Prezentăm acum construcţia mulţimii numerelor complexe, plecând de la mulţimea $\mathbb{R}$ a numerelor reale.

Fie produsul cartezian $\mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(a, b) \mid a, b \in \mathbb{R}\}$, adică mulţimea perechilor ordonate de numere reale.

Precizăm că două perechi (a, b) şi (a', b') sunt *egale* dacă şi numai dacă $a = a'$ şi $b = b'$. Astfel, egalitatea $(a, b) = (a', b')$ este echivalentă cu două egalităţi de numere reale: $a = a'$ şi $b = b'$.

Definim pe mulţimea $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ două operaţii algebrice: *adunarea* şi *înmulţirea.*

Dacă $z = (a, b)$ şi $z' = (a', b')$ aparţin mulţimii $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, atunci definim:

$$z + z' = (a + a', b + b') \tag{1}$$

Elementul $(a + a', b + b')$ se numeşte *suma* dintre z şi z', iar operaţia prin care oricăror elemente z şi z' din mulţimea $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ li se asociază suma lor se numeşte *adunare.*

De asemenea, definim:

$$zz' = (aa' - bb', ab' + a'b). \tag{2}$$

Elementul $(aa' - bb', ab' + a'b)$ se numeşte *produsul* dintre z şi z', iar operaţia prin care oricăror elemente z şi z' din mulţimea $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ li se asociază produsul lor se numeşte *înmulţire.*

Exemplu

$$(2,-1)+(-3,1)=(2-3,-1+1)=(-1,0),$$
$$(2,-1)(-3,1)=(2\cdot(-3)-(-1)\cdot 1,\ 2\cdot 1+(-1)(-3))=(-6+1,\ 2+3)=(-5,5).$$

Definiţie. Fiecare element al mulţimii $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ pe care sunt definite cele două operaţii precedente (1) şi (2), se numeşte *număr complex.*

Se notează cu $\mathbb{C}$ *mulţimea numerelor complexe.*

Fie submulţimea lui $\mathbb{C}$:

$$R' = \{(a, 0) \mid a \in \mathbb{R}\}.$$

Funcţia de la $\mathbb{R}$ la R' definită prin $a \to (a, 0)$ este evident o funcţie bijectivă de la mulţimea $\mathbb{R}$ a numerelor reale în submulţimea R' a lui $\mathbb{C}$.

Mai mult, operaţiile de adunare şi înmulţire a numerelor complexe care aparţin mulţimii R' se transcriu astfel:

$$(a, 0) + (a', 0) = (a + a', 0);$$
$$(a, 0)(a', 0) = (aa', 0).$$

Aceste relaţii arată că adunarea şi înmulţirea pe R' se fac după aceleaşi reguli ca adunarea şi înmulţirea numerelor reale . Din acest motiv rezultă că R' are aceleaşi proprietăţi aritmetice ca mulţimea $\mathbb{R}$ a numerelor reale. Acest fapt ne permite să identificăm numărul complex $(a, 0)$ cu numărul real a. Practic, această identificare revine la a înlocui numărul complex $(a, 0)$ cu numărul real a şi invers.

Aşadar, punem $(a, 0) = a$. În particular, numerele complexe $(0, 0)$ şi $(1, 0)$ sunt numerele reale 0 şi 1.

1.2. Proprietăţile adunării numerelor complexe

1° Adunarea este *comutativă*, adică oricare ar fi z şi z' din $\mathbb{C}$, avem

$$z + z' = z' + z.$$

Într-adevăr, dacă $z = (a, b)$ şi $z' = (a', b')$, atunci avem $z + z' = (a, b) + (a', b') = (a + a', b + b')$. Analog, avem $z' + z = (a' + a, b' + b)$. Cum însă adunarea numerelor reale este comutativă, avem $a + a' = a' + a$ şi $b + b' = b' + b$. Deci $(a + a', b + b') = (a' + a, b' + b)$, adică $z + z' = z' + z$.

2° Adunarea este *asociativă,* adică oricare ar fi z, z' şi z'' din $\mathbb{C}$, avem

$$(z + z') + z'' = z + (z' + z'').$$

Într-adevăr, dacă $z = (a, b)$, $z' = (a', b')$ şi $z'' = (a'', b'')$ atunci avem $(z + z') + z'' = [(a, b) + (a', b')] + (a'', b'') = (a + a', b + b') + (a'', b'') = ((a + a') + a'', (b + b') + b'')$. Analog, avem $z + (z' + z'') = (a + (a' + a''), b + (b' + b''))$. Cum însă adunarea numerelor reale este asociativă, avem $(a + a') + a'' = a + (a' + a'')$ şi $(b + b') + b'' = b + (b' + b'')$. Deci $(z + z') + z'' = z + (z' + z'')$.

3°Element neutru. Numărul complex $0 = (0, 0)$ este *element neutru* pentru adunare, adică oricare ar fi z din $\mathbb{C}$ avem:

$$z + 0 = 0 + z = z.$$

Într-adevăr, dacă $z = (a, b)$, atunci cum 0 este element neutru pentru adunarea numerelor reale, avem $z + 0 = (a, b) + (0, 0) = (a + 0, b + 0) = (a, b) = z$.

Dar, după proprietatea *1°*, avem de asemenea $0 + z = z$.

*4°*Orice număr complex are un *opus*, adică oricare ar fi z din $\mathbb{C}$, există un număr complex notat cu $-z$ astfel încât

$$z + (-z) = (-z) + z = 0.$$

Într-adevăr, dacă $z = (a, b)$ atunci $-z = (-a, -b)$, deoarece $z + (-z) = (a, b) + (-a, -b) = (a + (-a), b + (-b)) = (0, 0) = 0$.

Conform proprietății *1°* avem, de asemenea, $(-z) + z = 0$.

Exemple

1. Dacă $z_1 = (2, 3)$, atunci $-z_1 = (-2, -3)$.

2. Dacă $z_2 = (-1, 1)$, atunci $-z_2 = (1, -1)$.

Observație. Dacă z și z' sunt numere complexe, suma $z + (-z')$ se notează, simplu, prin $z - z'$ și se numește *diferența* dintre z și z'. Operația prin care oricăror elemente z și z' din mulțimea $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ se asociază diferența lor se numește *scădere.*

Dacă $z = (a, b)$ și $z' = (a', b')$, atunci avem formula:

$$z - z' = (a - a', b - b') \tag{3}$$

Exemplu

Dacă $z = (2, -5)$ și $z' = (-3, 1)$, atunci $z - z' = z + (-z') = (2, -5) + [-(-3, 1)] = (2, -5) + (3, -1) = (5, -6)$.

1.3. Proprietățile înmulțirii numerelor complexe

*1°*Înmulțirea este *comutativă,* adică oricare ar fi z și z' din $\mathbb{C}$, avem

$$zz' = z'z.$$

Într-adevăr, dacă $z = (a, b)$ și $z' = (a', b')$, atunci $zz' = (a, b)(a', b') = (aa' - bb', ab' + a'b)$. Analog, avem $z'z = (a'a - b'b, a'b + ab')$. Cum adunarea și înmulțirea numerelor reale sunt comutative, avem $aa' - bb' = a'a - b'b$ și $ab' + a'b = a'b + ab'$. Deci $zz' = z'z$.

2° Înmulțirea este *asociativă,* adică oricare ar fi z, z' și z'' din $\mathbb{C}$, avem

$$(zz')z'' = z(z'z'').$$

Într-adevăr, dacă $z = (a, b)$, $z' = (a', b')$ și $z'' = (a'', b'')$ atunci $(zz')z'' = [(aa' - bb', ab' + a'b)]\,(a'', b'') = ((aa' - bb')a'' - (ab' + a'b)b'', (aa' - bb')b'' + a''(ab' + a'b)) = (aa'a'' - bb'a'' - ab'b'' - a'bb'', aa'b'' - bb'b'' + a''ab' + a''a'b)$. Analog, avem $z(z'z'') = (aa'a'' - ab'b'' - ba'b'' - ba''b', aa'b'' + aa''b' + a'a''b - b'b''b)$. Având în vedere comutativitatea adunării și înmulțirii numerelor reale, rezultă că expresiile lui $(zz')z''$ și $z(z'z'')$ sunt aceleași. Deci $(zz')z'' = z(z'z'')$.

3° Element neutru. Numărul complex $1 = (1, 0)$ este *element neutru* pentru înmulţire, adică oricare ar fi z din $\mathbb{C}$ avem:

$$z \cdot 1 = 1 \cdot z = z.$$

Într-adevăr, dacă $z = (a, b)$, atunci cum 1 este element neutru pentru înmulţirea numerelor reale, avem $z \cdot 1 = (a, b)(1, 0) = (a, b) = z$.

După proprietatea *1°* avem, de asemenea, $1 \cdot z = z$.

4° Orice număr complex diferit de 0 are un *invers*, adică oricare ar fi $z \neq 0$, există un număr complex notat cu z^{-1} astfel încât

$$zz^{-1} = z^{-1}z = 1.$$

Fie $z = (a, b)$ diferit de $(0, 0)$, adică cel puţin una din componentele a sau b este nenulă, altfel spus, $a^2 + b^2 \neq 0$. Dacă (x, y) este un număr complex astfel încât $(a, b)(x, y) = (1, 0)$, atunci $(ax - by, bx + ay) = (1, 0)$. De aici rezultă $\begin{cases} ax - by = 1 \\ bx + ay = 0 \end{cases}$. Rezolvând sistemul, se obţine: $x = \dfrac{a}{a^2 + b^2}$, $y = \dfrac{-b}{a^2 + b^2}$.

Conform proprietăţii *1°* avem, de asemenea, $(x, y)(a, b) = (1, 0)$.

Deci $z^{-1} = \left(\dfrac{a}{a^2 + b^2}, \dfrac{-b}{a^2 + b^2}\right)$.

Observaţie. În loc de z^{-1} $(z \neq 0)$, se foloseşte uneori notaţia $\dfrac{1}{z}$. Dacă $z' = (a', b')$ este un alt număr complex, atunci $z'z^{-1}$ se notează încă prin $\dfrac{z'}{z}$ şi se numeşte *câtul împărţirii* lui z' la z $(z \neq 0)$. Câtul $\dfrac{z'}{z}$ este definit de formula:

$$\frac{z'}{z} = \left(\frac{aa' + bb'}{a^2 + b^2}, \frac{ab' - a'b}{a^2 + b^2}\right). \tag{4}$$

Exemple

1. Dacă $z = (2, -1)$, atunci $z^{-1} = \dfrac{1}{z} = \left(\dfrac{2}{4+1}, \dfrac{1}{4+1}\right) = \left(\dfrac{2}{5}, \dfrac{1}{5}\right)$.

2. Dacă $z = (2, -1)$ şi $z' = (1, -1)$, atunci

$$z'z^{-1} = \frac{z'}{z} = \left(\frac{2 \cdot 1 + (-1)\cdot(-1)}{4+1}, \frac{2\cdot(-1) - 1\cdot(-1)}{4+1}\right) = \left(\frac{2+1}{5}, \frac{-2+1}{5}\right) = \left(\frac{3}{5}, \frac{-1}{5}\right).$$

5° Înmulţirea este distributivă faţă de adunare, adică oricare ar fi z, z' şi z'' din $\mathbb{C}$, au loc relaţiile: $z(z' + z'') = zz' + zz''$ şi $(z + z')z'' = zz'' + z'z''$.

Într-adevăr, dacă $z = (a, b)$, $z' = (a', b')$ şi $z'' = (a'', b'')$ atunci $z(z' + z'') =$ $= (a, b)\,[(a', b') + (a'', b'')] = (a, b)(a' + a'', b' + b'') = (a(a' + a'') - b(b' + b''),$ $a(b' + b'') + (a' + a'')b) = (aa' + aa'' - bb' - bb'', ab' + ab'' + a'b + a''b)$. Pe de altă parte, avem $zz' + zz'' = (a, b)(a', b') + (a, b)(a'', b'') = (aa' - bb', ab' + a'b) +$ $+ (aa'' - bb'', ab'' + a''b) = (aa' - bb' + aa'' - bb'', ab' + a'b + ab'' + a''b)$. Având în vedere comutativitatea adunării numerelor reale, rezultă că expresiile lui $z(z' + z'')$ şi $zz' + zz''$ sunt aceleaşi. Deci $z(z' + z'') = zz' + zz''$.

Analog se demonstrează cea de-a doua relaţie, pe care o lăsăm ca exerciţiu.

Observaţie. Numărul complex (0, 1) are proprietatea (0, 1) (0, 1) = = (–1, 0) = –1. Rezultă deci că (0, 1) este o rădăcină a ecuaţiei $x^2 + 1 = 0$. Aşadar, această ecuaţie are soluţii în mulţimea numerelor complexe, ceea ce nu era posibil în mulţimea numerelor reale.

2.1. Notaţia $z = (a, b)$, introdusă pentru numerele complexe, nu este prea comodă în calculele cu numere complexe. De aceea, de obicei, se foloseşte o altă scriere a numerelor complexe. Convenim să notăm numărul complex (0, 1) prin i. Atunci, după regulile de adunare şi înmulţire a numerelor complexe, avem:

$$(a, b) = (a, 0) + (0, b) = (a, 0) + (b, 0)(0, 1).$$

Deoarece $(a, 0)$ şi $(b, 0)$ se identifică cu a, respectiv b, iar (0, 1) s-a notat cu i, atunci această scriere se reprezintă sub forma $(a, b) = a + b\mathrm{i}$.

Această expresie se numeşte *forma algebrică* a numărului complex (a, b).

Exemple

$$(2, -1) = 2 + (-1)\mathrm{i} = 2 - \mathrm{i}; \quad (1, 0) = 1 + 0 \cdot \mathrm{i} = 1; \quad (0, -5) = 0 + (-5)\mathrm{i} = -5\mathrm{i}.$$

În continuare vom scrie numerele complexe sub forma lor algebrică.

Numărul complex i se numeşte *unitate imaginară*. Numerele de forma $b\mathrm{i}$, cu b număr real, se numesc *imaginare*. Dacă numărul complex z se scrie sub forma $z = a + b\mathrm{i}$, atunci a se numeşte *partea reală*, iar $b\mathrm{i}$ se numeşte *partea imaginară* a numărului z. Numărul b se numeşte *coeficientul părţii imaginare.**

De exemplu, pentru numărul complex 4 + 5i, partea reală este 4, iar partea imaginară este 5i; coeficientul părţii imaginare este egal cu 5. Pentru numărul –2i, partea reală este 0, cea imaginară –2i, iar coeficientul părţii imaginare este –2. Pentru numărul 3, partea reală este 3, cea imaginară este $0 \cdot \mathrm{i} = 0$, iar coeficientul părţii imaginare este egal cu 0.

Reluăm mai jos adunarea şi înmulţirea a două numere complexe reprezentate sub forma lor algebrică. Astfel:

$$(a + b\mathrm{i}) + (a' + b'\mathrm{i}) = (a + a') + (b + b')\mathrm{i}; \tag{1'}$$

$$(a + b\mathrm{i})(a' + b'\mathrm{i}) = (aa' - bb') + (ab' + a'b)\mathrm{i}. \tag{2'}$$

Deci, *suma a două numere complexe este un număr complex a cărui parte reală, respectiv imaginară, este suma părţilor reale, respectiv imaginare, ale numerelor date.*

Formula (2') care dă înmulţirea a două numere complexe este mai greu de reţinut şi chiar de formulat. Observăm însă că, dacă $z = a + b\mathrm{i}$ şi $z' = a' + b'\mathrm{i}$ sunt numere complexe, atunci având în vedere proprietăţile operaţiilor pe $\mathbb{C}$, rezultă:

$$(a + b\mathrm{i})(a' + b'\mathrm{i}) = aa' + (ab' + a'b)\mathrm{i} + bb'\mathrm{i}^2.$$

Dar, înlocuind $\mathrm{i}^2 = -1$ în ultima relaţie, se obţine formula (2').

* Pentru un număr complex $z = a + b\mathrm{i}$ se notează, uneori, $a = \mathrm{Re}(z)$, care se citeşte „real de z" şi $b = \mathrm{Im}(z)$, care se citeşte „imaginar de z".

2.2. Numere complexe conjugate

Dacă $z = a + bi$ este un număr complex, atunci numărul $a - bi$, notat prin $\bar{z}$, (adică z barat) sau $\overline{a+bi}$ se numeşte *conjugatul* său. Evident, conjugatul lui $\bar{z}$ este z. De aceea, numerele complexe z şi $\bar{z}$ se numesc *conjugate.*

Dacă a este un număr real oarecare, atunci $a = a + 0i = a - 0i = \bar{a}$, şi deci a este egal cu conjugatul său. Mai mult, dacă $a + bi$ este un număr complex astfel încât $a + bi = a - bi$, atunci $b = -b$, de unde $b = 0$. Deci $a + bi = a + 0i = a$ este un număr real.

Astfel, am arătat că: *dintre toate numerele complexe, numerele reale (şi numai ele) sunt egale cu conjugatele lor.*

Avem următoarele proprietăţi:

1° Suma şi produsul a două numere complexe conjugate sunt numere reale. Într-adevăr, $z + \bar{z} = (a + bi) + (a - bi) = 2a$ şi $z\bar{z} = (a + bi)(a - bi) = a^2 + b^2$.

2° Oricare ar fi numerele complexe z şi z', avem: $\overline{z+z'} = \bar{z} + \bar{z}'$, $\overline{zz'} = \bar{z}\,\bar{z}'$.

Într-adevăr, dacă $z = a + bi$ şi $z' = a' + b'i$, atunci:

$$\overline{z+z'} = \overline{(a+a')+(b+b')i} = (a+a')-(b+b')i = (a-bi)+(a'-b'i) = \bar{z}+\bar{z}';$$

$$\overline{zz'} = \overline{(aa'-bb')+(ab'+a'b)i} = (aa'-bb')-(ab'+a'b)i = (a-bi)(a'-b'i) = \bar{z}\,\bar{z}'.$$

Formulele (3) şi (4), aplicate numerelor complexe scrise sub formă algebrică, dau relaţiile:

$$(a+bi)-(a'+b'i) = (a-a')+(b-b')i \qquad (3')$$

$$\frac{a'+b'i}{a+bi} = \frac{aa'+bb'}{a^2+b^2} + \frac{ab'-a'b}{a^2+b^2}i \qquad (4')$$

Pentru relaţia (3') se poate da o regulă analoagă celei date pentru adunare. Observăm, de asemenea, că (4') rezultă dacă amplificăm fracţia $\frac{a'+b'i}{a+bi}$ prin conjugatul numitorului, care este $a - bi$.

În particular, aşa se poate proceda şi pentru aflarea inversului unui număr complex. Într-adevăr, dacă $a + bi \neq 0$, atunci:

$$\frac{1}{a+bi} = \frac{a-bi}{(a+bi)(a-bi)} = \frac{a-bi}{a^2+b^2} = \frac{a}{a^2+b^2} - \frac{b}{a^2+b^2}i$$

Exemple

1. $\frac{7-i}{3+i} = \frac{(7-i)(3-i)}{(3+i)(3-i)} = \frac{21-7i-3i-1}{9+1} = \frac{20-10i}{10} = 2-i;$

2. $\frac{2+3i}{2+i} = \frac{(2+3i)(2-i)}{(2+i)(2-i)} = \frac{4-2i+6i+3}{4+1} = \frac{7+4i}{5} = \frac{7}{5}+\frac{4}{5}i;$

3. $\frac{1}{1+i} = \frac{1-i}{(1+i)(1-i)} = \frac{1-i}{1+1} = \frac{1}{2}-\frac{1}{2}i.$

2.3. Modulul unui număr complex

Modulul unui număr complex $z = a + b\mathrm{i}$ se defineşte ca fiind *numărul real* $\sqrt{a^2 + b^2}$ şi se notează prin $|z| = |a + b\mathrm{i}|$.

Modulul unui număr complex $z = a + b\mathrm{i}$ este întotdeauna pozitiv, el fiind egal cu zero dacă şi numai dacă $a = b = 0$.

Exemple

$|1 + 3\mathrm{i}| = \sqrt{1+9} = \sqrt{10}$; $\quad |-1-\mathrm{i}| = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$; $\quad |2\mathrm{i}| = |0+2\mathrm{i}| = \sqrt{0+4} = 2$; $|4| = |4 + 0\mathrm{i}| = \sqrt{16 + 0} = 4$.

Dacă z şi z' sunt două numere complexe, atunci:

1° $\quad |zz'| = |z|\,|z'|$;

2° $\quad |z'| - |z| \leq |z' + z| \leq |z'| + |z|$.

Să demonstrăm prima relaţie. Într-adevăr, dacă $z = a + b\mathrm{i}$ şi $z' = a' + b'\mathrm{i}$, atunci $|zz'| = |(aa' - bb') + (ab' + a'b)\mathrm{i}| = \sqrt{(aa' - bb')^2 + (ab' + a'b)^2} =$
$= \sqrt{(a^2 + b^2)(a'^2 + b'^2)} = \sqrt{a^2 + b^2}\sqrt{a'^2 + b'^2} = |z|\,|z'|$.

A doua relaţie o lăsăm ca exerciţiu. Noi însă o vom demonstra în paragraful următor, pe cale vectorială.

2.4. Puterile numărului i

Conform ultimei observaţii de la punctul 1.3, avem $\mathrm{i}^2 = -1$. Atunci se deduce succesiv:

$$\mathrm{i}^3 = \mathrm{i}^2\mathrm{i} = (-1)\mathrm{i} = -\mathrm{i}.$$
$$\mathrm{i}^4 = \mathrm{i}^3\mathrm{i} = (-\mathrm{i})\mathrm{i} = 1.$$

În general, fie n un număr natural oarecare. Atunci numărul n se găseşte într-una (şi numai una) din următoarele situaţii:

1. $n = 4k$ (k număr natural) şi deci $\mathrm{i}^n = \mathrm{i}^{4k} = (\mathrm{i}^4)^k = 1^k = 1$;
2. $n = 4l + 1$ (l număr natural) şi deci $\mathrm{i}^n = \mathrm{i}^{4l+1} = \mathrm{i}^{4l} \cdot \mathrm{i} = 1 \cdot \mathrm{i} = \mathrm{i}$;
3. $n = 4p + 2$ (p număr natural) şi deci $\mathrm{i}^n = \mathrm{i}^{4p+2} = \mathrm{i}^{4p} \cdot \mathrm{i}^2 = 1(-1) = -1$.
4. $n = 4q + 3$ (q număr natural) şi deci $\mathrm{i}^n = \mathrm{i}^{4q+3} = \mathrm{i}^{4q} \cdot \mathrm{i}^3 = 1(-\mathrm{i}) = -\mathrm{i}$.

Aşadar, puterile cu exponent natural ale lui i sunt elementele mulţimii $\{-1, 1, -\mathrm{i}, \mathrm{i}\}$.

Exemple

$\mathrm{i}^{25} = \mathrm{i}^{4 \cdot 6+1} = (\mathrm{i}^4)^6 \cdot \mathrm{i} = 1 \cdot \mathrm{i} = \mathrm{i}$, $\quad \mathrm{i}^{18} = \mathrm{i}^{4 \cdot 4+2} = (\mathrm{i}^4)^4 \cdot \mathrm{i}^2 = 1 \cdot (-1) = -1$,
$\mathrm{i}^{31} = \mathrm{i}^{4 \cdot 7+3} = (\mathrm{i}^4)^7 \cdot \mathrm{i}^3 = 1 \cdot (-\mathrm{i}) = -\mathrm{i}$.

3.1. Amintim că numerele reale se pot reprezenta prin punctele unei axe. Mai precis, fie d o axă pe care fixăm o origine O şi o unitate de măsură. Dacă asociem fiecărui punct al dreptei d abscisa sa, se obţine o funcţie bijectivă de la punctele acestei drepte în mulţimea numerelor reale.

Un număr complex $z = a + b\mathrm{i}$ este determinat prin două numere reale a şi b. De aceea este natural să reprezentăm geometric numerele complexe prin punctele unui plan.

Fie, pentru aceasta, un plan P în care ne fixăm un sistem de axe ortogonale xOy. Fiecărui număr complex $z = a + b\mathrm{i}$ i se asociază punctul M de coordonate (a, b) (fig. 1).

Punctul M se numeşte *imaginea geometrică a numărului complex* $a + b\mathrm{i}$, iar numărul $a + b\mathrm{i}$ se numeşte *afixul punctului* M.

Din teorema lui Pitagora, aplicată în triunghiul dreptunghic OMM' se deduce că $OM = \sqrt{OM'^2 + MM'^2} = \sqrt{a^2 + b^2} = |z|$. Această egalitate ne arată că lungimea segmentului OM este modulul numărului complex $z = a + b\mathrm{i}$.

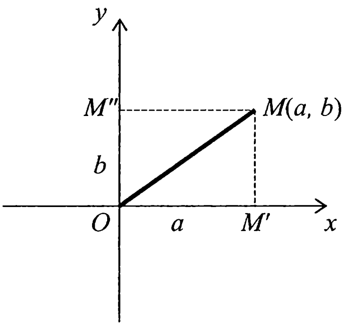


Fig. 1

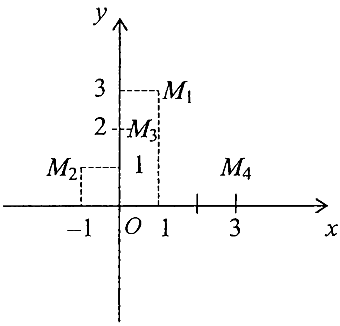


Fig. 2

Exemple Numerelor complexe $1 + 3\mathrm{i}$, $-1 + \mathrm{i}$, $2\mathrm{i} = 0 + 2\mathrm{i}$, $3 = 3 + 0\mathrm{i}$ li se asociază respectiv punctele $M_1(1, 3)$, $M_2(-1, 1)$, $M_3(0, 2)$, $M_4(3, 0)$ (fig. 2).

Avem $OM_1 = |1 + 3\mathrm{i}| = \sqrt{10}$, $OM_2 = |-1 + \mathrm{i}| = \sqrt{2}$, $OM_3 = |2\mathrm{i}| = 2$, $OM_4 = |3| = 3$.

Asocierea $z = a + b\mathrm{i} \rightarrow M(a, b)$ este o funcţie bijectivă de la mulţimea numerelor complexe la punctele planului P. Prin această funcţie, mulţimii numerelor reale îi corespunde axa Ox, iar mulţimii numerelor imaginare îi corespunde axa Oy. De aceea, axa Ox se numeşte axa reală, iar axa Oy axa imaginară. Planul ale cărui puncte se identifică cu numerele complexe prin funcţia bijectivă definită mai înainte se numeşte *planul complex*.

3.2. Interpretarea geometrică a adunării şi scăderii numerelor complexe

Numerele complexe au şi o altă interpretare geometrică. Să asociem la fiecare punct M al planului P vectorul $\overrightarrow{OM}$ care are originea în O şi capătul în punctul M. Această asociere este evident o funcţie bijectivă de la mulţimea numerelor complexe în mulţimea vectorilor care au originea în $O(0, 0)$. Astfel, fiecărui număr complex $a + b\mathrm{i}$ poate fi reprezentat geometric ca vectorul $\overrightarrow{OM}$ unde M are coordonatele (a, b). Se spune că (a, b) sunt coordonatele vectorului $\overrightarrow{OM}$.

Reprezentarea numerelor complexe cu ajutorul vectorilor ne dă o interpretare simplă a adunării numerelor complexe:

$$(a + b\mathrm{i}) + (a' + b'\mathrm{i}) = (a + a') + (b + b')\mathrm{i}.$$

Este cunoscut că la adunarea vectorilor coordonatele corespunzătoare lor se adună. De aceea, dacă vectorul $\overrightarrow{OM}$ (fig. 3) are coordoonatele (a, b), iar vectorul $\overrightarrow{OM}\,'$ are coordonatele (a', b'), atunci *vectorul* $\overrightarrow{OS}$ (S fiind al patrulea vârf al paralelogramului care are celelalte trei vârfuri respectiv M, O şi M') are *coordonatele* $(a + a', b + b')$. Acest vector corespunde numărului complex $(a + a') + (b + b')\mathrm{i}$ care este *suma* dintre $a + b\mathrm{i}$ şi $a' + b'\mathrm{i}$.

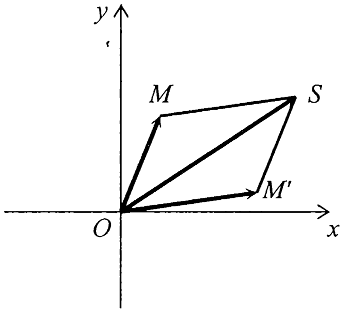


Fig. 3

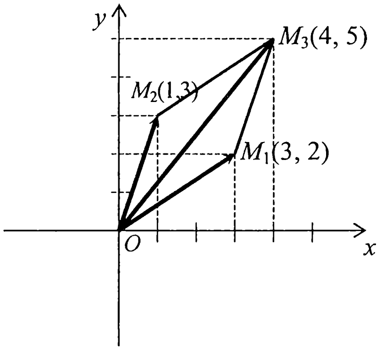


Fig. 4

Exemplu

Fie numerele complexe $z_1 = 3 + 2\mathrm{i}$ şi $z_2 = 1 + 3\mathrm{i}$, reprezentate în plan prin vectorii $\overrightarrow{OM_1}$ şi $\overrightarrow{OM_2}$, unde: $M_1(3, 2)$, $M_2(1, 3)$ (fig. 4). Atunci suma $z_3 = z_1 + z_2 = (3 + 2\mathrm{i}) + (1 + 3\mathrm{i}) = 4 + 5\mathrm{i}$ este reprezentată în plan prin vectorul $\overrightarrow{OM_3}$ unde M_3 este punctul de coordonate $(4, 5)$.

Observăm, de asemenea, că opusul numărului $a + b\mathrm{i}$, care este $-a - b\mathrm{i}$ este reprezentat prin vectorul $\overrightarrow{OM_1}$, unde M_1 este simetricul punctului $M(a, b)$ faţă de origine (fig. 5). Astfel se deduce uşor interpretarea geometrică a scăderii a două numere complexe.

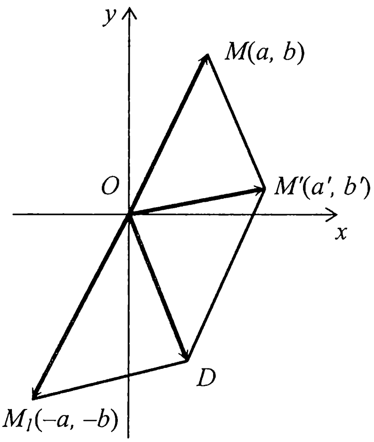


Fig. 5

Cum $z' - z = z' + (-z)$, având în vedere interpretarea geometrică a adunării numerelor complexe, rezultă că D are coordonatele $(a' - a, b' - b)$ şi vectorul $\overrightarrow{OD}$ corespunde diferenţei $z' - z = $ $= (a' - a) + (b' - b)\mathrm{i}$.

Avem $OM = |\,z\,|$, $OM' = |\,z'\,|$, $OD = |\,z' - z\,|$ şi $OS = |\,z' + z\,|$.

Relațiile dintre laturi în triunghiurile OMS și OMM' dau respectiv:

$$MS - OM \leq OS \leq MS + OM,$$

$$OM' - OM \leq MM' \leq OM' + OM.$$

Dar cum $MS = OM'$ și $MM' = OD$, rezultă:

$$|z'| - |z| \leq |z' + z| \leq |z'| + |z|,$$

$$|z'| - |z| \leq |z' - z| \leq |z'| + |z|.$$

Observație. Definiția produsului numerelor complexe are o interpretare mai complicată. Aceasta se va face în continuare cu ajutorul reprezentării trigonometrice a numerelor complexe.

În clasa a IX-a am rezolvat ecuația de gradul al doilea cu coeficienți reali, în cazul în care discriminantul său este pozitiv sau nul. Am arătat astfel că rădăcinile ecuației

$$ax^2 + bx + c = 0, \ a \neq 0,$$

pentru $\Delta = b^2 - 4ac \geq 0$, sunt date de formulele:

$$x_{1,\,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

În acest caz, rădăcinile ecuației sunt numere reale.

4.1. Să rezolvăm ecuația

$$ax^2 + bx + c = 0, \ a \neq 0,$$

în cazul în care $\Delta = b^2 - 4ac < 0$.

Știm din clasa a IX-a că ecuația $ax^2 + bx + c = 0$ se mai poate scrie sub forma:

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} = 0.$$

Cum $\Delta = b^2 - 4ac < 0$, atunci $-\Delta = 4ac - b^2 > 0$.

În mulțimea numerelor complexe ecuația se poate scrie astfel:

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{\mathrm{i}\sqrt{-\Delta}}{2a}\right)^2 = 0$$

sau

$$\left(x + \frac{b}{2a} + \frac{\mathrm{i}\sqrt{-\Delta}}{2a}\right)\left(x + \frac{b}{2a} - \frac{\mathrm{i}\sqrt{-\Delta}}{2a}\right) = 0,$$

de unde

$$x + \frac{b}{2a} + \frac{\mathrm{i}\sqrt{-\Delta}}{2a} = 0 \text{ sau } x + \frac{b}{2a} - \frac{\mathrm{i}\sqrt{-\Delta}}{2a} = 0.$$

Deducem de aici că *rădăcinile ecuației de gradul al doilea sunt, în acest caz:*

$$x_1 = \frac{-b + \mathrm{i}\sqrt{4ac - b^2}}{2a} \text{ și } x_2 = \frac{-b - \mathrm{i}\sqrt{4ac - b^2}}{2a}.$$

Așadar, dacă $\Delta < 0$, rădăcinile ecuației cu coeficienți reali $ax^2 + bx + c = 0$, $a \neq 0$, sunt *numere complexe conjugate.*

Relațiile lui Viète sunt evident aceleași ca în cazul $\Delta \geq 0$, adică

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a},\ x_1x_2 = \frac{c}{a}.$$

4.2. Formarea unei ecuații de gradul al doilea când se cunosc rădăcinile

Fie x_1 și x_2 numere complexe date. Pentru ca ele să fie rădăcinile unei ecuații de gradul al doilea cu coeficienți reali, trebuie ca x_1 și x_2 să fie conjugate. Deci $x_1 = a + b\mathrm{i}$ și $x_2 = a - b\mathrm{i}$. Atunci

$$x_1 + x_2 = 2a \text{ și } x_1x_2 = a^2 + b^2.$$

Ecuația de gradul al doilea care are ca rădăcini pe x_1 și x_2 va fi $x^2 + px + q = 0$, unde $-p = x_1 + x_2 = 2a$, iar $q = x_1x_2 = a^2 + b^2$.

Deci ecuația $x^2 - 2ax + a^2 + b^2 = 0$ are ca rădăcini numerele complexe: $a + b\mathrm{i}$ și $a - b\mathrm{i}$.

4.3. Descompunerea trinomului de gradul al doilea cu coeficienți reali în produs de factori de gradul întâi

Fie trinomul $ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$, cu a, b, c numere reale. Dacă x_1 și x_2 sunt rădăcinile ecuației $ax^2 + bx + c = 0$, atunci un raționament analog celui făcut în manualul de matematică pentru clasa a IX-a, pentru cazul $b^2 - 4ac \geq 0$, dă

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2) = (ax - ax_1)(x - x_2).$$

Deci orice trinom de gradul al doilea cu coeficienți reali se descompune în produs de polinoame de gradul I cu coeficienți complecși. Rezultă că în cazul $b^2 - 4ac \geq 0$ și numai în acest caz, trinomul de gradul al doilea se descompune în produs de factori de gradul întâi cu coeficienți reali.

Exemple

1. Să se rezolve ecuațiile: a) $x^2 + x + 1 = 0$; b) $x^2 - 2\sqrt{3}\,x + 4 = 0$.

R: a) Deoarece $\Delta = 1 - 4 = -3$, atunci $x_1 = \dfrac{-1 + \mathrm{i}\sqrt{3}}{2}$ și $x_2 = \dfrac{-1 - \mathrm{i}\sqrt{3}}{2}$;

b) Deoarece $\Delta = 12 - 16 = -4 < 0$, atunci $x_1 = \sqrt{3} - \mathrm{i}$ și $x_2 = \sqrt{3} + \mathrm{i}$.

2. Să se formeze o ecuație de gradul al doilea care are rădăcinile $x_1 = \sqrt{3} - \mathrm{i}$ și $x_2 = \sqrt{3} + \mathrm{i}$.

R: Avem $x_1 + x_2 = 2\sqrt{3}$ și $x_1x_2 = 4$. Ecuația $x^2 - 2\sqrt{3}\,x + 4 = 0$ are ca rădăcini pe x_1 și x_2.

3. Să se descompună în factori de gradul întâi trinomul $x^2 - 2x + 10$.

R: Rădăcinile ecuației $x^2 - 2x + 10 = 0$ sunt: $x_1 = 1 + 3\mathrm{i}$ și $x_2 = 1 - 3\mathrm{i}$. Atunci $x^2 + 2x + 10 = (x - 1 - 3\mathrm{i})(x - 1 + 3\mathrm{i})$.

Să se găsească numerele reale x şi y din ecuaţiile:

a) $(5x + 3yi) + (2y - xi) = 3 - i$;

b) $(x + 3yi) + \frac{3}{2}y + 2xi = 4 + 8i$;

c) $\left(-3y + \frac{1}{2}xi\right) - (-8x + 5yi) = -2 + 12i$;

d) $\frac{x-2}{1-i} + \frac{y-3}{1+i} = 1 - 3i$.

Să se calculeze:

a) $(2 + i)(3 - 2i)$; b) $(-6 + i)(5 + 2i)$; c) $(\sqrt{2} - i)(\sqrt{3} + 2i)$;

d) $(\sqrt{2} + 3i)(3 - \sqrt{2}i)$; e) $(\sqrt{3} + \sqrt{2}i)(\sqrt{3} - \sqrt{2}i)$.

Să se calculeze:

a) $\frac{2+3i}{1-i}$; b) $\frac{2i}{2-i}$; c) $\frac{1+i\sqrt{3}}{1-i\sqrt{3}}$; d) $\frac{a\sqrt{b}+b\sqrt{a}i}{b\sqrt{a}-a\sqrt{b}i}$; e) $\frac{-2-5i}{4+i} - \frac{6-7i}{4-i}$;

f) $\frac{a-bi}{b+ai} - i\frac{b-ai}{a+bi}$; g) $\frac{\sqrt{1+a}+i\sqrt{1-a}}{\sqrt{1+a}-i\sqrt{1-a}} - \frac{\sqrt{1-a}+i\sqrt{1+a}}{\sqrt{1-a}-i\sqrt{1+a}}$;

h) $\left(\frac{1+i\sqrt{7}}{2}\right)^4 + \left(\frac{1-i\sqrt{7}}{2}\right)^4$.

Să se demonstreze egalităţile:

a) $\frac{6-i}{4+4i} = \frac{13+41i}{-25+25i}$; b) $\frac{2+i}{3-i} = \frac{13+4i}{17-9i}$.

Să se spună care sunt conjugatele numerelor complexe: $1 + i$; $2 - 3i$; 5; $4i$; 0; $2i - 1$ şi să se interpreteze geometric.

Să se calculeze:

a) $i^6 + i^{16} + i^{26} + i^{36} + i^{46}$; e) $\frac{1}{i^{11}} - \frac{1}{i^{41}} + \frac{1}{i^{75}} - \frac{1}{i^{243}}$;

b) $(-i)^8 + (-i)^{18} + (-i)^{28} + (-i)^{38} + (-i)^{48}$; f) $[i(2 - i)]^2$;

c) $i + i^2 + i^3 + i^4 + \ldots + i^n$ $(n \geq 4)$; g) $[2i(3 - 4i)]^2$;

d) $i \cdot i^2 \cdot i^3 \cdot i^4 \cdot \ldots \cdot i^{100}$; h) $i^n + i^{n+1} + i^{n+2} + i^{n+3}$, $n \in \mathbb{N}$.

Să se găsească valorile reale ale lui m astfel încât numărul $3i^3 - 2mi^2 + (1 - m)i + 5$ să fie: a) real; b) imaginar; c) nenul.

Să se găsească toate numerele complexe ale căror pătrate să fie:

a) i; b) $\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$; c) $-i$; d) $\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$.

Să se reprezinte în plan numerele complexe:

a) $3 + 5i$; b) $4 - i$; c) $-2 - 2i$; d) $-4i$; e) $5i$; f) $-5 - 5i$.

Să se dea interpretarea geometrică a formulelor:

$(1 + 3i) + (1 - 3i) = 2$;

$(3 - 5i) + (-1 + 3i) = 2 - 2i$.

Să se descompună în factori de gradul întâi trinoamele:

a) $x^2 - 2x + 2$; b) $4x^2 + 4x + 5$; c) $x^2 - 14x + 74$.

Să se găsească ecuaţii de gradul al doilea cu coeficienţi reali, astfel încât una dintre rădăcini să fie:

a) $(3 - i)(2i - 4)$; b) $\frac{32 - i}{1 - 3i}$;

c) $\sqrt{a} + \sqrt{b}\,i$ (a, b fiind numere reale şi pozitive).

Să se arate că dacă două numere complexe sunt conjugate, atunci cuburile lor sunt de asemenea conjugate.

Să se rezolve sistemele:

a) $\begin{cases} x + y = 6, \\ xy = 45; \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2x - 3y = 1, \\ xy = 1; \end{cases}$

Să se arate că pătratul unui număr complex $z = a + bi$ este real dacă şi numai dacă ori $a = 0$, ori $b = 0$.

Să se găsească numerele reale x şi y astfel încât:

a) $(xi - y)^2 = 6 - 8i + (x + yi)^2$; b) $\frac{i}{x} + \frac{i}{y} + \frac{1}{a} = \frac{1}{x} - \frac{1}{y} + \frac{bi}{y}$, $(a, b \in \mathbb{R}, a \neq 0)$.

Să se determine perechile (x, y) din plan pentru care:

a) $|\sqrt{x^2 + 4} + \sqrt{y - 4}\,i| = \sqrt{10}$; b) $|\sqrt{2x + y} + \sqrt{x + 2y}\,i| = \sqrt{3}$.

Dacă $a + bi$ este un număr complex dat, să se găsească numerele complexe $z = x + iy$ astfel încât $z^2 = a + bi$.

Să se arate că pentru ecuaţia de gradul al doilea $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$, cu coeficienţi complecşi, rădăcinile sale sunt date de aceeaşi formulă ca şi în cazul ecuaţiei de gradul al doilea cu coeficienţi reali.

Să se rezolve, în mulţimea numerelor complexe, sistemele de ecuaţii:

a) $\begin{cases} x^5 + y^5 = 33, \\ x + y = 3; \end{cases}$ b) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 5, \\ xy^2 = 2; \end{cases}$ c) $\begin{cases} x^2 - xy = 28; \\ y^2 - xy = -12. \end{cases}$

Să se determine numerele complexe z care verifică relaţia $z^4 + 3 - 4i = 0$.

Fie $z = a + bi$ un număr complex nenul. Am văzut că dacă P este un plan în care s-a fixat un sistem de axe ortogonale xOy, numărului complex z i se asociază un punct M (diferit de origine) având coordonatele (a, b). Numărul complex z poate fi reprezentat geometric prin vectorul $\overrightarrow{OM}$ unde M are coordonatele (a, b).

Modulul numărului complex $z = a + bi$ este lungimea segmentului (razei vectoare) care uneşte originea $O(0, 0)$ cu punctul $M(a, b)$. Măsura unghiului format de raza vectoare cu semiaxa pozitivă a axei absciselor (valoare ce aparţine intervalului $[0, 2\pi)$) se numeşte *argumentul redus* t_0 *al numărului*. z şi se notează cu arg z (fig. 6).

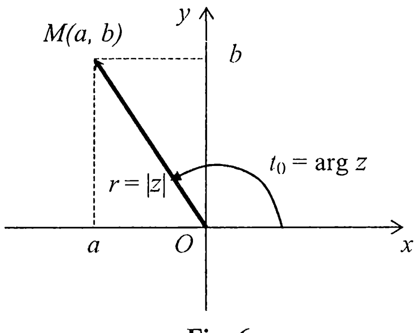


Fig. 6

Sensul pozitiv de măsurare a argumentului unui număr complex este de la semiaxa pozitivă Ox a absciselor la semiaxa pozitivă Oy a ordonatelor, în sens invers acelor de ceasornic.

Observaţie. Pentru numărul complex 0 argumentul redus nu este definit, neavând nici o semnificaţie.

Dacă $z = a + bi$ este un număr complex nenul ($a^2 + b^2 \neq 0$), componentele sale a şi b sunt proiecţiile vectorului $\overrightarrow{OM}$ (ţinându-se cont de semn) pe axele de coordonate. Dacă t_0 este argumentul redus al numărului complex nenul $z = a + bi$, iar $r = \sqrt{a^2 + b^2}$ este modulul său, atunci din definiţia sinusului şi a cosinusului unui unghi, rezultă formulele:

$$a = r \cos t_0, \quad b = r \sin t_0 \tag{1}$$

Prin urmare, fiind dat un număr complex nenul $z = a + bi$, argumentul redus al său se obţine din relaţiile:

$$\cos t = \frac{a}{r}, \quad \sin t = \frac{b}{r} \tag{2}$$

unde $r = \sqrt{a^2 + b^2}$.

Deoarece există un număr unic $t \in [0, 2\pi)$ care satisface relaţiile (2), rezultă că modulul şi argumentul redus ale unui număr nenul z sunt unic determinate.

Dacă $a \neq 0$, argumentul redus al numărului $z = a + bi$ se poate determina şi din formula tg $t = \frac{b}{a}$.

Înlocuind componentele numărului complex nenul $z = a + bi$ prin expresiile lor date de formulele (1), obţinem:

$$z = r(\cos t_0 + i \sin t_0), \quad r = \sqrt{a^2 + b^2}, \; t_0 \in [0, 2\pi) \tag{3}$$

Formula (3) se numeşte *forma trigonometrică redusă* a numărului complex nenul z.

Argumentul redus nu este singurul număr real care verifică relaţiile (3).

Orice număr real t, care verifică condiţiile $\cos t = \frac{a}{r}$, $\sin t = \frac{b}{r}$, unde $r = \sqrt{a^2 + b^2}$ se numeşte *argument* al numărului complex nenul $z = a + bi$. Dacă t este un argument al numărului complex $z \neq 0$, atunci

$$z = r(\cos t + \mathrm{i} \sin t), \quad r = \sqrt{a^2 + b^2} \tag{4}$$

Formula (4) se numeşte *forma trigonometrică* a numărului complex nenul z..

Dacă z este un număr complex nenul şi $t_0 = \arg z$ este argumentul redus, atunci din relaţiile (2) rezultă că t este un argument al lui z dacă şi numai dacă $t = t_0 + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

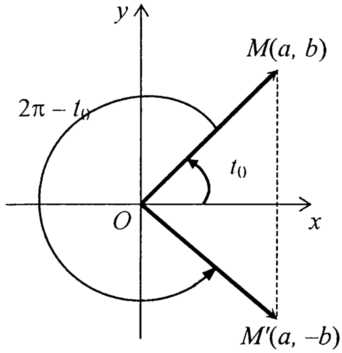


Fig. 7

Observaţie. Dacă $z = 0$, modulul este egal cu 0 şi pentru argumentul său poate fi luat orice număr real.

În final, vom da *interpretarea geometrică a numerelor complexe conjugate.*

Fie numărul complex nenul $z = a + bi$, $b \neq 0$, iar $\bar{z} = a - bi$ conjugatul său. Este clar că $|\bar{z}| = |z| = r$, iar dacă $t_0 = \arg z$, atunci $\arg \bar{z} = 2\pi - t_0$ (fig. 7).

Într-adevăr, $\bar{z} = r(\cos t_0 - \mathrm{i} \sin t_0) = r(\cos(2\pi - t_0) + \mathrm{i} \sin(2\pi - t_0))$, unde $2\pi - t_0 \in (0, 2\pi)$.

Exemple

1. Să se scrie sub formă trigonometrică redusă numărul complex $z = 1 + \mathrm{i}$.

R: Dacă $z = r(\cos t_0 + \mathrm{i} \sin t_0)$, atunci $r = |z| = \sqrt{1 + 1} = \sqrt{2}$, iar $\cos t_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $\sin t_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}$, de unde $t_0 = \frac{\pi}{4}$. Deci $z = \sqrt{2}\left(\cos \frac{\pi}{4} + \mathrm{i} \sin \frac{\pi}{4}\right)$.

2. Să se scrie sub formă trigonometrică redusă numărul complex $z = -2\mathrm{i}$.

R: Dacă $z = r(\cos t_0 + \mathrm{i} \sin t_0)$, atunci $r = |z| = \sqrt{0 + 4} = 2$. Imaginea numărului $z = -2\mathrm{i}$ se găseşte pe semiaxa negativă a axei ordonatelor, deci $t_0 = \arg z = \frac{3\pi}{2}$. Deci $z = 2\left(\cos \frac{3\pi}{2} + \mathrm{i} \sin \frac{3\pi}{2}\right)$.

3. Să se scrie sub formă trigonometrică redusă numărul complex $z = 1 - \cos \alpha + \mathrm{i} \sin \alpha$, unde $\alpha \in (0, 2\pi)$.

R: Avem $r = |z| = \sqrt{(1 - \cos \alpha)^2 + \sin^2 \alpha} = \sqrt{2(1 - \cos \alpha)} = \sqrt{4 \sin^2 \frac{\alpha}{2}} = 2\left|\sin \frac{\alpha}{2}\right|$. Cum $\frac{\alpha}{2} \in (0, \pi)$, avem $\sin \frac{\alpha}{2} > 0$ şi deci $r = 2\sin \frac{\alpha}{2}$. Acum,

$\operatorname{tg} t = \dfrac{\sin\alpha}{1-\cos\alpha} = \dfrac{2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}{2\sin^2\frac{\alpha}{2}} = \operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2} = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\alpha}{2}\right)$. Un argument al numărului complex este $t = \frac{\pi-\alpha}{2}$ şi deci z se scrie sub formă trigonometrică:

$$z = 2\sin\frac{\alpha}{2}\left(\cos\frac{\pi-\alpha}{2} + \mathrm{i}\sin\frac{\pi-\alpha}{2}\right).$$

Să scriem pe z sub formă trigonometrică redusă. Din $\operatorname{tg} t = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\alpha}{2}\right)$, rezultă $t = \frac{\pi}{2}-\frac{\alpha}{2}+k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Distingem cazurile:

1° Dacă $\alpha \in (0, \pi)$, atunci $0 < \frac{\pi}{2}-\frac{\alpha}{2} < \frac{\pi}{2}$, $\arg z = \frac{\pi-\alpha}{2}$ şi deci $z = 2\sin\frac{\alpha}{2}\left(\cos\frac{\pi-\alpha}{2} + \mathrm{i}\sin\frac{\pi-\alpha}{2}\right)$.

2° Dacă $\alpha \in (\pi, 2\pi)$, atunci $\frac{\pi}{2} < \frac{\pi}{2}-\frac{\alpha}{2}+\pi < \frac{3\pi}{2}$, adică $\arg z = \frac{3\pi-\alpha}{2}$ şi deci $z = 2\sin\frac{\alpha}{2}\left(\cos\frac{3\pi-\alpha}{2} + \mathrm{i}\sin\frac{3\pi-\alpha}{2}\right)$.

3° Dacă $\alpha = \pi$, atunci $z = 0$ şi argumentul său redus nu este determinat.

Fie z_1 şi z_2 două numere complexe scrise sub formă trigonometrică:

$$z_1 = r_1(\cos t_1 + \mathrm{i}\sin t_1),\quad z_2 = r_2(\cos t_2 + \mathrm{i}\sin t_2).$$

Înmulţind aceste numere avem $z_1z_2 = r_1r_2\,[(\cos t_1\cos t_2 - \sin t_1\sin t_2) + \mathrm{i}(\sin t_1\cos t_2 + \cos t_1\sin t_2)] = r_1r_2\,[\cos(t_1+t_2) + \mathrm{i}\sin(t_1+t_2)]$. Deci

$$z_1z_2 = r_1r_2\,[\cos(t_1+t_2) + \mathrm{i}\sin(t_1+t_2)] \tag{1}$$

În concluzie, modulul produsului a două numere complexe este egal cu produsul modulelor factorilor, iar un argument al produsului este egal cu suma argumentelor factorilor.

Generalizare

Să generalizăm formula care dă produsul a două numere complexe. Mai precis, dacă $n \geq 2$ este un număr natural oarecare, iar $z_1 = r_1(\cos t_1 + \mathrm{i}\sin t_1)$, $z_2 = r_2(\cos t_2 + \mathrm{i}\sin t_2)$, ..., $z_n = r_n(\cos t_n + \mathrm{i}\sin t_n)$ sunt numere complexe, atunci

$$z_1z_2\ldots z_n = r_1r_2\ldots r_n\,[\cos(t_1+t_2+\ldots+t_n) + \mathrm{i}\sin(t_1+t_2+\ldots+t_n)] \tag{2}$$

Vom demonstra formula (2) prin metoda inducţiei matematice. Să notăm cu $P(n)$ egalitatea (2).

1° $P(2)$ este adevărată conform formulei (1).

2° Să arătăm că $P(k) \Rightarrow P(k+1)$. Avem:

$P(k) : z_1 z_2 \ldots z_k = r_1 r_2 \ldots r_k\, [\cos(t_1 + t_2 + \ldots + t_k) + \mathrm{i}\sin(t_1 + t_2 + \ldots + t_k)]$;

$P(k+1) : z_1 z_2 \ldots z_{k+1} = r_1 r_2 \ldots r_{k+1} [\cos(t_1 + t_2 + \ldots + t_{k+1}) + \mathrm{i}\sin(t_1 + t_2 + \ldots + t_{k+1})]$.

Atunci $z_1 z_2 \ldots z_{k+1} = (z_1 z_2 \ldots z_k) z_{k+1} = r_1 r_2 \ldots r_k\, [\cos(t_1 + t_2 + \ldots + t_k) + \mathrm{i}\sin(t_1 + t_2 + \ldots + t_k)]\, r_{k+1} (\cos t_{k+1} + \mathrm{i}\sin t_{k+1}) = (r_1 r_2 \ldots r_k)\, r_{k+1} [\cos((t_1 + \ldots + t_k) + t_{k+1}) + \mathrm{i}\sin((t_1 + \ldots + t_k) + t_{k+1}) = r_1 r_2 \ldots r_{k+1} [\cos(t_1 + t_2 + \ldots + t_{k+1}) + \mathrm{i}\sin(t_1 + t_2 + \ldots + t_{k+1})]$. Conform metodei inducţiei matematice, rezultă că $P(n)$ este adevărată pentru orice $n \geq 2$.

Cu ajutorul scrierii numerelor complexe sub formă trigonometrică, se poate da o interpretare geometrică a produsului numerelor complexe. Fie numerele complexe $z_1 = r_1 (\cos t_1 + \mathrm{i}\sin t_1)$, $z_2 = r_2 (\cos t_2 + \mathrm{i}\sin t_2)$ şi M_1 respectiv M_2 imaginile lor geometrice.

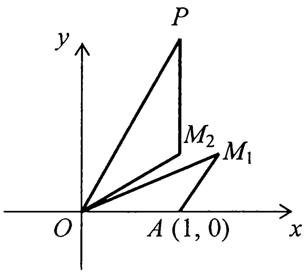


Fig. 8

Să considerăm, de asemenea, pe axa Ox punctul $A(1, 0)$. Se construieşte triunghiul OM_2P asemenea cu triunghiul OAM_1 (fig. 8). Din asemănarea celor două triunghiuri rezultă $\dfrac{OP}{OM_1} = \dfrac{OM_2}{OA}$, $\widehat{M_2OP} \equiv \widehat{AOM_1}$. Dar $OA = 1$, $OM_1 = r_1$, $OM_2 = r_2$, $m(\widehat{AOM_1}) = t_1$, $m(\widehat{AOM_2}) = t_2$ şi deci $OP = r_1 r_2$, $m(\widehat{AOP}) = t_1 + t_2$.

În concluzie, punctul P este imaginea geometrică a numărului complex $z_1 z_2$.

Exemplu

Să se calculeze modulul şi argumentul redus al produsului numerelor complexe $z_1 = \sqrt{3} + \mathrm{i}$ şi $z_2 = 1 - \mathrm{i}$.

R: Avem $z_1 = \sqrt{3} + \mathrm{i} = 2\left(\cos\dfrac{\pi}{6} + \mathrm{i}\sin\dfrac{\pi}{6}\right)$, $z_2 = 1 - \mathrm{i} = \sqrt{2}\left(\cos\dfrac{7\pi}{4} + \mathrm{i}\sin\dfrac{7\pi}{4}\right)$ şi

$$z_1 z_2 = \left(\sqrt{3} + \mathrm{i}\right)\left(1 - \mathrm{i}\right) = 2\sqrt{2}\left[\cos\left(\frac{\pi}{6} + \frac{7\pi}{4}\right) + \mathrm{i}\sin\left(\frac{\pi}{6} + \frac{7\pi}{4}\right)\right] = 2\sqrt{2}\left(\cos\frac{23\pi}{12} + \mathrm{i}\sin\frac{23\pi}{12}\right).$$

Avem $|z_1 z_2| = 2\sqrt{2}$ şi $\arg z_1 z_2 = \dfrac{23\pi}{12}$ $\left(0 < \dfrac{23\pi}{12} < 2\pi\right)$.

Inversul unui număr complex nenul scris sub formă trigonometrică. Câtul a două numere complexe

Fie $z = r(\cos t + \mathrm{i}\sin t)$, $z \neq 0$, un număr complex nenul. Inversul său este $z^{-1} = \dfrac{1}{z} = \dfrac{1}{r(\cos t + \mathrm{i}\sin t)}$ şi, amplificând cu $\cos t - \mathrm{i}\sin t$, obţinem:

$$z^{-1} = \frac{1}{z} = \frac{1}{r}(\cos t - \mathrm{i}\sin t) = \frac{1}{r}\left(\cos(-t) + \mathrm{i}\sin(-t)\right).$$

Fie acum $z_1 = r_1(\cos t_1 + \mathrm{i}\sin t_1)$ şi $z_2 = r_2(\cos t_2 + \mathrm{i}\sin t_2)$, $z_2 \neq 0$, două numere complexe.

Ţinând cont de cele de mai înainte, rezultă că

$$z_1 z_2^{-1} = \frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}[\cos(t_1 - t_2) + \mathrm{i}\sin(t_1 - t_2)].$$

În concluzie, modulul câtului a două numere complexe nenule este egal cu câtul modulelor celor două numere, iar un argument al câtului este egal cu diferenţa dintre un argument al numărătorului şi un argument al numitorului.

Interpretare geometrică

Ca şi în cazul produsului numerelor complexe, să considerăm M_1 şi M_2 imaginile geometrice ale numerelor z_1 şi z_2.

Fie, de asemenea, punctul $A(1, 0)$ pe semiaxa Ox. Se construieşte triunghiul OM_1C asemenea cu triunghiul OM_2A (fig. 9).

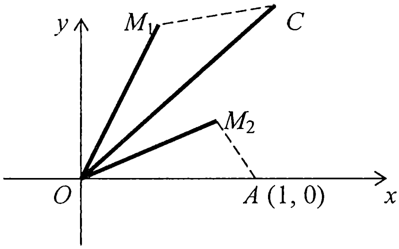


Fig. 9

Din asemănarea celor două triunghiuri, rezultă că $\frac{OC}{OA} = \frac{OM_1}{OM_2}$, $\widehat{COM_1} \equiv \widehat{AOM_2}$.

Dar $OA = 1$, $OM_1 = r_1$, $OM_2 = r_2$, $\mathrm{m}(\widehat{AOM_1}) = t_1$, $\mathrm{m}(\widehat{AOM_2}) = t_2$ şi deci $OC = \frac{r_1}{r_2}$, $\mathrm{m}(\widehat{AOC}) = t_1 - t_2$.

În concluzie, punctul C este imaginea geometrică a numărului complex $\frac{z_1}{z_2}$.

Exemplu

Să se determine modulul şi argumentul redus ale numărului $z = \frac{(1 + \mathrm{i}\sqrt{3})^6}{(1 - \mathrm{i})^4}$.

R: Avem $z = \frac{\left[2\left(\cos\frac{\pi}{3} + \mathrm{i}\sin\frac{\pi}{3}\right)\right]^6}{\left[\sqrt{2}\left(\cos\frac{7\pi}{4} + \mathrm{i}\sin\frac{7\pi}{4}\right)\right]^4} = \frac{2^6(\cos 2\pi + \mathrm{i}\sin 2\pi)}{2^2(\cos 7\pi + \mathrm{i}\sin 7\pi)} =$

$= 2^4 \frac{\cos 2\pi + \mathrm{i}\sin 2\pi}{\cos\pi + \mathrm{i}\sin\pi} = 16(\cos\pi + \mathrm{i}\sin\pi) = -16$. Deci $|z| = 16$ şi $\arg z = \pi$.

Ridicarea la putere a unui număr complex

Fie $z = r(\cos t + \mathrm{i}\sin t)$ un număr complex şi n un număr natural nenul. Folosind formula (2) în cazul $z_1 = z_2 = \ldots = z_n = z$, obţinem

$$z^n = \underbrace{r \cdot r \cdot \ldots \cdot r}_{\text{de } n \text{ ori}}\left[\cos(\underbrace{t + t + \ldots + t}_{\text{de } n \text{ ori}}) + \mathrm{i}\sin(\underbrace{t + t + \ldots + t}_{\text{de } n \text{ ori}})\right] = r^n(\cos nt + \mathrm{i}\sin nt).$$

Deci

$$[r(\cos t + \mathrm{i}\sin t)]^n = r^n(\cos nt + \mathrm{i}\sin nt).$$

În particular, pentru $r = 1$, obţinem formula lui Moivre:

$$(\cos t + i \sin t)^n = \cos nt + i \sin nt.$$

Formula lui Moivre este adevărată şi pentru numere întregi negative.

Într-adevăr, dacă $n < 0$ este un număr întreg, atunci $-n > 0$ este număr natural şi avem $(\cos t + i\sin t)^n = \dfrac{1}{(\cos t + i\sin t)^{-n}} = \dfrac{1}{\cos(-nt) + i\sin(-nt)} =$ $= \dfrac{1}{\cos nt - i\sin nt} = \dfrac{\cos nt + i\sin nt}{\cos^2 nt + \sin^2 nt} = \cos nt + i \sin nt.$

Deci formula lui Moivre este adevărată pentru orice număr întreg nenul.

Exemple

Să se calculeze $\cos 3t$, $\sin 3t$ şi $\operatorname{tg} 3t$ în funcţie de $\cos t$, $\sin t$ şi respectiv $\operatorname{tg} t$.

R: Conform formulei lui Moivre, avem $\cos 3t + i \sin 3t = (\cos t + i \sin t)^3$, de unde, ridicând în membrul drept la puterea a treia, obţinem $\cos 3t + i \sin 3t =$ $= \cos^3 t - 3 \cos t \sin^2 t + i(3 \cos^2 t \sin t - \sin^3 t)$. Egalând părţile reale şi cele imaginare din ambii membri, rezultă $\cos 3t = \cos^3 t - 3 \cos t \sin^2 t = 4 \cos^3 t - 3 \cos t$ şi $\sin 3t = 3 \cos^2 t \sin t - \sin^3 t = 3 \sin t - 4 \sin^3 t$.

Atunci $\operatorname{tg} 3t = \dfrac{3\cos^2 t\sin t - \sin^3 t}{\cos^3 t - 3\cos t\sin^2 t}$ şi, împărţind numărătorul şi numitorul prin $\cos^3 t$, deducem $\operatorname{tg} 3t = \dfrac{3\operatorname{tg} t - \operatorname{tg}^3 t}{1 - 3\operatorname{tg}^2 t}$. Este clar că în acest mod putem scrie funcţiile trigonometrice ale multiplului unui argument ca expresii în care intervin doar funcţii trigonometrice ale argumentului iniţial.

Definiţie. Fie z un număr complex şi $n \geq 2$ un număr natural. Se numeşte rădăcină de ordinul n a lui z orice număr complex u cu proprietatea că $u^n = z$.

Observăm că dacă $z = 0$, atunci numărul 0 este singura rădăcină de ordin n a lui 0.

De aceea, în continuare vom considera cazul $z \neq 0$. Pentru aflarea rădăcinilor din numere complexe nenule, folosim forma trigonometrică a acestora.

T e o r e m ă. Fie $z = r(\cos t + i \sin t)$ un număr complex nenul şi $n \geq 2$ un număr natural. Există exact n rădăcini distincte de ordinul n ale lui z, date de formula

$$z_k = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{t + 2k\pi}{n} + i\sin\frac{t + 2k\pi}{n}\right),\ k \in \{0, 1, 2, ..., n - 1\} \qquad (1)$$

Demonstraţie. Fie u un număr complex astfel încât $u^n = z$.

Dacă $u = R(\cos T + i \sin T)$, $R > 0$, relaţia $u^n = z$ se scrie sub forma $R^n(\cos nT + i \sin nT) = r(\cos t + i \sin t)$.

Această relaţie este echivalentă cu relaţiile: $R^n = r$, $nT - t = 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Deoarece atât numărul r cât şi numărul căutat R sunt pozitive, rezultă că R este unic determinat, şi anume $R = \sqrt[n]{r}$. De asemenea, $T = \dfrac{t + 2k\pi}{n}$, $k \in \mathbb{Z}$. Astfel, există rădăcini de ordin n ale lui z şi toate sunt date de formula

$$z_k = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{t+2k\pi}{n} + \mathrm{i}\sin\frac{t+2k\pi}{n}\right),\ k \in \mathbb{Z}. \tag{2}$$

Să arătăm, mai întâi, că formula (2) dă rădăcini distincte pentru $k \in \{0, 1, 2, ..., n-1\}$. Într-adevăr, să presupunem că $z_{k_1} = z_{k_2}$ unde k_1 şi k_2 sunt numere întregi, $0 \le k_1 < k_2 \le n-1$. Atunci $\frac{t+2k_2\pi}{n} = \frac{t+2k_1\pi}{n} + 2l\pi$, $l \in \mathbb{Z}$, de unde $l = \frac{k_2-k_1}{n}$. Ultima egalitate este imposibilă deoarece $l \in \mathbb{Z}$ şi $0 < \frac{k_2-k_1}{n} < \frac{n-1}{n} < 1$. Rămâne să arătăm că orice rădăcină de ordin n a lui z este egală cu una dintre rădăcinile $z_0, z_1, z_2, ..., z_{n-1}$. Într-adevăr, fie z_l o rădăcină oarecare de ordin n a lui z, unde $l \in \mathbb{Z}$. Dacă $q = \left[\frac{l}{n}\right]$ este partea întreagă a lui $\frac{l}{n}$, atunci $q \le \frac{l}{n} < q+1$, de unde $nq \le l < nq+n$ şi deci $0 \le l - nq \le n-1$. Pentru $k = l - nq$, avem $z_l = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{t+2k\pi}{n} + \mathrm{i}\sin\frac{t+2k\pi}{n}\right) = \sqrt[n]{r}\left[\cos\left(\frac{t+2k\pi}{n} + 2q\pi\right) + \mathrm{i}\sin\left(\frac{t+2k\pi}{n} + 2q\pi\right)\right] = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{t+2k\pi}{n} + \mathrm{i}\sin\frac{t+2k\pi}{n}\right) = z_k$. Deci $z_l = z_k$, unde $k \in \{0, 1, 2, ..., n-1\}$.

Observaţie. Dacă $z = r(\cos t_0 + \mathrm{i}\sin t_0)$ este forma trigonometrică redusă a numărului complex nenul z, atunci $\frac{t_0}{n}, \frac{t_0+2\pi}{n}, \frac{t_0+4\pi}{n}, ..., \frac{t_0+2(n-1)\pi}{n}$ sunt argumentele reduse ale rădăcinilor de ordinul n ale lui z.

Interpretare geometrică. Fie xOy un sistem de axe ortogonale. Cu notaţiile din teorema precedentă, rădăcinile de ordinul n ($n \ge 3$) ale numărului complex nenul z, scris sub formă trigonometrică redusă $z = r(\cos t_0 + \mathrm{i}\sin t_0)$ sunt $z_0, z_1, z_2, ..., z_{n-1}$.

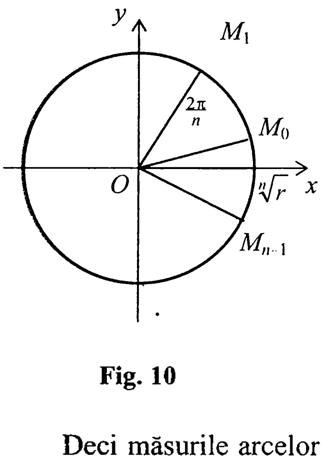


Fig. 10

Deoarece $|z_0| = |z_1| = |z_2| = ... = |z_{n-1}| = \sqrt[n]{r}$, rezultă că imaginile geometrice ale rădăcinilor de ordinul n ale numărului z se găsesc pe cercul de centru O şi de rază $\sqrt[n]{r}$, adică pe cercul $\mathscr{C}(O, \sqrt[n]{r})$. Argumentele reduse ale numerelor $z_0, z_1, z_2, ..., z_{n-1}$ sunt respectiv: $\frac{t_0}{n}, \frac{t_0+2\pi}{n}, \frac{t_0+4\pi}{n}, ..., \frac{t_0+2(n-1)\pi}{n}$.

Dacă $M_0, M_1, M_2, ..., M_{n-1}$ sunt imaginile geometrice ale numerelor $z_0, z_1, z_2, ..., z_{n-1}$ (fig. 10), atunci $m(\widehat{M_0OM_1}) = m(\widehat{M_1OM_2}) = ... = m(\widehat{M_{n-2}OM_{n-1}}) = m(\widehat{M_{n-1}OM_0}) = \frac{2\pi}{n}$.

Deci măsurile arcelor $\overset{\frown}{M_0M_1}, \overset{\frown}{M_1M_2}, ..., \overset{\frown}{M_{n-2}M_{n-1}}, \overset{\frown}{M_{n-1}M_0}$ sunt egale şi prin urmare segmentele $M_0M_1, M_1M_2, ..., M_{n-2}M_{n-1}, M_{n-1}M_0$ au aceeaşi lungime.

Astfel, imaginile geometrice ale rădăcinilor de ordin $n(n \geq 3)$ ale unui număr complex $z \neq 0$ sunt vârfurile unui poligon regulat cu n laturi înscris în cercul de centru O şi de rază $\sqrt[n]{r}$.

Exemplu

Să se calculeze rădăcinile de ordinul 3 ale numărului i.

R: Deoarece $|i| = 1$, $\arg i = \frac{\pi}{2}$, numărul i în formă trigonometrică redusă este $i = \cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}$. Atunci rădăcinile de ordinul 3 ale lui $z = i$ sunt date de formula

$$z_k = \cos\frac{\frac{\pi}{2} + 2k\pi}{3} + i\sin\frac{\frac{\pi}{2} + 2k\pi}{3},\ k \in \{0, 1, 2\}.$$

Cele trei rădăcini sunt: $z_0 = \cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} + i\cdot\frac{1}{2}$, $z_1 = \cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2} + i\cdot\frac{1}{2}$, $z_2 = \cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2} = -i$.

Rădăcinile de ordin n ale unităţii

Rădăcinile ecuaţiei $z^n = 1$ se numesc rădăcinile de ordinul n ale unităţii. Deoarece $1 = \cos 0 + i\sin 0$, din teorema precedentă rezultă că rădăcinile de ordinul n ale unităţii sunt date de formula $\varepsilon_k = \cos\frac{2k\pi}{n} + i\sin\frac{2k\pi}{n}$, $k \in \{0, 1, 2, ..., n-1\}$.

Se observă că în cazul rădăcinilor de ordinul n ale unităţii $\varepsilon_0, \varepsilon_1, ..., \varepsilon_{n-1}$, imaginile geometrice ale acestora într-un sistem de coordonate xOy sunt vârfurile unui poligon regulat cu n laturi, înscris în cercul de centru O şi rază 1.

Deoarece $\varepsilon_0 = 1$, rezultă că vârful M_0 are coordonatele $(1, 0)$.

Observaţie. Dacă ε_k este o rădăcină de ordinul n a unităţii, atunci orice putere a sa este, de asemenea, rădăcină de ordinul n a unităţii. Într-adevăr, din $\varepsilon_k^n = 1$ rezultă că oricare ar fi numărul întreg m, $\left(\varepsilon_k^m\right)^n = (\varepsilon_k^n)^m = 1^m = 1$.

8.1. Ecuaţii binome

O ecuaţie de forma

$$z^n - a = 0, \tag{1}$$

unde a este un număr complex, iar $n \geq 2$ un număr natural, se numeşte *ecuaţie binomă*.

Pentru a rezolva ecuaţia binomă (1) vom scrie numărul complex a sub formă trigonometrică: $a = r(\cos t + i\sin t)$ şi ecuaţia (1) este echivalentă cu

$z^n = r(\cos t + \mathrm{i}\sin t)$. Deci rădăcinile ecuației (1) sunt rădăcinile de ordin n ale numărului complex a. Astfel, ecuația dată are n rădăcini distincte, date de $z_k = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{t+2k\pi}{n} + \mathrm{i}\sin\frac{t+2k\pi}{n}\right)$, $k \in \{0, 1, 2, ..., n-1\}$.

Exemplu

Să se rezolve ecuațiile binome: a) $z^3 - 2 - 2\mathrm{i} = 0$; b) $z^4 + 1 = 0$.

R: a) Avem $z^3 = 2 + 2\mathrm{i} = 2\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + \mathrm{i}\sin\frac{\pi}{4}\right)$. Rădăcinile ecuației sunt:

$z_k = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\frac{\pi}{4}+2k\pi}{3} + \mathrm{i}\sin\frac{\frac{\pi}{4}+2k\pi}{3}\right)$, $k \in \{0, 1, 2\}$, adică: $z_0 = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{12} + \mathrm{i}\sin\frac{\pi}{12}\right)$,

$z_1 = \sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4} + \mathrm{i}\sin\frac{3\pi}{4}\right)$, $z_2 = \sqrt{2}\left(\cos\frac{17\pi}{12} + \mathrm{i}\sin\frac{17\pi}{12}\right) = \sqrt{2}\left(\cos\frac{7\pi}{12} - \mathrm{i}\sin\frac{7\pi}{12}\right)$.

Pentru a calcula z_0 și z_2 avem $\cos\frac{\pi}{12} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\right)$ și $\sin\frac{\pi}{12} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}\right)$.

De asemenea, avem $\cos\frac{7\pi}{12} = -\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}\right)$ și $\sin\frac{7\pi}{12} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}\right)$. Prin urmare, $z_0 = \frac{\sqrt{3}+1}{2} + \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}-1}{2}$, $z_1 = -1 + \mathrm{i}$, $z_2 = -\frac{\sqrt{3}-1}{2} + \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}+1}{2}$ sunt rădăcinile ecuației date.

b) Avem $z^4 = -1 = \cos\pi + \mathrm{i}\sin\pi$.

Rădăcinile ecuației date sunt $z_k = \cos\frac{(2k+1)\pi}{4} + \mathrm{i}\sin\frac{(2k+1)\pi}{4}$, $k \in \{0, 1, 2, 3\}$.

Dând lui k valorile 0, 1, 2 și 3, obținem cele 4 rădăcini ale ecuației binome:

$$z_0 = \cos\frac{\pi}{4} + \mathrm{i}\sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}(1+\mathrm{i}); \qquad z_1 = \cos\frac{3\pi}{4} + \mathrm{i}\sin\frac{3\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}(-1+\mathrm{i});$$

$$z_2 = \cos\frac{5\pi}{4} + \mathrm{i}\sin\frac{5\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}(-1-\mathrm{i}); \qquad z_3 = \cos\frac{7\pi}{4} + \mathrm{i}\sin\frac{7\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}(1-\mathrm{i}).$$

8.2. Ecuații bipătrate

Forma generală a ecuațiilor bipătrate este:

$$ax^4 + bx^2 + c = 0,\ a, b, c \in \mathbb{C} \text{ și } a \neq 0. \tag{2}$$

În cazul general, rezolvarea ecuației (2) se face astfel: se face substituția $x^2 = y$ și obținem ecuația de gradul doi

$$ay^2 + by + c = 0 \tag{3}$$

Ecuația (3) se numește *rezolventa* ecuației (2), iar rădăcinile ei sunt:

$$y_1 = \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \text{ și } y_2 = \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}.$$

Din egalitatea $x^2 = y$ obţinem ecuaţiile $x^2 = y_1$ şi $x^2 = y_2$. Ecuaţia $x^2 = y_1$ are rădăcinile: $x_1 = \sqrt{\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}}$ şi $x_2 = -\sqrt{\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}}$. Ecuaţia $x^2 = y_2$ are rădăcinile: $x_3 = \sqrt{\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}}$ şi $x_4 = -\sqrt{\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}}$.

Numerele x_1, x_2, x_3, x_4 sunt rădăcinile ecuaţiei (2).

Rădăcinile ecuaţiei (2) pot fi cuprinse în formula

$$x = \pm\sqrt{\frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}}, \tag{4}$$

numită *formula de rezolvare* a ecuaţiei bipătrate.

Observaţie. În formula de rezolvare a ecuaţiei bipătrate apar radicali de forma $\sqrt{A+\sqrt{B}}$. Aceşti radicali pot fi aduşi la o sumă sau diferenţă de radicali mai simpli, utilizând formula:

$$\sqrt{A \pm \sqrt{B}} = \sqrt{\frac{A+\sqrt{A^2-B}}{2}} \pm \sqrt{\frac{A-\sqrt{A^2-B}}{2}} \tag{5}$$

(această formulă se verifică direct prin ridicare la pătrat.)

Exemple

1. Să se rezolve ecuaţia bipătrată $x^4 + 5x^2 - 6 = 0$.

R: Facem substituţia $x^2 = y$ şi obţinem ecuaţia rezolventă $y^2 + 5y - 6 = 0$, care are rădăcinile $y_1 = -6$ şi $y_2 = 1$.

Rădăcinile ecuaţiei bipătrate sunt:

$$x_1 = i\sqrt{6},\ x_2 = -i\sqrt{6},\ x_3 = 1,\ x_4 = -1.$$

2. Să se rezolve ecuaţia bipătrată $x^4 - 8x^2 + 9 = 0$.

R: Facem substituţia $x^2 = y$ şi obţinem ecuaţia rezolventă $y^2 - 8y + 9 = 0$, care are rădăcinile $y_1 = 4 + \sqrt{7}$ şi $y_2 = 4 - \sqrt{7}$.

Rădăcinile ecuaţiei bipătrate sunt

$$x_1 = \sqrt{4+\sqrt{7}},\ x_2 = -\sqrt{4+\sqrt{7}},\ x_3 = \sqrt{4-\sqrt{7}},\ x_4 = -\sqrt{4-\sqrt{7}}.$$

Dar folosind formulele (5) de transformare a radicalilor dubli, obţinem:

$$\sqrt{4+\sqrt{7}} = \sqrt{\frac{4+\sqrt{16-7}}{2}} + \sqrt{\frac{4-\sqrt{16-7}}{2}} = \sqrt{\frac{7}{2}} + \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{7}+1}{\sqrt{2}}$$

şi $$\sqrt{4-\sqrt{7}} = \sqrt{\frac{4+\sqrt{16-7}}{2}} - \sqrt{\frac{4-\sqrt{16-7}}{2}} = \frac{\sqrt{7}-1}{\sqrt{2}}.$$

Deci $x_1 = \frac{\sqrt{7}+1}{\sqrt{2}}$, $x_2 = -\frac{\sqrt{7}+1}{\sqrt{2}}$, $x_3 = \frac{\sqrt{7}-1}{\sqrt{2}}$, $x_4 = -\frac{\sqrt{7}-1}{\sqrt{2}}$.

Observaţie. Analog, pot fi rezolvate şi ecuaţii mai generale de forma:

$$ax^{2n} + bx^n + c = 0,\ a \neq 0,$$

unde n este număr natural nenul.

Făcând substituţia, $y = x^n$, obţinem ecuaţia de gradul al doilea $ay^2 + by + c = 0$.

În acest paragraf vom prezenta câteva probleme şi teoreme de geometrie care ilustrează relaţiile de reciprocitate dintre numerele complexe şi geometria plană. Mai precis, cu ajutorul numerelor complexe vom arăta cum putem demonstra simplu anumite teoreme de geometrie. Vom vedea că numerele complexe oferă un nou punct de vedere asupra geometriei plane şi totodată ne permit să înţelegem mai adânc natura lor.

Probleme rezolvate

1. Să se arate că dacă punctele M_1 şi M_2 au afixele z_1 şi respectiv z_2, atunci mijlocul M al segmentului M_1M_2 are afixul $z = \dfrac{z_1 + z_2}{2}$.

R: Într-adevăr, dacă $z_1 = x_1 + \mathrm{i}\, y_1$ şi $z_2 = x_2 + \mathrm{i}\, y_2$, atunci coordonatele lui M_1 şi M_2 sunt respectiv (x_1, y_1) şi (x_2, y_2). Punctul M are coordonatele $\left(\dfrac{x_1 + x_2}{2}, \dfrac{y_1 + y_2}{2}\right)$ şi deci afixul punctului M este:

$$z = \frac{x_1 + x_2}{2} + \mathrm{i}\frac{y_1 + y_2}{2} = \frac{(x_1 + \mathrm{i}\, y_1) + (x_2 + \mathrm{i}\, y_2)}{2} = \frac{z_1 + z_2}{2}.$$

Definiţie. Dacă punctele M_1, M_2, M_3, M_4 sunt coliniare şi segmentele M_1M_3, M_2M_4 au acelaşi mijloc, atunci spunem că $M_1M_2M_3M_4$ este un paralelogram degenerat (fig. 11). Dacă punctele M_1, M_2, M_3, M_4 nu sunt coliniare şi segmentele M_1M_3, M_2M_4 au acelaşi mijloc, atunci spunem că $M_1M_2M_3M_4$ este un paralelogram propriu (fig. 12).

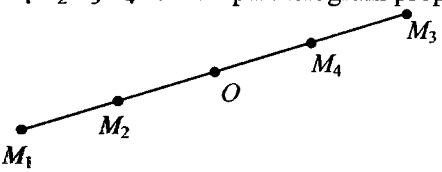


Fig. 11

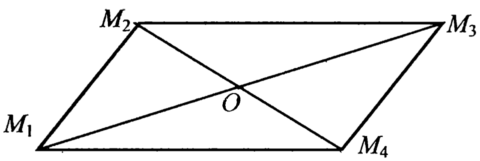


Fig. 12

2. Să se demonstreze că imaginile numerelor complexe z_1, z_2, z_3, z_4 sunt vârfurile unui paralelogram $M_1M_2M_3M_4$ (propriu sau degenerat) dacă şi numai dacă

$$z_1 + z_3 = z_2 + z_4. \tag{1}$$

R: Presupunem că $M_1M_2M_3M_4$ este un paralelogram. Atunci segmentele M_1M_3 şi M_2M_4 au acelaşi mijloc. Afixele z_k, $k = 1, 2, 3, 4$, ale punctelor M_k verifică relaţia $\dfrac{z_1 + z_3}{2} = \dfrac{z_2 + z_4}{2}$, deci avem relaţia (1).

Reciproc, din relaţia (1) deducem că segmentele M_1M_3 şi M_2M_4 au acelaşi mijloc. Dacă punctele M_k sunt coliniare, atunci $M_1M_2M_3M_4$ este un paralelogram degenerat, iar dacă nu sunt coliniare, atunci $M_1M_2M_3M_4$ este un paralelogram propriu.

3. Teorema lui Pompeiu. Se consideră un triunghi echilateral ABC şi M un punct din plan. Atunci cu segmentele MA, MB şi MC se poate forma un nou triunghi, eventual degenerat.

Demonstraţie. Fie z_1, z_2, z_3, z afixele punctelor A, B, C şi M. Se verifică uşor că pentru orice numere complexe z_1, z_2, z_3, z are loc identitatea

$$(z-z_1)(z_2-z_3)+(z-z_2)(z_3-z_1)+(z-z_3)(z_1-z_2)=0 \tag{2}$$

Identitatea (2) poate fi interpretată spunând că vectorii corespunzători numerelor complexe $(z-z_1)(z_2-z_3)$, $(z-z_2)(z_3-z_1)$ şi $(z-z_3)(z_1-z_2)$ formează un contur închis. Relaţia (2) se mai scrie $-(z-z_1)(z_2-z_3)=(z-z_2)(z_3-z_1)+(z-z_3)(z_1-z_2)$ şi aplicând modulul, rezultă că:

$$|z-z_1|\cdot|z_2-z_3| \leq |z-z_2|\cdot|z_3-z_1|+|z-z_3|\cdot|z_1-z_2| \tag{3}$$

Ţinând seama că distanţa dintre două puncte este modulul diferenţei afixelor lor, inegalitatea (3) ne spune că dacă A, B, C şi M sunt puncte arbitrare în plan, atunci avem relaţia:

$$AM\cdot BC \leq BM\cdot CA+CM\cdot AB \tag{4}$$

Relaţia (4) se numeşte *inegalitatea lui Ptolemeu.*

Inegalitatea (4) şi alte două inegalităţi analoage ne arată că putem construi un triunghi ale cărui laturi au lungimile proporţionale cu produsele $AM\cdot BC$, $BM\cdot CA$, $CM\cdot AB$.

În cazul nostru, ABC este un triunghi echilateral, ceea ce înseamnă că $AB=BC=CA$ şi atunci inegalitatea (4) devine:

$$AM \leq BM+CM \tag{5}$$

Inegalitatea (5) împreună cu alte două inegalităţi analoage ne arată că AM, BM, CM sunt laturile unui triunghi.

Teorema lui Pompeiu se extinde uşor şi la alte poligoane. De exemplu, putem considera pentagonul $A_1A_2A_3A_4A_5$, afixele vârfurilor fiind z_1, z_2, z_3, z_4, z_5 şi M un punct din plan de afix z. Avem identitatea evidentă $(z-z_1)(z_3-z_4)+$ $+(z-z_2)(z_4-z_5)+(z-z_3)(z_5-z_1)+(z-z_4)(z_1-z_2)+(z-z_5)(z_2-z_3)=0$ care exprimă că se poate construi un pentagon ale cărui laturi au lungimile proporţionale cu numerele $MA_1\cdot A_3A_4$, $MA_2\cdot A_4A_5$, $MA_3\cdot A_5A_1$, $MA_4\cdot A_1A_2$, $MA_5\cdot A_2A_3$.

Când pentagonul este regulat, avem o teoremă analoagă cu teorema lui Pompeiu pentru triunghiul echilateral. În locul pentagonului $A_1A_2A_3A_4A_5$, putem considera orice poligon cu un număr impar de laturi $A_1A_2 \ldots A_{2n+1}$.

4. Teorema lui Ţiţeica. Trei cercuri congruente $\mathscr{C}(O_1, r)$, $\mathscr{C}(O_2, r)$, $\mathscr{C}(O_3, r)$ au un punct comun O şi se mai intersectează două câte două în punctele A, B, C. Cercul circumscris triunghiului ABC este congruent cu cercurile date.

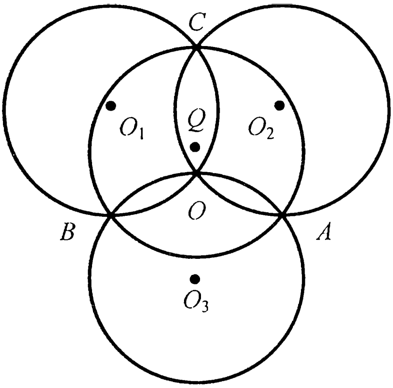


Fig. 13

Demonstrație. Se consideră un reper cartezian având ca origine punctul O comun celor trei cercuri date și fie z_1, z_2, z_3 afixele punctelor O_1, O_2, O_3 (fig. 13). Rezultă că punctele A, B, C au respectiv afixele z_2+z_3, z_1+z_3 și z_1+z_2. Deci $AB = |(z_1+z_3) - (z_2+z_3)| = |z_1 - z_2| = O_1O_2$. Analog se obține $BC = O_2O_3$ și $AC = O_1O_3$. Prin urmare, triunghiurile ABC și $O_1O_2O_3$ sunt congruente, deci și cercurile circumscrise lor sunt congruente. Dar centrul cercului circumscris triunghiului $O_1O_2O_3$ este punctul O, deoarece $OO_1 = OO_2 = OO_3 = r$.

Observație. Notăm cu $\omega = z_1 + z_2 + z_3$ și fie Q punctul al cărui afix este numărul complex ω. Ținând seama că $|z_1| = |z_2| = |z_3| = r$, putem arăta că Q este centrul cercului circumscris triunghiului ABC și că acest cerc are raza r. Într-adevăr, avem $QA = |\omega - (z_2+z_3)| = |z_1| = r$, $QB = |\omega - (z_1+z_3)| = |z_2| = r$, $QC = |\omega - (z_1+z_2)| = |z_3| = r$, ceea ce înseamnă că A, B, C sunt situate pe cercul de ecuație $|z - \omega| = r$.

Să se scrie sub formă trigonometrică redusă numerele complexe:

a) -1; b) $-i$; c) $-1+i$; d) $1+i\sqrt{3}$; e) $\sqrt{3}+i$; f) $3-4i$; g) $5+2i$; h) $2+\sqrt{3}+i$.

Să se determine argumentele numerelor complexe următoare și să se indice argumentele reduse:

a) $-\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}$; b) $\cos\frac{\pi}{4} - i\sin\frac{\pi}{4}$; c) $\sin\frac{\pi}{6} - i\cos\frac{\pi}{6}$; d) $\sin\frac{\pi}{3} + i\cos\frac{\pi}{3}$.

Să se scrie sub formă trigonometrică numerele complexe:

a) $1+\cos\alpha + i\sin\alpha$, $\alpha\in(-\pi,\pi)$; b) $\sin\alpha - i\cos\alpha$; c) $\sin\alpha + \cos\alpha + i(\sin\alpha - \cos\alpha)$.

Să se determine mulțimea punctelor din planul xOy ale căror afixe $z = x + iy$ satisfac:

a) $z = |z|$; b) $\arg z = \frac{\pi}{6}$; c) $|z| < 2$; d) $|z - i| \le 1$;

e) $|2z-1| > 2$; f) $|z+i| > |z|$; g) $1 \le |z+i| \le 4$.

Să se rezolve în mulțimea numerelor complexe ecuația $2z = |z| + 2i$.

Să se determine mulțimea punctelor din planul xOy ale căror afixe z au proprietatea că numărul $z^2 + z + 1$ este real și pozitiv.

Scriind numerele complexe $z_1 = 1 + i\sqrt{3}$, $z_2 = 1 + i$ și $z_3 = -2i$ sub formă trigonometrică, să se calculeze produsul lor.

Folosind formula lui Moivre, să se calculeze:

a) $\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)^6$; b) $\left(\cos\frac{\pi}{6} - i\sin\frac{\pi}{6}\right)^8$; c) $\left(-\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)^{10}$;

d) $(1+i)^{25}$; e) $(-1+i)^{12}$; f) $(\sqrt{3}-i)^8(-1+i\sqrt{3})^{11}$.

Folosind forma trigonometrică a numerelor complexe, să se calculeze:

a) $\left(\frac{1-\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}\sqrt{3}}\right)^{18}$; b) $\frac{\left(1-\mathrm{i}\sqrt{3}\right)^{13}}{(1+\mathrm{i})^{24}}$; c) $\frac{\left(-1+\mathrm{i}\sqrt{3}\right)^{17}}{(-1+\mathrm{i})^{16}}$.

Să se demonstreze că:

a) $(1+\mathrm{i})^n = 2^{\frac{n}{2}}\left(\cos\frac{n\pi}{4}+\mathrm{i}\sin\frac{n\pi}{4}\right)$; b) $(\sqrt{3}-\mathrm{i})^n = 2^n\left(\cos\frac{n\pi}{6}+\mathrm{i}\frac{n\pi}{6}\right)$, unde n este un număr întreg nenul.

Să se demonstreze că $\left(\frac{1+\mathrm{i}\,\mathrm{tg}\,\alpha}{1-\mathrm{i}\,\mathrm{tg}\,\alpha}\right)^n = \frac{1+\mathrm{i}\,\mathrm{tg}\,n\alpha}{1-\mathrm{i}\,\mathrm{tg}\,n\alpha}$, unde $\alpha \neq (2k+1)\frac{\pi}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$ şi n este un număr natural nenul.

Să se calculeze $(1+\cos\alpha+\mathrm{i}\sin\alpha)^n$, n fiind număr natural nenul.

Dacă $z+\frac{1}{z} = 2\cos\alpha$, să se calculeze $z^n+\frac{1}{z^n}$, n fiind număr întreg nenul.

Să se arate că modulul numărului complex $\frac{1+a\mathrm{i}}{1-a\mathrm{i}}$, unde $a \in \mathbb{R}$, este 1. Reciproc, să se arate că orice număr complex diferit de -1, de modul 1, poate fi scris în mod unic sub forma precedentă. Dar dacă $a \in \mathbb{C}$?

Fie numerele complexe $z_k = \cos\frac{\pi}{2^k}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{2^k}$, unde $k \in \{0, 1, \ldots, n\}$. Să se calculeze produsul $z_0z_1\ldots z_n$.

Să se calculeze rădăcinile de ordinele 3 şi 4 ale numerelor -1, $-\mathrm{i}$, $2-2\mathrm{i}$.

Să se calculeze rădăcinile de ordinul 6 ale numerelor $\frac{1-\mathrm{i}}{\sqrt{3}+\mathrm{i}}$ şi $\frac{1-\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}\sqrt{3}}$.

Să se rezolve ecuaţiile binome:

a) $z^4-\mathrm{i}=0$; b) $z^4-2+2\mathrm{i}\sqrt{3}=0$; c) $(2+\mathrm{i})z^3-3+\mathrm{i}=0$; d) $(\sqrt{3}-i)z^4-4\mathrm{i}=0$.

Să se rezolve ecuaţiile bipătrate:

a) $x^4-10x^2+9=0$; b) $x^4-17x^2+16=0$;

c) $x^4-(1+\sqrt{2})x^2+\sqrt{2}=0$; d) $x^4-4x^2+1=0$;

e) $6x^4-5x^2+1=0$; f) $32x^4-12x^2+1=0$;

Să se rezolve ecuaţiile:

a) $z^6-9z^3+8=0$;

b) $z^8-(1+\mathrm{i})z^4+\mathrm{i}=0$.

Folosind forma trigonometrică a numerelor complexe, să se calculeze sumele: $S_1 = \cos t+\cos 2t+\ldots+\cos nt$; $S_2 = \sin t+\sin 2t+\ldots+\sin nt$ $(n \in \mathbb{N}^*)$.

Să se demonstreze că dacă $A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6$ sunt puncte oarecare în plan, atunci $A_1A_4\cdot A_2A_5\cdot A_3A_6 \leq A_1A_2\cdot A_4A_5\cdot A_3A_6 + A_2A_3\cdot A_5A_6\cdot A_1A_4 + A_3A_4\cdot A_1A_6\cdot A_2A_5 + A_1A_2\cdot A_3A_4\cdot A_5A_6 + A_2A_3\cdot A_4A_5\cdot A_1A_6$.

Fie z_1, z_2, z_3 afixele punctelor A_1, A_2, A_3 astfel încât $|z_1| = |z_2| = |z_3| = 1$. Să se demonstreze că $A_1A_2A_3$ este triunghi echilateral dacă şi numai dacă $z_1+z_2+z_3=0$.

Fie A_1, A_2, A_3 trei puncte distincte având respectiv afixele z_1, z_2, z_3. Să se demonstreze că punctele A_1, A_2, A_3 sunt coliniare dacă şi numai dacă $\frac{z_2-z_1}{z_3-z_1}$ este număr real.

În practică, adesea, se ajunge la problema de a alege dintr-o mulţime oarecare submulţimi de elemente care posedă anumite proprietăţi, de a dispune elementele uneia sau ale mai multor mulţimi într-o anumită ordine ş.a.m.d. De asemenea, poate apărea problema determinării numărului unor submulţimi ale unei mulţimi date.

Pentru că în astfel de probleme este vorba de anumite combinaţii de elemente, ele se numesc probleme combinatorii. Domeniul matematicii în care se studiază astfel de probleme se numeşte combinatorică. Combinatorica poate fi considerată ca o parte a teoriei mulţimilor, orice problemă de combinatorică putând fi redusă la o problemă despre mulţimi finite şi aplicaţii.

Această ramură a matematicii are mare importanţă pentru teoria probabilităţilor, cibernetică, logica matematică, teoria numerelor, precum şi pentru alte ramuri ale ştiinţei şi tehnicii. O metodă deosebit de utilă în rezolvarea problemelor de combinatorică este metoda inducţiei matematice.

Propoziţiile (în sensul logicii matematice) pot fi clasificate în *propoziţii generale* şi *propoziţii particulare.** Astfel, propoziţiile: „În orice triunghi suma măsurilor unghiurilor sale este egală cu 180°", „Orice număr a cărui ultimă cifră este 0 sau 5 este divizibil cu 5", care au un caracter general, sunt propoziţii generale. Însă propoziţiile: „Suma măsurilor unghiurilor triunghiului *ABC* este egală cu 180°", „Numerele 1980 şi 1985 sunt divizibile cu 5" sunt propoziţii particulare, respectiv, cazuri particulare ale propoziţiilor generale de mai înainte.

Procedeul prin care din propoziţii generale se obţin propoziţii particulare se numeşte *deducţie.*

Una din trăsăturile caracteristice matematicii şi altor ştiinţe (de exemplu mecanicii teoretice, fizicii teoretice, lingvisticii matematice) este *construcţia deductivă a teoriei*, prin care toate afirmaţiile decurg, apelând la deducţie, din câteva principii de bază numite axiome.

Dar deducţia nu este singura metodă de raţionament ştiinţific. În acelaşi timp cu aceasta, în matematică se trece adesea de la propoziţii particulare la propoziţii generale, adică se fac raţionamente inductive.

Prin *inducţie* se înţelege o metodă de raţionament care conduce de la propoziţii particulare la o oarecare propoziţie generală.

---

* De fapt, după cum se observă din exemplele următoare, propoziţiile generale reprezintă propoziţii cu variabile (predicate), iar propoziţiile particulare sunt propoziţii în sensul paragrafului 1 din capitolul de logică matematică din manualul de clasa a IX-a.

Să dăm următorul exemplu:

Să se calculeze sumele succesive de numere naturale impare: 1, $1 + 3$, $1 + 3 + 5$, $1 + 3 + 5 + 7$, $1 + 3 + 5 + 7 + 9$. Obţinem, respectiv, numerele $1 = 1^2$, $4 = 2^2$, $9 = 3^2$, $16 = 4^2$, $25 = 5^2$. Observăm că în toate cazurile considerate suma este egală cu pătratul numărului termenilor sumei. În mod natural, se poate presupune că această proprietate ar putea să aibă loc pentru orice astfel de sumă (având oricât de mulţi termeni) Presupunerea (ipoteza) noastră se poate formula astfel: *Pentru orice număr natural $n \geqslant 1$, are loc egalitatea:*

$$1 + 3 + 5 + \ldots + (2n - 1) = n^2. \tag{1}$$

Astfel cele cinci cazuri particulare ne-au sugerat o ipoteză care, după cum vom arăta în continuare, este adevărată.

Aceasta se va demonstra prin metoda de raţionament numită *inducţie matematică.*

Să notăm cu $P(n)$ egalitatea (1), pentru numărul natural n. Atunci, faptul că $P(1)$, $P(2)$, $P(3)$, $P(4)$, $P(5)$ sunt adevărate, înseamnă că egalitatea (1) are loc respectiv pentru $n = 1$, $n = 2$, $n = 3$, $n = 4$, $n = 5$, după cum s-a arătat în paragraful precedent.

Întrucât $P(5)$ este adevărată: $1 + 3 + 5 + 7 + 9 = 5^2$, avem

$$1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 = 5^2 + 2 \cdot 5 + 1 = (5 + 1)^2 = 6^2,$$

adică este adevărată $P(6)$.

Astfel, am demonstrat că dacă $P(5)$ este adevărată, rezultă că este adevărată $P(6)$.

Să demonstrăm, în acelaşi mod, că pentru un număr natural oarecare $k \geqslant 1$, avem $P(k) \Rightarrow P(k + 1)$.

Aceasta înseamnă că din egalitatea

$$1 + 3 + 5 + \ldots + (2k - 1) = k^2$$

să rezulte egalitatea

$$1 + 3 + 5 + \ldots + (2k - 1) + (2k + 1) = (k + 1)^2.$$

Într-adevăr,

$1 + 3 + 5 + \ldots + (2k - 1) + (2k + 1) = [1 + 3 + 5 + \ldots + (2k - 1)] + (2k + 1) = k^2 + 2k + 1 = (k + 1)^2$.

Astfel, egalitatea $P(n)$ este adevărată pentru $n = 1$, iar din faptul că ea este adevărată pentru $n = k$, rezultă că ea este adevărată şi pentru $n = k + 1$.

Atunci $P(1) \Rightarrow P(2)$, deoarece $2 = 1 + 1$; $P(2) \Rightarrow P(3)$, deoarece $3 = 2 + 1$; $P(3) \Rightarrow P(4)$, deoarece $4 = 3 + 1$; $P(4) \Rightarrow P(5)$, deoarece $5 = 4 + 1$ ş.a.m.d.

Pare natural că în modul acesta se poate ajunge până la orice număr n, adică $P(n)$ este adevărată pentru orice $n \geqslant 1$; deci raţionamentul făcut pare convingător. Acest raţionament este riguros din punct de vedere matematic, deoarece este un caz particular al unui principiu de bază al matematicii, numit *principiul inducţiei matematice.*

Acesta se formulează astfel:

Dacă o propoziţie $P(n)$, n fiind un număr natural, este adevărată pentru $n = 0$, şi, din aceea că ea este adevărată pentru $n = k$ (unde k este un număr natural oarecare) rezultă că ea este adevărată şi pentru numărul natural $n = k + 1$, atunci propoziţia $P(n)$ este adevărată pentru orice număr natural n.

În aritmetică se pune în evidenţă că principiul inducţiei matematice constituite una din axiomele de bază ale *aritmeticii numerelor naturale*, având numeroase aplicaţii. Acest principiu ne dă metoda de demonstraţie numită *metoda inducţiei matematice.*

Fie $P(n)$ o propoziţie care depinde de un număr natural $n \geqslant m$, m fiind un număr natural fixat.

Demonstraţia prin metoda inducţiei matematice a propoziţiei $P(n)$, constă din două etape:

1° *Se verifică mai întâi că $P(m)$ este adevărată.*

2° *Se presupune că $P(k)$ este adevărată şi se demonstrează că $P(k+1)$ este adevărată, k fiind un număr natural $\geqslant m$ (adică $P(k) \Rightarrow P(k+1)$, $k \geqslant m$).*

Dacă ambele etape ale demonstraţiei sunt verificate, atunci propoziţia $P(n)$ este adevărată pentru orice număr natural $n \geqslant m$.

Intuitiv, această metodă de demonstraţie se justifică astfel:

Din $P(m)$ adevărată şi $P(k) \Rightarrow P(k+1)$, pentru orice $k \geqslant m$, rezultă $P(m+1)$ adevărată ($k = m$); apoi luând $k = m + 1$ se obţine că $P(m + 2)$ este adevărată ş.a.m.d. Raţionând „din aproape în aproape" deducem că propoziţia $P(n)$ este adevărată pentru orice număr natural $n \geqslant m$.

Metoda inducţiei matematice arată că egalitatea (1) este adevărată pentru orice număr natural $n \geqslant 1$, deoarece ea este adevărată pentru $n = 1$, şi din $P(k)$ rezultă $P(k+1)$, pentru $k \geqslant 1$.

Observaţii. 1) Dacă se cere să demonstrăm că propoziţia $P(n)$ este adevărată pentru orice $n \geqslant m$, m fiind un număr natural fixat, prima etapă a demonstraţiei prin inducţie matematică constă în verificarea faptului că $P(n)$ este adevărată pentru $n = m$ şi nu pentru alt număr natural. Este posibil ca pentru numerele naturale mai mici decât m propoziţia să fie falsă, sau să nu aibă sens.

2) Cele două etape ale demonstraţiei prin metoda inducţiei matematice sunt la fel de importante. Nu înseamnă că prima etapă este mai puţin importantă decât a doua. Iată un exemplu care arată la ce concluzie absurdă se poate ajunge, dacă se omite prima etapă a demonstraţiei prin inducţie matematică.

Să considerăm propoziţia $P(n)$:

„Orice număr natural n este egal cu succesorul său".

Să presupunem că $P(k)$ este adevărată, k fiind un număr natural, adică $k = k + 1$. Adunând 1 la fiecare membru al egalităţii $k = k + 1$, rezultă $k + 1 = k + 2$, adică $P(k + 1)$ este adevărată. Etapa a doua a demonstraţiei a fost efectuată, totuşi propoziţia nu este adevărată. Într-adevăr, pentru $n = 0$, $P(n)$ nu este adevărată, deoarece $0 \neq 1$, şi deci prima etapă a demonstraţiei prin inducţie matematică ne spune că $P(n)$ este falsă.

Metoda inducţiei matematice are o largă utilizare în matematică. Ea poate fi folosită la calcularea de sume şi produse, la demonstrarea unor egalităţi şi inegalităţi, în probleme de divizibilitate a numerelor. În continuare o vom utiliza doar pentru demonstrarea unor egalităţi.

Exemplu Să se calculeze suma

$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)}$$

pentru orice număr natural $n \geqslant 1$.

Soluţie. Notăm această sumă cu S_n. Ca să stabilim expresia sumei S_n, calculăm suma în câteva cazuri particulare: S_1, S_2, S_3, S_4.

Considerând aceste numere formulăm ipoteza şi după aceea pentru demonstrarea ei folosim metoda inducţiei matematice.

$$S_1 = \frac{1}{1 \cdot 2} = \frac{1}{2};$$

$$S_2 = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} = S_1 + \frac{1}{2 \cdot 3} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2 \cdot 3} = \frac{2}{3};$$

$$S_3 = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} = S_2 + \frac{1}{3 \cdot 4} = \frac{2}{3} + \frac{1}{3 \cdot 4} = \frac{3}{4};$$

$$S_4 = \frac{1}{2 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \frac{1}{4 \cdot 5} = S_3 + \frac{1}{4 \cdot 5} = \frac{3}{4} + \frac{1}{4 \cdot 5} = \frac{4}{5}.$$

Cercetând aceste sume observăm că numărătorul este indicele sumei căutate, iar numitorul este succesorul său. În acest mod, formulăm următoarea ipoteză:

Pentru orice număr natural $n \geqslant 1$, are loc egalitatea:

$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{n}{n+1} \qquad (2)$$

Să notăm cu $P(n)$ egalitatea (2), pentru numărul n. Demonstrăm că $P(n)$ este adevărată prin metoda inducţiei matematice.

1° $P(1)$ este adevărată, deoarece $S_1 = \frac{1}{2} = \frac{1}{1+1}$.

2° Demonstrăm că $P(k) \Rightarrow P(k+1)$:

$$S_{k+1} = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \ldots + \frac{1}{k(k+1)} + \frac{1}{(k+1)(k+2)} =$$

$$= S_k + \frac{1}{(k+1)(k+2)} = \frac{k}{k+1} + \frac{1}{(k+1)(k+2)} = \frac{k^2 + 2k + 1}{(k+1)(k+2)} =$$

$$= \frac{k+1}{k+2} = \frac{k+1}{(k+1)+1}.$$

Ambele etape ale demonstraţiei prin metoda inducţiei matematice sunt verificate. Prin urmare egalitatea (2) este demonstrată şi deci

$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{n}{n+1}.$$

pentru orice număr natural $n \geqslant 1$,

Observaţie. Suma poate fi calculată şi în modul următor:

Termenul general al sumei este $\frac{1}{k(k+1)}$ care se scrie astfel $\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$, unde $1 \leqslant k \leqslant n$.

Dând valori lui k de la 1 la n, avem

$$S_n = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)} = \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right).$$

Reducem termenii asemenea şi obţinem:

$$S_n = \frac{1}{1} - \frac{1}{n+1} = \frac{n}{n+1}.$$

Numărul funcţiilor definite pe o mulţime finită cu valori într-o mulţime finită

Fie A o mulţime nevidă. Se spune că A este o mulţime *finită* dacă există un număr natural $n \geq 1$ şi o funcţie bijectivă de la A la mulţimea $\{1, 2, \ldots, n\}$. Se observă că numărul n este *unic determinat* de A şi se spune că *mulţimea A are n elemente.* Vom nota prin $|A|$ numărul elementelor mulţimii A şi-l vom mai numi *cardinalul* mulţimii A. Convenim să considerăm că mulţimea vidă este finită şi are 0 (zero) elemente, adică $|\varnothing| = 0$.

Vom determina în continuare numărul funcţiilor de la o mulţime finită A la o mulţime finită B. În acest sens, avem rezultatul următor:

Fie A şi B mulţimi finite astfel încât $|A| = m$ şi $|B| = n$. Atunci numărul funcţiilor de la mulţimea A la mulţimea B este n^m.

Demonstraţie. Demonstrăm prin metoda inducţiei matematice, după $m = |A|$, că numărul funcţiilor de la A la B este n^m.

Fie $P(m)$ propoziţia: Numărul funcţiilor de la o mulţime cu m elemente la o mulţime cu n elemente este n^m.

1° $P(1)$ este adevărată deoarece evident de la o mulţime cu un element într-o mulţime cu n elemente sunt $n = n^1$ funcţii.

2° Să arătăm că $P(k) \Rightarrow P(k + 1)$. Fie A' o mulţime astfel încât $|A'| = k + 1$. Dacă $a \in A'$ şi $A'' = A'$ ă $\{a\}$, atunci $|A''| = k$ şi cum $P(k)$ este adevărată, rezultă că numărul funcţiilor de la A'' la B este n^k. Dacă $f : A'' \rightarrow B$ este o funcţie oarecare, atunci pentru orice $b \in B$ definim $f_b : A' \rightarrow B$, prin $f_b(x) = f(x)$, oricare ar fi $x \in A''$ şi $f_b(a) = b$. Cum $b \in B$ şi $|B| = n$, rezultă că pentru orice funcţie de la A'' la B se obţin n funcţii de la A' la B. Mai mult, toate funcţiile de la A' la B sunt de acest tip. deci numărul funcţiilor de la A' la B este $n^k \cdot n = n^{k+1}$. Conform metodei inducţiei matematice, afirmaţia este adevărată.

Exemplu

Fie A o mulţime finită astfel încât $|A| = n$. Este clar că mulţimea $A \times A$ are $n \cdot n = n^2$ elemente. Conform teoremei precedente, rezultă că numărul funcţiilor definite pe $A \times A$ cu valori în A este n^{n^2}.

Exerciţii

Folosind metoda inducţiei matematice, să se demonstreze că pentru orice număr natural nenul n, sunt adevărate egalităţile:

a) $1 + 2 + 3 + \ldots + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$;

b) $1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$;

c) $1^2 + 3^2 + 5^2 + \ldots + (2n-1)^2 = \dfrac{n(4n^2-1)}{3}$;

d) $2^2 + 6^2 + \ldots + (4n - 2)^2 = \dfrac{4n(2n - 1)(2n + 1)}{3}$;

e) $1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3 = \left[\dfrac{n(n + 1)}{2}\right]^2$;

f) $1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \ldots + n(n + 1) = \dfrac{n(n + 1)(n + 2)}{3}$.

Să se demonstreze că:

a) $\dfrac{1}{1 \cdot 4} + \dfrac{1}{4 \cdot 7} + \dfrac{1}{7 \cdot 10} + \ldots + \dfrac{1}{(3n - 2)(3n + 1)} = \dfrac{n}{3n + 1}$;

b) $\dfrac{1}{1 \cdot 5} + \dfrac{1}{5 \cdot 9} + \dfrac{1}{9 \cdot 13} + \ldots + \dfrac{1}{(4n - 3)(4n + 1)} = \dfrac{n}{4n + 1}$;

c) $\dfrac{1}{1 \cdot 3} + \dfrac{2^2}{3 \cdot 5} + \dfrac{3^2}{5 \cdot 7} + \ldots + \dfrac{n^2}{(2n - 1)(2n + 1)} = \dfrac{n(n + 1)}{2n + 1}$.

Să se demonstreze că:

a) $\dfrac{7}{1 \cdot 8} + \dfrac{7}{8 \cdot 15} + \dfrac{7}{15 \cdot 22} + \ldots + \dfrac{7}{(7n - 6)(7n + 1)} + \dfrac{1}{7n + 1} = 1$;

b) $\dfrac{1}{4 \cdot 8} + \dfrac{1}{8 \cdot 12} + \dfrac{1}{12 \cdot 6} + \ldots + \dfrac{1}{4n(4n + 4)} + \dfrac{1}{16(n + 1)} = \dfrac{1}{16}$.

Se consideră adesea mulţimi ale căror elemente sunt aranjate într-o ordine determinată. De exemplu, alfabetul este o mulţime ale cărei elemente (litere) sunt date într-o anumită ordine. Astfel, cele 31 litere ale alfabetului românesc sunt aranjate, de obicei, în următoarea ordine: *a* este prima (nu urmează după altă literă), *ă* este a doua (urmează după prima), *â* este a treia (urmează după a doua) ş.a.m.d. până la *z* care este ultima (după care nu mai urmează nici o literă). Elementele aceleiaşi mulţmi se pot da şi într-o altă ordine. De exemplu, este posibil ca literele alfabetului să fie aranjate într-o ordine inversă celei dintâi, astfel: prima literă să fie socotită *z*, a doua să fie *y* ş.a.m.d. până la ultima, a 31-a literă, *a*. Sunt, evident, şi alte moduri de aranjare a literelor alfabetului.

Spunem că *o mulţime împreună cu o ordine bine determinată de dispunere a elementelor sale este o mulţime ordonată.* Mai precis:

Fie A o mulţime (finită) care are n elemente. Mulţimea A se numeşte ordonată dacă fiecărui element al său i se asociază un anumit număr de la 1 la n, numit *rangul* elementului, astfel încât la elemente diferite ale lui A corespund numere diferite.

Această asociere exprimă, mai exact, tocmai ordinea elementelor mulţimii A. Astfel, ordinea este următoarea: elementul căruia i se asociază numărul 1, elementul căruia i se asociază numărul 2, ..., elementul căruia i se asociază numărul n.

Observăm că orice mulţime finită poate deveni o mulţime ordonată, adică se poate ordona. Această ordine se poate da, pur şi simplu, numerotând elementele mulţimii. Mulţimea ordonată obţinută o notăm cu $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$, unde ordinea elementelor este dată de indici.

O mulţime ordonată este caracterizată prin elementele din care este formată şi prin ordinea în care sunt considerate acestea.

În consecinţă, două mulţimi ordonate sunt diferite dacă ele se deosebesc fie prin elementele din care sunt formate, fie prin ordinea lor.

În exemplul de mai sus am considerat, aşadar, două mulţimi ordonate diferite.

Un alt exemplu de mulţimi ordonate diferite este următorul: (1, 2, 3) şi (2, 1, 3). Mulţimile au aceleaşi elemente, dar ordinea în care acestea sunt dispuse este diferită în cele două mulţimi. Astfel, în prima mulţime 1 este pe primul loc, 2 pe locul al doilea, iar 3 pe locul al treilea, în timp ce, în a doua mulţime 2 este pe primul loc, 1 pe al doilea, iar 3 pe al treilea.

Fie A o mulţime (finită) cu n elemente. Această mulţime se poate ordona în mai multe moduri. Se obţin, astfel, mulţimi ordonate diferite, care se deosebesc între ele numai prin ordinea elementelor.

Dacă A este o mulţime cu n elemente, fiecare din mulţimile ordonate care se formează cu cele n elemente ale mulţimii A se numeşte permutare a acestei mulţimi.

Se mai spune că este *o permutare a elementelor sale* sau, încă, *o permutare de n elemente.*

Numărul permutărilor de n elemente se notează cu P_n şi se citeşte „permutări de n". Avem:

1. O mulţime cu un singur element poate fi ordonată într-un singur mod, deci $P_1 = 1$.
2. O mulţime cu două elemente $A = \{a, b\}$ poate fi ordonată în două moduri. Se obţin două permutări:

   $$(a, b) \text{ şi } (b, a).$$

   Deci $P_2 = 2 = 1 \cdot 2$.
3. Fie o mulţime cu trei elemente $A = \{a, b, c\}$. Permutările acestei mulţimi sunt: (a, b, c), (a, c, b), (b, a, c), (b, c, a), (c, a, b), (c, b, a).
   Rezultă $P_3 = 6 = 1 \cdot 2 \cdot 3$.

Ne propunem, în continuare, să găsim numărul permutărilor unei mulţimi date, adică numărul modurilor în care poate să fie ordonată o mulţime dată.

Pentru produsul primelor n numere naturale nenule se foloseşte, de obicei, notaţia $n!$ care se citeşte „n factorial":

$$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n = n!$$

În ceea ce priveşte numărul permutărilor, avem:

T e o r e m a 1. Dacă $n \geq 1$ este număr natural, atunci $P_n = n!$ (1)

Demonstrație. Vom demonstra teorema prin metoda inducției matematice. Să notăm cu $P(n)$ egalitatea (1).

1. $P(1)$ este adevărată, deoarece am observat mai înainte că $P_1 = 1 = 1!$.
2. Să arătăm că $P(k) \Rightarrow P(k+1)$.

Să ordonăm în toate modurile posibile o mulțime cu $k+1$ elemente. Oricare din cele $k+1$ elemente ale mulțimii poate ocupa ultimul loc, al $(k+1)$-lea. Se obțin astfel $k+1$ moduri diferite de a ocupa ultimul loc. Să considerăm unul din ele, în care un element ales al mulțimii va avea rangul $k+1$. Elementele rămase, care sunt în număr de k, trebuie să ocupe primele k locuri, iar aceasta se poate face în P_k moduri diferite. Se obțin, așadar, $(k+1)P_k$ moduri de a ordona o mulțime care are $k+1$ elemente. Deci $P_{k+1} = (k+1)\,P_k$. Dar cum $P(k)$ este adevărată, avem $P_k = k!$ de unde $P_{k+1} = (k+1)k! = (k+1)!$ Conform metodei inducției matematice, teorema este demonstrată.

Convenim să considerăm că mulțimea vidă poate fi ordonată într-un singur mod, adică $P_0 = 1$. Deci definim $0! = 1$.

Exemple

1. Să dăm în tabelul următor valorile lui $n!$, pentru $1 \le n \le 10$.

n	$n!$	n	$n!$
1	1	6	720
2	2	7	5 040
3	6	8	40 320
4	24	9	362 880
5	120	10	3 628 800

2. Câte numere diferite se pot forma din cifrele:

$$0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$$

astfel încât orice număr să conțină toate cifrele și doar o singură dată fiecare cifră?

R: Din numărul mulțimilor ordonate care au ca elemente cele 10 cifre, trebuie să scădem pe cele care au pe primul loc cifra 0. Deci obținem:

$$10! - 9! = 9 \cdot 9! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9^2 = 3\,265\,920$$

numere.

3. În câte moduri poate fi ordonată mulțimea $\{1, 2, 3, \ldots, 2n\}$ astfel încât fiecare număr par să aibă rang par?

R: Fiind n locuri de rang par, rezultă că numerele pare de la 1 la $2n$, care sunt tot în număr de n, se pot așeza pe locuri de rang par în $n!$ moduri. Fiecărui astfel de mod de aranjare a numerelor pare îi corespund $n!$ moduri de aranjare a numerelor impare pe locuri de rang impar. De aceea numărul total al permutărilor de tipul cerut este egal cu $n! \cdot n! = (n!)^2$.

4.1. Fie dată o mulţime A cu n elemente. Dacă $m \le n$, atunci se pot forma diferite mulţimi ordonate cu câte m elemente fiecare, în care intră numai elemente ale mulţimii A. De exemplu, din elementele mulţimii $\{a, b, c, d\}$ se pot constitui 12 mulţimi ordonate, având câte două elemente fiecare:

$$\begin{array}{l}(a, b), (a, c), (a, d),\\ (b, a), (b, c), (b, d),\\ (c, a), (c, b), (c, d),\\ (d, a), (d, b), (d, c).\end{array}$$

Mulţimile ordonate care se formează cu elementele unei submulţimi oarecare a unei mulţimi finite A se numesc *submulţimi ordonate* ale lui A sau *aranjamente*. Mai precis:

Dacă A este o mulţime cu n elemente, atunci fiecare submulţime ordonată a lui A, având k elemente, unde $0 \le k \le n$, *se numeşte aranjament de n elemente luate câte k.*

Observăm că două aranjamente de n elemente luate câte k se deosebesc prin *natura* elementelor ori prin *ordinea* lor. Numărul aranjamentelor de n elemente luate câte k se notează A_n^k şi se citeşte „aranjamente de n luate câte k".

Din exemplul de mai înainte rezultă:

$$A_4^2 = 12.$$

Ne propunem, în continuare, să găsim o formulă pentru calculul numărului A_n^k.

Observăm că $A_n^1 = n$.

Într-adevăr, un element din cele n elemente poate fi ales în n moduri, iar cu acest element ales se formează o singură mulţime ordonată.

Formula care exprimă A_n^k în funcţie de n şi k, este dată de următoarea teoremă:

Teorema 2. Dacă n şi k sunt numere naturale astfel încât $0 < k < n$, atunci:

$$A_n^k = n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1). \qquad (1)$$

Demonstraţie. Să arătăm mai întâi că $A_n^{k+1} = (n-k)A_n^k$. Într-adevăr, ca să repartizăm oricare $k+1$ elemente, luate din n elemente date, pe $k+1$ locuri, se pot lua mai întâi oricare k elemente şi aranja pe primele k locuri. Aceasta se poate face în A_n^k moduri. În fiecare din aceste cazuri rămân $(n-k)$ elemente. Oricare din aceste elemente se poate pune pe al $(k+1)$-lea loc. Astfel, în fiecare din cele A_n^k moduri de aranjare a elementelor pe primele k locuri, obţinem $(n-k)$ posibilităţi prin care al $(k+1)$-lea loc este ocupat de unul din cele $(n-k)$ elemente rămase. Prin urmare, avem $A_n^{k+1} = (n-k)A_n^k$.

Având în vedere că $A_n^1 = n$, deducem succesiv:

$$A_n^2 = n(n-1),\ A_n^3 = n(n-1)(n-2),$$
$$A_n^k = n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1).$$

Să dăm o altă formă formulei (1). Produsul $n(n-1)\ldots(n-k+1)$ se poate scrie sub forma:

$$\frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)(n-k)\ldots 2\cdot 1}{(n-k)\ldots 2\cdot 1},$$

adică sub forma $\frac{n!}{(n-k)!}$. Deci

$$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}. \qquad (2)$$

Pentru $k = 0$, formula (2) dă

$$A_n^0 = 1.$$

Acest lucru este adevărat deoarece orice mulţime conţine mulţimea vidă, despre care am convenit s-o considerăm ordonată într-un singur mod.

Pentru $k = n$, formula (2) dă

$$A_n^n = n! = P_n.$$

Aşadar, formulele (1) şi (2) sunt adevărate pentru orice k, astfel încât $0 \le k \le n$.

Exemple

1. În câte moduri pot fi aşezaţi 4 elevi pe 25 de locuri?

R: Numărul căutat este egal cu:

$$A_{25}^4 = 25\cdot 24\cdot 23\cdot 22 = 303\ 600.$$

2. Câte numere naturale diferite se pot forma cu cifrele 0, 1, 2, 3, 4, dacă în fiecare astfel de număr orice cifră intră cel mult o dată.

R: Cu 5 cifre se pot forma $A_5^5 = 5!$ aranjamente diferite. Dar aranjamentele care încep cu 0, în număr de A_4^4, dau numere de 4 cifre. Aşadar sunt

$$A_5^5 - A_4^4 = 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1 - 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1 = 96$$

numere cu 5 cifre. Numărul numerelor cu 4 cifre care se pot forma cu cifrele 0, 1, 2, 3, 4, este egal cu A_5^4, din care scădem numărul aranjamentelor care încep cu 0, care este egal cu A_4^3. Deci numere cu 4 cifre sunt în număr de

$$A_5^4 - A_4^3 = 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2 - 4\cdot 3\cdot 2 = 96.$$

În mod analog, numărul numerelor diferite de 3 cifre, 2 cifre şi o cifră va fi, respectiv: $A_5^3 - A_4^2 = 48$, $A_5^2 - A_4^1 = 16$ şi $A_4^1 = 4$.

Deci se pot forma 260 numere.

4.2. *Aplicaţie la numărul funcţiilor injective şi bijective*

Să notăm $N_m = \{1, 2, ..., m\}$. Să presupunem că B este o mulţime cu n elemente ($m \leq n$). Atunci fiecărei funcţii injective $f : N_m \to B$ îi corespunde o submulţime ordonată a lui B, care este formată din elementele $b_1 = f(1)$, $b_2 = f(2)$, ..., $b_m = f(m)$ (toate aceste elemente sunt diferite între ele, după injectivitatea funcţiei f). Invers, fiecare submulţime ordonată, având m elemente, a lui B, defineşte o funcţie injectivă f de la N_m la B, prin care $f(k) = b_k$.

Este clar că în loc de N_m se poate lua orice mulţime A cu m elemente.

Astfel, numărul funcţiilor injective definite pe o mulţime A cu m elemente cu valori într-o mulţime B cu n elemente ($m \leq n$), este egal cu numărul submulţimilor ordonate, având câte m elemente, ale lui B, adică cu A_n^m.

Dacă $m = n$, adică A şi B au acelaşi număr n de elemente, atunci orice funcţie $f : A \to B$ care este injectivă, este neapărat bijectivă.

Rămâne de arătat că f este surjectivă. Să presupunem prin absurd că f nu este surjectivă. Deoarece f este injectivă, adică la elemente diferite din mulţimea A corespund prin f elemente diferite din mulţimea B, rezultă că mulţimea $f(A) =$ $= \{f(x) \mid x \in A\}$ are n elemente. Deoarece f nu este surjectivă, există un element $b \in B$ astfel încât $f(a) \neq b$ pentru orice $a \in A$. Deci $b \notin f(A)$ şi astfel $f(A)$ are mai puţin de n elemente; contradicţie. Această contradicţie arată că f este neapărat surjectivă. Deci f este injectivă şi surjectivă, adică este bijectivă.

Având în vedere cele de mai sus, rezultă că numărul funcţiilor bijective definite pe o mulţime A cu n elemente cu valori într-o mulţime B tot cu n elemente este egal cu $A_n^n = P_n$, adică $n!$.

În particular, dacă $A = B$, rezultă că numărul funcţiilor bijective definite pe o mulţime cu n elemente cu valori în ea însăşi este egal cu numărul permutărilor mulţimii A, adică $P_n = n!$.

Din acest motiv, de obicei, o funcţie bijectivă definită pe o mulţime cu valori în ea însăşi se numeşte permutare a acestei mulţimi.

5.1. Fie mulţimea $A = \{a, b, c\}$ şi să considerăm toare submulţimile sale. Acestea sunt:

1) mulţimea vidă: $\varnothing$;
2) submulţimi având fiecare câte un element: $\{a\}$, $\{b\}$, $\{c\}$;
3) submulţimi având fiecare câte două elemente: $\{a, b\}$, $\{a, c\}$, $\{b, c\}$;
4) mulţimea totală: $\{a, b, c\}$.

Aşadar, mulţimea $A = \{a, b, c\}$ are opt submulţimi, dintre care: trei submulţimi cu câte un element, trei submulţimi cu câte două elemente, o submulţime cu trei elemente şi mulţimea vidă.

În continuare vom rezolva următoarea problemă:

Fiind dată o mulţime finită cu n elemente, să se calculeze numărul submulţimilor sale având fiecare câte k elemente.

Dacă A este o mulţime cu n elemente, atunci fiecare submulţime a lui A având k elemente, unde $0 \leq k \leq n$, *se numeşte combinare de n elemente luate câte k.*

Numărul combinărilor de n elemente luate câte k se notează C_n^k şi se citeşte „combinări de n luate câte k" *.

Din exemplul de mai înainte, rezultă: $C_3^0 = 1$, $C_3^1 = 3$, $C_3^2 = 3$, $C_3^3 = 1$, iar $C_3^0 + C_3^1 + C_3^2 + C_3^3 = 8 = 2^3$ (acesta este numărul tuturor submulţimilor mulţimii $\{a, b, c\}$).

Ne propunem în continuare să găsim o formulă pentru calculul numărului C_n^k.

Observăm că $C_n^0 = 1$, deoarece fiecare mulţime A are numai o submulţime fără nici un element, şi anume mulţimea vidă. Apoi, $C_n^1 = n$ deoarece o mulţime cu n elemente $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ are exact n submulţimi cu un singur element, adică submulţimile de forma $\{a_1\}, \{a_2\}, \ldots, \{a_n\}$. Formula care exprimă C_n^k în funcţie de n şi k este dată de următoarea teoremă:

T e o r e m a 3. Dacă n şi k sunt numere naturale astfel încât $0 \leq k \leq n$, atunci:

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{k!}. \qquad (1)$$

Demonstraţie. Fie A o mulţime de n elemente. Să considerăm toate submulţimile mulţimii A care au k elemente. Ordonăm fiecare dintre aceste submulţimi în toate modurile posibile. Obţinem astfel toate submulţimile ordonate ale lui A care au câte k elemente. Numărul lor, după cum ştim, este A_n^k. Dar cum numărul tuturor submulţimilor lui A având k elemente este egal cu C_n^k, iar fiecare din acestea se pot ordona în P_k moduri, rezultă că $A_n^k = C_n^k \cdot P_k$. Din această egalitate rezultă că: $C_n^k = \frac{A_n^k}{P_k}$.

Înlocuind în această formulă expresiile $A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$, $P_k = k!$, obţinem:

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!},$$

ceea ce se mai poate scrie $C_n^k = \frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{k!}$.

De exemplu, $C_{25}^4 = \frac{25\cdot 24\cdot 23\cdot 22}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} = 25\cdot 23\cdot 22 = 12\,650.$

---

* Numărul C_n^k se mai notează $\binom{k}{n}$.

Exemple

1. În câte moduri se poate alcătui o comisie formată din 5 membri aleşi din 9 persoane?

R: Pentru a avea toate cazurile posibile, trebuie să considerăm toate submulţimile, formate din 5 elemente, ale unei mulţimi formate din 9 elemente. Numărul căutat este

$$C_9^5=\frac{9\cdot 8\cdot 7\cdot 6\cdot 5}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}=126.$$

2. La un turneu de şah au participat n şahişti şi fiecare 2 şahişti s-au întâlnit o dată. Câte partide s-au jucat în turneu?

R: Numărul partidelor este egal cu numărul submulţimilor formate din câte două elemente ale unei mulţimi cu n elemente, adică

$$C_n^2=\frac{n(n-1)}{2}.$$

3. Să se găsească numărul diagonalelor unui poligon convex cu n laturi.

R: Vârfurile poligonului formează o mulţime de n puncte în plan, necoliniare câte 3. Numărul diagonalelor şi al laturilor poligonului este egal cu numărul submulţimilor formate din câte două elemente ale unei mulţimi cu n elemente, adică

$$C_n^2=\frac{n(n-1)}{2}.$$

Scăzând cele n laturi din acest număr, obţinem:

$$\frac{n(n-1)}{2}-n=\frac{n(n-3)}{2},$$

care reprezintă numărul diagonalelor unui poligon convex cu n laturi.

4. În câte puncte se intersectează diagonalele unui poligon convex cu n laturi, dacă oricare trei dintre ele nu sunt concurente?

R: Fiecărui punct de intersecţie a două diagonale îi corespund 4 vârfuri ale poligonului, iar la oricare 4 vârfuri ale poligonului le corespunde un punct de intersecţie (punctul de intersecţie a diagonalelor patrulaterului cu vârfurile în cele 4 puncte). De aceea, numărul tuturor punctelor de intersecţie este egal cu numărul posibilităţilor de a alege 4 vârfuri din cele n vârfuri, adică:

$$C_n^4=\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}=\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{24}.$$

5.2. Câteva proprietăţi ale numerelor C_n^k

Numerele C_n^k au o serie de proprietăţi importante. Ele exprimă diferite relaţii între submulţimile unei mulţimi. Aceste proprietăţi se pot demonstra direct din formula pentru C_n^k. Mai instructive sunt, însă, demonstraţiile bazate pe raţionamente cu mulţimi.

1° *Formula combinărilor complementare.* Dacă $0 \le k \le n$, atunci este adevărată egalitatea:

$$C_n^k = C_n^{n-k}. \tag{1}$$

Demonstraţie. Cu ajutorul formulei pentru C_n^k, avem:

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n!}{(n-k)![n-(n-k)]!} = C_n^{n-k}.$$

Sensul acestei afirmaţii este următorul: fie A o mulţime cu n elemente. Fiecărei submulţimi X cu k elemente a lui A îi asociem o submulţime bine determinată, cu $(n - k)$ elemente, a mulţimii A, şi anume CX (complementara lui X). Prin această asociere, unei submulţimi cu $(n - k)$ elemente îi corespunde o singură submulţime cu k elemente. Aşadar, numărul submulţimilor cu k elemente ale lui A este egal cu numărul submulţimilor sale cu $(n - k)$ elemente. Această afirmaţie se exprimă, de altfel, prin egalitatea (1).

2° *Pentru orice număr natural $n \ge 0$ este adevărată egalitatea*

$$C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \ldots + C_n^n = 2^n. \tag{2}$$

Demonstraţie. Suma din membrul stâng al egalităţii reprezintă tocmai numărul tuturor submulţimilor unei mulţimi cu n elemente. Egalitatea (2) rezultă din teorema următoare:

T e o r e m a 4. Numărul tuturor submulţimilor unei mulţimi formate din n elemente este egal cu 2^n.

Demonstraţie. Vom demonstra prin metoda inducţiei matematice. Să notăm cu $P(n)$ afirmaţia teoremei.

1) Afirmaţia $P(n)$ este adevărată pentru $n = 0$, deoarece mulţimea vidă are o singură submulţime, şi anume ea însăşi;
2) Să demonstrăm că $P(k) \Rightarrow P(k + 1)$, adică din aceea că o mulţime formată din k elemente are 2^k submulţimi rezultă că o mulţime formată din $k + 1$ elemente are 2^{k+1} submulţimi.

Fie o mulţime B formată din $k + 1$ elemente:

$$B = \{b_1, b_2, \ldots, b_k, b_{k+1}\}$$

şi fie următoarea submulţime a lui B:

$$B' = \{b_1, b_2, \ldots, b_k\}$$

Cum $P(k)$ este adevărată, rezultă că B' are 2^k submulţimi. Din fiecare submulţime a lui B' se obţine o nouă submulţime a lui B prin adăugarea elementului b_{k+1}, deci se obţin astfel încă 2^k submulţimi ale lui B. În total sunt deci $2^k + 2^k = 2^{k+1}$ submulţimi ale mulţimii B. Conform metodei inducţiei matematice, teorema este demonstrată.

3° *Formula de recurenţă pentru calculul numărului de combinări*

Pentru orice n şi k astfel încât $0 < k < n$, este adevărată egalitatea:

$$C_n^k = C_{n-1}^k + C_{n-1}^{k-1}. \tag{3}$$

Demonstrație. Cu ajutorul formulei pentru C_n^k, avem:

$$C_{n-1}^k = \frac{(n-1)!}{k!(n-k-1)!} = \frac{(n-1)!(n-k)}{k!(n-k)!},$$

$$C_{n-1}^{k-1} = \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!} = \frac{(n-1)!k}{k!(n-k)!}.$$

Înlocuind aceste valori în partea din dreapta a formulei (3), obținem:

$$C_{n-1}^k + C_{n-1}^{k-1} = \frac{(n-1)!(n-k)}{k!(n-k)!} + \frac{(n-1)!k}{k!(n-k)!} = \frac{(n-1)!(n-k+k)}{k!(n-k)!} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = C_n^k.$$

Egalitatea (3) este demonstrată.

Să dăm o altă demonstrație formulei (3) făcând un raționament cu mulțimi. Să considerăm un element oarecare a al unei mulțimi A formată din n elemente și toate submulțimile mulțimii A, formate din câte k elemente. Numărul acestor submulțimi este egal cu C_n^k. Submulțimile cu k elemente ale lui A le împărțim în două clase (disjuncte): submulțimi care conțin pe a și submulțimi care nu conțin pe a. Numărul submulțimilor din prima clasă este egal cu C_{n-1}^{k-1}, deoarece fiecare astfel de submulțime se obține prin adăugarea elementului a la o submulțime oarecare cu $(k-1)$ elemente, a mulțimii $A - \{a\}$. Numărul submulțimilor din a doua clasă este egal cu C_{n-1}^k, deoarece fiecare astfel de submulțime este o submulțime cu k elemente, a mulțimii $A - \{a\}$. Deci:

$$C_n^k = C_{n-1}^k + C_{n-1}^{k-1}.$$

4° *Triunghiul lui Pascal**

Formula (3) a punctului precedent permite să calculăm C_n^k, știind C_{n-1}^k și C_{n-1}^{k-1}. Cu ajutorul ei se pot calcula succesiv numerele C_n^k, mai întâi pentru $n = 0$, apoi pentru $n = 1$, pentru $n = 2$ ș.a.m.d. Valorile numerelor C_n^k le scriem sub forma unui tabel triunghiular care se numește *triunghiul lui Pascal*:

$$\begin{array}{ccccccccccccl}
 & & & & & 1 & & & & & & & n=0 \\
 & & & & 1 & & 1 & & & & & & n=1 \\
 & & & 1 & & 2 & & 1 & & & & & n=2 \\
 & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & & & n=3 \\
 & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & & & n=4 \\
1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 & & n=5
\end{array}$$

În linia a $(n + 1)$-a a tabelului sunt așezate în ordine numerele $C_n^0, C_n^1, C_n^2, \ldots, C_n^n$. Avem $C_n^0 = C_n^n = 1$, iar numerele rămase se calculează cu ajutorul formulei de recurență.

* *Blaise Pascal* (1623-1662), matematician francez.

Întrucât numerele C_{n-1}^{k} şi C_{n-1}^{k-1} sunt dispuse în acest tabel în linia precedentă celei în care se găseşte C_n^k, la stânga şi la dreapta acestuia, atunci pentru a obţine C_n^k adunăm numerele din linia precedentă care se găsesc la stânga şi la dreapta sa. De exemplu, numărul 10 din linia a şasea se obţine adunând numerele 4 şi 6 din linia precedentă.

5.3. O interpretare geometrică pentru numerele C_n^k.

Fie numerele naturale n şi k astfel încât $0 < k < n$. În continuare se va da o interpretare geometrică a numărului C_n^k.

Fie planul xOy şi punctul $M(k, n-k)$. Notăm cu M' şi M'' punctele de coordonate $(k, 0)$, respectiv $(0, n-k)$. Realizăm reţeaua din fig. 1, cu pătrate de latură 1 (adică un caroiaj al dreptunghiului $OM'MM''$ cu pătrate de latură 1). Acestea sunt în număr de $k \cdot (n-k)$. Vârfurile celor $k \cdot (n-k)$ pătrate se numesc nodurile reţelei. Numim *drum pe reţea* o linie frântă care uneşte două noduri oarecare ale reţelei şi este formată din laturi succesive ale pătratelor reţelei.

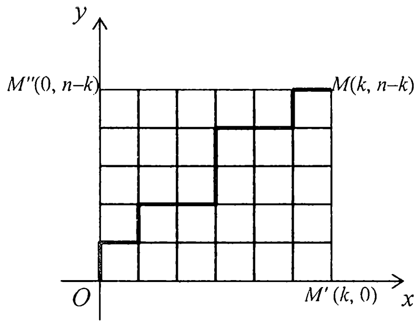


Fig. 1

Se pune problema determinării numărului drumurilor pe reţea *minimale* (cele mai scurte) care unesc punctul $O(0, 0)$ cu punctul $M(k, n-k)$.

Se observă că un drum pe reţea minimal care uneşte O cu M este format din $k + (n-k) = n$ segmente (de lungime 1), dintre care k segmente orizontale şi $(n-k)$ segmente verticale. Drumurile diferă între ele doar prin ordinea de succesiune a segmentelor orizontale şi verticale. De aceea, numărul tuturor acestor drumuri este egal cu numărul tuturor posibilităţilor prin care din n segmente se pot alege k segmente orizontale, adică C_n^k.

Remarcăm că n este suma coordonatelor punctului M.

S-ar putea considera numărul posibilităţilor de alegere a $(n-k)$ segmente verticale din cele n segmente şi atunci obţinem numărul C_n^{n-k}. Astfel, am stabilit geometric formula combinărilor complementare: $C_n^k = C_n^{n-k}$. Să demonstrăm în acelaşi fel formula de recurenţă pentru calculul numărului de combinări.

Să considerăm reţeaua din figura 2, pe care figurăm punctele $M_1(k, n-k-1)$ şi $M_2(k-1, n-k)$. Rezultă că numărul tuturor drumurilor minimale care unesc $O(0, 0)$ cu $M(k, n-k)$ este C_n^k. Toate aceste drumuri le împărţim în două clase (disjuncte): drumuri care trec prin punctul M_1 şi drumuri care trec prin punctul M_2.

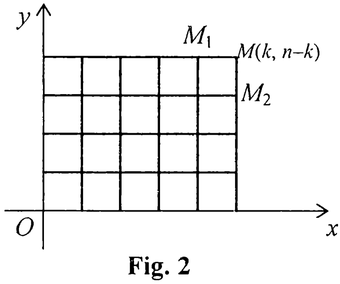


Fig. 2

Cum suma coordonatelor fiecăruia dintre punctele M_1 şi M_2 este $n-1$, rezultă că numărul drumurilor care trec prin M_1 este C_{n-1}^{k}, iar numărul drumurilor care trec prin M_2 este C_{n-1}^{k-1}, de unde rezultă:

$$C_n^k = C_{n-1}^k + C_{n-1}^{k-1}.$$

Permutări

Din elementele mulţimii A să se formeze toate permutările posibile, dacă:

a) $A = \{2\}$; c) $A = \{\alpha, \beta, \gamma\}$;

b) $A = \{4, 5\}$; d) $A = \{a, b, c, d\}$.

Să se simplifice expresiile:

a) $6! + 7!$; d) $\dfrac{n!}{(n-2)!}$;

b) $9! - 8!$; e) $\dfrac{(n-3)!}{(n-5)!}$;

c) $\dfrac{213!}{210!}$; f) $\dfrac{1}{n!} - \dfrac{1}{(n+2)!}$.

Să se rezolve ecuaţiile:

a) $\dfrac{(n+2)!}{n!} = 72$; b) $\dfrac{n!}{(n-4)!} = \dfrac{12n!}{(n-2)!}$; c) $\dfrac{1}{n!} - \dfrac{1}{(n+1)!} = \dfrac{n^3}{(n+2)!}$.

Să se rezolve inecuaţiile:

a) $\dfrac{(n-1)!}{(n-3)!} < 72$; b) $\dfrac{(n+2)!}{(n+1)(n+2)} < 1\,000$.

În câte moduri se pot aşeza pe un raft patru cărţi?

Un tren de persoane are zece vagoane. În câte moduri pot fi aşezate vagoanele pentru formarea trenului?

În câte moduri poate fi ordonată mulţimea $\{1, 2, \ldots, n\}$ astfel încât numerele 1, 2, 3 să stea la rând şi în ordine crescătoare?

Fie dată o mulţime A cu m elemente şi o mulţime B cu n elemente. Să se găsească numărul de permutări al mulţimii $A \cup B$, astfel încât primul element al unei astfel de permutări să fie din A, iar ultimul să fie din B, $A \cap B = \varnothing$.

Câte elemente trebuie să conţină o mulţime, astfel încât numărul permutărilor acestei mulţimi să fie cuprins între 500 şi 1 000?

Din cifrele 0, 1, 2, 3, 4, 5 se formează toate numerele cu şase cifre astfel încât în fiecare număr să nu fie cifre identice. Câte numere se pot obţine?

În câte moduri pot fi aşezate n persoane la o masă circulară?

Aranjamente

Să se scrie toate aranjamentele de câte 4 elemente ale mulţimii $\{a, b, c, d, e\}$.

Câte numere naturale nenule diferite se pot forma cu cifrele 0, 1, 2, 3, dacă în fiecare astfel de număr orice cifră intră cel mult o dată?

O grupă de studenţi trebuie să programeze patru examene în timp de 8 zile. În câte moduri se poate face aceasta? Dar dacă ultimul examen se va da în mod obligatoriu în ziua a opta?

Cei treizeci de elevi ai unei clase au schimbat fotografii între ei. Câte fotografii au fost necesare?

Să se calculeze:

a) $\dfrac{A_n^6 + A_n^5}{A_n^4}$; b) $\dfrac{A_{n+k}^{k+3} + A_{n+k}^{k+2}}{A_{n+k}^{k+1} - A_{n+k}^{k}}$; c) $\dfrac{(2n+1)!\,A_{2n}^{k}}{A_{2n-1}^{k-1}\cdot(2n-k)!}$.

Să se afle n, dacă:

a) $A_n^5 = 18A_{n-2}^4$; b) $\dfrac{A_n^{10} - A_n^8}{A_n^8} = 109$; c) $\dfrac{(n+2)!}{A_n^k\cdot(n-k)!} = 132$.

Ştiind că numărul aranjamentelor de n elemente luate câte k este egal cu de p ori numărul aranjamentelor de n elemente luate câte $k-2$, să se găsească n.

Combinări

Să se scrie toate submulţimile mulţimii A şi să se găsească numărul lor, dacă:

a) $A = \{3, 4\}$;
b) $A = \{\alpha, \beta, \gamma, \delta\}$.

În câte moduri, din 30 elevi, poate fi ales un comitet format din 3 elevi?

Fiind date n puncte, astfel încât oricare trei dintre ele nu sunt coliniare, să se găsească numărul dreptelor care se pot duce unind punctele două câte două.

Câte numere de câte patru cifre se pot forma astfel încât în fiecare număr o cifră să fie mai mare decât precedenta? Dar dacă fiecare cifră este mai mică decât precedenta?

În plan sunt date n puncte din care, în afară de k puncte care sunt situate pe aceeaşi dreaptă, oricare trei puncte nu sunt coliniare. Să se determine:

a) Prin câte drepte se pot uni aceste puncte?
b) Câte triunghiuri diferite, cu vârfurile în aceste puncte, există?

În câte moduri se pot forma echipe de câte 4 elevi şi un profesor, dacă sunt 20 elevi şi 3 profesori?

La 9 clase trebuie repartizaţi 3 profesori de matematică, fiecăruia repar-tizându-i-se câte 3 clase. În câte moduri se poate face repartizarea?

Să se calculeze:

a) C_{10}^8; c) C_{n+1}^{k+1}; e) C_{n-k}^{k+1};

b) C_{16}^{13}; d) $C_{100}^0 + C_{100}^{99}$; f) $C_{10}^9 + C_{10}^8$.

Să se afle n, dacă:

a) $C_n^4 = \dfrac{5n(n-3)}{6}$; c) $C_{4n+9}^{4(n+1)} = 5A_{4n+7}^3$;

b) $C_n^3 + C_n^4 = n(n-2)$; d) $C_{n+8}^{n+3} = 5A_{n+6}^3$.

Se dă o mulţime A care are n elemente. Împărţim toate submulţimile lui A în clase (disjuncte), punând în aceeaşi clasă toate submulţimile lui A care au acelaşi număr de elemente. Care din aceste clase este cea mai numeroasă?

Să se rezolve inecuaţiile:

a) $C_n^5 < C_n^6$; c) $C_{20}^{k-1} < C_{20}^k$;

b) $C_n^5 > C_n^7$; d) $C_{16}^{k-2} < C_{16}^k$.

Să se rezolve sistemele de inecuaţii:

a) $\begin{cases} A_x^y = 7A_x^{y-1} \\ 6C_x^y = 5C_x^{y+1} \end{cases}$; b) $\begin{cases} xC_{n-2}^{k-1} + \dfrac{n-1}{k-1}y = \dfrac{k}{n-1} \\ xC_{n-2}^{k-2} - \dfrac{n-1}{k}y = -\dfrac{k-1}{n-1} \end{cases}$;

Să se deducă egalităţile:

a) $C_n^k = C_{n-2}^k + 2C_{n-2}^{k-1} + C_{n-2}^{k-2}$;

b) $C_n^k = C_{n-3}^k + 3C_{n-3}^{k-1} + 3C_{n-3}^{k-2} + C_{n-3}^{k-3}$;

c) $C_9^9 + C_{10}^9 + C_{11}^9 + \ldots + C_{20}^9 = C_{21}^{10}$.

Din 11 persoane, dintre care 7 bărbaţi şi 4 femei, se formează o delegaţie alcătuită din 5 persoane, dintre care cel puţin două femei. În câte moduri se poate forma această delegaţie?

6.1. Binomul lui Newton

Dacă a şi b sunt numere, sunt bine cunoscute formulele:

$$(a+b)^1 = a+b$$
$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$
$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

De asemenea, se calculează fără dificultate

$$(a+b)^4 = (a+b)^2(a+b)^2 \text{ şi } (a+b)^5 = (a+b)^2(a+b)^3$$

şi se obţine

$$(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4,$$

$$(a+b)^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5.$$

Coeficienţii membrilor din dreapta ai acestor formule sunt egali cu numerele din linia corespunzătoare a triunghiului lui Pascal (vezi §4).

Vom arăta că pentru orice număr natural n este adevărată formula

$$(a+b)^n = C_n^0a^n + C_n^1a^{n-1}b + \ldots + C_n^ma^{n-m}b^m + \ldots + C_n^nb^n, \qquad (1)$$

care se numeşte *formula lui Newton*. Membrul drept al egalităţii (1) se numeşte *dezvoltarea binomului la putere.*

Vom demonstra formula (1) prin metoda inducţiei matematice.

Notăm cu $P(n)$ egalitatea (1), pentru un n dat.

1) $P(1)$ este adevărată, deoarece

$$(a+b)^1 = a+b = C_1^0 a + C_1^1 b.$$

2) Rămâne să arătăm că pentru orice număr natural $k \geq 1$, avem $P(k) \Rightarrow P(k+1)$.

Fie deci adevărată $P(k)$, adică:

$$(a+b)^k = C_k^0 a^k + C_k^1 a^{k-1} b + \ldots + C_k^m a^{k-m} b^m + \ldots + C_k^k b^k.$$

Să arătăm că este adevărată $P(k+1)$. Într-adevăr, avem

$$(a+b)^{k+1} = (a+b)^k (a+b) = (C_k^0 a^k + C_k^1 a^{k-1} b + \ldots + C_k^m a^{k-m} b^m + \ldots + C_k^k b^k)(a+b) =$$

$$= C_k^0 a^{k+1} + C_k^1 a^k b + \ldots + C_k^{m+1} a^{k-m} b^{m+1} + \ldots + C_k^k a b^k + C_k^0 a^k b + \ldots + C_k^m a^{k-m} b^{m+1} + \ldots +$$

$$+ C_k^{k-1} a b^k + C_k^k b^{k+1} = C_k^0 a^{k+1} + (C_k^0 + C_k^1) a^k b + \ldots + (C_k^m + C_k^{m+1}) a^{k-m} b^{m+1} +$$

$$+ (C_k^{k-1} + C_k^k) a b^k + C_k^k b^{k+1}.$$

Deoarece

$$C_k^0 = 1 = C_{k+1}^0,\quad C_k^0 + C_k^1 = C_{k+1}^1, \ldots,\quad C_k^m + C_k^{m+1} = C_{k+1}^{m+1},\ \ldots,\ C_k^{k-1} + C_k^k = C_{k+1}^k,\ C_k^k = 1 = C_{k+1}^{k+1},$$

obţinem:

$$(a+b)^{k+1} = C_{k+1}^0 a^{k+1} + C_{k+1}^1 a^k b + \ldots + C_{k+1}^{m+1} a^{k-m} b^{m+1} + \ldots + C_{k+1}^k a b^k + C_{k+1}^{k+1} b^{k+1}.$$

Folosind metoda inducţiei matematice, urmează că $P(n)$ este adevărată pentru orice număr natural n. Formula lui Newton este astfel demonstrată.

Exemplu

$$(a+b)^6 = C_6^0 a^6 + C_6^1 a^5 b + C_6^2 a^4 b^2 + C_6^3 a^3 b^3 + C_6^4 a^2 b^4 + C_6^5 a b^5 + C_6^6 b^6$$

R: Avem:

$$C_6^0 = 1 = C_6^6;\quad C_6^1 = \frac{6}{1} = 6;\quad C_6^2 = \frac{6 \cdot 5}{1 \cdot 2} = 15;\quad C_6^3 = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 20.$$

$C_6^4 = C_6^2 = 15$ (fiind combinări complementare).

$C_6^5 = C_6^1 = 6$ (fiind combinări complementare).

Deci:

$(a+b)^6 = a^6 + 6a^5 b + 15a^4 b^2 + 20a^3 b^3 + 15a^2 b^4 + 6ab^5 + b^6.$

Coeficienţii $C_n^0, C_n^1, C_n^2, \ldots, C_n^n$ din formula lui Newton se numesc *coeficienţi binomiali*. Aceştia sunt, evident, în număr de $n+1$.

Asupra formulei lui Newton facem câteva observaţii de bază.

1) În dezvoltarea $(a+b)^n$ după formula lui Newton, sunt $n+1$ termeni (numărul termenilor fiind egal cu numărul coeficienţilor binomiali $C_n^0, C_n^1, C_n^2, \ldots, C_n^n$).

2) În formula lui Newton, exponenţii puterilor lui a descresc de la n la 0, iar exponenţii puterilor lui b cresc de la 0 la n. Suma exponenţilor puterilor lui a şi lui b în orice termen al dezvoltării este egală cu n, adică este egală cu exponentul puterii binomului.

3) Coeficienţii binomiali din dezvoltare egal depărtaţi de termenii extremi ai dezvoltării sunt egali între ei, deoarece $C_n^m = C_n^{n-m}$ (fiind combinări complementare).

4) Dacă n este un număr par (adică $n = 2k$) atunci coeficientul binomial al termenului din mijloc al dezvoltării (adică C_n^k) este cel mai mare. Dacă n este impar (adică $n = 2k + 1$), atunci coeficienţii binomiali ai celor doi termeni de la mijloc sunt egali între ei (adică $C_n^k = C_n^{k+1}$) şi sunt cei mai mari.

5) Termenul $C_n^k a^{n-k} b^k$, adică al $(k + 1)$-lea termen din egalitatea (1), se numeşte termenul de rang $(k + 1)$ şi se notează cu T_{k+1}. Aşadar,

$$T_{k+1} = C_n^k a^{n-k} b^k,\ k = 0, 1, 2, \dots, n \tag{2}$$

Termenul T_{k+1} se mai numeşte termenul general al dezvoltării, deoarece dând lui k valori de la 0 la n, găsim toţi termenii dezvoltării.

De exemplu, $T_1 = C_n^0 a^n$ este primul termen, $T_2 = C_n^1 a^{n-1} b$ este al doilea termen, $T_3 = C_n^2 a^{n-2} b^2$ este al treilea termen etc.

Se poate stabili şi o relaţie de recurenţă între termenii succesivi ai dezvoltării (1).

Având în vedere că

$$C_n^{k+1} = \frac{n-k}{k+1} C_n^k,$$

rezultă că

$$T_{k+2} = C_n^{k+1} a^{n-k-1} b^{k+1} = \frac{n-k}{k+1} C_n^k a^{n-k} b^k \frac{b}{a} = \frac{n-k}{k+1} \cdot \frac{b}{a} \cdot T_{k+1}.$$

Deci,

$$T_{k+2} = \frac{n-k}{k+1} \cdot \frac{b}{a} \cdot T_{k+1}. \tag{3}$$

Observaţie. Să se facă distincţie între coeficientul unui termen al dezvoltării după formula lui Newton şi coeficientul binomial al aceluiaşi termen.

De exemplu, în dezvoltarea

$$(a + 2b)^4 = a^4 + 8a^3 b + 24a^2 b^2 + 32\, ab^3 + 16b^4$$

coeficientul celui de-al patrulea termen al dezvoltării este 32, iar coeficientul său binomial este $C_4^3 = 4$.

Exemple

1. Să se găsească termenul al cincilea al dezvoltării

$$\left(\sqrt{x} + \sqrt[3]{x^2}\right)^{10}$$

R: Termenul căutat îl găsim folosind formula (2):

$$T_5 = C_{10}^4 \left(\sqrt{x}\right)^{10-4} \left(\sqrt[3]{x^2}\right)^4 = 210 x^5 \sqrt[3]{x^2}.$$

2. Să se găsească rangul termenului general care conţine pe x^7 din dezvoltarea $\left(\sqrt[3]{x^2}+\frac{1}{2}\sqrt{x}\right)^{12}$.

R: Termenul căutat îl găsim folosind formula (2):

$$T_{k+1}=C_{12}^{k}\left(\sqrt[3]{x^2}\right)^{12-k}\left(\frac{1}{2}\sqrt{x}\right)^{k}.$$

Punem condiţia ca în T_{k+1} să apară x^7, adică $\left(\sqrt[3]{x^2}\right)^{12-k}\left(\sqrt{x}\right)^{k}=x^7$. Deci $x^{\frac{2(12-k)}{3}}x^{\frac{k}{2}}=x^7$, de unde $\frac{2(12-k)}{3}+\frac{k}{2}=7$, care dă $k=6$.

3. Să se determine al 12-lea termen al dezvoltării $\left(x-\frac{1}{\sqrt{5x}}\right)^{n}$, coeficientul binomial al celui de-al treilea termen fiind egal cu 105.

R: Coeficientul binomial al termenului al treilea este C_n^2. Avem $C_n^2=105$, adică $\frac{n(n-1)}{2}=105$, de unde $n_1 = 15$ şi $n_2 = -14$. Cum n este pozitiv, rezultă că $n = 15$. Deci

$$T_{12}=(-1)^{11}C_{15}^{11}x^{11}\left(\frac{1}{\sqrt{5x}}\right)^{4}=-C_{15}^{4}x^{11}\frac{1}{5^2x^2}=-\frac{15\cdot14\cdot13\cdot12}{1\cdot2\cdot3\cdot4}\cdot\frac{1}{5^2}x^9=-\frac{273}{5}x^9.$$

4. Să se găsească rangul celui mai mare termen în dezvoltarea $(1 + 0{,}1)^{100}$.

R: După formula (3) rezultă $\frac{T_{k+2}}{T_{k+1}}=\frac{100-k}{k+1}\cdot\frac{0{,}1}{1}=\frac{100-k}{10(k+1)}$. Avem că $\frac{100-k}{10(k+1)}\geq 1$ dacă şi numai dacă $k\leq 8\frac{2}{11}$. Deci pentru $k \leq 8$, rezultă $\frac{T_{k+2}}{T_{k+1}}>1$, iar pentru $k \geq 9$, rezultă $\frac{T_{k+2}}{T_{k+1}}<1$. Aşadar, termenii dezvoltării cresc până la T_{10} şi după aceea descresc, adică T_{10} este cel mai mare termen al dezvoltării.

6.2. Aplicaţii. Identităţi în calculul cu combinări

Numerele C_n^k, $0 \leq k \leq n$, au o serie de proprietăţi interesante. Indicăm mai jos câteva dintre acestea şi stabilim o serie de identităţi pe care le verifică coeficienţii binomiali.

Amintim mai întâi următoarele formule:

$$C_n^k = C_n^{n-k}, \tag{1}$$

$$C_{n+1}^k = C_n^k + C_n^{k-1}, \tag{2}$$

$$C_n^0 + C_n^1 + \ldots + C_n^n = 2^n, \tag{3}$$

care au fost stabilite în paragraful 4 din acest capitol.

Observăm că egalitatea (3) se obţine, evident, şi din formula binomului lui Newton,

$$(a+b)^n = C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1} b + C_n^2 a^{n-2} b^2 + \ldots + C_n^n b^n$$

pentru $a = b = 1$.

Dacă în formula binomului lui Newton se pune $a = 1$, $b = -1$, se obţine egalitatea:

$$C_n^0 - C_n^1 + C_n^2 - \ldots + (-1)^n C_n^n = 0. \qquad (4)$$

Pe baza egalităţilor (3) şi (4) rezultă

$$C_n^0 + C_n^2 + C_n^4 + \ldots = C_n^1 + C_n^3 + C_n^5 + \ldots = 2^{n-1}. \qquad (5)$$

Deci, *suma coeficienţilor binomiali ai termenilor de rang impar este egală cu suma coeficienţilor binomiali ai termenilor de rang par.*

Vom stabili în continuare alte câteva formule combinatorii importante. Uneori, pentru demonstraţia anumitor egalităţi este util să se aibă în vedere interpretarea geometrică a numărului C_n^k, care a fost dată în paragraful 4 din acest capitol.

1. Să se demonstreze că

$$C_n^k = C_{n-1}^{k-1} + C_{n-2}^{k-1} + \ldots + C_{k-1}^{k-1}. \qquad (6)$$

Demonstraţie. Folosind egalitatea (2), scriem şirul următor de egalităţi:

$$\begin{aligned} C_n^k &= C_{n-1}^k + C_{n-1}^{k-1}, \\ C_{n-1}^k &= C_{n-2}^k + C_{n-2}^{k-1}, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ C_{k+1}^k &= C_k^k + C_k^{k-1}, \\ C_k^k &= C_{k-1}^{k-1} \ (=1). \end{aligned}$$

Adunând membru cu membru aceste egalităţi, după reducerea termenilor asemenea, obţinem egalitatea (6).

2. Să se demonstreze că

$$C_n^0 C_m^k + C_n^1 C_m^{k-1} + \ldots + C_n^k C_m^0 = C_{n+m}^k. \qquad (7)$$

Demonstraţia 1. Toate submulţimile cu k elemente ale mulţimii

$$A = \{a_1, \ldots, a_n, a_{n+1}, \ldots, a_{n+m}\},$$

al căror număr este C_{n+m}^k, le împărţim în $k+1$ clase $T_1, T_2, \ldots, T_{k+1}$ astfel: T_i este formată din toate submulţimile lui A cu k elemente, în componenţa cărora intră exact i elemente cu indici $\le n$. Fiecare submulţime din clasa T_i se poate obţine reunind o submulţime oarecare cu i elemente ale mulţimii $\{a_1, \ldots, a_n\}$ cu o submulţime oarecare cu $(k-i)$ elemente ale mulţimii $\{a_{n+1}, \ldots, a_{n+m}\}$. Deci T_i este formată din $C_n^i C_m^{k-i}$ submulţimi. Cum $T_1, T_2, \ldots, T_{k+1}$ sunt disjuncte două câte două, iar reuniunea tuturor este totalitatea submulţimilor cu k elemente ale mulţimii A, rezultă:

$$C_{n+m}^k = \sum_{i=0}^{k} C_n^i C_m^{k-i}.$$

Demonstrația 2. Să considerăm egalitatea:

$$(1+x)^n(1+x)^m=(1+x)^{n+m}$$

Folosind formula binomului lui Newton, deducem coeficientul lui x din membrul drept al acestei egalități care este

$$C_n^0C_m^k+C_n^1C_m^{k-1}+\ldots+C_n^kC_m^0.$$

Cum coeficienții lui x^k din cei doi membri ai relației precedente sunt egali, rezultă egalitatea (7).

Dacă în (7) punem $k=n=m$ și ținem seama de formula (1), rezultă

$$\left(C_n^0\right)^2+\left(C_n^1\right)^2+\ldots+\left(C_n^n\right)^2=C_{2n}^n. \tag{8}$$

3. Să se demonstreze că

$$C_n^0+C_n^3+C_n^6+\ldots=\frac{1}{3}\left(2^n+2\cos\frac{n\pi}{3}\right). \tag{9}$$

Demonstrație. Fie

$$\varepsilon=\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}=\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}$$

o rădăcină cubică complexă a unității. Avem deci $\varepsilon^3=1$ și $\varepsilon^2+\varepsilon+1=0$.

Punând în formula binomului lui Newton $a=1$, $b=1$, apoi $a=1$, $b=\varepsilon$ și, în sfârșit, $a=1$, $b=\varepsilon^2$, obținem:

$$2^n=C_n^0+C_n^1+C_n^2+C_n^3+C_n^4+\ldots,$$
$$(1+\varepsilon)^n=C_n^0+\varepsilon C_n^1+\varepsilon^2C_n^2+C_n^3+\varepsilon C_n^4+\ldots,$$
$$(1+\varepsilon^2)^n=C_n^0+\varepsilon^2C_n^1+\varepsilon C_n^2+C_n^3+\varepsilon^2C_n^4+\ldots.$$

Adunând termen cu termen aceste trei egalități și împărțind la 3, obținem în membrul drept $C_n^0+C_n^3+C_n^6+\ldots$, iar în membrul stâng

$$\frac{1}{3}\left[2^n+(1+\varepsilon)^n+(1+\varepsilon^2)^n\right]$$

Ținând seama de faptul că

$$1+\varepsilon=\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}=\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\ \text{și}$$
$$1+\varepsilon^2=\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}=\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right),$$

obținem

$$\frac{1}{3}\left[2^n+(1+\varepsilon)^n+(1+\varepsilon^2)^n\right]=\frac{1}{3}\left(2^n+2\cos\frac{n\pi}{3}\right),$$

de unde rezultă egalitatea (9).

Lăsăm ca exercițiu demonstrarea următoarelor două egalități:

$$C_n^1 + C_n^4 + C_n^7 + \ldots = \frac{1}{3}\left[2^n + 2\cos\frac{(n-2)\pi}{3}\right], \tag{9'}$$

$$C_n^2 + C_n^5 + C_n^8 + \ldots = \frac{1}{3}\left[2^n + 2\cos\frac{(n-4)\pi}{3}\right]. \tag{9''}$$

4. Fie $u \in \mathbb{N}^*$ și formula lui Moivre

$$(\cos t + \mathrm{i}\sin t)^n = \cos nt + \mathrm{i}\ \sin nt.$$

Dezvoltând membrul întâi după formula binomului lui Newton, obținem

$$(\cos t + \mathrm{i}\sin t)^n = \cos^n t + \mathrm{i}\, C_n^1 \cos^{n-1} t\ \sin t + \mathrm{i}^2 C_n^2 \cos^{n-2} t\ \sin^2 t + \ldots + \mathrm{i}^n C_n^n \sin^n t.$$

Având în vedere puterile numărului i, putem scrie

$$(\cos t + \mathrm{i}\ \sin t)^n = \cos^n t - C_n^2 \cos^{n-2} t \sin^2 t + C_n^4 \cos^{n-4} t \sin^4 t + \ldots +$$

$$+ \mathrm{i}(C_n^1 \cos^{n-1} t \sin t - C_n^3 \cos^{n-3} t \sin^3 t + C_n^5 \cos^{n-5} t \sin^5 t - \ldots)$$

Atunci din formula lui Moivre, obținem

$$\cos nt = \cos^n t - C_n^2 \cos^{n-2} t \sin^2 t + C_n^4 \cos^{n-4} t \sin^4 t - \ldots$$

$$\sin nt = C_n^1 \cos^{n-1} t \sin t - C_n^3 \cos^{n-3} t \sin^3 t + C_n^5 \cos^{n-5} t \sin^5 t - \ldots \tag{10}$$

De aici, rezultă

$$\mathrm{tg} nt = \frac{C_n^1 \cos^{n-1} t \sin t - C_n^3 \cos^{n-3} t \sin^3 t + C_n^5 \cos^{n-5} t \sin^5 t - \ldots}{\cos^n t - C_n^2 \cos^{n-2} t \sin^2 t - C_n^4 \cos^{n-4} t \sin^4 t - \ldots}$$

sau împărțind și numărătorul și numitorul fracției din membrul al doilea cu $\cos^n t$,

$$\mathrm{tg} nt = \frac{C_n^1 \mathrm{tg} t - C_n^3 \mathrm{tg}^3 t + C_n^5 \mathrm{tg}^5 t - \ldots}{1 - C_n^1 \mathrm{tg}^2 t + C_n^4 \mathrm{tg}^4 t - \ldots} \tag{11}$$

De asemenea, din formula (10) se obține

$$\mathrm{ctg} nt = \frac{\mathrm{ctg}^n t - C_n^2 \mathrm{ctg}^{n-2} t + C_n^4 \mathrm{ctg}^{n-4} t - \ldots}{C_n^1 \mathrm{ctg}^{n-1} t - C_n^3 \mathrm{ctg}^{n-3} t + C_n^5 \mathrm{ctg}^{n-5} t \ldots} \tag{12}$$

Formulele (10), (11) și (12) dau funcțiile trigonometrice ale unghiului nt ca expresii în care intervin funcțiile trigonometrice ale unghiului t.

De exemplu, să scriem funcțiile trigonometrice ale unghiului $5t$ ca expresii în care să intervină doar funcțiile trigonometrice ale unghiului t.

$$\sin 5t = 5\cos^4 t \mathrm{din} t - 10\cos^2 t \sin^3 t + \sin^5 t,$$

$$\cos 5t = \cos^5 t - 10\cos^3 t \sin^2 t + 5\cos t \sin^4 t,$$

$$\text{tg}5t = \frac{5\text{tg}t - 10\text{tg}^3 t + \text{tg}^5 t}{1 - 10\text{tg}^2 t + 5\text{tg}^4 t},$$

$$\text{ctg}5t = \frac{\text{ctg}^5 t - 10\text{ctg}^3 t - 5\text{ctg}t}{5\text{ctg}^5 t - 10\text{ctg}^2 t + 1}.$$

5. *Mica teoremă a lui Fermat*

Dacă p este un număr natural prim, iar n un număr natural oarecare, atunci $n^p - n$ se divide cu p.

Demonstrație. Într-adevăr, pentru $n = 0$, afirmația este adevărată. Să presupunem $k^p - k$ divizibil cu p şi să demonstrăm că numărul $(k + 1)^p - (k + 1)$ este divizibil cu p. Pentru aceasta, considerăm diferența

$$(k+1)^p - (k+1) - (k^p - k).$$

Dezvoltând după formula lui Newton $(k+1)^p$, avem:

$$(k+1)^p - (k+1) - (k^p - k) = (k+1)^p - k^p - 1 = C_p^1 k^{p-1} + C_p^2 k^{p-2} + \ldots + C_p^{p-1} k. \quad (1)$$

Însă pentru $1 \le j < p$ avem: $C_p^j = \dfrac{p(p-1)\ldots(p-j+1)}{1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot j}$.

Întrucât numărul p este prim, el nu se divide cu nici unul din numerele $1, 2, \ldots, j$ de la numitor. De aceea C_p^j se divide cu p pentru $1 \le j < p$. Dar atunci toți termenii din membrul drept al egalității (1) se divid cu p şi deci membrul stâng se divide cu p. Dar cum am presupus că $k^p - k$ se divide cu p, atunci şi $(k + 1)^p - (k + 1)$ se divide cu p.

Conform metodei inducției matematice, rezultă că $n^p - n$ se divide cu p pentru orice număr natural n.

Observație. Dacă p este un număr natural prim, iar n este un număr natural care nu este multiplu de p, atunci $n^{p-1} - 1$ se divide cu p. Acest enunț este o variantă sub care se întâlneşte adesea teorema de mai înainte.

Exemple

1. Deoarece 17 este număr prim, atunci $1979^{17} - 1979$ se divide cu 17.

2. Deoarece 97 este număr prim, iar 721 nu este multiplu de 97, atunci $721^{96} - 1$ se divide cu 97.

6.3. Suma puterilor asemenea ale primelor n numere naturale nenule

Fie $k \ge 1$ un număr natural şi să notăm cu

$$S_k = 1^k + 2^k + 3^k + \ldots + n^k.$$

În cele ce urmează, ne propunem să evaluăm această sumă. Mai întâi vom calcula câteva sume particulare, cum sunt S_1, S_2, S_3, care ne oferă o idee de calcul pentru cazul general.

1. Se verifică uşor prin inducţie matematică următoarea formulă care dă suma primelor n numere naturale, adică

$$S_1 = 1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

2. Să calculăm acum $S_2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2$, adică suma pătratelor primelor n numere naturale.

Să considerăm formula $(a+1)^3 = a^3 + 3a^2 + 3a + 1$.

Făcând succesiv pe a egal cu 1, 2, 3, ..., $n-1$, n, obţinem:

$$\begin{aligned}
&2^3 = 1^3 + 3 \cdot 1^2 + 3 \cdot 1 + 1,\\
&3^3 = 2^3 + 3 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2 + 1,\\
&4^3 = 3^3 + 3 \cdot 3^2 + 3 \cdot 3 + 1,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&n^3 = (n-1)^3 + 3(n-1)^2 + 3(n-1) + 1,\\
&(n+1)^3 = n^3 + 3n^2 + 3n + 1.
\end{aligned}$$

Adunând aceste relaţii, membru cu membru, după reducerea termenilor asemenea, se obţine:

$$(n+1)^3 = 1 + 3(1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2) + 3(1 + 2 + 3 + \ldots + n) + n \cdot 1$$

sau

$$(n+1)^3 = 1 + 3S_2 + 3S_1 + n,$$

de unde

$$3S_2 = (n+1)^3 - 3S_1 - (n+1).$$

Această formulă ne dă pe S_2 în funcţie de S_1. Dar dacă înlocuim S_1 dat de formula (1), după efectuarea calculelor se obţine

$$S_2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \tag{2}$$

3. Pentru a afla pe S_3,

$$S_3 = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3$$

(suma cuburilor primelor n numere naturale nenule) considerăm formula

$$(a+1)^4 = a^4 + 4a^3 + 6a^2 + 4a + 1.$$

Făcând succesiv pe a egal cu 1, 2, 3, ..., $n-1$, n, obţinem

$$\begin{aligned}
&2^4 = 1^4 + 4 \cdot 1^3 + 6 \cdot 1^2 + 4 \cdot 1 + 1,\\
&3^4 = 2^4 + 4 \cdot 2^3 + 6 \cdot 2^2 + 4 \cdot 2 + 1,\\
&4^4 = 3^4 + 4 \cdot 3^3 + 6 \cdot 3^2 + 4 \cdot 3 + 1,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&n^4 = (n-1)^4 + 4(n-1)^3 + 6(n-1)^2 + 4(n-1) + 1,\\
&(n+1)^4 = n^4 + 4n^3 + 6n^2 + 4n + 1.
\end{aligned}$$

Adunând aceste relaţii, membru cu membru, după reducerea termenilor asemenea, se obţine:

$$(n+1)^4 = 1 + 4S_3 + 6S_2 + 4S_1 + n,$$

de unde

$$4S_3 = (n+1)^4 - 6S_2 - 4S_1 - (n+1).$$

Această formulă ne dă pe S_3 în funcţie de S_1 şi S_2. Înlocuind S_1 şi S_2 date de formulele (1) şi (2), după efectuarea calculelor se obţine

$$S_3 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2 \tag{3}$$

Observăm că $S_3 = S_1^2$.

4. Calea prin care am găsit pe S_2 şi S_3 a fost aceeaşi. Ea poate fi urmată pentru găsirea lui S_k, în general. Folosim formula

$$(a+1)^{k+1} = a^{k+1} + C_{k+1}^1 a^k + C_{k+1}^2 a^{k-1} + \ldots + C_{k+1}^k a + C_{k+1}^{k+1}.$$

Făcând succesiv pe a egal cu 1, 2, 3, ..., $n-1$, n, obţinem

$$2^{k+1} = 1^{k+1} + C_{k+1}^1 1^k + C_{k+1}^2 1^{k-1} + \ldots + C_{k+1}^k 1 + C_{k+1}^{k+1},$$
$$3^{k+1} = 2^{k+1} + C_{k+1}^1 2^k + C_{k+1}^2 2^{k-1} + \ldots + C_{k+1}^k 2 + C_{k+1}^{k+1},$$
$$4^{k+1} = 3^{k+1} + C_{k+1}^1 3^k + C_{k+1}^2 3^{k-1} + \ldots + C_{k+1}^k 3 + C_{k+1}^{k+1},$$

....

$$n^{k+1} = (n-1)^{k+1} + C_{k+1}^1 (n-1)^k + C_{k+1}^2 (n-1)^{k-1} + \ldots + C_{k+1}^k (n-1) + C_{k+1}^{k+1},$$
$$(n+1)^{k+1} = n^{k+1} + C_{k+1}^1 n^k + C_{k+1}^2 n^{k-1} + \ldots + C_{k+1}^k n + C_{k+1}^{k+1}.$$

Adunând aceste relaţii membru cu membru, după reducerea termenilor asemenea, se obţine:

$$(n+1)^{k+1} = 1 + C_{k+1}^1 S_k + C_{k+1}^2 S_{k-1} + \ldots + C_{k+1}^k S_1 + n, \tag{4}$$

Această este o formulă de recurenţă care dă pe S_k în funcţie de toate sumele precedente S_1, S_2, ..., S_{k-1}.

Să determinăm, de exemplu, pe S_4. Pentru $k = 4$, găsim:

$$(n+1)^5 = 1 + C_5^1 S_4 + C_5^2 S_3 + C_5^3 S_2 + C_5^4 S_1 + n,$$

Dacă înlocuim pe S_1, S_2, S_3, date de formulele (1), (2), (3) după efectuarea calculelor se obţine

$$S_4 = \frac{n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)}{30}. \tag{5}$$

Să se dezvolte după formula lui Newton binoamele la putere:

a) $(x^2 - a)^6$; c) $(\sqrt{a} - \sqrt{b})^4$; e) $(\sqrt{3x} + \sqrt{y})^7$;

b) $(a-b)^5$; d) $(x+2)^7$; f) $(3\sqrt[3]{x} - 2\sqrt{x})^5$.

Să se determine:

a) termenul al optulea al dezvoltării $\left(x^2 - \frac{1}{x}\right)^{11}$;

b) termenul al cincilea al dezvoltării $\left(\sqrt{2a}-\sqrt{ab}\right)^7$;

c) termenul din mijloc al dezvoltării $\left(\sqrt{x}-\sqrt{y}\right)^6$;

d) cei doi termeni din mijloc ai dezvoltării $\left(\sqrt{a}-\sqrt[3]{b}\right)^9$.

Să se determine:

a) termenul din dezvoltarea $\left(\sqrt{x}+y\right)^9$ care îl conține pe x^3;

b) termenul din dezvoltarea $\left(\frac{\sqrt{a}}{3}+\frac{3}{\sqrt[3]{a}}\right)^{13}$ care îl conține pe a^4;

c) termenul în care nu apare x din dezvoltarea $\left(\sqrt[5]{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^{21}$

Să se determine rangul termenului din dezvoltarea $\left(\sqrt[3]{\frac{x}{\sqrt{y}}}+\sqrt{\frac{y}{\sqrt[3]{x}}}\right)^{21}$, în care x și y au puteri egale.

Să se determine n, dacă în dezvoltarea $(1+x)^n$ coeficienții lui x^5 și x^{12} sunt egali.

Câți termeni raționali conține dezvoltarea $(\sqrt{2}+\sqrt[4]{3})^{100}$?

În dezvoltarea $\left(a\sqrt[4]{a}+\frac{1}{\sqrt{a}}\right)^n$, suma coeficienților binomiali de rang par este egală cu 128. Să se găsească termenul care conține pe a^3.

Să se determine m, n, p astfel încât în dezvoltarea $\left(x^m+\frac{1}{x^p}\right)^n$, termenii de rang 12 și 24 să conțină pe x, respectiv x^5 și, mai mult, această dezvoltare să aibă termen liber.

Să se găsească suma coeficienților dezvoltării $(7x^2-6y^3)^9$.

Să se găsească rangul celui mai mare termen din dezvoltarea:

a) $\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right)^{100}$;   b) $\left(\frac{3}{4}+\frac{1}{4}\right)^{100}$.

Să se demonstreze egalitățile:

a) $C_n^0+\frac{1}{2}C_n^1+\ldots+\frac{1}{n+1}C_n^n=\frac{2^{n+1}-1}{n+1}$;

b) $k+\frac{k^2C_n^1}{2}+\frac{k^3C_n^2}{3}+\ldots+\frac{k^{n+1}C_n^n}{n+1}=\frac{(k+1)^{n+1}-1}{n+1}$;

c) $C_n^1+2C_n^2+\ldots+nC_n^n=n2^{n-1}$;

d) $C_n^1-2C_n^2+\ldots+(-1)^{n-1}nC_n^n=0$;

e) $1+C_n^1\cos\alpha+C_n^2\cos 2\alpha+\ldots+C_n^n\cos n\alpha=2^n\cos^n\frac{\alpha}{2}\cos\frac{n\alpha}{2}$,

f) $C_n^1\sin\alpha+C_n^2\sin 2\alpha+\ldots+C_n^n\sin n\alpha=2^n\cos^n\frac{\alpha}{2}\sin\frac{n\alpha}{2}$.

Ideea care stă la baza geometriei analitice plane este următoarea: *un punct din plan este identificat cu o pereche de numere reale, numite coordonatele punctului.* În acest fel, proprietățile geometrice ale mulțimilor de puncte devin proprietăți calculatorii, adică relații între numere reale.

De exemplu, faptul că punctele din plan M_1 (de coordonate (x_1, y_1)) și M_2 (de coordonate (x_2, y_2)) se află la distanța $d > 0$ se exprimă astfel:

$$\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} = d.$$

De asemenea, anumite *figuri geometrice* (adică mulțimi de puncte din plan) au anumite *ecuații.*

De exemplu, faptul că punctele M (de coordonate (x, y)) se află pe o dreaptă d se exprimă prin aceea că există trei numere reale a, b, c (dintre care $a \neq 0$ sau $b \neq 0$) astfel încât coordonatele x, y satisfac *ecuația dreptei* d:

$$ax + by + c = 0.$$

Putem face geometrie analitică și pe o dreaptă (identificând punctele cu numere, după cum vom vedea) sau în spațiu (identificând punctele cu triplete de numere).

*

Istoria matematicii îl recunoaște ca fondator al geometriei analitice, bazată pe metoda coordonatelor, pe matematicianul și filosoful francez **René Descartes** (1596 - 1650).

Coordonatele punctelor se mai numesc și *coordonate carteziene* în onoarea lui Descartes, care scria în limba latină (așa cum era obiceiul timpului) și semna Renatus Cartesius. Același comentariu se poate face referitor la denumirea de *produs cartezian* a două mulțimi.

1.1. Noțiuni fundamentale

Fie d o dreaptă fixată (acesta este spațiul în care vom lucra). Considerăm două puncte distincte A și B pe d. Presupunem că știm (în mod intuitiv) ce înseamnă că un punct $M \in d$ se află între A și B.

Notăm $(AB) = \{M \in d \mid M$ este între A și $B, M \neq A, M \neq B\}$ și numim (AB) *segmentul deschis de extremități A și B.*

Mai notăm

$[AB] = (AB) \cup \{A, B\}$ = *segmentul închis de extremități A și B.*

$[AB) = (AB) \cup \{A\}$, $(AB] = (AB) \cup (B)$.

Dacă $A = B$, extindem definiţiile de mai sus astfel:

$$[AA] = \{A\}, \ (AA) = [AA) = (AA] = \varnothing$$

*

Pentru a putea face geometrie analitică pe dreapta *d,* trebuie să definim un sens şi o unitate de măsură.

Definirea sensului. Vom considera un punct fixat O pe d, numit origine (fig. 1). El împarte dreapta d în două semidrepte, anume $[Ox$ (notată pentru comoditate cu Ox) şi $[Ox'$ (notată pentru comoditate Ox').

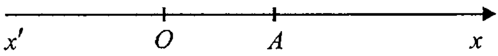


Fig. 1

Facem o alegere între cele două semidrepte şi numim pe Ox *semidreapta pozitivă* (de obicei se alege ca semidreaptă pozitivă pe cea care este „la dreapta" pe desen).

Spunem că am *ales un sens pe dreapta d* în momentul când am ales semidreapta pozitivă Ox.

Definirea unităţii de măsură. Pe semidreapta pozitivă Ox considerăm un punct fixat $A \neq O$. *Unitatea de măsură pe d* este lungimea segmentului $[OA]$ (şi această definiţie este intuitivă, pentru că ea presupune că ştim ce înseamnă să măsurăm lungimea unui segment).

Definiţie. O dreaptă *d,* pe care s-a ales un sens şi o unitate de măsură se numeşte *axă de coordonate* sau *dreaptă carteziană.*

O dreaptă carteziană se poate pune în corespondenţă bijectivă cu mulţimea numerelor reale $\mathbb{R}$. Vom arăta cum oricărui punct M al dreptei d îi corespunde un singur număr real x_M, adică vom defini o *funcţie bijectivă*

$$h : d \to \mathbb{R}, h(M) = x_M, \forall M \in d.$$

În primul rând, $h(O) = 0$ (adică $x_O = 0$).

Apoi, dacă $M \neq O$, vom avea $x_M > 0$ dacă $M \in Ox$ sau $x_M < 0$ dacă $M \in Ox'$.

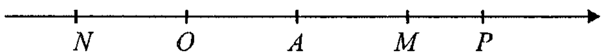


Fig. 2

Dacă $M \in Ox$, vom defini x_M = lungimea segmentului $[OM]$, iar dacă $N \in Ox'$ vom defini $x_N = -$ lungimea segmentului $[NO]$.

În mod intuitiv, *lungimea* lui $[OM]$ înseamnă „de câte ori se cuprinde unitatea de măsură $[OA]$ în $[OM]$".

În figura 2, avem $x_M = 2$, $x_N = -1$ şi $x_P = \dfrac{5}{2}$.

Acest mod de definire poate fi extins şi la cazul lungimilor iraţionale. În figura 3 segmentele OA şi AB au lungimea 1 şi sunt perpendiculare.

Rezultă că ipotenuza OB are lungimea $\sqrt{2}$. Purtând pe Ox un segment OU de lungime egală cu OB, vom avea $x_U = \sqrt{2}$.

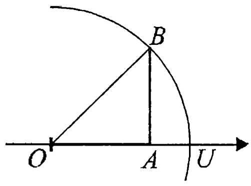


Fig. 3

Definiţie. Dacă punctului $M \in d$ îi corespunde numărul real $h(M) = x_M$ vom spune că x_M este *coordonata carteziană* a lui M pe dreapta carteziană d şi vom nota $M(x_M)$.

Folosind bijecţia h, vom identifica un punct $M \in d$ cu coordonata sa, numărul real x_M. În acest fel, practic, identificăm o dreaptă carteziană cu mulţimea numerelor reale $\mathbb{R}$.

De asemenea, observăm că M se află între A şi B dacă şi numai dacă numărul x_M este cuprins între numerele x_A şi x_B (de exemplu, dacă $x_A < x_B$ trebuie să avem $x_A \leq x_M \leq x_B$).

Distanţa dintre două puncte

Definiţie. Fie A şi B două puncte pe dreapta d. Se numeşte *distanţa dintre punctele* A şi B lungimea segmentului $[AB]$.

Vom nota distanţa dintre A şi B prin $|AB|$ sau, simplu, AB. Avem, în mod evident $|AB| = 0 \Leftrightarrow A = B$.

T e o r e m ă. Dacă A şi B sunt pe d, distanţa dintre A şi B este

$$|AB| = |x_B - x_A|$$

În particular, distanţa dintre A şi O este $|AO| = |x_A|$.

Exemple

Ne vom referi la punctele din figura 4.

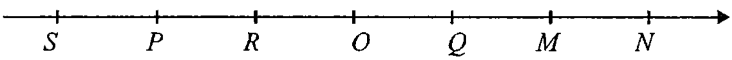


Fig. 4

$|MN| = x_N - x_M = |x_N - x_M|$,

$|RQ| = |RO| + |OQ| = |x_R| + |x_Q| = -x_R + x_Q = x_Q - x_R = |x_Q - x_R|$,

$|SP| = |OS| - |OP| = |x_S| - |x_P| = -x_S - (-x_P) = x_P - x_S = |x_P - x_S|$.

Mijlocul unui segment

Fie punctele $A \neq B$ pe dreapta d. Presupunem $x_B > x_A$ (cazul $x_B < x_A$ se tratează analog). Se ştie că mijlocul segmentului $[AB]$ este unicul punct $M \in d$ pentru care $|MA| = |MB|$. Se arată că:

* dacă M este mijlocul lui $[AB]$ atunci $x_M = \frac{1}{2}(x_A + x_B)$;

* reciproc, dacă $M \in d$ are coordonata $x_M = \frac{1}{2}(x_A + x_B)$ atunci M este mijlocul lui $[AB]$ (se arată că $|MA| = |MB| = \frac{1}{2}(x_B - x_A)$).

Exemple

1. Fie punctele $A(2)$ şi $B(6)$. Mijlocul segmentului $[AB]$ este punctul M de coordonată $x_M = \frac{2+6}{2} = 4$, deci $M(4)$.

2. Fie punctele $A(-3)$ şi $E(5)$ şi B simetricul lui A în raport cu E. Care este coordonata punctului B?

Avem $2x_E = x_A + x_B$, de unde $x_B = 2x_E - x_A = 10 + 3 = 13$.

Raportul a două segmente

Definiţie. Fie punctele $A \neq B$ pe dreapta d şi $M \in d$, $M \neq B$. Se numeşte *raportul segmentelor MA şi MB* numărul $\frac{MA}{MB} = \frac{|MA|}{|MB|}$.

Dacă A şi B sunt fixate, iar M parcuge mulţimea $d - \{B\}$, raportul $\frac{MA}{MB}$ poate lua orice valoare din mulţimea $[0, +\infty)$, fiind egal cu 0 dacă şi numai dacă $M = A$. Mai precis, avem următoarea:

Propoziţie. Fie două puncte $A \neq B$ pe d şi t un număr strict pozitiv. Se consideră egalitatea $\frac{MA}{MB} = t$ (*).

1) Dacă $t = 1$, există un punct M unic (anume, M este mijlocul segmentului AB) pentru care avem (*) .

2) Dacă $t \neq 1$, există exact două puncte M pentru care avem (*).

Rezultatul din propoziţia anterioară ne spune că există două puncte, M_1 între A şi B, M_2 în afara segmentului $[AB]$, care „împart segmentul $[AB]$ în acelaşi raport":

$$\frac{M_1A}{M_1B} = \frac{M_2A}{M_2B} = t \neq 1.$$

Se spune că punctele M_1 şi M_2 sunt *conjugate armonic* faţă de punctele A şi B (vezi ex. 8).

Exemplu

Fie $A(0)$, $B(3)$ şi $t = 2$. Există punctele $M_1(2)$ şi $M_2(6)$ astfel încât $\frac{M_1A}{M_1B} = \frac{M_2A}{M_2B} = 2$.

1.2. Lungimi orientate. Rapoarte de lungimi orientate

În cele ce urmează vom considera o axă de coordonate d.

Definiţie. Fie A şi B două puncte pe dreapta d. Se numeşte *lungimea orientată a segmentului AB* numărul notat $\overline{AB}$ şi definit prin

$$\overline{AB} = x_B - x_A.$$

Atenţie! Lucrăm cu puncte ale unei axe de coordonate fixate d, iar notaţia $\overline{AB}$ nu trebuie confundată cu notaţia folosită în clasa a IX-a pentru segmente orientate.

Observaţie. Numărul $\overline{AB}$, care depinde de unitatea de măsură, ne indică atât *lungimea segmentului AB* (anume, $|AB| = |x_B - x_A|$), cât şi *sensul segmentului AB.*

În figura 5a segmentul AB este *orientat pozitiv* (avem $x_B > x_A$), iar în figura 5b segmentul AB este *orientat negativ* (avem $x_B < x_A$).

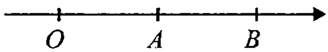


Fig. 5a

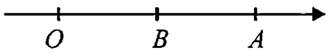


Fig. 5b

P r o p o z i ţ i e (relaţiile lui Chasles pe dreaptă)

1) Dacă punctele M, A şi B sunt pe d, avem: $\overline{AB} = \overline{MB} - \overline{MA}$.

2) Dacă punctele $A_1, A_2, \ldots, A_n$ sunt pe d, avem:

$$\overline{A_1A_2} + \overline{A_2A_3} + \ldots + \overline{A_{n-1}A_n} + \overline{A_nA_1} = 0.$$

Aceste egalităţi se demonstrează imediat prin calcul.

Definiţie. Fie punctele $A \neq B$ pe dreapta d şi $M \in d$, $M \neq B$. Se numeşte *raportul lungimilor orientate* $\overline{MA}$ *si* $\overline{MB}$ numărul $\dfrac{\overline{MA}}{\overline{MB}}$.

Prin urmare, avem $\dfrac{\overline{MA}}{\overline{MB}} = \dfrac{x_A - x_M}{x_B - x_M}$. Notam $\dfrac{\overline{MA}}{\overline{MB}} = t$. Numărul t nu depinde de unitatea de măsură şi poate lua orice valoare reală, cu excepţia valorii $t = 1$. Avem:

* $t = 0 \Leftrightarrow M = A$

* $t > 0 \Leftrightarrow MA$ şi MB au acelaşi sens, adică *M este în afara segmentului* $[AB]$ (fig. 6a şi fig. 6b).

* $t < 0 \Leftrightarrow$ MA şi MB au sensuri contrare, adică *M este între A* şi *B* (fig. 7).

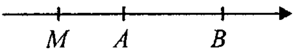


Fig. 6a

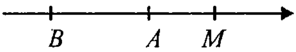


Fig. 6b

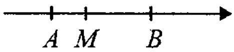


Fig. 7

În particular, dacă M este mijlocul segmentului AB, avem $t = -1$.

T e o r e m ă. Fie punctele $A \neq B$ pe dreapta d şi $t \in \mathbb{R} - \{1\}$. Atunci există un unic punct $M \in d$ cu proprietatea că $\dfrac{\overline{MA}}{\overline{MB}} = t$ şi avem

$$x_M = \frac{x_A - tx_B}{1-t}.$$

Demonstraţie. Notăm $x_M = x$ şi avem $\dfrac{x_A - x}{x_B - x} = t \Leftrightarrow x = \dfrac{x_A - tx_B}{1-t}$.

Observaţie. Dacă M este mijlocul segmentului AB, ceea ce este echivalent cu $\dfrac{\overline{MA}}{\overline{MB}} = -1$,

avem $x_M = \dfrac{1}{2}(x_A + x_B)$, după cum am am arătat deja.

Desenaţi pe axă punctele A, B şi calculaţi $|AB|$ dacă:

a) $x_A = 2, x_B = 4$; b) $x_A = 2, x_B = 2$; c) $x_A = 1, x_B = -\sqrt{3}$.

Calculaţi mijlocul segmentului $[AB]$ în fiecare dintre cazurile de la exerciţiul anterior.

Fie $A(3)$ şi $M(-3)$. Determinaţi simetricul lui A faţă de M.

Dacă A, B şi C sunt puncte pe d, arătaţi că:

a) $|AB| = 0 \Leftrightarrow A = B$;

b) $|AB| = |BA|$;

c) $|AC| \leq |AB| + |BC|$. În ce caz avem egalitate?

a) Dacă A şi B sunt puncte distincte pe o dreaptă d, arătaţi că există un unic punct M între A şi B cu proprietatea $\dfrac{MA}{MB} = \dfrac{AB}{MA}$ (spunem că M împarte pe AB în *medie şi extremă raţie*).

b) În condiţiile de mai sus, arătaţi că $\dfrac{MA}{MB} = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ (numărul $\rho = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ se numeşte *numărul de aur* şi nu depinde de A, B).

Fie $A(3)$ şi $B(-5)$ pe dreapta d. Determinaţi pe d punctul M astfel încât $\dfrac{\overline{MA}}{\overline{MB}} = 3$.

Se dau pe d punctele A, B cu proprietatea că $|AB| = l > 0$. Fie $s \neq t$ două numere reale, diferite de 1, şi fie M, N puncte pe d astfel încât $\dfrac{\overline{MA}}{\overline{MB}} = s$, $\dfrac{\overline{NA}}{\overline{NB}} = t$. Arătaţi că $|MN| = \left|\dfrac{t-s}{(1-t)(1-s)}\right| l$.

Se consideră patru puncte distincte A, B, U şi V pe o dreaptă carteziană d. Se spune că U şi V sunt *conjugate armonic* faţă de A şi B dacă $\dfrac{\overline{UA}}{\overline{UB}} = -\dfrac{\overline{VA}}{\overline{VB}}$. Să se arate că U şi V sunt conjugate armonic faţă de A şi B dacă şi numai dacă avem $(x_A + x_B)(x_U + x_V) = 2(x_A x_B + x_U x_V)$.

Considerăm un plan fixat $\mathscr{P}$ (acesta este spaţiul în care vom lucra). Folosind noţiunea de dreapta carteziană, prezentată în paragraful anterior, vom introduce conceptul fundamental al geometriei analitice în plan – reperul cartezian în plan.

Definiţie. Se numeşte *reper cartezian* (sau *sistem de axe de coordonate*) în $\mathscr{P}$ o pereche de drepte carteziene perpendiculare din $\mathscr{P}$, care au *originea comună* situată în punctul lor de intersecţie O şi au *unitatea de măsură comună* (adică unitatea de măsură este aceeaşi pe ambele axe).

Prin urmare, pe prima dreaptă avem punctul O şi semidreapta pozitivă Ox, iar pe a doua dreaptă avem punctul O şi semidreapta pozitiva Oy.

Vom numi prima dreaptă *axa absciselor* (sau axa Ox, sau axa xx'), iar a doua dreaptă axa *ordonatelor* (sau axa Oy sau axa yy').

Definiţie. Vom numi *plan cartezian* un plan $\mathscr{P}$ împreună cu un reper cartezian.

În figura 8 avem un reper cartezian, unde $OI = OJ = 1$.

În continuare vom arăta cum se stabileşte o corespondenţă între punctele planului cartezian şi perechile ordonate de numere reale.

1) Considerăm un punct oarecare M în planul $\mathscr{P}$. Vom asocia lui M o pereche de numere $(x_M, y_M) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2$ după cum urmează. Ducem prin M două drepte perpendiculare (fig. 9).

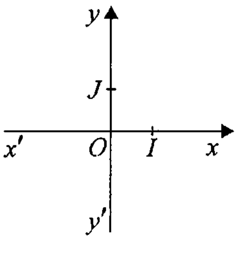


Fig. 8

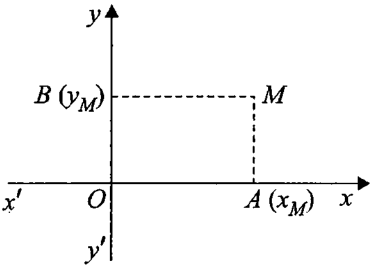


Fig. 9

- prima dreaptă este paralelă cu Oy şi intersectează Ox în $A(x_M)$, unde x_M este coordonata lui A pe dreapta carteziană Ox;

- a doua dreaptă este paralelă cu Ox şi intersectează Oy în $B(y_M)$, unde y_M este coordonata lui B pe dreapta carteziană Oy;

În acest fel, am asociat punctului M perechea $(x_M, y_M) \in \mathbb{R}^2$.

De fapt, am obţinut funcţia $F : \mathscr{P} \to \mathbb{R}^2$, definită prin

$$F(M) = (x_M, y_M), \forall M \in \mathscr{P}.$$

2) Invers, vom arăta cum oricărei perechi de numere reale $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ îi corespunde un punct M din planul $\mathscr{P}$.

Să considerăm deci o pereche $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Atunci:

- numărului real x îi corespunde pe dreapta carteziană Ox punctul de coordonată x, pe care îl notăm A;

- numărului real y îi corespunde pe dreapta carteziană Oy punctul de coordonată y, pe care îl notăm B.

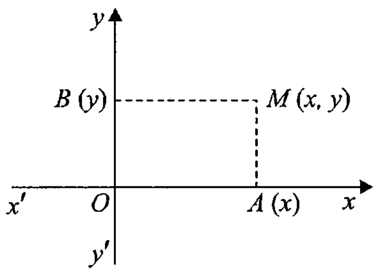


Fig. 10

Prin A ducem o paralelă la Oy, iar prin B ducem o paralelă la Ox. Aceste două drepte se întâlnesc într-un punct $M \in \mathscr{P}$. Dacă $x = 0$ punctul M este pe Oy, dacă $y = 0$ punctul M este pe Ox, iar dacă $x = y = 0$ obţinem $M = O$.

Dacă M este legat de x şi y în modul descris mai sus, vom scrie $M(x, y)$ şi vom spune că *x şi y sunt coordonatele carteziene ale punctului M*, anume x este *abscisa lui M*, y este *ordonata lui M*.

De fapt, am obţinut funcţia $G : \mathbb{R}^2 \to \mathscr{P}$, definită prin $G(x, y) = M$, unde M se obţine prin procedeul dat mai sus (cititorul va remarca faptul că am scris $G(x, y) = M$ în loc de $G((x, y)) = M$, adică am omis o pereche de paranteze; acest mod de scriere este unanim folosit).

Se poate observa că funcţiile F şi G sunt bijective şi inverse una alteia, deci $G = F^{-1}$ şi $F = G^{-1}$.

În acest mod *se identifică $\mathscr{P}$ cu $\mathbb{R}^2$* (adică identificăm $F(\mathscr{P})$ cu $\mathscr{P}$ şi $G(\mathbb{R}^2)$ cu $\mathbb{R}^2$).

Înainte de a trece mai departe, vom face câteva observaţii care clarifică, sperăm, „comportamentul geometric" al funcţiei G definită mai sus.

Observaţii cu privire la semnul coordonatelor

Vom discuta poziţia unui punct $M(x, y)$ din planul cartezian, în funcţie de semnele coordonatelor sale x şi y.

* Situațiile posibile în cazul $x = 0$ sau $y = 0$ se află în figura 11.

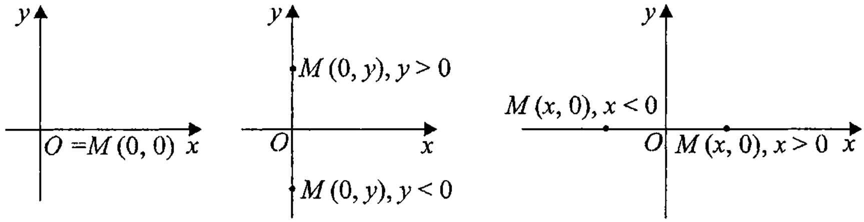
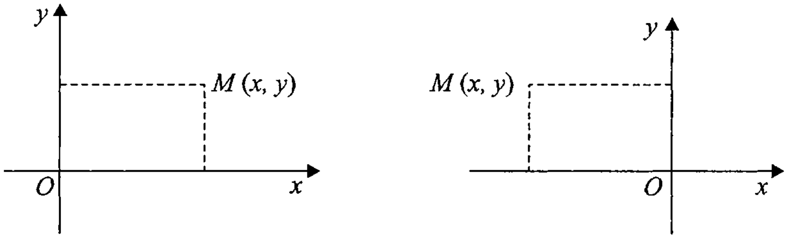


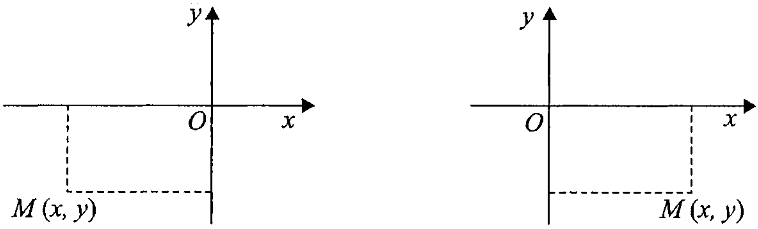
Fig. 11

* Situațiile posibile în cazul $x \neq 0$ și $y \neq 0$ se află în figura 12.



Dacă $x > 0, y > 0$, spunem că M se află în **cadranul I** (dreapta, sus)

Dacă $x < 0, y > 0$, spunem că M se află în **cadranul II** (stânga, sus)



Dacă $x < 0, y < 0$, spunem că M se află în **cadranul III** (stânga, jos)

Dacă $x > 0, y < 0$, spunem că M se află în **cadranul IV** (dreapta, jos)

Fig. 12

Folosind identificarea lui $\mathscr{P}$ cu $\mathbb{R}^2$, prezentată anterior, putem scrie fiecare dintre cele patru cadrane ca produsul cartezian a două mulțimi de numere reale:

$$
\begin{aligned}
&\text{cadranul I} &&= (0, \infty) \times (0, \infty)\\
&\text{cadranul II} &&= (-\infty, 0) \times (0, \infty)\\
&\text{cadranul III} &&= (-\infty, 0) \times (-\infty, 0)\\
&\text{cadranul IV} &&= (0, \infty) \times (-\infty, 0)
\end{aligned}
$$

Reprezentarea geometrică a produselor carteziene de intervale

După cum am văzut, cadranele planului cartezian reprezintă produse carteziene de intervale nemărginite.

Fie produsul cartezian $P = [-1, 2] \times [2, 4]$, $P \subset \mathbb{R}^2$.

$$[-1, 2] \times [2, 4] = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid -1 \le x \le 2 \text{ şi } 2 \le y \le 4\}$$

Imaginea lui P prin funcţia G (reprezentarea geometrică a lui P) este următoarea mulţime de puncte din planul $\mathscr{P}$:

$$G(P) = \{M(x, y) \in \mathscr{P} \mid -1 \le x \le 2 \text{ şi } 2 \le y \le 4\}$$

Mulţimea $G(P)$ este „dreptunghiul plin“ $ABCD$, unde $A(2, 2)$, $B(2, 4)$, $C(-1, 4)$ şi $D(-1, 2)$ (vezi fig. 13).

Prin identificarea lui P cu $G(P)$, rezultă că P se identifică cu „dreptunghiul plin“ $ABCD$.

În general, dacă $a < b$ şi $c < d$ sunt numere reale, atunci:

* $[a, b] \times [c, d]$ se reprezintă prin „dreptunghiul plin“ $ABCD$ (vezi fig. 14);

* $(a, b) \times (c, d)$ se reprezintă prin interiorul „dreptunghiului plin“ $ABCD$ (vezi fig. 14);

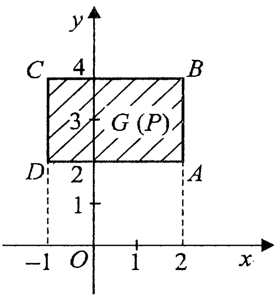


Fig. 13

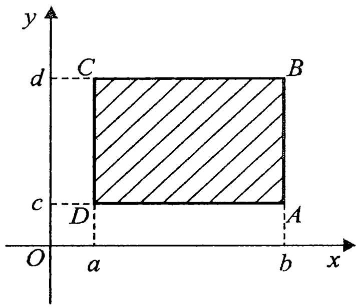


Fig. 14

* $[a, b] \times \mathbb{R}$ şi $\mathbb{R} \times [a, b]$ se reprezintă prin câte o bandă (vezi fig. 15 şi fig. 16).

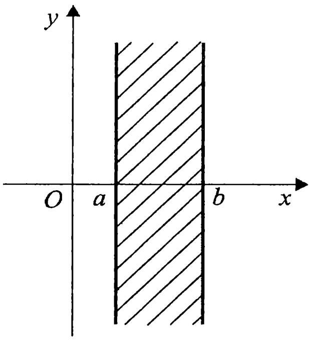


Fig. 15

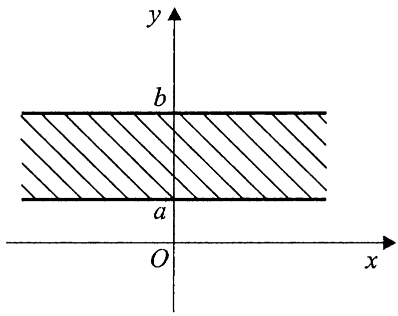


Fig. 16

Observaţii cu privire la alegerea sistemului de axe

În rezolvarea problemelor de geometrie prin metoda coordonatelor (sau, cum se mai spune, prin metoda analitică) *alegerea sistemului de axe* este foarte importantă.

O alegere adecvată a sistemului de axe (dacă acesta nu este dat în enunţul problemei) simplifică rezolvarea problemei. Invers, o alegere nefericită a sistemului de axe, complică rezolvarea problemei (sau o face imposibilă).

În acest sens, vom prezenta două exemple referitoare la probleme în care apar triunghiuri.

Exemple

1. Cum alegem sistemul de axe într-o problemă care se referă la un triunghi dreptunghic ABC, cu unghiul drept în A?

În figurile 17, 18 şi 19 prezentăm trei variante de alegere dintre care cea mai indicată este cea din figura 17.

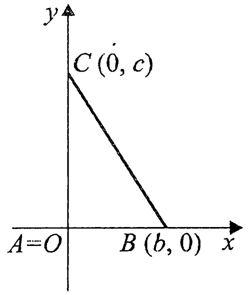


Fig. 17

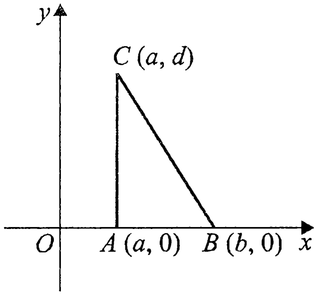


Fig. 18

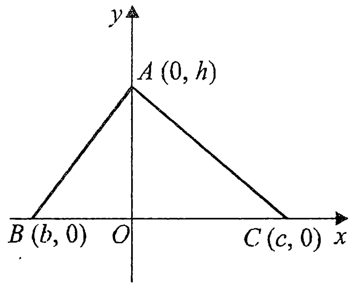


Fig. 19

În figura 17, originea $O = A$, $Ox = AB$ şi $Oy = AC$. Coordonatele vârfurilor se scriu sub forma $A(0, 0)$, $B(b, 0)$ şi $C(0, c)$, unde $b > 0$, $c > 0$.

În figura 18, $Ox = AB$ şi axa Oy este o perpendiculară pe AB. Coordonatele vârfurilor se scriu astfel: $A(a, 0)$, $B(b, 0)$ şi $C(a, d)$, unde $b > a > 0$ şi $d > 0$.

În figura 19, am ales $Ox = BC$, iar Oy este dreapta care trece prin A şi este perpendiculară pe BC. În acest caz, coordonatele se pot scrie sub forma $B(b, 0)$, $C(c, 0)$ şi $A(0, h)$ unde $b < 0$, $c > 0$ şi $h^2 = -bc$.

2. Cum alegem sistemul de axe într-o problemă în care intervine un triunghi isoscel ABC, cu $AB = AC$?

În general, în alegerea sistemului de axe trebuie să ţinem cont de două reguli simple:

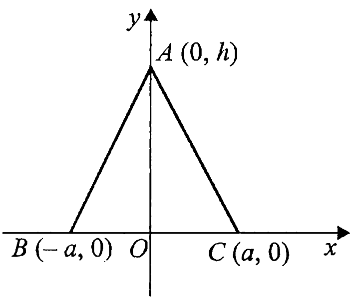


Fig. 20

* cât mai multe coordonate să fie nule;

* să valorificăm proprietăţile de simetrie ale figurii (dacă ele există).

Ţinând cont de aceste reguli, cea mai naturală alegere a axelor este următoarea: originea se alege în mijlocul bazei BC, $Ox = BC$ şi Oy este mediatoarea segmentului BC.

Cu aceaste axe, coordonatele vârfurilor se pot scrie sub forma $B(-a, 0)$, $C(a, 0)$ şi $A(0, h)$, unde $a > 0$, $h > 0$.

Reprezentaţi grafic următoarele mulţimi:

a) $[-1, 3] \times [-2, 4]$; b) $[1, 3] \times \mathbb{R}$; c) $\mathbb{R} \times [-1, 1]$;

d) $\{1\} \times [0, 2]$; e) $[0, 2] \times \{1\}$; f) $(0, \infty) \times \{2\}$;

g) $\mathbb{R} \times \{2\}$; h) $\{0\} \times \mathbb{R}$; i) $\{0\} \times [0, \infty)$.

Fie un dreptunghi $ABCD$. Realizaţi două variante de alegere a unui reper cartezian şi scrieţi coordonatele vârfurilor dreptunghiului în fiecare reper.

Aceeaşi cerinţă ca la exerciţiul anterior, pentru un triunghi echilateral ABC.

3.1. Coordonatele unui vector din planul cartezian

Fie un plan cartezian $\mathcal{P}$ cu reperul cartezian Ox, Oy şi punctele $I(1, 0)$ şi $J(0, 1)$. Considerăm vectorii $\vec{i} = \overrightarrow{OI}$ şi $\vec{j} = \overrightarrow{OJ}$. Vectorul $\vec{i}$ este un versor al axei Ox, iar $\vec{j}$ este un versor al axei Oy (se numeşte *versor al dreptei d* un vector de lungime 1 care are aceeaşi direcţie cu dreapta d).

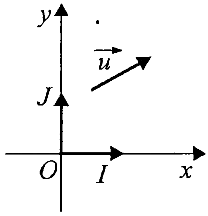


Fig. 21

Considerăm un vector $\vec{u}$ din plan.

Cum $\vec{i}$ şi $\vec{j}$ sunt necoliniari (nu au aceeaşi direcţie), conform teoremei de descompunere a unui vector după doi vectori necoliniari (vezi manualul de clasa a IX-a) există o unică pereche de numere reale (x, y) astfel încât $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j}$.

Definiţie. Fie Ox, Oy un reper cartezian în plan. Dacă

$$\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j}, x, y \in \mathbb{R}.,$$

spunem că (x, y) este *perechea de coordonate a vectorului* $\vec{u}$ *în reperul dat* şi notăm $\vec{u}\,(x, y)$.

Exemple

* Dacă $\vec{v} = 4\vec{i} - 7\vec{j}$, atunci vectorul $\vec{v}$ are coordonatele $(4, -7)$ în reperul dat şi notăm $\vec{v}\,(4, -7)$.

* Scrierea $\vec{u}\,(-3, 2)$ are semnificaţia: vectorul $\vec{u}$ are coordonatele $(-3, 2)$ în reperul dat, adică $\vec{u} = -3\vec{i} + 2\vec{j}$.

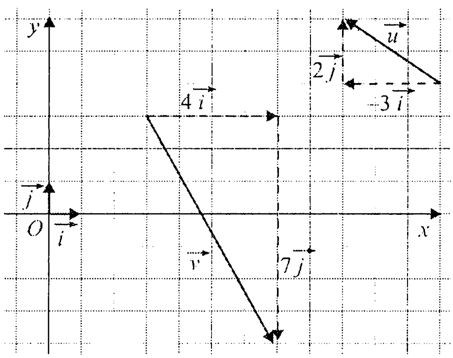


Fig. 22

Fie un punct oarecare $M(x, y)$ în plan.

Definiţie. În reperul cartezian Ox, Oy vectorul $\overrightarrow{OM}$ se numeşte *vectorul de poziţie al punctului M*.

P r o p o z i ţ i a 1. Fie planul cartezian cu reperul Ox, Oy.

a) Vectorul de poziţie al punctului $M(x, y)$ este $\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j}$.

b) Dacă M are vectorul de poziţie $\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j}$, atunci M are coordonatele (x, y).

Demonstraţie: a) Perpendiculara din M pe Ox intersectează Ox în punctul $U(x, 0)$, iar perpendiculara din M pe Oy intersectează Oy în punctul $V(0, y)$. Avem $\overrightarrow{OU} = x\vec{i}$ şi $\overrightarrow{OV} = y\vec{j}$. Conform regulii paralelogramului,

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OU} + \overrightarrow{OV} = x\vec{i} + y\vec{j}.$$

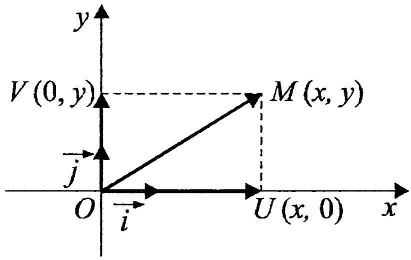


Fig. 23

b) Fie M astfel încât $\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j}$. Notăm cu (x', y') coordonatele lui M. Conform cu punctul a) avem $\overrightarrow{OM} = x'\vec{i} + y'\vec{j}$. Prin urmare $x\vec{i} + y\vec{j} = x'\vec{i} + y'\vec{j}$, de unde $x = x'$, $y = y'$, deoarece vectorii $\vec{i}$, $\vec{j}$ sunt necoliniari.

Reţineţi! Fie M un punct în planul cartezian. Următoarele afirmaţii sunt echivalente:

a) punctul M are coordonatele (x, y);

b) are loc egalitatea $\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j}$

c) vectorul $\overrightarrow{OM}$ are coordonatele (x, y).

Pe scurt, aceste echivalenţe se scriu

$$M(x, y) \Leftrightarrow \overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} \Leftrightarrow \overrightarrow{OM}(x, y)$$

Exemple

1. Considerăm în plan punctele A, B, C şi D (fig. 24). Să scriem coordonatele şi vectorul de poziţie al fiecăruia dintre aceste puncte:

$A(3, 4) \Leftrightarrow \overrightarrow{OA} = 3\vec{i} + 4\vec{j}$; $B(-2, 3) \Leftrightarrow \overrightarrow{OB} = -2\vec{i} + 3\vec{j}$;

$C(3, -5) \Leftrightarrow \overrightarrow{OC} = 3\vec{i} - 5\vec{j}$; $D(-4, -3) \Leftrightarrow \overrightarrow{OD} = -4\vec{i} - 3\vec{j}$.

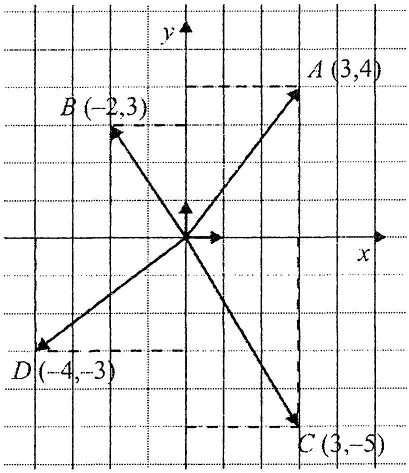


Fig. 24

2. Fiind dat vectorul de poziţie pentru fiecare dintre punctele E, F şi G, să aflăm coordonatele punctului respectiv:

$\overrightarrow{OE} = 3\vec{i} - 2\vec{j} \Leftrightarrow E(3, -2)$; $\overrightarrow{OF} = 4\vec{i} + 2\vec{j} \Leftrightarrow F(4, 2)$;

$\overrightarrow{OG} = -2\vec{i} - 4\vec{j} \Leftrightarrow G(-2, -4)$.

3.2. Operaţii cu vectori daţi prin coordonate

Considerăm în planul cartezian cu reperul Ox, Oy, doi vectori $\vec{u}\,(x, y)$ şi $\vec{v}\,(x, y)$, deci

$$\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j}, \quad \vec{v} = x'\vec{i} + y'\vec{j}.$$

Cum $\vec{i}$, $\vec{j}$ sunt vectori necoliniari, avem:

$$\vec{u} = \vec{v} \Leftrightarrow x\vec{i} + y\vec{j} = x'\vec{i} + y'\vec{j} \Leftrightarrow (x - x')\vec{i} + (y - y')\vec{j} = 0 \Leftrightarrow x = x' \text{ şi } y = y'$$

Să calculăm coordonatele sumei şi diferenţei vectorilor $\vec{u}$, $\vec{v}$, precum şi ale vectorului $\alpha\vec{u}$, unde $\alpha \in \mathbb{R}$. Avem:

$$\vec{u} + \vec{v} = (x\vec{i} + y\vec{j}) + (x'\vec{i} + y'\vec{j}) = (x + x')\vec{i} + (y + y')\vec{j}$$

$$\vec{u} - \vec{v} = (x\vec{i} + y\vec{j}) - (x'\vec{i} + y'\vec{j}) = (x - x')\vec{i} + (y - y')\vec{j}$$

$$\alpha\vec{u} = \alpha(x\vec{i} + y\vec{j}) = \alpha x\vec{i} + \alpha y\vec{j}$$

Propoziţia 2. Fie vectorii $\vec{u}\,(x, y)$ şi $\vec{v}\,(x', y')$. Atunci:

* $\vec{u} = \vec{v}$ dacă şi numai dacă $x = x'$ şi $y = y'$
* vectorul $\vec{u} + \vec{v}$ are coordonatele $(x + x', y + y')$
* vectorul $\vec{u} - \vec{v}$ are coordonatele $(x - x', y - y')$
* vectorul $\alpha\vec{u}$ are coordonatele $(\alpha x, \alpha y)$

În condiţiile propoziţiei 2, vectorul $\alpha\vec{u} + \beta\vec{v}$, unde α, $\beta \in \mathbb{R}$ are coordonatele $(\alpha x + \beta x', \alpha y + \beta y')$.

Exemplu

Fie vectorii $\vec{u}(-1, 3)$, $\vec{v}(2, -5)$. Coordonatele vectorului $\vec{u} + \vec{v}$ sunt $(-1 + 2, 3 - 5) = (1, -2)$, ale lui $\vec{u} - \vec{v}$ sunt $(-1 -2, 3 -(-5)) = (-3, 8)$, iar ale lui $2\vec{u} + 4\vec{v}$ sunt $(2(-1) + 4 \cdot 2, 2 - 3 + 4(-5)) = (6, -14)$.

Identificarea unui vector de poziţie cu perechea formată de coordonatele sale

Echivalenţa $M(x, y) \Leftrightarrow \overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j}$ ne arată că putem stabili o *corespondenţă bijectivă între vectorii de poziţie ai punctelor din $\mathscr{P}$ şi elementele lui* $\mathbb{R}^2$.

Notăm $\mathscr{V}' = \{ \overrightarrow{OM} \mid M \in \mathscr{P}\}$. Aplicaţia

$$H : \mathscr{V}' \to \mathbb{R}^2,\ H(\overrightarrow{OM}) = (x, y), \text{ dacă } \overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j}$$

este bijectivă. Prin intermediul aplicaţiei H *identificăm* vectorul $\overrightarrow{OM} \in \mathscr{V}'$ cu perechea (x, y) a coordonatelor sale.

Cele două operaţii pe $\mathscr{V}'$, adunarea vectorilor şi înmulţirea cu scalari a vectorilor, ne conduc, prin intermediul lui H, la definirea a două operaţii în $\mathbb{R}^2$.

1) Fie perechile ordonate (a, b), $(a', b') \in \mathbb{R}^2$. Considerăm punctele $M(a, b)$, $N(a', b')$ care au vectorii de poziţie

$$\overrightarrow{OM} = a\vec{i} + b\vec{j},\quad \overrightarrow{ON} = a'\vec{i} + b'\vec{j},$$

Fie punctul P astfel încât $\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{ON} = \overrightarrow{OP}$ (fig. 25), deci

$$\overrightarrow{OP} = (a + a')\vec{i} + (b + b')\vec{j}.$$

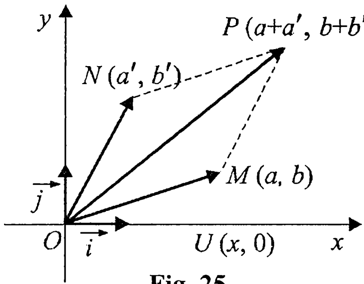


Fig. 25

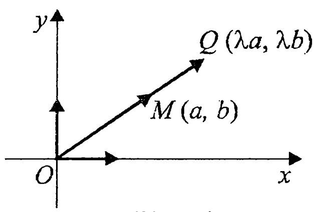


Fig. 26

Adunarea vectorilor ne permite să asociem vectorilor $\overrightarrow{OM}(a, b)$ şi $\overrightarrow{ON}(a', b')$ vectorul $\overrightarrow{OP}(a + a', b + b')$. În felul acesta asociem perechilor (a, b) şi (a', b') perechea $(a + a', b + b')$.

Vom spune că perechea $(a + a', b + b')$ este suma perechilor (a, b) şi (a', b') şi vom nota:

$$(a, b) + (a', b') = (a + a', b + b')$$

(se face suma „pe componente").

Operaţia care asociază oricăror două elemente din $\mathbb{R}^2$ suma lor se numeşte *adunarea în* $\mathbb{R}^2$.

2) Fie perechea ordonată $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ şi numărul real $\lambda \in \mathbb{R}$ (λ se numeşte „scalar" spre deosebire de (a, b) care este „vector"). Considerăm punctul $M(a, b)$ care are vectorul de poziţie $\overrightarrow{OM} = a\vec{i} + b\vec{j}$.

Fie punctul Q astfel încât $\overrightarrow{OQ} = \lambda\overrightarrow{OM}$ (fig. 26), deci $\overrightarrow{OQ} = \lambda a\vec{i} + \lambda b\vec{j}$.

Înmulţirea vectorilor cu numere reale ne permite să asociem vectorului $\overrightarrow{OM}(a, b)$ şi numărului real λ vectorul $\overrightarrow{OQ}(\lambda a, \lambda b)$. În felul acesta asociem perechii (a, b) şi numărului λ perechea $(\lambda a, \lambda b)$.

Spunem că perechea $(\lambda a, \lambda b)$ este *produsul* dintre perechea (a, b) şi numărul λ şi notăm

$$\lambda(a, b) = (\lambda a, \lambda b)$$

(se face produsul „pe componente").

Operaţia care asociază oricărui număr $\lambda \in \mathbb{R}$ şi oricărui element din $\mathbb{R}^2$ produsul lor se numeşte *înmulţirea perechilor cu numere reale.*

*

Cititorul este invitat să verifice următoarele proprietăţi:

1) $(a, b) + (u, v) = (u, v) + (a, b)$
2) $(a, b) + ((u, v) + (w, z)) = ((a, b) + (u, v)) + (w, z)$
3) $(a, b) + (0, 0) = (a, b)$
4) $(a, b) + (-a, -b) = (0, 0)$
5) $a(b(u, v) = ab(u, v)$
6) $1(u, v) = (u, v)$
7) $a(u, v) = (0, 0) \Leftrightarrow a = 0$ sau $u = v = 0$
8) $a((u, v) + (w, z)) = a(u, v) + a(w, z)$
9) $(a + b)(u, v) = a(u, v) + b(u, v)$
10) $(u, v) = u(1, 0) + v(0, 1)$

Propoziţia 3. Fie în plan punctele $M(x_M, y_M)$ şi $A(x_A, y_A)$, $B(x_B, y_B)$. Următoarele afirmaţii sunt echivalente:

a) $\overrightarrow{OM} = \alpha\overrightarrow{OA} + \beta\overrightarrow{OB}$, unde $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$;

b) $x_M = \alpha x_A + \beta x_B$ şi $y_M = \alpha y_A + \beta y_B$.

Demonstraţie. Propoziţia este o consecinţă directă a identificării dintre un vector de poziţie şi perechea sa de coordonate precum şi a operaţiilor cu perechi ordonate, definite mai sus.

Astfel, relaţia vectorială $\overrightarrow{OM} = \alpha\overrightarrow{OA} + \beta\overrightarrow{OB}$ este echivalentă cu relaţia între perechi ordonate:

$$(x_M, y_M) = \alpha(x_A, y_A) + \beta(x_B, y_B).$$

Suma din membrul drept se scrie:

$$(\alpha x_A, \alpha y_A) + (\beta x_B, \beta y_B) =$$
$$(\alpha x_A + \beta x_B, \alpha y_A + \beta y_B) =$$
$$= (\alpha x_A + \beta x_B, \alpha y_A + \beta y_B).$$

Prin urmare, avem:

$$(x_M, y_M) = (\alpha x_A + \beta x_B, \alpha y_A + \beta y_B)$$

ceea ce este echivalent cu

$$x_M = \alpha x_A + \beta x_B \text{ şi } y_M = \alpha y_A + \beta y_B .$$

Altfel.

$$\overrightarrow{OM} = \alpha\overrightarrow{OA} + \beta\overrightarrow{OB} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x_M\vec{i} + y_M\vec{j} = \alpha(x_A\vec{i} + y_A\vec{j}) + \beta(x_B\vec{i} + y_B\vec{j}) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x_M\vec{i} + y_M\vec{j} = (\alpha x_A + \beta x_B)\vec{i} + (\alpha y_A + \beta y_B)\vec{j} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x_M = \alpha x_A + \beta x_B \text{ şi } y_M = \alpha y_A + \beta y_B.$$

Coordonatele punctului care împarte un segment într-un raport dat

P r o p o z i ţ i a 4. Fie $A(x_A, y_A)$ şi $B(x_B, y_B)$ două puncte distincte în planul cartezian şi numărul $t \in \mathbb{R}$, $t \neq 1$.

Coordonatele carteziene ale unicului punct M de pe dreapta AB pentru care $\dfrac{\overline{MA}}{\overline{MB}} = t$ sunt $x_M = \dfrac{x_A - tx_B}{1-t}$, $y_M = \dfrac{y_A - ty_B}{1-t}$ (M este punctul care împarte segmentul orientat AB în raportul t).

Demonstraţie. Prin definiţie, avem $\overrightarrow{MA} = t\overrightarrow{MB}$, de unde, conform unei teoreme din clasa a IX-a, rezultă $\overrightarrow{OM} = \dfrac{1}{1-t}(\overrightarrow{OA} - t\overrightarrow{OB})$.

Aplicând propoziţia 3 pentru $\alpha = \dfrac{1}{1-t}$, $\beta = \dfrac{-t}{1-t}$ şi $\gamma = 0$ obţinem ceea ce trebuia demonstrat.

Observaţie. Dacă M este mijlocul segmentului AB, atunci $t = -1$ şi obţinem

$$x_M = \frac{x_A + x_B}{2},\ y_M = \frac{y_A + y_B}{2}.$$

Invers, dacă punctele A, B, M sunt coliniare şi $M \neq B$, atunci raportul în care M împarte segmentul AB poate fi exprimat după cum urmează:

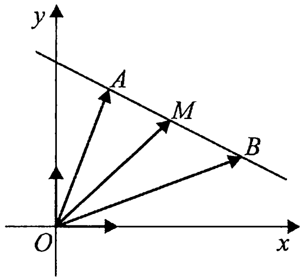


Fig. 27

- dacă $x_A \neq x_B, y_A \neq y_B$, $\dfrac{\overline{MA}}{\overline{MB}} = \dfrac{x_A - x_M}{x_B - x_M} = \dfrac{y_A - y_M}{y_B - y_M}$;
- dacă $y_A = y_B$, $\dfrac{\overline{MA}}{\overline{MB}} = \dfrac{x_A - x_M}{x_B - x_M}$;
- dacă $x_A = x_B$, $\dfrac{\overline{MA}}{\overline{MB}} = \dfrac{y_A - y_M}{y_B - y_M}$

Exemple

1. Fie punctele $A(-3, 5)$ şi $B(2, 1)$. Coordonatele punctului M, care împarte segmentul AB în raportul $-\dfrac{2}{3}$, sunt:

$$x_M = \frac{1}{1+\frac{2}{3}}(x_A - (-\frac{2}{3})x_B) = \frac{3}{5}(-3 + \frac{2}{3} \cdot 2) = \frac{3}{5} \cdot (-\frac{5}{3}) = -1$$

$$y_M = \frac{1}{1+\frac{2}{3}}(y_A - (-\frac{2}{3})y_B) = \frac{3}{5}(5 + \frac{2}{3} \cdot 1) = \frac{3}{5} \cdot \frac{17}{3} = \frac{17}{5}.$$

2. Fie punctele $A(4, -3)$ şi $B(2, -5)$. Mijlocul M al segmentului AB are coordonatele

$$x_M = \frac{x_A + x_B}{2} = \frac{4+3}{2} = \frac{7}{2}, \quad y_M = \frac{y_A + y_B}{2} = \frac{-3-5}{2} = -4,$$

deci $M(\frac{7}{2}, -4)$.

Coordonatele unor puncte importante din triunghi

T e o r e m ă. În planul cartezian fie triunghiul ABC, astfel încât $A(x_A, y_A)$, $B(x_B, y_B)$ şi $C(x_C, y_C)$.

a) Dacă G este centrul de greutate al triunghiului ABC, atunci:

$$x_G = \frac{x_A + x_B + x_C}{3}, \ y_G = \frac{y_A + y_B + y_C}{3}.$$

b) Dacă H este ortocentrul triunghiului ABC, atunci:

$x_H = \text{ctg}B \ \text{ctg}C \cdot x_A + \text{ctg}C \ \text{ctg}A \cdot x_B + \text{ctg}A \ \text{ctg}B \cdot x_C$;

$y_H = \text{ctg}B \ \text{ctg}C \cdot y_A + \text{ctg}C \ \text{ctg}A \cdot y_B + \text{ctg}A \ \text{ctg}B \cdot y_C$.

c) Dacă I este centrul cercului înscris în triunghiul ABC şi lungimile laturilor sunt $a = BC$, $b = CA$, $c = AB$, atunci

$$x_I = \frac{ax_A + bx_B + cx_C}{a+b+c}, \ y_I = \frac{ay_A + by_B + cy_C}{a+b+c}.$$

d) Dacă Ω este centrul cercului circumscris lui ABC, atunci:

$$x_\Omega = \frac{1 - \text{ctg}B \ \text{ctg}C}{2} x_A + \frac{1 - \text{ctg}C \ \text{ctg}A}{2} x_B + \frac{1 - \text{ctg}A \, \text{ctg}B}{2} x_C$$

$$y_\Omega = \frac{1 - \text{ctg}B \ \text{ctg}C}{2} y_A + \frac{1 - \text{ctg}C \ \text{ctg}A}{2} y_B + \frac{1 - \text{ctg}A \, \text{ctg}B}{2} y_C.$$

Demonstraţie. Se aplică propoziţia 3, ţinând cont de următoarele formule din manualul de clasa a IX-a:

$$\overrightarrow{OG} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}),$$

$$\overrightarrow{OI} = \frac{1}{a+b+c}(a\overrightarrow{OA} + b\overrightarrow{OB} + c\overrightarrow{OC}),$$

$$\overrightarrow{OH} = \text{ctg}B \ \text{ctg}C \ \overrightarrow{OA} + \text{ctg}C \ \text{ctg}A \ \overrightarrow{OB} + \text{ctg}A \ \text{ctg}B \ \overrightarrow{OC},$$

$$\overrightarrow{O\Omega} = \frac{1 - \text{ctg}B \ \text{ctg}C}{2} \overrightarrow{OA} + \frac{1 - \text{ctg}C \ \text{ctg}A}{2} \overrightarrow{OB} + \frac{1 - \text{ctg}A \, \text{ctg}B}{2} \overrightarrow{OC}.$$

O condiţie de coliniaritate a doi vectori

Fie vectorii $\vec{u}(x, y)$ şi $\vec{v}(x', y')$. Se ştie că avem echivalenţa: $\vec{u}$, $\vec{v}$ sunt coliniari $\Leftrightarrow$ există $t \in \mathbb{R}$ astfel încât $\vec{v} = t\vec{u}$. Cum $t\vec{u}$ are coordonatele (tx, ty), aplicând propoziţia 1, rezultă

$$\vec{v} = t\vec{u} \Leftrightarrow x' = tx \text{ şi } y' = ty.$$

Vom demonstra:

Propoziţia 5. Fie a, b şi a', b' numere reale cu proprietatea: ($a \neq 0$ sau $b \neq 0$) şi ($a' \neq 0$ sau $b' \neq 0$). Sunt echivalente afirmaţiile:

(i) există un număr real $t \neq 0$, astfel încât $a' = ta$, $b' = tb$;

(ii) avem egalitatea $ab' - a'b = 0$.

Demonstraţie. Implicaţia (i) $\Rightarrow$ (ii) este evidentă.

Vom demonstra implicaţia (ii) $\Rightarrow$ (*i*). Fie, de exemplu $a \neq 0$. Notăm $\frac{a'}{a} = t$, deci $a' = ta$. Atunci: $ab' - a'b = 0 \Rightarrow b' - \frac{a'}{a}b = 0 \Rightarrow b' = tb$.

Propoziţia 6. Fie vectorii $\vec{u}(x, y)$ şi $\vec{v}(x', y')$. Următoarele afirmaţii sunt echivalente:

a) vectorii $\vec{u}$ şi $\vec{v}$ sunt coliniari;

b) are loc egalitatea $xy' - x'y = 0$.

Demonstraţie. **a) $\Rightarrow$ b)** Cazul $\vec{u} = \vec{0}$ sau $\vec{v} = \vec{0}$ (când $\vec{u}$ şi $\vec{v}$ sunt automat coliniari, deoarece vectorul nul este coliniar cu orice vector) este banal: avem $x = y = 0$ (dacă $\vec{u} = \vec{0}$) sau $x' = y' = 0$ (dacă $\vec{v} = \vec{0}$).

Dacă $\vec{u} \neq \vec{0}$ şi $\vec{v} \neq \vec{0}$, rezultă existenţa unui număr real $t \neq 0$ astfel încât $\vec{v} = t\vec{u}$, deci $x' = tx$, $y' = ty$ şi am ajuns la implicaţia (i) $\Rightarrow$ (ii) din propoziţia anterioară.

b) $\Rightarrow$ a) Dacă unul dintre vectori este nul, rezultă că ei sunt automat coliniari. Dacă ambii sunt nenuli, avem: ($x \neq 0$ sau $y \neq 0$) şi ($x' \neq 0$ sau $y' \neq 0$); aplicând implicaţia (ii) $\Rightarrow$ (i) din propoziţia 5 rezultă că există $t \neq 0$ astfel încât $x' = tx$, $y' = ty$ deci $\vec{v} = t\vec{u}$, adică $\vec{u}$ şi $\vec{v}$ sunt coliniari.

Exemple

1) Vectorii $\vec{u}(4, -3)$ şi $\vec{v}(12, -9)$ sunt coliniari, deoarece coordonatele lor îndeplinesc condiţia $xy' - x'y = 4(-9) - 12(-3) = 0$. De altfel, $\vec{u} = 4\vec{i} - 3\vec{j}$ şi $\vec{v} = 12\vec{i} - 9\vec{j}$, deci $\vec{v} = 3(4\vec{i} - 3\vec{j})$ adică $\vec{v} = 3\vec{u}$.

2) Se arată imediat că $\vec{u}(5, 0)$ şi $\vec{v}(3, 0)$ sunt coliniari (fiecare este coliniar cu vectorul $\vec{i}(1, 0)$. (De asemenea, $\vec{u}(0, -6)$ şi $\vec{v}(0, 4)$ sunt coliniari (fiecare este coliniar cu $\vec{j}(0, 1)$) .

3) Fie $\vec{u}(5, -1)$ şi $\vec{v}(-4, 3)$. Deoarece $xy' - x'y = 15 - 4 = 11 \neq 0$, vectorii $\vec{u}$ şi $\vec{v}$ nu sunt coliniari.

Coordonatele vectorului $\overrightarrow{AB}$ în funcţie de coordonatele punctelor A şi B

Fie punctele $A(x_A, y_A)$ şi $B(x_B, y_B)$ (fig. 27). Să determinăm coordonatele vectorului $\overrightarrow{AB}$.

Avem $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$ şi cum $\overrightarrow{OA} = x_A\vec{i} + y_A\vec{j}$, $\overrightarrow{OB} = x_B\vec{i} + y_B\vec{j}$, rezultă $\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A)\vec{i} + (y_B - y_A)\vec{j}$.

Propoziţia 7. Vectorul $\overrightarrow{AB}$, unde $A(x_A, y_A)$ şi $B(x_B, y_B)$, are coordonatele $(x_B - x_A; y_B - y_A)$.

Se constată că $\overrightarrow{AB}$ este vectorul de poziţie al punctului $M(x_B - x_A; y_B - y_A)$.

În adevăr, se arată imediat că $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{AB}$. Prin identificarea unui vector de poziţie cu coordonatele sale, rezultă:

* vectorul $\overrightarrow{AB}$ se identifică cu perechea

$$(x_B - x_A; y_B - y_A)$$

* vectorul $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD}$ se identifică cu perechea

$$(x_B + x_D - x_A - x_C; (y_B + y_D - y_A - y_C)$$

* vectorul $t\overrightarrow{AB}$ se identifică cu perechea

$$t(x_B - x_A; y_B - y_A) = (tx_B - tx_A; ty_B - ty_A)$$

Exemplu

Fie punctele $A(1, 4)$ şi $B(5, 7)$, reprezentate în figura 28. Vectorul $\overrightarrow{AB}$ are coordonatele $(5 - 1, 7 - 4) = (4, 3)$, deci $\overrightarrow{AB}$ $(4, 3)$.

$\overrightarrow{AB}$ este vectorul de poziţie al punctului $M(4, 3)$, deci $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{AB}$.

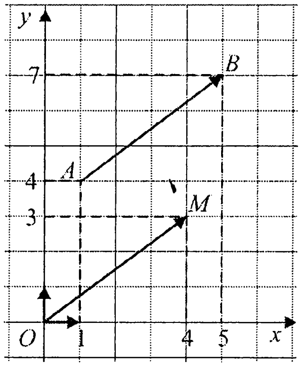


Fig. 28

Exerciţii rezolvate

E1. Să se arate că:

a) punctele $A(-2,3)$, $B(-8,12)$ şi $C(2, -3)$ sunt coliniare;

b) punctele $A(0, -6)$, $B(7, -1)$ şi $C(-10, -13)$ nu sunt coliniare.

R: Reamintim: punctele A, B, C coliniare $\Leftrightarrow$ vectorii $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$ sunt coliniari.

a) Avem $\overrightarrow{AB}(-6, 9)$ şi $\overrightarrow{BC}(10, -15)$, iar $xy' - x'y = (-6)\cdot(-15) - 9\cdot 10 = 0$. Prin urmare $\overrightarrow{AB}$ şi $\overrightarrow{BC}$ sunt coliniari, deci punctele A, B şi C sunt coliniare.

Raportul în care punctul C împarte segmentul AB este $\dfrac{\overline{CA}}{\overline{CB}} = \dfrac{x_A - x_C}{x_B - x_C} = \dfrac{4}{5}$.

b) Avem $\overrightarrow{AB}(7, 5)$, $\overrightarrow{BC}(-17, -12)$, iar $xy' - x'y = -84 + 85 = 1 \neq 0$. Rezultă că vectorii $\overrightarrow{AB}$ şi $\overrightarrow{BC}$ nu sunt coliniari, deci punctele A, B şi C nu sunt coliniare.

E2. Fiind date punctele $A(2, -3)$, $B(5, 4)$, $C(0, -1)$ şi $D(\frac{3}{2}, \frac{5}{2})$, să se arate că dreptele AB şi CD sunt paralele.

R: Reamintim: $AB \parallel CD \Leftrightarrow$ vectorii $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CD}$ sunt coliniari şi $AB \neq CD$. Deoarece punctul C nu aparţine dreptei AB (echivalent, punctele A, B şi C nu sunt coliniare), rezultă $AB \neq CD$.

Avem $\overrightarrow{AB}(3,7)$ şi $\overrightarrow{CD}(\frac{3}{2}, \frac{7}{2})$, iar $xy' - x'y = \frac{21}{2} - \frac{21}{2} = 0$, deci cei doi vectori sunt coliniari. Coliniaritatea vectorilor $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CD}$ implică $AB \parallel CD$ sau $AB = CD$. Cum avem $AB \neq CD$, rezultă $AB \parallel CD$.

E3. Fie punctele $A(3, 7)$, $B(-5, 2)$ şi $C(8, -4)$. Să se afle coordonatele punctului D astfel încât patrulaterul $ABCD$ să fie paralelogram.

R: Fie E, F mijloacele diagonalelor AC, BD. Patrulaterul $ABCD$ este paralelogram $\Leftrightarrow$ punctele E, F coincid. Fie $D(a, b)$, $a, b \in \mathbb{R}$.

Punctul E are coordonatele $x_E = \frac{1}{2}(3 + 8) = \frac{11}{2}$, $y_E = \frac{1}{2}(7 - 4) = \frac{3}{2}$, deci $E(\frac{11}{2}, \frac{3}{2})$, iar $F(\frac{-5+a}{2}, \frac{2+b}{2})$.

Cum $E = F$, obţinem $\frac{-5+a}{2} = \frac{11}{2}$ şi $\frac{2+b}{2} = \frac{3}{2}$, de unde $a = 16$, $b = 1$.

Altfel. Patrulaterul $ABCD$ este paralelogram $\Leftrightarrow \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$. Avem $\overrightarrow{AB}(-8, -5)$, $\overrightarrow{DC}(8 - a, -4 - b)$. Rezultă $-8 = 8 - a$ şi $-5 = -4 - b$, deci $a = 16$, $b = 1$.

Considerăm planul cartezian cu un reper Ox, Oy.

Scrieţi sub forma $a\vec{i} + b\vec{j}$, unde $a, b \in \mathbb{R}$, fiecare dintre următorii vectori: $\vec{u}_1(-4, 0)$, $\vec{u}_2(0, 3)$, $\vec{u}_3(5, -2)$, $\vec{u}_4(-3, 6)$.

Care sunt coordonatele vectorului $\vec{u}$, dacă avem:

a) $\vec{u} = 2\vec{i} - (\vec{i} + \vec{j}) + 4\vec{i} + 5\vec{j}$; b) $\vec{u} = -3\vec{i} + 4(-\vec{i} + 3\vec{j}) + 7\vec{i} - 6\vec{j}$;

c) $\vec{u} = 5\vec{i} - 7\vec{j} + 2(-3\vec{i} + 2\vec{j}) + 3\vec{j}$.

Determinaţi $a, b \in \mathbb{R}$ astfel încât $\vec{u} = \vec{v}$, unde:

a) $\vec{u}(3, -4)$, $\vec{v}(a, 2b)$; b) $\vec{u}(2, -3)$, $\vec{v}(3a - 2b, a + 2b)$;

c) $\vec{u}(5, 3 - b)$, $\vec{v}(a - 1, b\sqrt{2})$.

Fiind daţi vectorii $\vec{u}(3, 2)$ şi $\vec{v}(-4, 1)$, calculaţi coordonatele vectorilor $\vec{a} = \vec{u} + \vec{v}$, $\vec{b} = \vec{u} - \vec{v}$, $\vec{c} = -3\vec{u} + 4\vec{v}$.

Fiind daţi vectorii $\vec{u}(-3, 2)$, $\vec{v}(6, 5)$ şi $\vec{w}(4, 0)$ determinaţi coordonatele vectorilor $\vec{a} = \vec{u} + \vec{v} - \vec{w}$ şi $\vec{b} = 5\vec{u} - 2\vec{v} + 3\vec{w}$.

Arătaţi că vectorii $\vec{u}$ şi $\vec{v}$ sunt coliniari şi găsiţi r astfel încât $\vec{v} = r\vec{u}$, unde:

a) $\vec{u}(2, -1)$, $\vec{v}(4, -2)$; b) $\vec{u}(\frac{2}{3}, -3)$, $\vec{v}(2, -9)$; c) $\vec{u}(-\frac{1}{2}, 1)$, $\vec{v}(\frac{1}{4}, -\frac{1}{2})$.

Determinaţi $a \in \mathbb{R}$ astfel încât vectorii $\vec{u}$ şi $\vec{v}$ să fie coliniari, unde:

a) $\vec{u}(3, -4)$, $\vec{v}(a, 8)$; b) $\vec{u}(a, -1)$, $\vec{v}(-4, a)$; c) $\vec{u}(-1, 2)$, $\vec{v}(a-1, 3a)$.

Fie punctele $A(0, 3)$, $B(1, -3)$ şi $C(2, 4)$. Calculaţi coordonatele vectorilor $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CA}$. Verificaţi relaţia $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} = \vec{0}$.

Fie punctele $A(4, -1)$, $B(0, 1)$ şi $C(7, 5)$. Aflaţi coordonatele vectorilor:

a) $-2\overrightarrow{BC}$; b) $3\overrightarrow{AC} - 2\overrightarrow{AB}$.

Fie punctele $A(-3, 4)$, $B(1, -2)$ şi $C(0, -4)$. Care sunt coordonatele punctelor M, N şi P, definite prin relaţiile:

a) $\overrightarrow{BM} = \overrightarrow{AC}$; b) $\overrightarrow{AN} = \overrightarrow{AC} - 3\overrightarrow{BC}$; a) $\overrightarrow{PC} = 2\overrightarrow{AC} - 3\overrightarrow{AB}$.

Care sunt coordonatele punctului M dacă:

a) $\overrightarrow{AM} = 2\overrightarrow{AB} - 3\overrightarrow{AC}$, unde $A(4, 2)$, $B(-2, 1)$ şi $C(-3, 5)$;

b) $\overrightarrow{AM} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$, unde $A(-5, -3)$, $B(2, -1)$ şi $C(1, -2)$.

Fie punctele $A(1, 2)$, $B(-1, -1)$ şi $C(4, -3)$ şi G centrul de greutate al triunghiului ABC.

a) Aflaţi coordonatele lui G şi apoi verificaţi $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$.

b) Reciproc, dacă punctul T verifică relaţia $\overrightarrow{TA} + \overrightarrow{TB} + \overrightarrow{TC} = \vec{0}$, arătaţi că $T = G$.

Fie punctele $A(-1, 2)$, $B(-3, 1)$, $C(2, 1)$ şi $M(a, b)$ un punct oarecare din plan. Aflaţi coordonatele vectorului $\vec{u}$, unde:

a) $\vec{u} = \overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} - 3\overrightarrow{MC}$; b) $\vec{u} = 3\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} - 5\overrightarrow{MC}$.

Arătaţi că punctele A, B şi C sunt coliniare şi calculaţi raportul în care punctul C împarte segmentul AB, unde:

a) $A(1, -1)$, $B(-2, 1)$, $C(-5, 3)$; b) $A(2, 1)$, $B(1, -3)$, $C(3, 5)$;

c) $A(-1, 3)$, $B(-1, 0)$, $C(-1, -2)$.

Fie punctele $A(-2, 1)$ şi $B(3, -3)$.

a) Fie un punct $M(a, b)$. Ce relaţie trebuie să existe între a şi b astfel încât punctul M să aparţină dreptei AB?

b) Care dintre punctele $C(5, -1)$, $D(1, 3)$ aparţine dreptei AB?

În acest capitol vom considera un plan cartezian $\mathscr{P}$, cu reperul cartezian Ox, Oy.

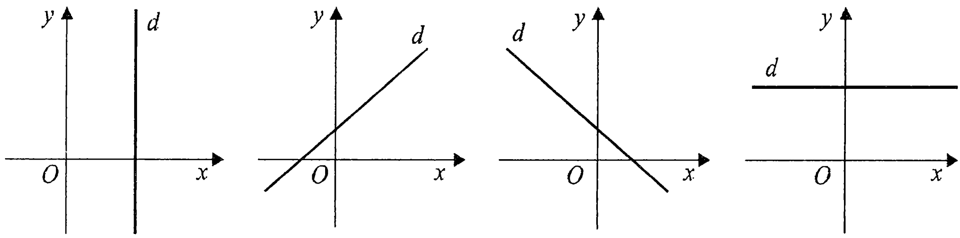
A face geometrie analitică în $\mathscr{P}$ înseamnă a folosi regula de identificare între punctele planului şi perechile ordonate de numere reale, descrisă în capitolul precedent: punctul $P(x, y) \in \mathscr{P}$ este identic cu perechea ordonată $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

Mai precis, înseamnă că *o figură geometrică* din *planul* $\mathscr{P}$ (adică o mulţime de puncte din $\mathscr{P}$) se identifică cu *o mulţime de perechi ordonate din* $\mathbb{R}^2$. De asemenea, proprietăţile geometrice (paralelism, coliniaritate, concurenţă etc.) se traduc în relaţii algebrice. De exemplu, pentru a demonstra că două drepte sunt paralele, vom arăta că anumite numere reale verifică o relaţie algebrică.

Vom aplica acest punct de vedere pentru cele mai simple figuri geometrice ale planului $\mathscr{P}$, anume dreptele.

*

După poziţia faţă de axele Ox şi Oy, vom împărţi dreptele planului $\mathscr{P}$ în clase distincte: drepte verticale, drepte orizontale şi drepte oblice,



dreaptă verticală $d \parallel Oy$ sau $d = Oy$ | dreaptă oblică | dreaptă oblică | dreaptă orizontală $d \parallel Ox$ sau $d = Ox$

Fig. 1

Vom spune că două drepte date d şi d' *au aceeaşi direcţie* (sau *sunt paralele in sens generalizat*) dacă ele coincid sau sunt paralele.

Definţie. Fie o dreaptă d în planul $\mathscr{P}$. Spunem că:

* d este *verticală*, dacă d are aceeaşi direcţie cu axa Oy
* d este *orizontală* dacă d are aceeaşi direcţie cu axa Ox
* d este *oblică* dacă d nu are aceeaşi direcţie nici cu Ox, nici cu Oy.

Scopul principal al acestui paragraf este de a demonstra următoarea:

T e o r e m ă (ecuaţia carteziană generală a dreptei). Fie $d \subset \mathscr{P}$ o mulţime nevidă. Următoarele afirmaţii sunt echivalente:

a) Mulţimea d este o dreaptă.

b) Există numerele reale a, b, c, cu $a \neq 0$ sau $b \neq 0$, astfel încât

$$d = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid ax + by + c = 0\}.$$

Completări si denumiri

În condiţiile teoremei, egalitatea $ax + by + c = 0$ se numeşte *ecuaţia carteziană generală a dreptei d* şi se notează $d : ax + by + c = 0$.

Dacă d are ecuaţia $ax + by + c = 0$, avem echivalenţa

$$M(x_M, y_M) \in d \Leftrightarrow ax_M + by_M + c = 0.$$

Cu alte cuvinte, punctul (x_M, y_M) aparţine dreptei d dacă şi numai dacă (x_M, y_M) verifică ecuaţia $ax + by + c = 0$.

Vom demonstra teorema considerând, separat, cazul unei drepte care are aceeaşi direcţie cu una dintre axele Ox, Oy şi, apoi, cazul unei drepte oblice.

1. *Dreapta care are aceeaşi direcţie cu una dintre axele Ox, Oy*

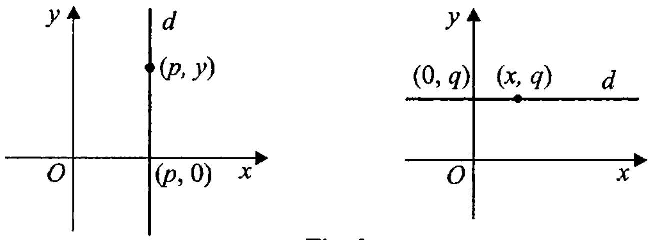


Fig. 2

Dacă dreapta d are aceeaşi direcţie cu Oy şi trece prin $(p, 0)$ atunci $d = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = p, y \in \mathbb{R}\} = \{(p, y) \mid y \in \mathbb{R}\}$ deci d are ecuaţia $d : x = p$ (aici $a = 1$, $b = 0$, $c = -p$).

În particular, axa Oy are ecuaţia $Oy : x = 0$. Reciproc, orice egalitate de forma $x = p$ este ecuaţia unei drepte care are aceeaşi direcţie cu Oy.

Dacă dreapta d are aceeaşi direcţie cu Ox şi trece prin $(0, q)$ atunci $d = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in \mathbb{R}, y = q\} = \{(x, q) \mid x \in \mathbb{R}\}$, deci d are ecuaţia $d : y = q$ (aici $a = 0$, $b = 1$, $c = -q$).

În particular, axa Ox are ecuaţia $Ox : y = 0$. Reciproc, orice egalitate de forma $y = q$ este ecuaţia unei drepte care are aceeaşi direcţie cu Ox.

Observaţie. Fie două puncte distincte $M_1(x_1, y_1)$ şi $M_2(x_2, y_2)$. Notăm cu M_1M_2 dreapta care trece prin M_1 şi M_2.

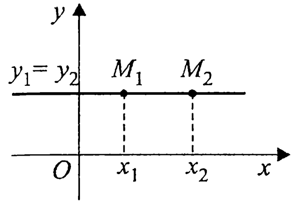


Fig. 3

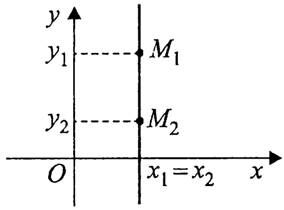


Fig. 4

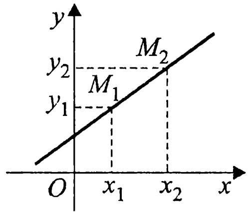


Fig. 5

Au loc următoarele proprietăţi:

* $y_1 = y_2 \Leftrightarrow M_1M_2$ este dreaptă orizontală (fig. 3);
* $x_1 = x_2 \Leftrightarrow M_1M_2$ este dreaptă verticală (fig. 4);
* $x_1 \neq x_2$ şi $y_1 \neq y_2 \Leftrightarrow M_1M_2$ este dreaptă oblică (fig. 5).

2. *Dreapta oblică*

În cazul unei drepte oblice, condiţia „$a \neq 0$ sau $b \neq 0$" trebuie înlocuită cu condiţia „$a \neq 0$ şi $b \neq 0$". Vom demonstra următoarea proprietate, care este „inclusă" în teorema anterioară.

Propoziţie (ecuaţia carteziană generală a dreptei oblice)

Fie $d \subset \mathscr{P}$ o mulţime nevidă. Următoarele afirmaţii sunt echivalente:

a) Mulţimea d este o dreaptă oblică.

b) Există trei numere reale a, b, c, cu $a \neq 0$ şi $b \neq 0$, astfel încât

$$d = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid ax + by + c = 0\}.$$

Demonstraţie. **b) $\Rightarrow$ a).** Fie numerele $a \neq 0$, $b \neq 0$, c şi mulţimea d. Vom arăta, în mai multe etape, că d este o dreaptă oblică.

Fie $M_1(x_1, y_1)$ şi $M_2(x_2, y_2)$ două puncte distincte din d, deci

$$ax_1 + by_1 + c = 0,\ ax_2 + by_2 + c = 0.$$

Notăm prin M_1M_2 dreapta care trece prin M_1 şi M_2.

I. Vom demonstra incluziunea $M_1M_2 \subset d$.

Fie $M(x, y)$ un punct al dreptei M_1M_2, deci M, M_1 şi M_2 sunt coliniare. Conform unei proprietăţi demonstrate în clasa a IX-a, rezultă că există un număr real t astfel încât

$$\overrightarrow{OM} = (1 - t)\,\overrightarrow{OM}_1 + t\,\overrightarrow{OM}_2,$$

adică $x = (1 - t)x_1 + tx_2$ şi $y = (1 - t)y_1 + ty_2$. Prin urmare:

$$ax + by + c = (1 - t)(ax_1 + by_1 + c) + t(ax_2 + by_2 + c) = 0.$$

În concluzie, coordonatele lui M verifică ecuaţia $ax + by + c = 0$, adică $M \in d$. Am demonstrat că $M \in M_1M_2$ implică $M \in d$, deci $M_1M_2 \subset d$.

II. Coordonatele punctelor M_1, M_2 au proprietatea $x_1 \neq x_2$ şi $y_1 \neq y_2$.

Într-adevăr, cum $M_1 \neq M_2$ rezultă $(x_1, y_1) \neq (x_2, y_2)$, deci $x_1 \neq x_2$ sau $y_1 \neq y_2$.

Dacă avem $x_1 \neq x_2$, atunci $y_1 \neq y_2$, deoarece $b \neq 0$ şi

$$y_1 = -\frac{a}{b}x_1 - \frac{c}{b}, \quad y_2 = -\frac{a}{b}x_2 - \frac{c}{b}.$$

La fel se arată că $y_1 \neq y_2$ implică $x_1 \neq x_2$, (folosim faptul că $a \neq 0$).

III. Vom demonstra incluziunea $d \subset M_1M_2$.

Fie un punct $M(x, y) \in d$. Vom arăta că $M \in M_1M_2$, sau că punctele M, M_1, şi M_2 sunt coliniare, adică vom găsi $t \in \mathbb{R}$ astfel încât

$$\overrightarrow{OM} = (1-t)\,\overrightarrow{OM}_1 + t\,\overrightarrow{OM}_2, \tag{1}$$

ceea ce este echivalent cu

$$\begin{cases} x = (1-t)x_1 + tx_2 = x_1 + t(x_2 - x_1) \\ y = (1-t)y_1 + ty_2 = y_1 + t(y_2 - y_1) \end{cases} \tag{2}$$

Avem relaţiile:

$$\begin{aligned} ax_1 + by_1 + c = 0 \\ ax_2 + by_2 + c = 0 \\ ax + by + c = 0 \end{aligned} \tag{3}$$

Din (3) deducem, prin scăderi

$$a(x - x_1) + b(y - y_1) = 0 \Rightarrow \frac{x - x_1}{y - y_1} = -\frac{b}{a}$$

$$a(x - x_2) + b(y - y_2) = 0 \Rightarrow \frac{x - x_2}{y - y_2} = -\frac{b}{a}$$

$$a(x_2 - x_1) + b(y_2 - y_1) = 0 \Rightarrow \frac{x_2 - x_1}{y_2 - y_1} = -\frac{b}{a}$$

de unde, ţinând cont de proprietatea de la II, avem

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}. \tag{4}$$

Relaţia (4) este fundamentală! Vom reveni asupra ei în paragraful următor.

Conform cu (4) luăm $t = \dfrac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \dfrac{y - y_1}{y_2 - y_1}$ şi obţinem (2) .

IV. La I am demonstrat incluziunea $M_1M_2 \subset d$, iar la III am demonstrat incluziunea contrară $d \subset M_1M_2$. În concluzie $d = M_1M_2$, deci d este o dreaptă.

V. În final, vom demonstra că dreapta d este oblică, arătând că fiecare dintre intersecţiile $d \cap Ox$ şi $d \cap Oy$ are câte un punct.

Avem: $(x, y) \in d \cap Ox \Leftrightarrow ax + by + c = 0$ şi $y = 0 \Leftrightarrow (x, y) = (-\frac{c}{a}, 0)$.

$(x, y) \in d \cap Oy \Leftrightarrow ax + by + c = 0$ şi $x = 0 \Leftrightarrow (x, y) = (0, -\frac{c}{b})$.

În concluzie, $d \cap Ox = \{ (-\frac{c}{a}, 0)\}$, $d \cap Oy = \{ (0, -\frac{c}{b})\}$.

În cazul particular $c = 0$, avem $d \cap Ox = d \cap Oy = \{(0, 0)\}$ (în acest caz, dreapta d trece prin originea $(0, 0)$ şi nu se confundă cu nici una dintre axe).

Observaţie. Fie două puncte $M_1(x_1, y_1)$ şi $M_2(x_2, y_2)$, astfel încât M_1M_2 este o dreaptă oblică. Rezultă $x_1 \neq x_2$ şi $y_1 \neq y_2$. Din demonstraţia anterioară rezultă: $M(x, y) \in M_1M_2 \Leftrightarrow (x, y)$ verifică relaţia $\dfrac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \dfrac{y - y_1}{y_2 - y_1}$.

a) $\Rightarrow$ b) Fie $d \subset \mathscr{P}$ o dreaptă oblică. Vom demonstra că există trei numere reale $a \neq 0$, $b \neq 0$ şi c astfel încât

$$d = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid ax + by + c = 0\}.$$

Fie $M_1(x_1, y_1) \neq M_2(x_2, y_2)$, puncte ale dreptei d, deci $d = M_1M_2$. Rezultă că M_1M_2 este o dreaptă oblică, de unde avem:

* $x_1 \neq x_2$ (în caz contrar, rezultă că d are aceeaşi direcţie cu Oy);

* $y_1 \neq y_2$ (în caz contrar, rezultă că d are aceeaşi direcţie cu Ox).

Avem $M(x, y) \in d \Leftrightarrow M(x, y) \in M_1M_2$ şi, conform observaţiei anterioare,

$$M(x, y) \in M_1M_2 \Leftrightarrow \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} \Leftrightarrow (y_2 - y_1)x + (x_1 - x_2)y + x_2y_1 - x_1y_2 = 0.$$

Prin urmare, $d = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (y_2 - y_1)x + (x_1 - x_2)y + x_2y_1 - x_1y_2 = 0\}$, adică putem lua $a = y_2 - y_1 \neq 0$, $b = x_1 - x_2 \neq 0$ şi $c = x_2y_1 - x_1y_2$.

Demonstraţia s-a încheiat.

Exerciţii rezolvate

E1. Fie dreapta $d : 7x - y + 4 = 0$.

a) Arătaţi că punctul $A(-1, -3)$aparţine dreptei d, iar punctul $B(2, -5)$ nu aparţine dreptei d.

b) Determinaţi punctul de pe dreapta d care are abscisa 2 precum şi punctul de pe dreapta d care are ordonata -10.

c) Determinaţi punctele de intersecţie ale dreptei d cu axele de coordonate.

R: Fie un punct $A(x_A, y_A)$ şi dreapta $d : ax + by + c = 0$. Ştim că punctul A aparţine dreptei d dacă şi numai dacă perechea sa de coordonate verifică ecuaţia dreptei, adică $A(x_A, y_A) \in d \Leftrightarrow ax_A + by_A + c = 0$. În consecinţă, dacă $ax_A + by_A + c \neq 0$, atunci A nu aparţine dreptei d (sau dreapta d nu trece prin punctul A).

Dacă $A(x_A, y_A) \in d$ şi $x_A = \alpha$, putem calcula y_A, dacă $b \neq 0$:

$$x_A = \alpha \Rightarrow a\alpha + by_A + c = 0 \Rightarrow y_A = \frac{-c - a\alpha}{b}.$$

Analog, dacă $A(x_A, y_A) \in d$ şi $y_A = \beta$, atunci $x_A = \dfrac{-c - b\beta}{a}$, dacă $a \neq 0$.

a) Înlocuind $x = -1$, $y = -3$ în ecuaţia lui d, obţinem $-7 - (-3) + 4 = 0$, deci $A(-1, -3) \in d$.

Înlocuind $x = 2$, $y = -5$ în ecuaţia lui d obţinem $14 - (-5) + 4 = 23 \neq 0$, deci $B(2, -5) \notin d$.

b) Înlocuind $x = 2$ în ecuaţia lui d avem $14 - y + 4 = 0 \Leftrightarrow y = 18$, deci punctul de abscisă 2 este $C(2, 18)$.

Înlocuind $y = -10$ în ecuaţia lui d avem $7x + 10 + 4 \Leftrightarrow x = -2$, deci punctul de ordonată -10 este $D(-2, -10)$.

c) Dreapta d este oblică, deci intersectează fiecare axă în câte un punct. Pentru a afla $d \cap Ox$ rezolvăm sistemul:

$$y = 0 \text{ şi } 7x - y + 4 = 0 \Leftrightarrow y = 0 \text{ şi } 7x + 4 = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{4}{7}, y = 0.$$

Pentru a afla $d \cap Oy$ rezolvăm sistemul:

$$x = 0 \text{ şi } 7x - y + 4 = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ şi } -y + 4 = 0 \Leftrightarrow x = 0, y = 4.$$

Prin urmare $d \cap Ox = \{A(-\frac{4}{7}, 0)\}$, $d \cap Oy = \{B(0, 4)\}$.

Calculele pot fi aranjate în următoarea schemă:

x	0	$-\frac{4}{7}$
y	4	0

E2. Reprezentaţi grafic dreapta d, unde d are ecuaţia:

a) $x - 2y = 0$; b) $x - 2y - 4 = 0$; c) $x + 3y - 6 = 0$.

R: Pentru a reprezenta grafic, dreapta $d : ax + by + c = 0$, cu $a \neq 0$ şi $b \neq 0$, este suficient să determinăm două puncte ale dreptei d.

* Dacă $c = 0$, atunci originea $O(0, 0)$ aparţine dreptei d. Al doilea punct se obţine astfel: înlocuim $x = \alpha$ în ecuaţia dreptei şi găsim $a\alpha + by = 0$, de unde $y = -\frac{a}{b}\alpha$, deci $A(\alpha, -\frac{a}{b}\alpha) \in d$.

Schema de calcul este:

x	0	α
y	0	$-\frac{a}{b}\alpha$

* Dacă $c \neq 0$, se determină punctele de intersecţie ale dreptei d cu axele de coordonate, anume $A(-\frac{c}{a}, 0)$ şi $B(0, -\frac{c}{b})$.

Schema de calcul este:

x	0	$-\frac{c}{a}$
y	$-\frac{c}{b}$	0

Dacă punctele A, B sunt prea apropiate putem alege orice altă pereche de puncte distincte ale dreptei d.

a)

x	0	1
y	0	2

b)

x	0	4
y	−2	0

c)

x	0	6
y	2	0

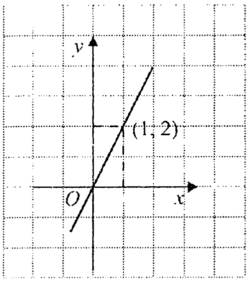


Fig. 6

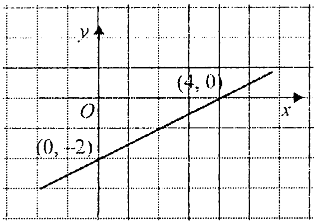


Fig. 7

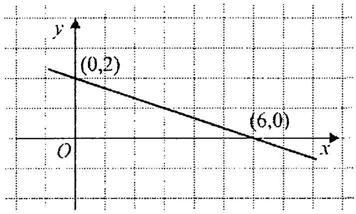


Fig. 8

Condiția ca două drepte să coincidă

Teoremă. Fie numerele reale a, b, c (unde $a \neq 0$ sau $b \neq 0$) și a', b', c' (unde $a' \neq 0$ sau $b' \neq 0$). Considerăm dreptele

$$d : ax + by + c = 0, \quad d' : a'x + b'y + c' = 0.$$

Următoarele afirmații sunt echivalente:

a) Avem egalitatea $d = d'$;

b) Numerele a, b, c și a', b', c' sunt proporționale, adică există un număr real $\lambda \neq 0$ astfel încât $a' = \lambda a$, $b' = \lambda b$, $c' = \lambda c$.

Demonstrație. **a) $\Rightarrow$ b)**

1. Dacă $a = 0$, rezultă $b \neq 0$ și d are aceeași direcție cu Ox. Cum $d = d'$ trebuie să avem $a' = 0$ și $b' \neq 0$, deci:

$$d : by + c = 0 \Leftrightarrow y = -\frac{c}{b}, \quad d' : b'y + c' = 0 \Leftrightarrow y = -\frac{c'}{b'}.$$

Deoarece $d = d'$, trebuie să avem $-\frac{c}{b} = -\frac{c'}{b'}$. Dacă luăm $\lambda = \frac{b'}{b}$, obținem $c' = \lambda c$ și $b' = \lambda b$. La fel se tratează și cazul $b = 0$.

2. Dacă $a \neq 0$ și $b \neq 0$ rezultă că d este dreaptă oblică. Prin urmare și d' este dreaptă oblică, deci $a' \neq 0$ și $b' \neq 0$.

Fie două puncte distincte $M_1(x_1, y_1)$ și $M_2(x_2, y_2)$ pe dreapta d, deci și pe dreapta d'. Cum $M_1, M_2 \in d$, avem:

$$ax_1 + by_1 + c = 0,\ ax_2 + by_2 + c = 0 \Rightarrow a(x_2 - x_1) + b(y_2 - y_1) = 0 \Rightarrow \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = -\frac{a}{b}.$$

Analog, cum $M_1, M_2 \in d'$ avem $\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = -\frac{a'}{b'}$. Rezultă $-\frac{a}{b} = -\frac{a'}{b'}$ sau $\frac{a'}{a} = \frac{b'}{b}$. Notăm $\frac{a'}{a} = \lambda$, deci $\lambda \neq 0$ și avem relațiile $a' = \lambda a$, $b' = \lambda b$. Rezultă $d' : \lambda ax + \lambda by + c' = 0$. Dreapta d și dreapta d' intersectează axa Ox în același punct, deci $(\frac{-c'}{\lambda a}, 0) = (\frac{-c}{a}, 0)$, de unde $\frac{c'}{\lambda a} = \frac{c}{a}$, adică $c' = \lambda c$.

b) $\Rightarrow$ a). Avem: $(x, y) \in d \Leftrightarrow ax + by + c = 0 \Leftrightarrow \lambda ax + \lambda by + \lambda c = 0 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow a'x + b'y + c' = 0 \Leftrightarrow (x, y) \in d'$.

Rezultă că mulţimile d şi d' au aceleaşi elemente, deci $d = d'$.

Separarea planului în regiuni de către o dreaptă

Fie în planul cartezian $\mathscr{P}$ o dreaptă $d : ax + by + c = 0$. Ştim că dreapta d determină două semiplane (deschise) care sunt mulţimi disjuncte, având reuniunea egală cu $\mathscr{P} - d$. Dacă (x, y) este un punct din plan, atunci avem:

$$(x, y) \in d \Leftrightarrow ax + by + c = 0.$$

Prin urmare, $(x, y) \notin d$ este echivalent cu $ax + by + c \neq 0$. Se demonstrează următoarea:

Teoremă. Expresia $ax + by + c$, unde $a \neq 0$ sau $b \neq 0$, împarte planul în trei regiuni:

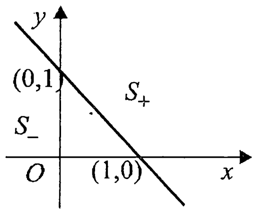
- mulţimea $d = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid ax + by + c = 0\}$ este o dreaptă;
- mulţimea $S_+ = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid ax + by + c > 0\}$ este un semiplan deschis, limitat de dreapta d (*semiplanul pozitiv faţă de d*);
- mulţimea $S_- = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid ax + by + c < 0\}$ este un semiplan deschis, limitat de dreapta d (*semiplanul negativ faţă de d*).

Notăm $P(x, y) = ax + by + c$. Fie $M_1(x_1, y_1)$ şi $M_2(x_2, y_2)$ două puncte din plan. Din teorema anterioară rezultă:

- $P(x_1, y_1) \cdot P(x_2, y_2) > 0 \Leftrightarrow$ punctele M_1, M_2 se află în acelaşi semiplan determinat de dreapta d;
- $P(x_1, y_1) \cdot P(x_2, y_2) < 0 \Leftrightarrow$ punctele M_1, M_2 se află în semiplane opuse determinate de dreapta d;

Exemplu

Fie dreapta $d : x + y - 2 = 0$. În figura alăturată se află semiplanele în care dreapta d împarte planul P.



Fie $P(x, y) = x + y - 2$. Pentru a identifica S_+ şi S_- este suficient să considerăm un punct din S_+ sau S_-.

De exemplu, $P(0, 0) = -2 < 0$, deci semiplanul care conţine originea este semiplanul

$$S_- = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + y - 2 < 0\}.$$

Raportul în care o dreaptă împarte un segment

Se consideră în planul cartezian dreapta $d : ax + by + c = 0$ şi două puncte distincte $M_1(x_1, y_1)$ şi $M_2(x_2, y_2)$ care nu se află pe d şi care au proprietatea că dreptele M_1M_2 şi d sunt concurente într-un punct M.

Prin urmare, punctele M, M_1 şi M_2 sunt distincte şi putem calcula raportul λ în care M împarte M_1M_2, adică $\lambda = \dfrac{\overline{MM_1}}{\overline{MM_2}}$, numit *raportul în care dreapta d împarte segmentul* M_1M_2.

Punctul M are coordonatele $x_M = \dfrac{x_1 - \lambda x_2}{1-\lambda}$, $y_M = \dfrac{y_1 - \lambda y_2}{1-\lambda}$. Cum $M \in d$, rezultă $a\dfrac{x_1 - \lambda x_2}{1-\lambda} + b\dfrac{y_1 - \lambda y_2}{1-\lambda} + c = 0$ sau $ax_1 + by_1 + c - \lambda(ax_2 + by_2 + c) = 0$, deci

$$\frac{\overline{MM_1}}{\overline{MM_2}} = \frac{ax_1 + by_1 + c}{ax_2 + by_2 + c} \tag{1}$$

Dacă valoarea obţinută la (1) este pozitivă, punctele M_1, M_2 sunt în acelaşi semiplan, iar dacă valoarea este negativă, punctele sunt în semiplane diferite în raport cu dreapta d.

Exemplu

Dreapta $d : x + y - 2 = 0$ împarte segmentul M_1M_2, unde $M_1(3, 2)$ şi $M_2(0, 0)$, în raportul

$$\frac{\overline{MM_1}}{\overline{MM_2}} = \frac{3+2-2}{0+0-2} = -\frac{3}{2}.$$

Cititorul poate verifica direct că $M(\frac{6}{5}, \frac{4}{5})$.

SINTEZĂ (rezumatul paragrafului 1)

1. O mulţime $d \subset \mathscr{P}$ este o dreaptă dacă şi numai dacă există trei numere reale a, b şi c, cu $a \neq 0$ sau $b \neq 0$, astfel încât

$$d = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid ax + by + c = 0\} \tag{1}$$

Dacă are loc (1) spunem că *d este dreapta de ecuaţie* $ax + by + c = 0$ şi scriem $d : ax + by + c = 0$.

2. Despre dreapta $d : ax + by + c = 0$ afirmăm:

* d are aceeaşi direcţie cu Ox (este orizontală) $\Leftrightarrow a = 0$;
* d are aceeaşi direcţie cu Oy (este verticală) $\Leftrightarrow b = 0$;
* d este oblică $\Leftrightarrow a \neq 0$ şi $b \neq 0$.

3. Dreptele $d : ax + by + c = 0$ şi $d' : a'x + b'y + c' = 0$ coincid dacă şi numai dacă există un număr real $\lambda \neq 0$ astfel încât

$$a' = \lambda a,\ b' = \lambda b,\ c' = \lambda c.$$

Reprezentați grafic dreapta d, unde d are ecuația:

a) $x = 3$; b) $2x = 3$; c) $4y - 2 = 0$; d) $3y = -4$.

Determinați următoarele figuri geometrice:

$$\mathscr{M} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy + x = 0\}, \quad \mathscr{N} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy - bx - ay + ab = 0\},$$

unde a, b sunt numere reale date.

Fie mulțimile de puncte din plan $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy - x - y + 1 = 0\}$, $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy - 2x - 2y + 4 = 0\}$, $C = [1, 2] \times [1, 2]$. Determinați figura geometrica $\mathscr{F} = (A \cup B) \cap C$.

Fie dreapta $d : 2x - y - 7 = 0$. Dintre punctele $A(1, -6)$, $B(2, -3)$, $C(-1, -9)$, $D(2, 1)$, $E(0, -7)$, $F(5, 3)$ și $G(3, 4)$, aflați pe cele care aparțin dreptei d.

Fie dreapta $d : x + 2y - 4 = 0$. Găsiți punctul de pe dreapta d care are abscisa: 1, 3, –2, 0.

Fie dreapta $d : 7x + 2y - 5 = 0$. Găsiți punctul de pe dreapta d care are ordonata: 2, 1, 0, –3, 4.

Aflați valoarea parametrului $c \in \mathbb{R}$ pentru care dreapta de ecuație $2x - 3y + c = 0$ trece prin punctul $A(6, 3)$.

Determinați $m, n \in \mathbb{R}$ astfel încât dreapta $mx - 3y + n = 0$ să treacă prin punctele $A(-3, 5)$ și $B(4, -2)$.

Arătați că relația $(m + 2)x + (m^2 - 9)y + 3m^2 - 8m + 5 = 0$, $m \in \mathbb{R}$, este ecuația unei drepte d_m, pentru orice $m \in \mathbb{R}$. Determinați valorile lui m pentru care:

a) $d_m \parallel Ox$; b) $d_m \parallel Oy$; c) d_m trece prin origine.

Fie o dreaptă d și două puncte $A, B \in d$. Calculați coordonatele indicate și apoi reprezentați grafic dreapta d, unde:

a) $d : 7x - y + 4 = 0$, $A(2, y_A)$, $B(x_B, -4)$;

b) $d : 3x + 5y - 10 = 0$, $A(0, y_A)$, $B(x_B, -\frac{2}{5})$.

Arătați că dreptele d și d' coincid, unde:

a) $d : 3x + 5y - 4 = 0$, $d' : 6x + 10y - 8 = 0$;

b) $d : x - y\sqrt{2} = 0$, $d' : x\sqrt{2} - 2y = 0$.

Determinați p și q astfel încât ecuațiile

$$(3 + p)x - 5y + 4 = 0, \qquad 5x - (4 - q)y - 5 = 0$$

să reprezinte aceeași dreaptă.

Fie $m \in \mathbb{R}$. Pot coincide dreptele d și d' având ecuațiile:

a) $d : 2x - 3y + 1 = 0$, $d' : -4x + 5y + m = 0$;

b) $d : mx + y + m = 0$, $d' : x - my + 1 = 0$;

c) $d : 2x - 3y = 0$, $d' : x + my = 0$.

Reprezentați grafic mulțimea $\mathscr{M}$, definită prin:

a) $\mathscr{M} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 - 4xy + 4y^2 = 0\}$;

b) $\mathscr{M} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 9x^2 - 6xy + y^2 = 4\}$;

c) $\mathscr{M} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 - 5xy + 6y^2 = 0\}$;

d) $\mathscr{M} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x - 1)^2 + (y + 2)^2 = 0\}$.

2.1. Ecuaţia carteziană explicită a dreptei

1. Fie dreapta $d: Ax + By + C = 0$, unde $A \neq 0$ sau $B \neq 0$. Dacă $B \neq 0$, adică d nu are aceeaşi direcţie cu Oy, avem $Ax + By + C = 0 \Leftrightarrow y = -\frac{A}{B}x - \frac{C}{B}$, de unde, dacă notăm $-\frac{A}{B} = m$, $-\frac{C}{B} = n$, obţinem ecuaţia $y = mx + n$.

2. Reciproc, m şi n fiind numere reale date, ecuaţia $y = mx + n$ este ecuaţia unei drepte care nu are aceeaşi direcţie cu Oy.

Într-adevăr, avem $y = mx + n \Leftrightarrow mx - y + n = 0 \Leftrightarrow ax + by + c = 0$, cu $a = m$, $b = -1$ şi $c = n$.

Conform teoremei ecuaţiei generale a dreptei (§1), rezultă că există o dreaptă care are ecuaţia $y = mx + n$. Cum $b \neq 0$, această dreaptă nu are aceeaşi direcţie cu Oy.

Definiţie. Vom spune că $y = mx + n$, unde $m, n \in \mathbb{R}$, este *ecuaţia carteziană explicită a dreptei în plan.*

Dacă dreapta d *are* ecuaţia $y = mx + n$, atunci:

* numărul m se numeşte *panta dreptei d* sau *coeficientul unghiular al dreptei d*;
* numărul n se numeşte *ordonata la origine a dreptei d.*

Observaţie. Numai dreptele care nu sunt verticale pot fi reprezentate printr-o ecuaţie explicită.

Exemple

* dreapta $d: 2x + 3y - 5 = 0$ are ecuaţia explicită $y = -\frac{2}{3}x + \frac{5}{3}$;
* dreapta $d: 2y + 10 = 0$ are ecuaţia explicită $y = -5$;
* dreapta $d: 2x - 7 = 0$ este verticală (este paralela cu Oy), deci nu are ecuaţie explicită;
* dreapta $d: y = -4x + 7$ are ecuaţia generală $4x + y - 7 = 0$.

Următoarea propoziţie ne arată că panta unei drepte care nu este verticală se poate calcula cunoscând două puncte ale dreptei.

P r o p o z i ţ i a 1. Dacă m este panta unei drepte care nu este verticală şi care trece prin punctele $A(x_A, y_A)$, $B(x_B, y_B)$, atunci

$$m = \frac{y_A - y_B}{x_A - x_B}.$$

Demonstraţie. Deoarece nu este verticală, dreapta $d = AB$ poate fi reprezentată de ecuaţia explicită $y = mx + n$. De asemenea, avem $x_A \neq x_B$.

Cum $A, B \in d$, avem $y_A = mx_A + n$, $y_B = mx_B + n$, deci

$$\frac{y_A - y_B}{x_A - x_B} = \frac{mx_A + n - mx_B - n}{x_A - x_B} = \frac{m(x_A - x_B)}{x_A - x_B} = m.$$

Observaţie. Panta dreptei d se notează m_d.

Exemple

Ne referim la punctele din fig. 9. Avem:

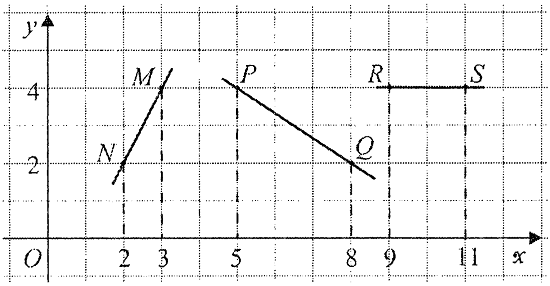


Fig. 9

$$m_{MN} = \frac{y_M - y_N}{x_M - x_N} = \frac{2-4}{2-3} = 2,$$

$$m_{PQ} = \frac{y_P - y_Q}{x_P - x_Q} = \frac{4-2}{5-8} = -\frac{2}{3},$$

$$m_{RS} = \frac{y_R - y_S}{x_R - x_S} = \frac{0}{-2} = 0.$$

Măsura unghiului dintre o dreaptă şi axa Ox

Fie d o dreaptă oarecare din plan.

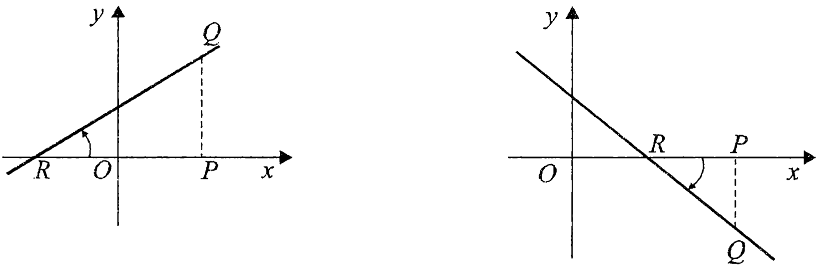


Fig. 10

Se numeşte *măsura unghiului dintre dreapta d* şi *axa Ox* şi se notează cu θ un număr real definit după cum urmează:

1. Dacă d este verticală, atunci $\theta = \frac{\pi}{2}$.

2. Dacă d este orizontală, atunci $\theta = 0$.

3. Dacă $d : y = mx + n$ este o dreaptă oblică (deci $m \neq 0$) consideram unghiul $\sphericalangle PRQ$, unde: R este punctul $d \cap Ox$, deci $x_R = -\frac{n}{m}$, P este un punct pe Ox cu $x_P > x_R$, iar $Q \in d$ astfel încât $QP \perp Ox$, deci $x_Q = x_P$ şi $y_Q = mx_P + n$. Punctul Q se

află „deasupra lui Ox“ dacă $m > 0$ sau „sub axa Ox“ dacă $m < 0$ (dacă $m > 0$, $y_Q = mx_Q + n = mx_P + n > 0$ deoarece $x_P > x_R = -\frac{n}{m}$).

În acest caz, θ se defineşte astfel:

* dacă $m > 0$, $\theta = m(\sphericalangle PRQ)$ şi $\theta \in (0, \frac{\pi}{2})$;

* dacă $m < 0$, $\theta = -m(\sphericalangle PRQ)$ şi $\theta \in (-\frac{\pi}{2}, 0)$.

Uneori vom spune că θ este unghiul dintre d şi Ox.

Propoziţia 2. Dacă m este panta unei drepte d care nu este verticală şi θ este măsura unghiului dintre d şi axa Ox, atunci $m = \text{tg}\,\theta$.

Demonstraţie. Fie $y = mx + n$ ecuaţia explicită a dreptei d.

Cazul $m = 0$. Dreapta $d : y = n$ este paralelă sau confundată cu Ox deci $\theta = 0$ şi $\text{tg}\theta = 0$, prin urmare $m = 0 = \text{tg}\,\theta$.

Cazul $m \neq 0$. Considerăm triunghiul dreptunghic PRQ (fig.10).

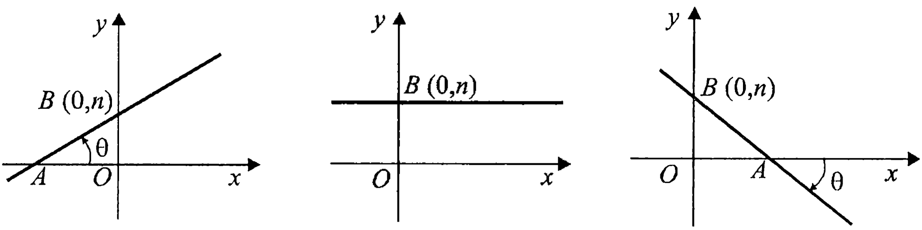
În cazul $m > 0$, avem $\text{tg}\theta = \text{tg}(\sphericalangle PRQ) = \dfrac{QP}{RP} = \dfrac{y_Q}{x_P - x_R} = \dfrac{mx_P + n}{x_P - (-\frac{n}{m})} = m.$

În cazul $m < 0$, avem $\text{tg}\theta = -\text{tg}(\sphericalangle PRQ) = -\dfrac{QP}{RP} = \dfrac{-QP}{RP} = \dfrac{y_Q}{x_P - x_R} = m.$

Consecinţă. În cazul dreptei oblice sau orizontale $d : y = mx + n$ măsura unghiului dintre d şi axa Ox este $\theta = \text{arctg}\, m$.

Semnificaţia geometrică a coeficienţilor ecuaţiei explicite a dreptei

Fie d o dreaptă care nu este verticală şi $d : y = mx + n$ (fig. 11).



$\theta \in (0, \frac{\pi}{2})$ şi $m = \text{tg}\theta > 0$ $\quad$ $\theta = 0$ şi $m = \text{tg}\theta = 0$ $\quad$ $\theta \in (-\frac{\pi}{2}, 0)$ şi $m = \text{tg}\theta < 0$

Fig. 11

Dreapta d intersectează axa Oy în punctul $B(0, n)$, iar $m = \text{tg}\theta$ unde θ este măsura unghiului dintre d şi axa Ox, deci:

* *panta* sau *coeficientul unghiular m* este tangenta trigonometrică a lui θ, unde θ este măsura unghiului dintre d şi Ox.

* *ordonata la origine n* este ordonata punctului în care d intersectează axa Oy.

Exerciţii rezolvate

E1. Fie punctul $A(x_0, y_0)$ şi $\theta \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$. Scrieţi ecuaţia dreptei d care face cu axa Ox un unghi de măsură θ şi trece prin punctul A.

R: Deoarece $\theta \neq \frac{\pi}{2}$, rezultă că d nu este verticală. Prin urmare, d are o ecuaţie de forma $y = mx + n$, unde $m = \text{tg}\theta$, iar n se află din condiţia $A \in d$, adică $y_0 = x_0 \text{tg}\theta + n$, deci

$$d : y = x\,\text{tg}\theta + y_0 - x_0\,\text{tg}\theta \quad \text{sau} \quad d : y - y_0 = \text{tg}\theta(x - x_0).$$

De exemplu, ecuaţia dreptei care trece prin $A(1, 1)$ şi face unghiul $-\frac{\pi}{4}$ cu axa Ox este $y = -x + 2$.

E2. Aflaţi măsura unghiului dintre dreapta $d : ax + by + c = 0$ şi axa Ox.

R: Fie θ măsura unghiului dintre d şi Ox. Dacă $b = 0$ (d este verticală) avem $\theta = \frac{\pi}{2}$. Dacă $b \neq 0$, atunci d este oblică sau orizontală şi $d : y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{a}$, deci are panta $m_d = -\frac{a}{b}$. Prin urmare, $\text{tg}\theta = -\frac{a}{b}$ de unde obţinem $\theta = \text{arctg}(-\frac{a}{b})$.

Observaţii. Fie d şi d' două drepte care nu sunt verticale $d : y = mx + n$, $d' : y = m'x + n'$.

Folosind semnificaţia geometrică a pantei, rezultă:

* d şi d' au aceeaşi direcţie $\Leftrightarrow m = m'$

* d şi d' sunt paralele $\Leftrightarrow m = m'$ şi $d \neq d'$

Condiţia de paralelism a două drepte va fi reluată în ultimul paragraf al acestui capitol.

Calculaţi panta dreptei AB, unde:

a) $A(0, 3)$, $B(-2, 3)$; b) $A(-2, 0)$, $B(0, 6)$;

c) $A(0, 0)$, $B(8, 4)$; d) $A(2, -2)$, $B(4, 2)$.

Fie punctele $A(3, 5)$, $B(5, 7)$ şi $C(-1, 2)$. Aflaţi panta pentru fiecare dintre dreptele AB, BC şi AC.

Aflaţi, dacă există, panta dreptei d, unde d are ecuaţia:

a) $9x + 3y - 1 = 0$; b) $x - 2y + 5 = 0$; c) $2x - 3y = 0$;

d) $x + 9 = 0$; e) $3y - 11 = 0$.

Scrieţi ecuaţia dreptei care face unghiul α cu axa Ox şi trece prin origine, dacă:

a) $\alpha = \frac{\pi}{6}$; b) $\alpha = \frac{\pi}{3}$; c) $\alpha = \frac{\pi}{4}$; d) $\alpha = -\frac{\pi}{4}$.

Fie dreapta $d : 5x - 3y + 10 = 0$ şi punctele $A(1, 3)$ şi $M(a, a - 1)$, unde $a \in \mathbb{R}$. Determinaţi valoarea lui a astfel încât dreapta AM să fie paralelă cu dreapta d.

Fie dreapta $d : y = mx + n$, unde $m, n \in \mathbb{R}$. Care este poziţia dreptei d în fiecare dintre următoarele cazuri:

a) $m = 1$ şi $n \in (2, 3)$; b) $m = 2$ şi $n \in \mathbb{Z}$;

c) $m \in (0, 1)$ şi $n = 2$; d) $m \in (1, \sqrt{3})$ şi $n = 2$.

Fie punctele $M(-4, 6)$, $N(1, 1)$ şi $P(4, -2)$.

a) Calculaţi pantele dreptelor MN şi NP.

b) Arătaţi că punctele M, N şi P sunt coliniare.

Fie punctele $A(1, 4)$, $B(3, 2)$, $C(4, 6)$ şi $D(2, 8)$. Calculând pantele dreptelor AB, BC, CD şi DA arătaţi că patrulaterul $ABCD$ este paralelogram.

Fie m, n şi n' trei numere reale strict pozitive şi dreptele $d : y = mx + n$, $d' : y = -mx + n'$.

a) Arătaţi că dreptele d, d' şi Ox sunt concurente două câte două şi se intersectează în trei puncte distincte $d \cap d' = \{U\}$, $d \cap Ox = \{V\}$, $d' \cap Ox = \{V'\}$.

b) Arătaţi că triunghiul UVV' este isoscel.

2.2. Ecuaţia unei drepte care trece printr-un punct dat

Fie în plan un punct $A(x_A, y_A)$ şi o dreaptă d care trece prin A. Dacă d este verticală, atunci are ecuaţia $d : x = x_A$. Dacă d nu este verticală, atunci scriem ecuaţia lui d sub formă explicită, anume $y = mx + n$, unde $m, n \in \mathbb{R}$. Cum $A \in d$, avem $y_A = mx_A + n$, deci $n = y_A - mx_A$. Astfel obţinem $y = mx + y_A - mx_A$ sau $y - y_A = m(x - x_A)$.

P r o p o z i ţ i a 3. Ecuaţia unei drepte din mulţimea dreptelor care trec prin punctul $A(x_A, y_A)$ este $x = x_A$ sau $y - y_A = m(x - x_A)$, unde $m \in \mathbb{R}$.

Exemple

1. O dreaptă care trece prin punctul $A(-1, 4)$ are ecuaţia

$$x = -1 \text{ sau } y - 4 = m(x + 1),\ m \in \mathbb{R}.$$

Dând lui m diverse valori, obţinem drepte din mulţimea dreptelor care trec prin A. De exemplu,

$m = 1 \Rightarrow y - 4 = x + 1$ sau $x - y + 5 = 0$ (dreapta paralelă cu dreapta $y = x$)

$m = -1 \Rightarrow y - 4 = -(x + 1)$ sau $x + y - 3 = 0$ (dreapta paralelă cu dreapta $y = -x$)

$m = 0 \Rightarrow y - 4 = 0$ sau $y = 4$ (dreapta orizontală).

2. Ecuaţia unei drepte care trece prin origine este $y = mx$, $m \in \mathbb{R}$ sau $x = 0$.

Observaţie. Ecuaţia unei drepte care trece prin punctul $A(x_A, y_A)$ se poate scrie, în mod unitar, sub forma $a(x - x_A) + b(y - y_A) = 0$, unde $a \neq 0$ sau $b \neq 0$.

Ecuaţia dreptei care trece printr-un punct dat şi are panta dată

În mulţimea dreptelor care trec printr-un punct A, există o singură dreaptă care are panta egală cu un număr real dat m.

P r o p o z i ţ i a 4. Ecuaţia dreptei d care trece prin punctul $A(x_A, y_A)$ şi are panta dată m este $d : y - y_A = m(x - x_A)$.

Exemple

1. Ecuaţia dreptei care trece prin $A(-1, 4)$ şi are panta $m = 2$ este

$$y - 4 = 2(x + 1) \text{ sau } y = 2x + 6.$$

2. Ecuaţia dreptei care trece prin originea $O(0, 0)$ şi are panta $m = -5$ este $y = -5x$.

2.3. Ecuaţia dreptei care trece prin două puncte date

Fie $A(x_A, y_A)$ şi $B(x_B, y_B)$ două puncte distincte în planul cartezian $\mathscr{P}$. Prin aceste puncte trece o singură dreaptă $d = AB$. Ne propunem să scriem ecuaţia carteziană a acestei drepte.

Există două cazuri, după cum $x_A = x_B$ sau $x_A \neq x_B$.

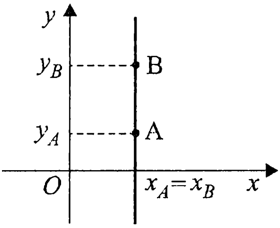


Fig. 12

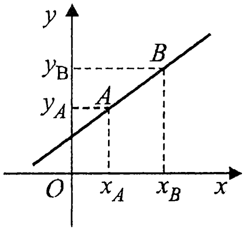


Fig. 13

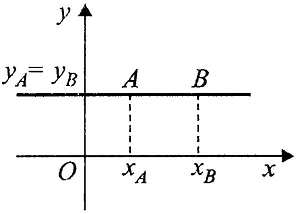


Fig.14

* Cazul $x_A = x_B$ (rezultă $y_A \neq y_B$). Avem $AB : x = x_A$ (fig. 12)

* Cazul $x_A \neq x_B$. În acest caz, dreapta oblică sau orizontală AB (fig. 13 şi 14) are panta $m_{AB} = \dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$. Putem considera că AB este dreapta care trece prin A şi are panta m_{AB} deci:

$$AB : y - y_A = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}(x - x_A).$$

În particular, dacă $x_A \neq x_B$ şi $y_A = y_B$, ecuaţia este $AB : y = y_B$.

P r o p o z i ţ i a 5. Ecuaţia dreptei care trece prin punctele distincte $A(x_A, y_A)$ şi $B(x_B, y_B)$ este:

* $AB : x = x_A$, dacă $x_A = x_B$

* $AB : y - y_A = \dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A}(x - x_A)$, dacă $x_A \neq x_B$

Două metode pentru a scrie ecuaţia dreptei AB

În cazul $x_A \neq x_B$, ecuaţia $y - y_A = \dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A}(x - x_A)$ se poate obţine prin două metode:

Metoda 1. Scriem ecuaţia unei drepte care trece prin A, anume $y - y_A = m(x - x_A)$ (1) unde m este necunoscut.

Din condiţia ca dreapta (1) să treacă prin B obţinem

$$y_B - y_A = m(x_B - x_A), \text{ de unde } m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$$

Metoda 2. Dreapta AB nu este verticală, deci putem scrie ecuaţia sub forma $y = mx + n$ (2), unde m, n sunt necunoscute. Punând condiţia ca dreapta (2) să treacă prin A şi B, obţinem un sistem în necunoscutele m şi n, $y_A = mx_A + n$, $y_B = mx_B + n$.

Forma unitară a ecuaţiei dreptei AB

Ecuaţia dreptei AB se poate scrie în mod unitar sub forma

$$(x - x_A)\,(y_B - y_A) = (y - y_A)\,(x_B - x_A).$$

Această egalitate exprimă faptul că $M(x, y) \in AB$ dacă şi numai dacă vectorii $\overrightarrow{AB}\,(x_B - x_A,\ y_B - y_A)$ şi $\overrightarrow{AM}\,(x - x_A,\ y - y_A)$ sunt coliniari.

Exerciţii rezolvate

E3. Scrieţi ecuaţia dreptei care trece prin punctele M, N unde:

a) $M(-3, 4)$, $N(-3, 1)$; b) $M(2, 2)$, $N(-1, 2)$; c) $M(1, 2)$ şi $N(3, 5)$.

R: a) Avem $x_M = x_N = -3$, deci $MN \parallel Oy$ şi $MN: x = -3$.

b) Avem $y_M = y_N = 2$ deci $MN \parallel Ox$ şi $MN: y = 2$.

c) Constatam imediat că MN este dreaptă oblică.

Metoda 1. $MN: y - y_M = m(x - x_M)$ sau $MN: y - 2 = m(x - 1)$, unde m se află punând condiţia ca dreapta să treacă prin $N(3, 5)$, deci $5 - 2 = m(3 - 1) \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow m = \frac{3}{2}$. Obţinem $y - 2 = \frac{3}{2}(x - 1)$ sau $3x - 2y + 1 = 0$.

Metoda 2. $MN: y = mx + n$. Coordonatele punctelor M, N trebuie să verifice această ecuaţie, deci $\begin{cases} 2 = m + n \\ 5 = 3m + n \end{cases}$. Rezultă $m = \frac{3}{2}$, $n = \frac{1}{2}$, deci $y = \frac{3}{2}x + \frac{1}{2}$ sau $3x - 2y + 1 = 0$.

E4. Scrieţi ecuaţia dreptei care conţine punctele $A(1, 2)$ şi $B(a, 4)$, unde $a \in \mathbb{R}$ este parametru.

R: Dacă $a = 1$, atunci $AB: x = 1$. Dacă $a \neq 1$, $AB: y - 2 = m(x - 1)$ (1)

Calculăm m punând condiţia ca $B(a, 4)$ să verifice ecuaţia (1) şi obţinem $4 - 2 = m(a - 1) \Leftrightarrow m = \frac{2}{a-1}$. Prin urmare, AB are ecuaţia

$$y - 2 = \frac{2}{a-1}(x - 1) \Leftrightarrow 2x + (1 - a)y + 2a - 4 = 0.$$

E5. Fie triunghiul ABC unde $A(3, 3)$, $B(1, 0)$, $C(0, 2)$.

a) Să determinăm coordonatele centrului de greutate $G(x_G, y_G)$ şi ale centrului cercului înscris $I(x_I, y_I)$.

b) Să scriem ecuaţia medianei din A şi a bisectoarei din A.

R: a) Cu formulele generale

$$x_G = \frac{x_A + x_B + x_C}{3} = \frac{3+1}{3} = \frac{4}{3},\ y_G = \frac{y_A + y_B + y_C}{3} = \frac{3+2}{3} = \frac{5}{3}.$$

Pentru determinarea lui $I(x_I, y_I)$ trebuie să calculăm mai întâi lungimile $a = BC$, $b = CA$ şi $c = AB$. Aplicând teorema lui Pitagora (fig. 15) avem:

$$BC^2 = OB^2 + OC^2 = 1 + 4 \Rightarrow BC = \sqrt{5} = a;$$

$$AB^2 = BE^2 + AE^2 = 4 + 9 \Rightarrow AB = \sqrt{13} = c;$$

$$AC^2 = CF^2 + AF^2 = 1 + 9 \Rightarrow AC = \sqrt{10} = b.$$

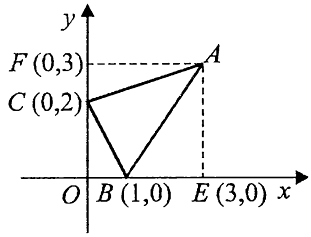


Fig. 15

Atunci, cu formulele generale

$$x_I = \frac{ax_A + bx_B + cx_C}{a+b+c} = \frac{3\sqrt{5} + \sqrt{10}}{\sqrt{5} + \sqrt{10} + \sqrt{13}},$$

$$y_I = \frac{ay_A + by_B + cy_C}{a+b+c} = \frac{3\sqrt{5} + 2\sqrt{13}}{\sqrt{5} + \sqrt{10} + \sqrt{13}}$$

b) Mediana din A trece prin punctele A şi G, deci are ecuaţia

$$y - y_A = \frac{y_G - y_A}{x_G - x_A}(x - x_A) \text{ adică } y - 3 = \frac{4}{5}(x - 3).$$

Bisectoarea din A trece prin punctele A şi I, deci are ecuaţia

$$y - y_A = \frac{y_I - y_A}{x_I - x_A}(x - x_A) \text{ adică } y - 3 = \frac{3\sqrt{10} + \sqrt{13}}{2\sqrt{10} + 3\sqrt{13}}(x - 3).$$

Observaţii. 1. Lungimile laturilor BC, CA, AB au fost calculate folosind axele. Vom da mai târziu formula generală pentru calculul distanţei dintre două puncte.

2. Vom reveni mai târziu asupra triunghiului din exerciţiul de mai sus, când vom calcula coordonatele ortocentrului şi centrului cercului circumscris.

3. Cititorul este invitat să calculeze coordonatele ortocentrului (şi apoi ale cercului circumscris triunghiului) în care intervin numerele tg$A$, tg$B$, tg$C$ după cum urmează:

* se calculează cos$A$ (cu teorema cosinusului);

* se calculează tg$A$ cu formula $1 + \text{tg}^2 a = \frac{1}{\cos^2 A}$;

* la fel, pentru calculul lui tg$B$ şi tg$C$ (triunghiul nu este dreptunghic).

Ecuaţia prin tăieturi a dreptei

Fie d o dreaptă care nu trece prin origine şi intersectează Ox în punctul $A(a, 0)$ şi axa Oy în $B(0, b)$, deci $a \neq 0$ şi $b \neq 0$ (fig. 16).

Scriem ecuaţia lui d sub forma ecuaţiei dreptei care trece prin punctele A şi B. Obţinem:

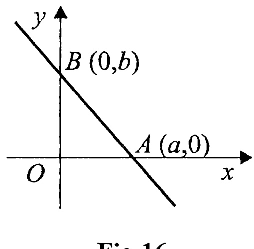


Fig.16

$$d: \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1.$$

Aceasta formă a ecuaţiei lui d se numeşte *ecuaţia prin tăieturi a dreptei d.*

Exemple

1. Ecuaţia dreptei cu „tăieturile" $A(2, 0)$ şi $B(0, 3)$ este

$$\frac{x}{2} + \frac{y}{3} = 1 \Leftrightarrow 3x + 2y - 6 = 0.$$

2. Fie $d : 2x - 5y + 10 = 0$. Ecuaţia prin tăieturi a lui d se obţine astfel:

$$2x - 5y = -10 \Leftrightarrow \frac{2x}{-10} - \frac{5y}{-10} = 1 \Leftrightarrow \frac{x}{-5} + \frac{y}{2} = 1.$$

Rezultă că „tăieturile" dreptei d sunt $A(-5, 0)$ şi $B(0, 2)$.

Condiţia de coliniaritate a trei puncte

T e o r e m ă. Punctele distincte $A(x_A, y_A)$ şi $B(x_B, y_B)$ şi $C(x_C, y_C)$ sunt coliniare dacă şi numai dacă are loc relaţia

$$(x_A y_B - y_A x_B) + (x_B y_C - y_B x_C) + (x_C y_A - y_C x_A) = 0 \qquad (1)$$

Demonstraţie. Vom folosi echivalenţa: punctele A, B şi C sunt coliniare $\Leftrightarrow$ C aparţine dreptei AB. Scriem ecuaţia lui AB în mod unitar:

$$(x - x_A)(y_B - y_A) = (y - y_A)(x_B - x_A)$$

Atunci:

$$C \in AB \Leftrightarrow (x_C - x_A)(y_B - y_A) = (x_B - x_A)(y_C - y_A) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x_A(y_B - y_C) + x_B(y_C - y_A) + x_C(y_A - y_B) = 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (x_A y_B - y_A x_B) + (x_B y_C - y_B x_C) + (x_C y_A - y_C x_A) = 0.$$

Observaţie. Dacă $x_A = x_B$ atunci $y_A \neq y_B$ şi $AB \parallel Oy$, $AB : x = x_A$, iar condiţia $C \in AB$ este echivalentă cu $x_A = x_B = x_C$.
Dacă $y_A = y_B$ atunci $x_A \neq x_B$ şi $AB \parallel Ox$, $AB : y = y_A$, iar condiţia $C \in AB$ este echivalentă cu $y_A = y_B = y_C$.

Regulă de memorare. Condiţia de coliniaritate se reţine astfel: se egalează cu zero suma a trei termeni de forma $x_M y_N - y_M x_N$, unde (M, N) se înlocuieşte, pe rând, cu (A, B), (B, C) şi (C, A).

Exerciţii rezolvate

E6. Să se cerceteze dacă punctele P, Q şi R sunt coliniare, unde:

a) $P(1, 2)$, $Q(2, -\frac{1}{2})$, $R(3, -3)$; b) $P(-1, 4)$, $Q(0, 5)$, $R(2, -3)$

R: Condiţia de coliniaritate se scrie

$$(x_P y_Q - y_P x_Q) + (x_Q y_R - y_Q x_R) + (x_R y_P - y_R x_P) = 0.$$

a) Avem $(1 \cdot (-\frac{1}{2}) - 2 \cdot 2) + (2 \cdot (-3) - (-\frac{1}{2}) \cdot 3) + (3 \cdot 2 - (-3) \cdot 1) = 0$, deci punctele sunt coliniare.

b) Avem $((-1) \cdot 5 - 0) + (0 - 5 \cdot 2) + (2 \cdot 4) - (-3) \cdot (-1) = -10 \neq 0$, deci punctele nu sunt coliniare.

Observaţie. Fie trei puncte distincte P, Q şi R. Dacă dreptele PQ şi QR nu sunt verticale, avem: P, Q şi R sunt coliniare $\Leftrightarrow$ dreptele PQ şi QR au pante egale Astfel, rezolvarea constă în testarea egalităţii $m_{PQ} = m_{QR}$ (care este echivalentă cu condiţia de coliniaritate scrisă mai sus).

E7. Fie punctele $A(4, 2)$, $B(3, -3)$ şi $C(m, m + 1)$, unde $m \in \mathbb{R}$. Aflaţi valoarea lui m astfel încât punctele A, B şi C să fie coliniare.

R: Se constată imediat că punctele sunt distincte, $\forall\ m \in \mathbb{R}$. Înlocuind în condiţia de coliniaritate, avem:

$$(4(-3) - 2 \cdot 3) + (3(m + 1) - (-3m)) + (2m - 4(m + 1)) = 0 \Leftrightarrow 4m - 19 = 0.$$

Prin urmare, punctele sunt coliniare $\Leftrightarrow m = \dfrac{19}{4}$.

Scrieţi ecuaţia dreptei care trece prin A şi are panta m:

a) $A(2, 5)$, $m = 3$; b) $A(0, 0)$, $m = -2$;

Scrieţi ecuaţia dreptei d care trece prin punctul A, iar unghiul dintre d şi axa Ox are măsura α, unde;

a) $A(-3, 4)$, $\alpha = \frac{\pi}{3}$; b) $A(2, 3)$, $\alpha = \frac{\pi}{4}$; c) $A(0, 0)$, $\alpha = -\frac{\pi}{3}$.

Scrieţi ecuaţia unei drepte d care are panta $m = -3$ şi intersectează axa Oy într-un punct situat la distanţa 2 faţă de origine.

Scrieţi ecuaţia unei drepte d care intersectează, axa Oy într-un punct situat la distanţa 5 faţă de origine şi unghiul dintre d şi axa Ox are măsura:

a) $60°$; b) $-45°$; c) $0°$.

Scrieţi ecuaţia dreptei AB, unde:

a) $A(-3, 1)$, $B(1, 2)$; b) $A(0, 2)$, $B(-1, 0)$;

c) $A(2, 1)$, $B(2, -5)$; d) $A(1, -3)$, $B(3, -3)$.

Scrieţi ecuaţia medianei vârfului C în triunghiul ABC, unde $A(5, 0)$, $B(1, 2)$ şi $C(-3, -2)$.

Scrieţi ecuaţiile medianelor triunghiului ABC, unde:

a) $A(5, 3)$, $B(-4, 1)$ şi $C(2, -4)$; b) $A(3, 2)$, $B(5, -2)$ şi $C(1, 0)$.

Scrieţi ecuaţia unei drepte care trece prin punctul $A(-5, 3)$ şi intersectează axa Ox într-un punct situat la distanţa 3 faţă de originea O.

Fie G centrul de greutate al triunghiului ABC. Dacă $B(3, -1)$ $C(1, 4)$ şi $G(0, 2)$, scrieţi ecuaţiile dreptelor AB, BC şi AC.

Dreapta $d : 3x - 4y - 12 = 0$ intersectează axa Ox în punctul A şi axa Oy în punctul B. Aflaţi perimetrul şi aria triunghiului AOB.

Fie dreapta $d : ax + by + c = 0$, unde $a, b, c \in \mathbb{R}^*$. Arătaţi că dreapta d intersectează axa Ox într-un punct $A \neq O$ şi axa Oy într-un punct $B \neq 0$ şi calculaţi aria S a triunghiului AOB.

Scrieţi ecuaţia unei drepte care trece prin punctul $A(3, 2)$ şi intersectează axa Ox în B şi axa Oy în C astfel încât distanţele OB şi OC să fie egale.

Fie dreapta $d : \frac{x}{2} + \frac{y}{3} = 1$. Scrieţi ecuaţia simetricei dreptei d în raport cu:

a) axa Ox; b) axa Oy; c) originea O.

Arătaţi că punctele A, B şi C sunt coliniare, unde:

a) $A(0, -3)$, $B(1, 1)$, $C(\frac{3}{2}; 3)$; b) $A(1, -2)$, $B(-3, 7)$, $C(3, -10)$.

Determinaţi $p \in \mathbb{R}$ astfel încât punctele A, B şi C să fie coliniare, unde:

a) $A(1, -2)$, $B(2, 4)$, $C(p, p)$;

b) $A(p, 2)$, $B(2p + 1, -1)$, $C(3p + 2, 3)$;

c) $A(2, p - 5)$, $B(5, -1)$, $C(-3, -1)$.

Fie punctele $A(8, 0)$, $B(3, 6)$ şi $C(0, 3)$. Dreapta BC intersectează axa Ox în D, iar dreapta AB intersectează axa Oy în E. Arătaţi că mijloacele segmentelor $[OB]$, $[AC]$ şi $[DE]$ sunt coliniare.

3.1. Reprezentarea vectorială a unei drepte

Considerăm un punct $A \in \mathscr{P}$ şi un vector nenul $\vec{u}$ în $\mathscr{P}$. Există o singură dreaptă $d \subset \mathscr{P}$ care are proprietatea că trece prin A şi are *aceeaşi direcţie cu* $\vec{u}$ (adică d este paralelă sau confundată cu dreapta suport a unui segment orientat $AB \in \vec{u}$).

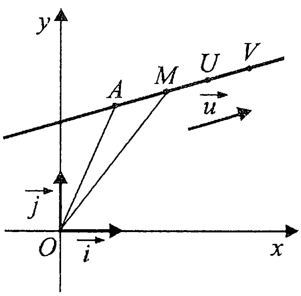


Fig.17

1. Considerăm un punct oarecare $M \in d$.

Deoarece vectorii $\overrightarrow{AM}$ şi $\vec{u}$ sunt coliniari, rezultă existenţa unui număr real unic determinat $t = t(M)$, cu proprietatea

$$\overrightarrow{AM} = t\vec{u} \Rightarrow \overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OA} = t\vec{u} \Rightarrow \overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + t\vec{u}.$$

Am demonstrat incluziunea $d \subset \{\overrightarrow{OA} + t\vec{u} \mid t \in \mathbb{R}\}$.

2. Reciproc, dacă $M \in \mathscr{P}$ este un punct care are proprietatea că vectorul său de poziţie se exprimă sub forma $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + t\vec{u}$, unde $t \in \mathbb{R}$ va rezulta că $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OA} = t\vec{u}$, adică $\overrightarrow{AM}$ are aceeaşi direcţie cu $\vec{u}$. Înseamnă că $M \in d$, deci avem şi incluziunea

$$\{\overrightarrow{OA} + t\vec{u} \mid t \in \mathbb{R}\} \subset d.$$

Astfel am demonstrat:

T e o r e m ă. Fie un punct $A \in \mathscr{P}$ şi $\vec{u}$ un vector nenul din $\mathscr{P}$. Fie d unica dreaptă care trece prin A şi are aceeaşi direcţie ca $\vec{u}$. Atunci, avem egalitatea $d = (\overrightarrow{OA} + t\vec{u} \mid t \in \mathbb{R}\}$.

Definiţie. În condiţiile teoremei:

* vectorul $\vec{u}$ se numeşte vector *director al dreptei d*;

* egalitatea $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + t\vec{u}$, $t \in \mathbb{R}$ se numeşte *ecuaţia vectorială a dreptei d care trece prin punctul A şi are direcţia dată de* $\vec{u}$.

Observaţii: **1.** O dreaptă d ca mai sus are o infinitate de vectori directori. Într-adevăr, dacă $\vec{u}$ este vector director al dreptei d, atunci $r\vec{u}$ este vector al lui d, pentru orice $r \in \mathbb{R}^*$, deoarece $t\vec{u} = \frac{t}{r}(r\vec{u})$.

2. Dacă U, V sunt două puncte distincte ale dreptei d, atunci $\overrightarrow{UV}$ este vector director al lui d. Într-adevăr, cum U, $V \in d$ există t, $s \in \mathbb{R}$, $t \neq s$, astfel încât avem

$$\overrightarrow{OU} = \overrightarrow{OA} + t\,\vec{u},\ \overrightarrow{OV} = \overrightarrow{OA} + s\,\vec{u}, \text{ deci } \overrightarrow{UV} = \overrightarrow{OV} - \overrightarrow{OU} = (s-t)\vec{u}.$$

*

Pe baza acestor observaţii, dăm următoarea:

Definiţie. Direcţia unei drepte d este direcţia unui vector director $\vec{u}$ al lui d (adică mulţimea tuturor vectorilor nenuli coliniari cu $\vec{u}$).

Spunem că direcţia dreptei d este dată de $\vec{u}$ sau că d are aceeaşi direcţie cu orice vector director $\vec{u}$ al său.

*

Să transcriem în coordonate carteziene egalitatea din teorema de mai sus.

Să presupunem că punctul $A \in \mathscr{P}$ este dat prin $A(x_A, y_A)$, iar vectorul $\vec{u}$ este dat prin $\vec{u}(\alpha, \beta)$, adică adică $\overrightarrow{OA} = x_A\vec{i} + y_A\vec{j}$, $\vec{u} = \alpha\vec{i} + \beta\vec{j}$. Cum $\vec{u}$ este nenul, avem $\alpha \neq 0$ sau $\beta \neq 0$.

Fie $M(x, y)$ un punct din planul $\mathscr{P}$, deci $\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j}$.

Avem: $M \in d \Leftrightarrow \overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + t\vec{u}$. Relaţia vectorială $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + t\vec{u}$ este echivalentă cu egalitatea de perechi $(x, y) = (x_A + t\alpha, y_A + t\beta)$ care, la rândul ei, este echivalentă cu două relaţii „scalare“:

$$x = x_A + t\alpha \quad \text{şi} \quad y = y_A + t\beta.$$

Am demonstrat echivalenţa:

$$(x, y) \in d \Leftrightarrow x = x_A + t\alpha \text{ şi } y = y_A + t\beta. \tag{1}$$

Din (1) rezultă că putem scrie dreapta d în coordonate carteziene astfel:

$$d = \{(x, y) \mid x = x_A + t\alpha \text{ şi } y = y_A + t\beta,\ t \in \mathbb{R}\} \text{ sau}$$

$$d = \{(x_A + t\alpha, y_A + t\beta) \mid t \in \mathbb{R}\} \tag{2}$$

Egalitatea (2) se scrie mai comod astfel:

$$\begin{cases} x = x_A + t\alpha \\ y = y_A + t\beta \end{cases},\ t \in \mathbb{R}.$$

3.2. Reprezentarea parametrică a unei drepte

Să considerăm numerele reale p, q şi α, β, cu $\alpha \neq 0$ sau $\beta \neq 0$. Cu ajutorul lor definim mulţimea

$$d = \{(x, y) \mid x = p + t\alpha \text{ şi } y = q + t\beta,\ t \in \mathbb{R}\} \qquad (3)$$

Atunci este evident, folosind (2), *că d* este o dreaptă, anume *dreapta care trece prin punctul $A(p, q)$ şi are direcţia dată de vectorul $\vec{u}\,(\alpha, \beta)$.*

Definiţie. Spunem că perechea de egalităţi

$$x = p + t\alpha \text{ şi } y = q + t\beta,\ t \in \mathbb{R}$$

reprezintă *ecuaţiile parametrice ale dreptei d.* Numerele α, β se numesc *coeficienţii directori ai dreptei d* sau *parametrii directori ai dreptei d.*

Dacă dreapta d are ecuaţiile parametrice de mai sus vom scrie

$$d : \begin{cases} x = p + t\alpha \\ y = q + t\beta \end{cases},\ t \in \mathbb{R}.$$

Caz particular. În cazul unei drepte date sub forma explicită $d : y = mx + n$, reprezentarea parametrică este imediată $d : \begin{cases} x = t \\ y = n + mt \end{cases},\ t \in \mathbb{R}$.

Parametrii directori sunt $(1, m)$, iar dreapta trece prin punctul $(p, q) = (0, n)$.

Exemple

1. Dreapta d care trece prin $A(-3, 5)$ şi are $\vec{u}\,(3, 2)$ ca vector director, are ecuaţiile parametrice $d : \begin{cases} x = -3 + 3t \\ y = 5 + 2t \end{cases},\ t \in \mathbb{R}$.

Graficul lui d se află în figura 18.

Dând lui t diverse valori, obţinem puncte care aparţin lui d. De exemplu, pentru $t = -1$ avem $B(-6, 3)$, iar pentru $t = 1$ avem $C(0, 7)$

Punctul A se obţine pentru $t = 0$.

Ecuaţia vectorială a dreptei d este $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + t\vec{u}$, adică

$x\vec{i} + y\vec{j} = -3\vec{i} + 5\vec{j} + t(3\vec{i} + 2\vec{j}),\ t \in \mathbb{R}$.

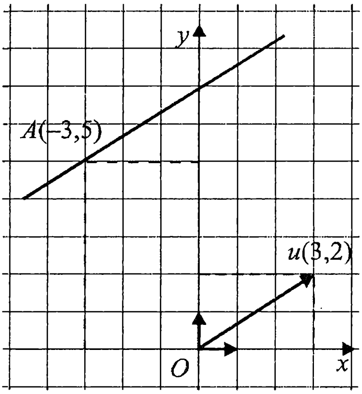


Fig. 18

2. În exemplele care urmează, fiind date ecuaţiile parametrice ale unei drepte d, se obţin un punct $A \in d$ şi un vector $\vec{u}$ care dă direcţia lui d, iar apoi se reprezintă grafic dreapta.

$d: \begin{cases} x = 2 + 5t \\ y = 4 - 3t \end{cases}, \ t \in \mathbb{R}$ $\quad$ $d: \begin{cases} x = 2 \\ y = 4 + 6t \end{cases}, \ t \in \mathbb{R}$ $\quad$ $d: \begin{cases} x = 2 + 3t \\ y = 4 \end{cases}, \ t \in \mathbb{R}.$

$A(2, 4)$, $\vec{u}\,(5, -3)$ $\quad$ $A(2, 4)$, $\vec{u}\,(0, 6)$ $\quad$ $A(2, 4)$, $\vec{u}\,(3, 0)$

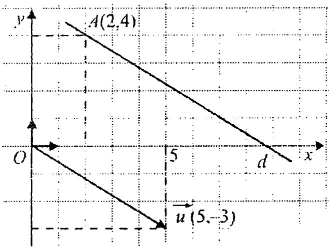


Fig. 19

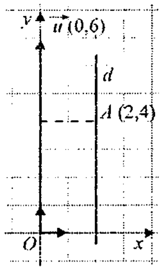


Fig. 20

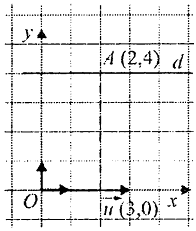


Fig. 21

Observaţie. Ecuaţiile parametrice ale dreptei care trece prin punctele $A(x_A, y_A) \neq B(x_B, y_B)$ sunt:

$$AB: \begin{cases} x = x_A + t(x_B - x_A) \\ y = y_A + t(y_B - y_A) \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$

3.3. Relaţii între diferite tipuri de reprezentări ale dreptelor

Reprezentarea parametrică – reprezentarea vectorială

Echivalenţa între aceste reprezentări este aproape evidentă.

1. Considerăm reprezentarea parametrică a dreptei d

$$d: \begin{cases} x = p + t\alpha \\ y = q + t\beta \end{cases}, t \in \mathbb{R}. \qquad (1)$$

Observăm că pentru $t = 0$ obţinem $(p, q) \in d$, iar vectorul $\vec{u}\,(\alpha, \beta)$ este nenul. De aici rezultă că reprezentarea vectorială a lui d este

$$d: \overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + t\vec{u} \qquad (2)$$

unde $A(p, q) \in d$, iar $\vec{u}$ este vector director. Dreapta d astfel reprezentată trece prin A şi are direcţia dată de $\vec{u}$.

2. Invers, dacă avem dreapta d care trece prin $A(p, q)$ şi are direcţia dată de vectorul $\vec{u}\,(\alpha, \beta)$, obţinem pentru d reprezentarea vectorială de la (1).

Reprezentarea carteziană generală – reprezentarea parametrică (reprezentarea vectorială)

1. Fie dreapta $d: ax + by + c = 0$ $\qquad (3)$

• Dacă $a = 0$ obţinem dreapta orizontală $d: y = -\dfrac{c}{b}$ care trece prin $A(p; -\dfrac{c}{b})$ şi are direcţia dată de $\vec{u} = \vec{i}$, unde p este arbitrar.

Obţinem ecuaţia vectorială $d: \overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + t\vec{i}$ şi, echivalent, reprezentarea parametrică $d: \begin{cases} x = p + t \\ y = -\dfrac{c}{b} \end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$ (parametrii directori (1, 0)).

• Dacă $b = 0$ obţinem dreapta verticală $d: x = -\frac{c}{a}$ care trece prin $A(-\frac{c}{a}, q)$ şi are direcţia dată de $\vec{u} = \vec{j}$ unde q este arbitrar. Obţinem ecuaţia vectorială $d: \overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + t\vec{j}$ şi, echivalent, reprezentarea parametrică $d: \begin{cases} x = -\frac{c}{a} \\ y = q + t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$ (parametrii directori (0, 1)).

• Dacă $a \neq 0$ şi $b \neq 0$, procedăm după cum urmează. Considerăm un punct oarecare $A(p, q) \in d$ şi reprezentăm parametric pe d astfel:

$$d: \begin{cases} x = p - tb \\ y = q + ta \end{cases}, t \in \mathbb{R} \text{ (parametrii directori } (-b, a)) \qquad (4)$$

$$d: \begin{cases} x = p + tb \\ y = q - ta \end{cases}, t \in \mathbb{R} \text{ (parametrii directori } (b, -a)) \qquad (4')$$

De obicei se ia $(p, q) = (0; -\frac{c}{b})$ sau $(p, q) = (-\frac{c}{a}; 0)$.

De exemplu, vom considera (4) şi vom obţine ecuaţia carteziană de la (3). În acest scop *eliminăm parametrul t între ecuaţiile* (4), adică obţinem o relaţie între x şi y în care nu mai apare t, după cum urmează:

$$t = \frac{x-p}{-b} = \frac{y-q}{a} \Leftrightarrow ax + by - ap - bq = 0 \Leftrightarrow ax + by + c = 0,$$

deoarece $A(p, q) \in d$, adică $ap + bq + c = 0$.

Am obţinut dreapta de ecuaţie carteziană generală

$$\Delta: ax + by + c = 0.$$

Faptul că $\Delta = d$ rezultă astfel: ştim că d (dată de (4)) şi Δ reprezintă drepte. În plus, $d \subset \Delta$ deoarece orice punct $M(t) \in d$ unde $M(t)$ are coordonatele $(p - bt, q + at)$, ceea ce se vede prin verificare imediată:

$$a(p - bt) + b(q + at) + c = ap + bq + c + t(-ab + ab) = 0.$$

Din (4) şi (4') obţinem ecuaţia vectorială a lui d

$$d: \overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + t\vec{u}$$

unde $A(p, q) \in d$ ca mai sus şi $\vec{u}(-b, a)$ este vector director (puteam lua şi $\vec{u}(b, -a)$, conform cu (4')).

Observaţie. Din cele de mai sus rezultă că dreapta $ax + by + c = 0$ admite $\vec{u}(-b, a)$ ca vector director. În particular, dreapta $y = mx + n$ admite $\vec{u}(1, m)$ ca vector director. De asemenea, dacă dreapta $y = mx + n$ admite $\vec{v}(\alpha, \beta)$ *ca* vector director, atunci $\alpha \neq 0$. Cum vectorii $\vec{u}(1, m)$ şi $\vec{v}(\alpha, \beta)$ sunt coliniari, rezultă $m = \frac{\beta}{\alpha}$.

2. Invers, să considerăm dreapta d dată prin reprezentarea parametrică $d: \begin{cases} x = p + t\alpha \\ y = q + t\beta \end{cases}, t \in \mathbb{R}$. Evident, d se poate da vectorial prin $d: \overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + t\vec{u}$, unde $A(p\ q)$ şi $\vec{u}(\alpha, \beta)$. Vom obţine reprezentarea carteziană generală a lui d după cum urmează.

Dacă $\alpha = 0$, atunci $d \parallel Oy$ sau $d = Oy$, deci $d : x - p = 0$.

Dacă $\beta = 0$, atunci $d \parallel Ox$ sau $d = Ox$, deci $d : y - q = 0$.

Dacă $\alpha \neq 0$ şi $\beta \neq 0$, cele două relaţii se scriu $\frac{x-p}{\alpha} = t$ şi $\frac{y-q}{\beta} = t$ ceea ce ne permite *să eliminăm parametrul t*:

$$\frac{x-p}{\alpha} = \frac{y-q}{\beta} \Leftrightarrow y - q = \frac{\beta}{\alpha}(x-p) \Leftrightarrow \beta x - \alpha y + \alpha q - \beta p = 0.$$

Exemple

1. (trecerea de la ecuaţia generală la ecuaţiile parametrice)

* Dreapta $d : x - 3 = 0$ trece prin $A(3, 0)$ şi $\vec{u}\,(0, 1)$ este vector director, deci $d : \begin{cases} x = 3 \\ y = t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$.

* Dreapta $d : y - 5 = 0$ trece prin $A(0, 5)$ şi $\vec{u}\,(1, 0)$ este vector director, deci $d : \begin{cases} x = t \\ y = 5 \end{cases}, t \in \mathbb{R}$.

* Fie dreapta $d : 3x - y + 6 = 0$. Pentru $x = 0$ avem $y = 6$, deci $A(0, 6) \in d$, iar $\vec{u}\,(1, 3)$ este vector director. Prin urmare $d : \begin{cases} x = t \\ y = 6 + 3t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$.

Pentru $y = 0$ avem $x = -2$, deci altă reprezentare parametrică a aceleiaşi drepte este $d : \begin{cases} x = -2 + t \\ y = 3t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$.

2. (trecerea de la ecuaţiile parametrice la ecuaţia generală)

* Dreapta $d : \begin{cases} x = -3 + 3t \\ y = 5 + 2t \end{cases}$ trece prin $A(-3, 5)$ şi $\vec{u}\,(3, 2)$ este un vector director al lui d.

Pentru a scrie ecuaţia generală, avem $\frac{x+3}{3} = t$ şi $\frac{y-5}{2} = t$, deci $\frac{x+3}{3} = \frac{y-5}{2} \Leftrightarrow y - 5 = \frac{2}{3}(x+3) \Leftrightarrow 2x - 3y + 21 = 0$.

* Dreapta $d : \begin{cases} x = 2 \\ y = 4 + 6t \end{cases}$ are ecuaţia generală $x - 2 = 0$.

* Dreapta $d : \begin{cases} x = 2 + 3t \\ y = 4 \end{cases}$ are ecuaţia generală $y - 4 = 0$.

Scrieţi un vector director al dreptei d, unde d are ecuaţia:

a) $5x + 4y - 3 = 0$; b) $y = 7x - 3$; c) $3x - 2 = 0$; d) $5y = 3$.

Dacă $\vec{u}(\alpha, \beta)$ este un vector director al unei drepte d, aflaţi măsura unghiului dintre d şi axa Ox, unde:

a) $\vec{u}(1, \sqrt{3})$; b) $\vec{u}(2, -2)$; c) $\vec{u}(-\sqrt{3}, 1)$; d) $\vec{u}(0, 4)$; e) $\vec{u}(5, 0)$.

Scrieţi ecuaţiile parametrice ale dreptei d, definită astfel:

a) d trece prin $A(1, 2)$ şi are $\vec{u}(3, -1)$ ca vector director;

b) d trece prin originea O şi are $\vec{u}(3, 4)$ ca vector director;

c) d trece prin $A(1, 7)$ şi este paralelă cu axa Oy;

d) d trece prin punctele $A(-1, 5)$ şi $B(2, -4)$.

Fie dreapta $d : \begin{cases} x = 1 - 4t \\ y = 3 + t \end{cases}$, unde $t \in \mathbb{R}$ şi $M_t(1 - 4t, 3 + t)$ un punct al dreptei d.

a) Se cer coordonatele punctelor M_3, M_{-1}, M_0 şi M_{10}.

b) Pentru ce valori ale lui t se obţin punctele de intersecţie ale lui d cu axele de coordonate?

c) Care dintre punctele $A(-3, 4)$, $B(1, 1)$, $C(9, 1)$, $D(3, 8)$ aparţine dreptei d?

d) Care este punctul comun al dreptelor d şi $d' : x - y + 2 = 0$?

Găsiţi ecuaţia generală a dreptei d, unde:

a) $d : \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 1 - 3t \end{cases}$ b) $d : \begin{cases} x = 2 \\ y = 2 + t \end{cases}$ c) $d : \begin{cases} x = 5 + t \\ y = 1 \end{cases}$

Găsiţi ecuaţiile parametrice ale dreptei d, unde:

a) $y = 2x - 3$; b) $5x - y = 0$; c) $\frac{x}{2} + \frac{y}{3} = 1$; d) $\frac{x-3}{4} = \frac{y+5}{2}$; e) $2x - 3 = 0$.

4.1. Drepte date prin ecuaţia carteziană generală

Se consideră dreptele $d : ax + by + c = 0$, $d' : a'x + b'y + c' = 0$. După cum se ştie, aceste două drepte pot fi în următoarele situaţii una faţă de cealaltă:

I) concurente; II) paralele; III) confundate.

Situaţia III) a fost caracterizată astfel: $d = d' \Leftrightarrow$ există $t \neq 0$ astfel încât $a' = ta$, $b' = tb$, $c' = tc$.

În continuare, ne vom ocupa de situaţiile I) şi II).

Pentru comoditatea exprimării, vom spune că *dreptele d şi d' sunt* în *relaţia* (P) dacă există $t \neq 0$ cu proprietatea $a' = ta$ şi $b' = tb$. Prin urmare, avem echivalenţa: $d = d' \Leftrightarrow d$ şi d' sunt în relaţia (P) şi, în plus, $c' = tc$.

Propoziţia 1. Dacă dreptele d şi d' sunt în relaţia (P) şi $d \neq d'$, atunci d şi d' sunt paralele.

Demonstraţie. Prin ipoteză există $t \neq 0$ astfel încât $a' = ta$, $b' = tb$ şi, în plus, $c' \neq tc$. Într-adevăr, dacă am avea $c' = tc$ ar rezulta $d = d'$. Prin urmare,

$$d : ax + by + c = 0 \tag{1}$$

şi $$d' : a'x + b'y + c' = 0 \Leftrightarrow tax + tby + c' = 0 \Leftrightarrow ax + by + \frac{c'}{t} = 0 \tag{2}$$

Dacă d şi d' nu ar fi paralele, ar rezulta că există un element $(x_0, y_0) \in d \cap d'$. Din (1) şi (2) ar rezulta $ax_0 + by_0 + c = 0$ şi $ax_0 + by_0 + \frac{c'}{t} = 0$. Prin scădere obţinem $c - \frac{c'}{t} = 0$, ceea ce este fals.

*

Vom folosi, un rezultat demonstrat anterior, anume propoziţia 5 de la paragraful 3, cap.7. O consecinţă a acestui rezultat este:

P r o p o z i ţ i a 2. Dreptele d: $ax + by + c = 0$ şi d' : $a'x + b'y + c' = 0$ sunt în relaţia (P) dacă şi numai dacă $ab' - a'b = 0$.

În sfârşit, vom demonstra:

P r o p o z i ţ i a 3. Dacă dreptele d şi d' nu sunt în relaţia (P), atunci d şi d' sunt concurente.

Demonstraţie. Avem de arătat că dacă d şi d' nu sunt în relaţia (P), atunci intersecţia $d \cap d'$ are un singur punct. Cu alte cuvinte, sistemul $\begin{cases} ax + by + c = 0 \\ a'x + b'y + c' = 0 \end{cases}$ are soluţie unică.

Să presupunem, de exemplu, că $a \neq 0$. Atunci $ax + by + c = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{b}{a}y - \frac{c}{a}$.

Sistemul este echivalent cu:

$$\begin{cases} x = -\frac{b}{a}y - \frac{c}{a} \\ a'\left(-\frac{b}{a}y - \frac{c}{a}\right) + b'y + c' = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{b}{a}y - \frac{c}{a} \\ \frac{ab' - a'b}{a}y = \frac{a'c - ac'}{a} \end{cases}$$

Conform propoziţiei 2, avem $\frac{ab' - a'b}{a} \neq 0$. Sistemul nostru este echivalent cu sistemul $\begin{cases} x = -\frac{b}{a}y - \frac{c}{a} \\ y = \frac{a'c - ac'}{ab' - a'b} \end{cases}$ care are soluţie unică. La fel se tratează cazul $b \neq 0$.

Am demonstrat:

T e o r e m ă (poziţia relativă a două drepte în plan)

Fie dreptele d: $ax + by + c = 0$ şi d' : $a'x + b'y + c' = 0$.

I) d şi d' sunt concurente $\Leftrightarrow ab' - a'b \neq 0$;

II) d şi d' sunt paralele $\Leftrightarrow$ există $t \in \mathbb{R}^*$ astfel încât

$$a' = ta,\ b' = tb \text{ şi } c' \neq tc;$$

III) d şi d' sunt confundate $\Leftrightarrow$ există $t \in \mathbb{R}^*$ astfel încât

$$a' = ta,\ b' = tb \text{ şi } c' = tc.$$

Observaţii. În condiţiile teoremei, rezultă:

a) d şi d' sunt paralele dacă şi numai dacă $ab' - a'b = 0$ şi avem $ac' - a'c \neq 0$ sau $bc' - b'c \neq 0$;

b) d şi d' sunt confundate dacă şi numai dacă $ab' - a'b = 0$, $ac' - a'c = 0$ şi $bc' - b'c = 0$.

De exemplu, dacă $c \neq c'$, atunci dreptele $ax + by + c = 0$ şi $ax + by + c' = 0$ sunt paralele.

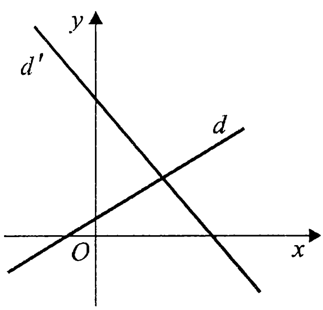
Studiul poziţiei a două drepte d şi d' poate fi prezentat ca discuţie a unui sistem de două ecuaţii de gradul I cu două necunoscute.

Ataşăm dreptelor d şi d' sistemul $(S) = \begin{cases} ax + by + c = 0 \\ a'x + b'y + c' = 0 \end{cases}$. Pentru sistemul (S) avem trei posibilităţi, fiecare fiind echivalentă cu o anumită poziţie a dreptelor d şi d'.

I) (S) este *compatibil şi determinat* (adică are soluţia unică (x_0, y_0)) $\Leftrightarrow$ d şi d' sunt concurente (în punctul $M(x_0, y_0)$).

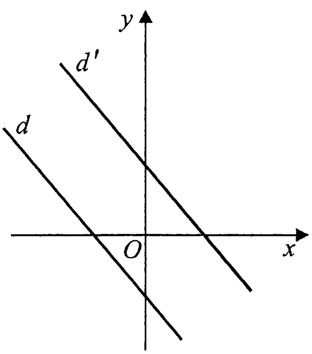
II) (S) este *incompatibil* (adică nu are soluţie) $\Leftrightarrow$ d şi d' sunt paralele.

III) (S) este *compatibil nedeterminat* (adică are cel puţin două soluţii, deci o infinitate de soluţii) $\Leftrightarrow$ d şi d' sunt confundate.



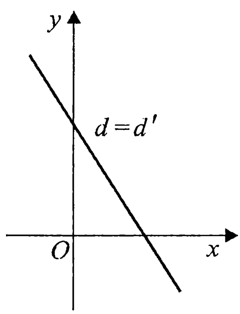
$d \cap d' = \{M\}$

Fig. 22



$d \parallel d'$

Fig. 23



$d = d'$

Fig. 24

Condiţia de concurenţă a trei drepte date prin ecuaţia carteziană generală

T e o r e m ă. Considerăm dreptele d_1, d_2 şi d_3 date prin ecuaţiile

$$d_1 : a_1x + b_1y + c_1 = 0$$
$$d_2 : a_2x + b_2y + c_2 = 0$$
$$d_3 : a_3x + b_3y + c_3 = 0$$

Dreptele d_1, d_2 şi d_3 sunt concurente dacă şi numai dacă se îndeplinesc simultan următoarele două condiţii:

a) $a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0$ şi $a_2b_3 - a_3b_2 \neq 0$ şi $a_3b_1 - a_1b_3 \neq 0$;

b) $a_1(b_2c_3 - b_3c_2) + a_2(b_3c_1 - b_1c_3) + a_3(b_1c_2 - b_2c_1) = 0$.

Demonstraţie. Dreptele d_1, d_2 şi d_3 sunt concurente dacă şi numai dacă se îndeplinesc două condiţii:

1) dreptele sunt două câte două concurente;

2) punctul de intersecţie a două dintre ele (de exemplu d_1 şi d_2) se găseşte pe a treia dreapta (aici d_3).

Conform teoremei privind poziţiile a două drepte date prin ecuaţii generale, deducem că prima condiţie este exact condiţia a) din enunţ.

Să vedem la ce revine a doua condiţie. Intersectăm dreptele d_1 şi d_2 bţinând sistemul $\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1 = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2 = 0 \end{cases}$ cu soluţia unică $x_M = \dfrac{b_1c_2 - b_2c_1}{D}$, $y_M = \dfrac{a_2c_1 - a_1c_2}{D}$ unde $D = a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0$.

Prin urmare, $M(x_M, y_M)$ trebuie să satisfacă ecuaţia lui d_3 ceea ce revine la $a_3x_M + b_3y_M + c_3 = 0$, adică

$$a_1(b_2c_3 - b_3c_2) + a_2(b_3c_1 - b_1c_3) + a_3(b_1c_2 - b_2c_1) = 0$$

Regulă de memorare

Scriem

$$a_1(b\ c - b\ c\ ) + a_2(b\ c\ - b\ c\ ) + a_3(b\ c\ - b\ c\ ) = 0$$

şi completăm indicii inferiori ai literelor b, c astfel: în prima paranteză (2, 3) şi (3, 2), în a doua paranteză (3, 1) şi (1, 3), iar în ultima paranteză (1, 2) şi (2, 1).

Exerciţiu rezolvat

Arătaţi că dreptele $d_1 : x + y - 1 = 0$, $d_2 : tx - y - t = 0$, $d_3 : 3x + ty - 3 = 0$, unde $t \in \mathbb{R}$, sunt concurente dacă şi numai dacă $t \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 3\}$.

R: Trebuie să verificam condiţiile a) şi b) din teorema anterioară. Avem:

$a_1b_2 - a_2b_1 = -1 - t \neq 0 \Leftrightarrow t \neq -1$;

$a_2b_3 - a_3b_2 = t^2 + 3 \neq 0$ (evident);

$a_3b_1 - a_1b_3 = 3 - t \neq 0 \Leftrightarrow t \neq 3$.

A doua condiţie este

$$a_1(b_2c_3 - b_3c_2) + a_2(b_3c_1 - b_1c_3) + a_3(b_1c_2 - b_2c_1) =$$

$$= (3 + t^2) + t(-t + 3) + 3(-t - 1) = 0, \text{ pentru orice } t \in \mathbb{R}$$

Punctul de intersecţie rezultă din rezolvarea sistemului (intersecţia dreptelor d_1 şi d_2) „$x + y - 1 = 0$ şi $tx - y - t = 0$". Obţinem soluţia $(x, y) = (1, 0)$ deci cele trei drepte trec prin punctul $M(1, 0)$.

4.2. Drepte date sub formă explicită

Să particularizăm cele discutate până acum în cazul dreptelor date sub formă explicită.

T e o r e m ă. Fie dreptele $d : y = mx + n$ şi $d' : y = m'x + n'$.

I) d şi d' sunt concurente $\Leftrightarrow m \neq m'$;

II) d şi d' sunt paralele $\Leftrightarrow m = m'$ şi $n \neq n'$;

III) d şi d' sunt confundate $\Leftrightarrow m = m'$ şi $n = n'$.

4.3. Drepte care trec prin puncte date şi au direcţii date, reprezentate vectorial

Fie $d : \vec{v} + t\vec{u}$, $t \in \mathbb{R}$, $d' : \vec{v}\,' + s\vec{u}\,'$, $s \in \mathbb{R}$ două drepte date astfel:

* d trece prin punctul $A(p, q)$ cu vectorul de poziţie $\overrightarrow{OA} = \vec{v} = p\vec{i} + q\vec{j}$ şi are direcţia data de vectorul director $\vec{u} = \alpha\vec{i} + \beta\vec{j}$, unde $\vec{u} \neq 0$.

* d' trece prin punctul $A(p', q')$ cu vectorul de poziţie $\overrightarrow{OA}\,' = \vec{v}\,' = p'\vec{i} + q'\vec{j}$ şi are direcţia data de vectorul director $\vec{u}\,' = \alpha'\vec{i} + \beta'\vec{j}$, unde $\vec{u}\,' \neq 0$.

T e o r e m ă. În condiţiile de mai sus:

I) d şi d' sunt concurente $\Leftrightarrow$ vectorii directori $\vec{u}$ şi $\vec{u}\,'$ nu sunt coliniari (adică sunt liniar independenţi).

II) d şi d' sunt paralele $\Leftrightarrow$ vectorii directori $\vec{u}$ şi $\vec{u}\,'$ sunt coliniari şi vectorii $\vec{v} - \vec{v}\,'$, $\vec{u}$ nu sunt coliniari.

III) d şi d' sunt confundate $\Leftrightarrow$ vectorii directori $\vec{u}$ şi $\vec{u}\,'$ sunt coliniari şi vectorii $\vec{v} - \vec{v}\,'$, $\vec{u}$ sunt coliniari.

4.4. Drepte reprezentate parametric

T e o r e m ă. Fie dreptele reprezentate parametric

$$d : \begin{cases} x = p + t\alpha \\ y = q + t\beta \end{cases} \text{ şi } d' : \begin{cases} x = p' + s\alpha' \\ y = q' + s\beta' \end{cases}, \; t, s \in \mathbb{R}$$

I) d şi d' sunt concurente $\Leftrightarrow \alpha\beta' - \alpha'\beta \neq 0$;

II) d şi d' sunt paralele $\Leftrightarrow \alpha\beta' - \alpha'\beta = 0$ şi $(p - p')\beta - (q - q')\alpha \neq 0$;

III) d şi d' sunt confundate $\Leftrightarrow \alpha\beta' - \alpha'\beta = 0$ şi $(p - p')\beta - (q - q')\alpha = 0$.

Exerciţii rezolvate

E1. Scrieţi ecuaţia dreptei d care trece prin punctul $A(-1, 3)$ şi este paralelă cu dreapta Δ, unde Δ este reprezentată prin:

a) $3x + 3 = 0$; b) $2y = 5$; c) $2x - 4y + 5 = 0$; d) $\begin{cases} x = 4 - 3t \\ y = -1 + 2t \end{cases}$.

R: a) Cum $\Delta \parallel Oy$, rezultă $d : x = -1$.

b) Cum $\Delta \parallel Ox$, rezultă $d : y = 3$.

c) Cum d este o dreaptă oblică (fiind paralelă cu dreapta oblică Δ) ce trece prin A, avem $d : y - 3 = m(x + 1)$, unde $m = m_d$ este panta dreptei d. Cum $d \parallel \Delta$ rezultă $m_d = m_\Delta$.

Pentru a afla m_Δ observăm că Δ are ecuaţia explicită $y = \frac{1}{2}x + \frac{5}{4}$, deci $m_\Delta = \frac{1}{2}$.

Prin urmare, ecuaţia dreptei d este $y - 3 = \frac{1}{2}(x + 1) \Leftrightarrow x - 2y + 7 = 0$.

Altfel. Ecuaţia unei drepte care este paralelă cu $d : 2x - 4y + 5 = 0$ se poate scrie sub forma $2x - 4y + c = 0$, $c \in \mathbb{R}$ (1). Punând condiţia ca dreapta (1) să treacă prin A, avem $-2 -12+ c = 0$, deci $c = 14$. Rezultă că Δ are ecuaţia $2x - 4y + 14 = 0 \Leftrightarrow x - 2y + 7 = 0$.

d) Dreapta Δ trece prin punctul $B(4, -1)$ şi $\vec{u}(-3, 2)$ este vector director al lui Δ. Rezultă că Δ are panta $m_\Delta = -\frac{2}{3}$. Dreapta d trece prin punctul $A(-1, 3)$ şi are panta $m_d = m_\Delta = -\frac{2}{3}$, deci are ecuaţia $y - 3 = -\frac{2}{3}(x + 1) \Leftrightarrow 2x + 3y - 7 = 0$.

E2. Stabiliţi poziţia relativă a dreptelor d şi d', unde:

a) $d : x - 3y - 2 = 0$, $d' : 2x + y - 1 = 0$

b) $d : x + 3y -1 = 0$, $d' : 2 - 2x - 6y = 0$

c) $d : -x - y - 3 = 0$, $d' : 3x + 3y + 1 = 0$

d) $d : \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 1 - t \end{cases}$, $d' : \begin{cases} x = 2 - s \\ y = 2 + s \end{cases}$, unde $t, s \in \mathbb{R}$

e) $d : \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -5 - 3t \end{cases}$, $d' : \begin{cases} x = 3 - 4s \\ y = -8 + 6s \end{cases}$, unde $t, s \in \mathbb{R}$

R: La punctele a), b) şi c) avem drepte oblice, deci putem aduce fiecare ecuaţie la forma explicită.

a) $d : y = \frac{1}{3}x - \frac{2}{3}$, $d' : y = -2x + 1$ deci $m = \frac{1}{3}$, $m' = -2$. Cum $m \neq m'$ rezultă că d şi d' sunt concurente. Notăm $d \cap d' = \{A\}$ şi rezolvând sistemu format de cele două ecuaţii, rezultă $A(\frac{5}{7}, -\frac{3}{7})$.

b) $d : y = -\frac{1}{3}x + \frac{1}{3}$, $d' : y = -\frac{1}{3}x + \frac{1}{3}$, deci $d = d'$.

c) $d : y = -x - 3$, $d' : y = -x - \frac{1}{3}$. Cum $m = m'$ şi $n \neq n'$ rezultă că dreptele d şi d' sunt paralele.

d) Dreapta d are $\vec{u}(2, -1)$ ca vector director şi panta $m = -\frac{1}{2}$, iar dreapta d' are $\vec{v}(-1,1)$ ca vector director şi panta $m' = -1$. Cum $m \neq m'$ rezultă că d şi d' sunt concurente. Fie $d \cap d' = \{A\}$.

Să aflăm coordonatele punctului de concurenţă A.

Metoda 1. Trecând la ecuaţia generală, avem $d : x + 2y - 3 = 0$ şi $d' : x + y - 4 = 0$. Rezolvând sistemul format de aceste ecuaţii găsim $(x, y) = (5, -1)$, deci $A(5, -1)$.

Metoda 2. Cum $A(x_A, y_A) \in d \cap d'$ rezultă că există $t, s \in \mathbb{R}$ astfel încât $\begin{cases} x_A = 1 + 2t \\ y_A = 1 - t \end{cases}$ şi $\begin{cases} x_A = 2 - s \\ y_A = 2 + s \end{cases}$, deci $\begin{cases} 1 + 2t = 2 - s \\ 1 - t = 2 + s \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} s + 2t = 1 \\ s + t = -1 \end{cases}$.

Obţinem $t = 2$ şi $s = -3$. Rezultă, de exemplu pe dreapta d, $x_A = 1 + 4 = 5$ şi $y_A = 1 - 2 = -1$.

e) Vectorul $\vec{u}(2, -3)$ este vector director lui d, iar $\vec{v}(-4, 6)$ este vector director al lui d'. Rezultă că pantele celor două drepte sunt $m = -\frac{3}{2}$ şi $m' = -\frac{6}{4} = -\frac{3}{2}$. Cum $m = m'$ rezultă că d şi d' au aceeaşi direcţie.

Dreapta d trece prin $A(1, -5)$. Studiem dacă A aparţine dreptei d'. Avem: $A(1, -5) \in d' \Leftrightarrow$ există $s \in \mathbb{R}$ astfel încât $3 - 4s = 1$ şi $-8 + 6s = -5 \Leftrightarrow s = \frac{1}{2}$.

Prin urmare d, d' au aceeaşi direcţie şi un punct comun deci coincid, adică $d = d'$.

4.5. Familie de drepte

Considerăm mulţimea dreptelor având ecuaţii de forma

$$d_t : (at + a')x + (bt + b')y + ct + c' = 0, \ t \in \mathbb{R} \qquad (1)$$

O astfel de mulţime se numeşte *familie de drepte.*

Discutarea proprietăţilor unei familii de drepte de acest tip se face după cum urmează.

Pasul 1. Se elimină valorile parametrului t pentru care avem simultan $at + a' = 0$ şi $bt + b' = 0$, pentru ca ecuaţia (1) să reprezinte efectiv o dreaptă.

Pasul 2. Se grupează în funcţie de t, scriind ecuaţia (1) sub forma echivalentă

$$d_t : (a'x + b'y + c') + t(ax + by + c) = 0 \qquad (1')$$

Dacă ecuaţiile „coeficient" $a'x + b'y + c' = 0$ şi $ax + by + c = 0$ reprezintă drepte, atunci mulţimea dreptelor de forma d_t va fi sau o mulţime de drepte care trec printr-un punct fix, sau o mulţime de drepte paralele cu o direcţie dată, sau o dreaptă fixă.

Exerciţii rezolvate

E1. Se consideră mulţimea dreptelor $d_t : (t + 3)x + (t - 2)y - 2t - 1 = 0$, unde $t \in \mathbb{R}$.

a) Arătaţi că toate dreptele d_t trec printr-un punct fix A.

b) Arătaţi că pentru orice dreaptă Δ care trece prin A, cu excepţia uneia singure, există un număr real $t(\Delta)$ cu proprietatea că $\Delta = d_{t(\Delta)}$.

R: Enunţul admite în mod tacit că d_t sunt drepte veritabile. Într-adevăr, nu putem avea simultan $t + 3 = 0$ şi $t - 2 = 0$.

a) Grupăm în funcţie de t, adică scriem: $d_t : (3x - 2y - 1) + t(x + y - 2) = 0$.

Sistemul $\begin{cases} 3x - 2y - 1 = 0 \\ x + y - 2 = 0 \end{cases}$ are soluţia unică $(x, y) = (1, 1)$, prin urmare toate dreptele d_t trec prin punctul $A(1, 1)$.

b) Invers, fie Δ o dreapta care trece prin $A(1, 1)$. Dacă Δ este verticală, adică $\Delta : x - 1 = 0$ vom lua $t(\Delta) = 2$, deci $\Delta = d_2$.

Dacă Δ nu este verticală, putem scrie Δ sub forma $y - 1 = m(x - 1)$ sau $mx - y + 1 - m = 0$, unde m este un parametru real. Vom arăta că pentru orice $m \neq -1$, există $u \in \mathbb{R}^*$ cu proprietatea că putem găsi $t \in \mathbb{R}$ astfel încât $3 + t = um, -2 + t = -u, -1 - 2t = u(1 - m)$.

Într-adevăr, din primele două relaţii rezultă

$$um - 3 = -u + 2 \Rightarrow u = \frac{5}{m+1} \Rightarrow t = -u + 2 = \frac{2m-3}{m+1},$$

iar relaţia ultimă, $-1 - 2t = u(1 - m)$ se verifică.

Pentru $m = -1$, avem dreapta $x + y - 2 = 0$, care nu poate fi scrisă sub forma d_t.

E2. Se consideră mulţimea dreptelor $d_t : (t + 1)x + (t + 1)y + 1 = 0$, unde $t \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$.

a) Arătaţi că toate dreptele d_t sunt paralele cu o dreaptă fixă d (spunem că dreptele d_t au aceeaşi direcţie).

b) Arătaţi că pentru orice dreaptă Δ paralelă cu d, cu excepţia uneia singure, există un număr real $t(\Delta) \neq -1$ cu proprietatea că $\Delta = d_{t(\Delta)}$.

R: a) Scriem d_t sub forma

$$d_t : x + y + \frac{1}{t+1} = 0 \tag{1}$$

Se vede imediat că orice dreaptă d_t este paralelă cu dreapta având ecuaţia $d : x + y = 0$.

b) Invers, fie Δ o dreaptă paralelă cu d. Atunci putem scrie ecuaţia lui Δ sub forma $ux + uy + v = 0$, unde $u \neq 0$, $v \neq 0$ sunt date. Vom arăta că există $t \in \mathbb{R}$, $t \neq -1$ astfel încât $\Delta = d_t$, adică există $s \in \mathbb{R}$, $s \neq 0$ astfel încât $s \cdot 1 = u$, $s \cdot \frac{1}{t+1} = v$.

Rezultă că putem lua chiar $s = u$, $t = \frac{u-v}{v} = \frac{u}{v} - 1 \neq -1$.

Dacă ar exista $t \in \mathbb{R}$ astfel încât $d = d_t$, ar rezulta $\frac{1}{t+1} = 0$, ceea ce nu este posibil.

Aflaţi poziţia relativă a dreptelor d şi d', unde:

a) $d: x + y - 3 = 0,\ d': 2x + 3y - 8 = 0$;

b) $d: y = x + 5, d': 2x - 2y + 3 = 0$;

c) $d: 2y = x + 4, d': \frac{x}{-4} + \frac{y}{2} - 1 = 0$.

Arătaţi că dreptele d şi d' sunt concurente şi calculaţi coordonatele punctului de concurenţă, unde:

a) $d: x + 5y - 35 = 0, d': 3x + 2y - 27 = 0$;

b) $d: 14x - 9y - 24 = 0, d': 7x - 2y - 17 = 0$;

c) $d: 3x + 5 = 0, d': y - 2 = 0$.

Dintre următoarele perechi de drepte, care reprezintă drepte paralele şi care reprezintă drepte confundate?

a) $3x + 5y - 4 = 0, 6x + 10y + 7 = 0$; b) $3x + 5y - 4 = 0, 6x + 10y - 8 = 0$;

c) $2x - 4y + 3 = 0, x - 2y = 0$; d) $x - y\sqrt{2} = 0, x\sqrt{2} - 2y = 0$;

e) $y + 3 = 0, 5y - 7 = 0$.

Determinaţi $a, b \in \mathbb{R}$ astfel încât dreptele: $d: ax + 3y - 8 = 0, d': 4x + by + 20 = 0$ să fie:

a) confundate; b) paralele.

Fie dreptele $d: ax - 2y - 1 = 0, d': 6x - 4y - b = 0, a, b \in \mathbb{R}$. Determinaţi a şi b astfel încât dreptele d şi d' să fie:

a) concurente; b)paralele; c) confundate.

Fie dreptele $d: mx + 8y + n = 0, d': 2x + my - 1 = 0, m, n \in \mathbb{R}$. Discutaţi, în funcţie de parametrii m şi n, poziţia relativă a dreptelor d şi d'.

Arătaţi că dreptele $d: \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = t \end{cases}$ şi $d': \begin{cases} x = -4s \\ y = 2 + s \end{cases}$ unde $t, s \in \mathbb{R}$ sunt concurente şi determinaţi punctul de intersecţie.

Fie $a \in \mathbb{R}$ şi dreptele $d: \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -1 + at \end{cases}$ şi $d': \begin{cases} x = 6as \\ y = 4 + 3s \end{cases}$ unde $t, s \in \mathbb{R}$. Să se studieze poziţiile relative ale celor două drepte în funcţie de valorile parametrului a.

Discutaţi, în funcţie de parametrul real m, poziţia relativă a dreptelor d şi d', unde:

a) $d: (m + 2)x + 4y = 8 - 3m, d': 2x + (m + 4)y = 8$;

b) $d: 3mx + (3m + 2)y = m, d': (m + 1)x + 2my = m - 1$.

Fie punctele $A(1, 0)$, $B(-1, 3)$, $C(4, 5)$, $D(6, 7)$ şi $M(3, 4)$, $N(4, 3)$ Considerăm dreptele d şi d', unde d este dreapta care trece prin M şi este paralelă cu AB, iar d' este dreapta care trece prin N şi este paralelă cu CD. Arătaţi că cele două drepte sunt concurente şi aflaţi punctul lor de intersecţie.

Arătaţi că ecuaţia dreptei care trece prin punctul $M(x_0, y_0)$ şi este paralelă cu dreapta $ax + by + c = 0$ este $a(x - x_0) + b(y - y_0) = 0$.

Scrieţi ecuaţia dreptei care trece prin punctul $M(2, -3)$ şi este paralelă cu dreapta d, având ecuaţia:

a) $3x - 7y + 3 = 0$; b) $16x - 24y - 7 = 0$;

c) $2x + 3 = 0$; d) $3y - 1 = 0$.

Scrieţi ecuaţia dreptei care trece prin punctul $M(-3, 4)$şi este paralelă cu dreapta d, dată prin reprezentarea:

a) $\frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{3}$; b) $\begin{cases} x = 3 + t \\ y = 4 - 7t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$.

În triunghul ABC fie A', B', C' mijloacele laturilor BC, CA, AB. Ştiind că $A'(2, 3)$, $B'(-1, 2)$, $C'(4, 5)$ scrieţi ecuaţiile laturilor triunghiului ABC.

Două laturi ale unui paralelogram au ecuaţiile $x + y - 2 = 0$ şi $2x - y + 4 = 0$, iar punctul $I(3, 1)$ este intersecţia diagonalelor. Scrieţi ecuaţiile celorlalte două laturi ale paralelogramului.

Fie familia de drepte

$$d_m : mx + (2m + 7)y - 5m + 2 = 0,\ m \in \mathbb{R}.$$

Aflaţi valoarea parametrului m pentru care:

a) dreapta d_m are panta egală cu -1;

b) dreapta d_m intersectează axa Ox în punctul $A(-5, 0)$.

Fie familia de drepte $d_m : (m - 1)x + (2m - 1)y = m - 5,\ m \in \mathbb{R}$.

a) Arătaţi că dreptele d_m trec printr-un punct fix.

Aflaţi valoarea lui m pentru care dreapta d_m are proprietatea:

b) este paralelă cu Ox;

c) este paralelă cu Oy;

d) trece prin origine;

e) este paralelă cu dreapta $\Delta : 2x - 3y - 1 = 0$.

Pentru orice $m \in \mathbb{R}$ consideram egalitatea

$$d_m : (m + 2)x + (m - 2)y - 3m + 6 = 0$$

a) Arătaţi că d_m reprezintă o dreaptă, pentru orice $m \in \mathbb{R}$..

b) Reprezentaţi grafic dreptele d_0, d_{-2} şi d_2

c) Arătaţi că toate dreptele d_m trec printr-un punct fix A.

d) Fie $M(a, b)$ un punct din plan. Discutaţi, după valorile reale a şi b, numărul dreptelor d_m care trec prin M.

e) Aflaţi valoarea lui m pentru care d_m este paralelă cu dreapta de ecuaţie $3x + y - 3 = 0$.

Se consideră mulţimea dreptelor $d_t : (1 + 2t)x + (1 - 3t)y - 5 = 0,\ t \in \mathbb{R}$ (se va verifica faptul că d_t este o dreaptă, pentru orice $t \in \mathbb{R}$).

a) Arătaţi că toate dreptele d_t trec printr-un punct fix M.

b) Arătaţi că pentru orice dreaptă Δ care trece prin M, cu excepţia uneia singure, există un număr real $t(\Delta)$ cu proprietatea că $\Delta = d_{t(\Delta)}$.

Pentru orice $t \in \mathbb{R}$ considerăm ecuaţia $d_t : (t-3)x + (2t-6)y + 3 = 0$.

a) Pentru ce valori ale lui t, ecuaţia d_t reprezintă o dreaptă?

b) Să se studieze familia dreptelor d_t, $t \in \mathbb{R} \setminus \{-3\}$. Trec ele printr-un punct fix? Sunt paralele între ele? Există o dreaptă paralelă cu dreapta $\Delta : x + 2y = 0$ care nu este de forma d_t?

Arătaţi că toate dreptele familiei

$$d_m : (m^2 + 6m + 3)x - (2m^2 + 18m + 1)y - 3m + 2 = 0,\ m \in \mathbb{R}.$$

trec printr-un punct fix.

Să se studieze dacă următoarele trei drepte, date prin ecuaţiile generale, sunt concurente:

a) $2x + 3y - 1 = 0,\ 4x - 5y + 5 = 0,\ 3x - y + 2 = 0$;

b) $3x - y + 3 = 0,\ 5x + 3y - 7 = 0,\ x - 2y - 4 = 0$;

c) $2x - y + 1=0,\ x + 2y - 17 = 0,\ x + 2y - 3 = 0$.

Aflaţi valoarea $m \in \mathbb{R}$ pentru care sunt concurente dreptele:

a) $2x - y + 3 + 0,\ x + y + 3 = 0,\ mx + y - 13 = 0$;

b) $2x + my + 1 = 0,\ x - y + 7 = 0,\ x + y - 1 = 0$.

Arătaţi că dreptele $d_1 : x - my = -1$, $d_2 : 2x + y = m$, $d_3 : 3x + (m-1)y = 1 - m$, $m \in \mathbb{R}$, sunt concurente dacă şi numai dacă $m \in \{-1, 1\}$.

Vom reaminti definiţia şi câteva proprietăţi ale produsului scalar a doi vectori, care au fost studiate în clasa a IX-a.

1° Fie doi vectori $\vec{u}$ şi $\vec{v}$. Se numeşte *produsul scalar al vectorilor* $\vec{u}$, $\vec{v}$ un număr real notat $\vec{u} \cdot \vec{v}$ definit astfel:

* dacă, $\vec{u}$ şi $\vec{v}$ sunt nenuli şi unghiul vectorilor $\vec{u}$, $\vec{v}$ are măsura α

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cos\alpha$$

* dacă cel puţin unul dintre $\vec{u}$, $\vec{v}$ este nul, atunci $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$.

2° Vectorii nenuli $\vec{u}$, $\vec{v}$ sunt *perpendiculari* (sau *ortogonali*) dacă şi numai dacă produsul scalar al lor este nul, adică:

$$\vec{u} \perp \vec{v} \Leftrightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = 0.$$

3° Produsul scalar $\vec{u} \cdot \vec{u}$ se numeşte *pătratul scalar al vectorului* $\vec{u}$ şi se notează $\vec{u}^{\,2}$, deci $\vec{u} \cdot \vec{u} = \vec{u}^{\,2}$. Avem $\vec{u}^{\,2} = \vec{u} \cdot \vec{u} = |\vec{u}| \cdot |\vec{u}| \cos 0 = |\vec{u}|^2$, adică $\vec{u}^{\,2} = |\vec{u}|^2$, de unde obţinem lungimea vectorului $\vec{u}$, care este numărul

$$|\vec{u}| = \sqrt{\vec{u}^{\,2}}\,.$$

4° Pentru orice vectori $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ şi orice λ, $\mu \in \mathbb{R}$ au loc următoarele egalităţi, care exprimă *proprietăţile produsului scalar:*

1) $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$;

2) $\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$, $(\vec{u} + \vec{v}) \cdot \vec{w} = \vec{u} \cdot \vec{w} + \vec{v} \cdot \vec{w}$;

3) $\vec{u} \cdot (\lambda\vec{v}) = \lambda(\vec{u} \cdot \vec{v})$;

4) $(\lambda\vec{u}) \cdot (\mu\vec{v}) = \lambda\mu(\vec{u} \cdot \vec{v})$;

5) $\vec{u} \cdot (\vec{v} - \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} - \vec{u} \cdot \vec{w}$.

*

Fie planul cartezian cu reperul *Ox*, *Oy*. Versorii $\vec{i}$ şi $\vec{j}$ ai axelor sunt vectori ortogonali de lungime 1, deci $|\vec{i}| = 1$, $|\vec{j}| = 1$ şi $\vec{i} \cdot \vec{j} = 0$.

Fie în plan doi vectori $\vec{u}(x, y)$ şi $\vec{v}(x', y')$, adică

$$\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j}, \quad \vec{v} = x'\vec{i} + y'\vec{j}.$$

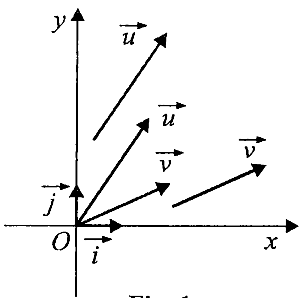


Fig. 1

Să calculăm produsul scalar $\vec{u} \cdot \vec{v}$ în funcţie de coordonatele vectorilor $\vec{u}$ şi $\vec{v}$, aplicând proprietăţile produsului scalar:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = (x\vec{i} + y\vec{j}) \cdot (x'\vec{i} + y'\vec{j}) = xx'\vec{i}^{\,2} + xy'\vec{i} \cdot \vec{j} + yx'\vec{j} \cdot \vec{i} + yy'\vec{j}^{\,2}.$$

Deoarece $\vec{i}^{\,2} = |\vec{i}\,|^2 = 1$, $\vec{j}^{\,2} = |\vec{j}\,|^2 = 1$ şi $\vec{i}\cdot\vec{j} = \vec{j}\cdot\vec{i} = 0$, rezultă

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy'.$$

T e o r e m ă (expresia analitică a produsului scalar). În planul cartezian, produsul scalar al vectorilor $\vec{u}\,(x, y)$ şi $\vec{v}(x', y')$ este $\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy'$.

Vom da în continuare câteva consecinţe importante ale acestei teoreme.

O condiţie de perpendicularitate a doi vectori. Fie vectorii $\vec{u}\,(x, y)$ şi $\vec{v}(x', y')$. Ştim că doi vectori sunt perpendiculari dacă şi numai dacă au produsul scalar nul, deci $\vec{u} \perp \vec{v} \Leftrightarrow xx' + yy' = 0$.

Lungimea (norma) unui vector. Fiind dat un vector $\vec{u}\,(x, y)$, ştim că lungimea lui $\vec{u}$ este $|\vec{u}\,| = \sqrt{\vec{u}^{\,2}}$, unde $\vec{u}^{\,2} = \vec{u}\cdot\vec{u} = x^2 + y^2$, deci $|\vec{u}\,| = \sqrt{x^2 + y^2}$.

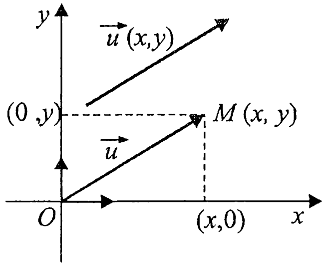


Fig. 2

Măsura unghiului a doi vectori. Fie $\vec{u}\,(x, y)$ şi $\vec{v}(x', y')$ doi vectori nenuli şi $\alpha \in [0, \pi]$ sau $\alpha \in [0°, 180°]$ măsura unghiului acestor vectori. Avem $\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}\,| \cdot |\vec{v}|\cos\alpha$, deci $\cos\alpha = \dfrac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|}$.

Prin urmare, cosinusul unghiului vectorilor $\vec{u}\,(x, y)$, $\vec{v}(x', y')$ este dat de formula

$$\cos\alpha = \frac{xx' + yy'}{\sqrt{x^2 + y^2}\cdot\sqrt{x'^2 + y'^2}}.$$

Exerciţii rezolvate

E1. Fie vectorii $\vec{u}\,(2,1)$ şi $\vec{v}(1, -1)$. Arătaţi că există un vector $\vec{w}$ astfel încât $\vec{w} - \vec{u}$ să fie perpendicular pe $\vec{u}$, iar $\vec{w} - \vec{v}$ să fie perpendicular pe $\vec{v}$.

R: Fie (x, y) coordonatele vectorului $\vec{w}$, deci $(\vec{w} - \vec{u})(x - 2, y - 1)$, iar $(\vec{w} - \vec{v})(x - 1, y + 1)$. Din relaţia $(\vec{w} - \vec{u}) \perp \vec{u}$ rezultă $2(x - 2) + y - 1 = 0$, iar din $(\vec{w} - \vec{v}) \perp \vec{v}$ rezultă $(x - 1) - (y + 1) = 0$. Rezolvând sistemul format de aceste ecuaţii, obţinem $x = \dfrac{7}{3}, y = \dfrac{1}{3}$, deci $\vec{w}\,(\dfrac{7}{3}, \dfrac{1}{3})$.

E2. Calculaţi măsura unghiului vectorilor $\vec{u}\,(3, 5)$ şi $\vec{v}\,(-2, 1)$.

R: Avem $\cos\alpha = \dfrac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|}$, unde α este măsura unghiului $\sphericalangle(\vec{u}, \vec{v})$. Calculăm $\vec{u} \cdot \vec{v} = 3(-2) + 5 \cdot 1 = -1$, $|\vec{u}\,| = \sqrt{9+25} = \sqrt{34}$, $|\vec{v}| = \sqrt{4+1} = \sqrt{5}$, deci $\cos\alpha = \dfrac{-1}{\sqrt{170}}$. Unghiul $\sphericalangle(\vec{u}, \vec{v})$ are măsura $\alpha = \arccos\left(\dfrac{-1}{\sqrt{170}}\right)$.

Calculaţi produsul scalar al vectorilor $\vec{u}$, $\vec{v}$ unde:

a) $\vec{u}(2, -1)$, $\vec{v}(1, 4)$; b) $\vec{u}(3, -1)$, $\vec{v}(0, 2)$; c) $\vec{u}(\frac{1}{3}, 2)$, $\vec{v}(-\frac{1}{2}, 3)$.

Determinaţi $m \in \mathbb{R}$ pentru care vectorii $\vec{u}$, $\vec{v}$ sunt perpendiculari:

a) $\vec{u}(2, m-1)$, $\vec{v}(m+1, 1)$; b) $\vec{u}(m, 1)$, $\vec{v}(m-1, m-4)$;

c) $\vec{u}(m-1, m)$, $\vec{v}(m+2, 2m-1)$.

Calculaţi lungimea vectorului $\vec{u}$ unde:

a) $\vec{u}(2, 7)$; b) $\vec{u}(-1, \sqrt{2})$; c) $\vec{u}(-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2})$.

Fie α este măsura în radiani a unghiului vectorilor $\vec{u}$ şi $\vec{v}$. Calculaţi $\cos\alpha$, dacă:

a) $\vec{u}(2, -6)$, $\vec{v}(-3, -4)$; b) $\vec{u}(3, 4)$, $\vec{v}(-1, 1)$;

c) $\vec{u}(1, 0)$, $\vec{v}(-1, 1)$; d) $\vec{u}(0, -1)$, $\vec{v}(-1, 1)$.

Fie vectorii $\vec{u}(7, -2)$, $\vec{v}(2, 7)$ şi $\vec{w}(21, -6)$. Arataţi ca vectorii $\vec{u}$ şi $\vec{v}$ sunt perpendiculari, iar $\vec{u}$ şi $\vec{w}$ sunt coliniari.

Fie $\vec{u}(5, 4)$, $\vec{v}(7, -1)$ şi $\vec{w}(-4, -11)$. Arătaţi că vectorii $\vec{u} + \vec{v}$ şi $\vec{v} + \vec{w}$ sunt perpendiculari.

Fiind dat $\vec{u}(2, -1)$, determinaţi un vector $\vec{v}$ astfel încât $\vec{u} \cdot \vec{v} = 3$ şi $|\vec{v}| = 3$.

Fiind dat $\vec{u}(4, 8)$, determinaţi un vector $\vec{v}$ astfel încât $\vec{u}$ şi $\vec{v}$ să fie perpendiculari, iar $(\vec{u} + \sqrt{2}\,\vec{v}) \cdot (\vec{u} - \sqrt{2}\,\vec{v}) = 60$.

T e o r e m ă (formula distanţei dintre două puncte). Fie două puncte $A(x_A, y_A)$ şi $B(x_B, y_B)$. Distanţa AB este

$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$

Demonstraţie. Vectorul $\overrightarrow{AB}$ are coordonatele $(x_B - x_A, y_B - y_A)$ deoarece $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = (x_B\vec{i} + y_B\vec{j}) - (x_A\vec{i} + y_A\vec{j}) == (x_B - x_A)\vec{i} + (y_B - y_A)\vec{j}$.

Cum distanţa dintre A şi B este egală cu lungimea vectorului $\overrightarrow{AB}$, adică $AB = |\overrightarrow{AB}|$, obţinem formula din enunţ.

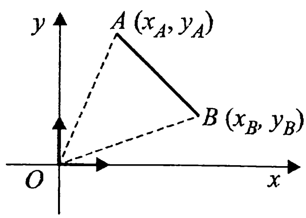


Fig. 3

Exerciţii rezolvate

E1. Fie punctele $A(1, 1)$, $B(m+1, 1)$ şi $C(m, 2m+2)$, unde $m > 0$. Aflaţi valoarea lui m astfel încât triunghiul ABC să fie isoscel.

R: Triunghiul ABC este isoscel dacă $AB = BC$ sau $BC = AC$ sau $AB = AC$.

Avem $AB^2 = m^2$, $BC^2 = 1 + (2m + 1)^2$ şi $AC^2 = (m - 1)^2 + (2m + 1)^2$. Să studiem pe rând cele trei cazuri:

$AB^2 = BC^2 \Leftrightarrow m^2 = 1 + (2m + 1)^2 \Leftrightarrow 3m^2 + 4m + 2 = 0$ (imposibil).

$BC^2 = AC^2 \Leftrightarrow 1 = (m - 1)^2 \Leftrightarrow 1 = |m - 1| \Leftrightarrow 1 = m - 1$ sau $1 = -m + 1$. Reţinem numai valoarea $m = 2$, deoarece în ipoteză avem $m > 0$.

$AB^2 = AC^2 \Leftrightarrow m^2 = (m - 1)^2 + (2m + 1)^2 \Leftrightarrow 2m^2 + m + 1 = 0$ (imposibil).

În concluzie, valoarea cerută este $m = 2$.

E2. Fie triunghiul ABC, unde $A(3, -5)$, $B(-3, 3)$ şi $C(-1, -2)$. Calculaţi lungimea bisectoarei interioare a unghiului A.

R: Fie $D \in [BC]$ piciorul bisectoarei interioare a unghiului A. Conform teoremei bisectoarei, avem $\frac{BD}{DC} = \frac{AB}{AC}$. Să calculăm:

$$AB = \sqrt{(-3-3)^2 + (3+5)^2} = 10, \quad AC = \sqrt{(-1-3)^2 + (-2+5)^2} = 5.$$

Prin urmare, $\frac{BD}{DC} = \frac{10}{5} = 2$, deci $\overrightarrow{DB} = (-2)\overrightarrow{DC}$. Coordonatele lui D sunt:

$$x_D = \frac{1}{1-(-2)}(x_B - (-2)x_C) = \frac{-3+2(-1)}{3} = -\frac{5}{3},$$

$$y_D = \frac{1}{1-(-2)}(y_B - (-2)y_C) = \frac{3+2(-2)}{3} = -\frac{1}{3},$$

deci $D(-\frac{5}{3}, -\frac{1}{3})$. Prin urmare, $AD = \sqrt{(-\frac{5}{3}-3)^2 + (-\frac{1}{3}+5)^2} = \frac{14}{3}\sqrt{2}$.

E3. Fie punctele $A(-1, 6)$, $B(1, -2)$ şi $C(5, 2)$. Determinaţi măsura unghiului $\sphericalangle BAC$.

R: Unghiul $\sphericalangle BAC$ este unghiul vectorilor $\overrightarrow{AB}$ şi $\overrightarrow{AC}$ (fig. 4), deci $\cos(\sphericalangle BAC) = \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{AC}|}$. Coordonatele celor doi vectori sunt $\overrightarrow{AB}$ (2, –8), $\overrightarrow{AC}$ (6, –4) deci $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 2 \cdot 6 + (-8) \cdot (-4) = 44$, iar $|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{4+64} = \sqrt{68} = 2\sqrt{17}$, $|\overrightarrow{AC}| = \sqrt{36+16} = \sqrt{52} = 2\sqrt{13}$.

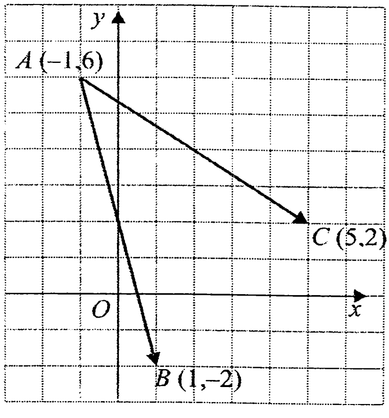


Fig. 4

Obţinem $\cos(\sphericalangle BAC) = \frac{11}{\sqrt{221}}$, deci $\mu(\sphericalangle BAC) = \arccos\frac{11}{\sqrt{221}}$.

Observaţie. Putem calcula $\cos(\sphericalangle BAC)$ aplicând teorema cosinusului în triunghiul ABC, unde cunoaştem lungimile laturilor.

Calculaţi distanţa AB, unde:

a) $A(3, 2), B(0, -2)$; b) $A(-1, 0), B(-5, 4)$; c) $A(-1, -4), B(-3, -8)$.

Arătaţi că triunghiul cu vârfurile $A(2, 3), B(-1, -1)$ şi $C(6, 0)$ este dreptunghic isoscel.

Arătaţi că triunghiul ABC este dreptunghic, unde:

a) $A(-3, -3), B(-1, 3), C(11, -1)$; b) $A(4, 3), B(7, 6), C(2, 11)$.

Fie punctele $A(5, 3), B(0, 4)$, $C(-3, 2), D(-4, -3)$ şi $E(1, -4)$. Arătaţi că există un paralelogram, un triunghi isoscel şi un triunghi dreptunghic cu vârfurile în mulţimea $\{A, B, C, D, E\}$.

Calculaţi lungimile medianelor triunghiului ABC, având vârfurile $A(2, -1)$, $B(-2, -3)$, $C(4, 5)$.

Pe axele de coordonate găsiţi punctele situate la distanţa 10 de punctul $A(6, -4)$.

Fie punctele $A(1, 1)$ şi $B(0, 3)$. Găsiţi un punct M astfel încât triunghiul AMB să fie echilateral.

T e o r e m ă. Fie d şi d' două drepte în planul euclidian.

a) Dacă $d : ax + by + c = 0, d' : a'x + b'y + c' = 0$, atunci:

$$d \text{ şi } d' \text{ sunt perpendiculare} \Leftrightarrow aa' + bb' = 0;$$

b) Dacă $d : y = mx + n, d' : y = m'x + n'$, atunci:

$$d \text{ şi } d' \text{ sunt perpendiculare} \Leftrightarrow m \cdot m' = -1;$$

c) Dacă $d : \begin{cases} x = p + t\alpha \\ y = q + t\beta \end{cases}, \quad d' : \begin{cases} x = p' + s\alpha' \\ y = q' + s\beta' \end{cases}$, unde $t, s \in \mathbb{R}$, atunci:

$$d \text{ şi } d' \text{ sunt perpendiculare} \Leftrightarrow \alpha\alpha' + \beta\beta' = 0.$$

Demonstraţie. Fie $\vec{u}(e, f)$ un vector director al dreptei d şi $\vec{v}(e', f')$ un vector director al dreptei d'. Demonstraţia se bazează pe echivalenţele:

$$d \perp d' \Leftrightarrow \vec{u} \perp \vec{v} \Leftrightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \Leftrightarrow ee' + ff' = 0,$$

unde $\vec{u}$ şi $\vec{v}$ sunt: a) $\vec{u}(-b, a)$, $\vec{v}(-b', a')$; b) $\vec{u}(1, m)$, $\vec{v}(1, m')$; c) $\vec{u}(\alpha, \beta)$, $\vec{v}(\alpha', \beta')$.

Observaţie. Fie dreapta $d : ax + by + c = 0$ şi $\vec{u}(-b, a)$ un vector director al ei. Vectorul $\vec{n}(a, b)$ este perpendicular pe $\vec{u}$, deoarece $\vec{n} \cdot \vec{u} = a(-b) + ba = 0$, şi se numeşte *vector normal al dreptei d.*

Exerciţii rezolvate

E1. (*ecuaţia dreptei care trece printr-un punct şi este perpendiculară pe o dreaptă dată*)

Scrieţi ecuaţia dreptei d care trece prin punctul $A(-3, 4)$ şi este perpendiculară pe dreapta Δ, unde Δ este reprezentată prin

a) $x - 2y + 5 = 0$; b) $\dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y+3}{3}$; c) $\begin{cases} x = 3 + t \\ y = 4 - 7t \end{cases}$.

R: La a) şi b) dreapta Δ este oblică, şi cum $d \perp \Delta$, rezultă că d este oblică.

Prin urmare d are o ecuaţie de forma $y - 4 = m(x + 3)$, unde $m = m_d$ este panta lui d şi va fi determinată din condiţia $m_d \cdot m_\Delta = -1$.

a) Avem $y = \frac{1}{2}x + \frac{5}{2}$, deci $m_\Delta = \frac{1}{2}$ de unde $m_d = \frac{-1}{m_\Delta} = -2$, deci $y - 4 = -2(x + 3) \Leftrightarrow 2x + y + 2 = 0$.

b) Avem $y + 3 = \frac{3}{2}(x - 1)$, deci $m_\Delta = \frac{3}{2}$ de unde $m_d = \frac{-1}{m_\Delta} = -\frac{2}{3}$, deci $y - 4 = -\frac{2}{3}(x + 3) \Leftrightarrow \frac{x+3}{-3} = \frac{y-4}{2}$.

c) Fie $\vec{v}(\alpha, \beta)$ un vector director al lui d. Cum $\vec{u}(1, -7)$ este vector director al lui Δ, rezultă $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \Leftrightarrow \alpha - 7\beta = 0$. Luăm $\alpha = 7$ şi $\beta = 1$, deci d trece prin $A(-3, 4)$ şi are direcţia $\vec{v}(7, 1)$. Prin urmare, $d : \begin{cases} x = -3 + 7t \\ y = 4 + t \end{cases}$.

E2. (*ecuaţia mediatoarei unui segment*)

Fie punctele $A(-2, 1)$ şi $B(3, -1)$. Scrieţi ecuaţia mediatoarei segmentului AB, prin două metode, folosind faptul că mediatoarea unui segment este:

a) dreapta perpendiculară pe segment în mijlocul lui;

b) mulţimea punctelor egal depărtate de capetele segmentului.

R: Fie d mediatoarea lui $[AB]$ (vezi fig. 5).

a) Fie C mijlocul lui $[AB]$, deci $C(\frac{1}{2}, 0)$. Ecuaţia dreptei d are forma $y - 0 = m(x - \frac{1}{2})$, unde m este panta lui d. Cum $d \perp AB$, avem $m \cdot m_{AB} = -1$, unde $m_{AB} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = -\frac{2}{5}$ deci $m = \frac{5}{2}$.

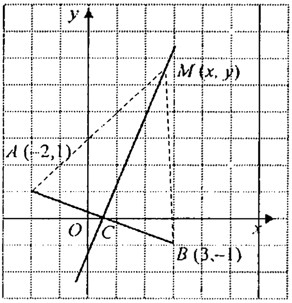


Fig. 5

În final $d : y = \frac{5}{2}(x - \frac{1}{2})$, adică $d : 10x - 4y - 5 = 0$.

b) $M(x, y) \in d \Leftrightarrow MA = MB \Leftrightarrow MA^2 = MB^2 \Leftrightarrow (x + 2)^2 + (y - 1)^2 = (x - 3)^2 + (y + 1)^2 \Leftrightarrow 4x + 4 - 2y + 1 = -6x + 9 + 2y + 1 \Leftrightarrow 10x - 4y - 5 = 0$.

E3. (*simetricul unui punct faţă de o dreaptă*)

Fie punctul $A(1, 2)$ şi dreapta $d : 3x - y + 9 = 0$. Se cer:

a) coordonatele proiecţiei lui A pe dreapta d.

b) coordonatele simetricului lui A faţă de dreapta d.

R: a) Notăm cu P proiecţia lui A pe dreapta d (fig. 6).

Metoda 1. Fie $P(a, b)$. Avem: $P \in d \Rightarrow 3a - b + 9 = 0$, $PA \perp d \Rightarrow m_{PA} \cdot m_d = -1$ $\Rightarrow \frac{b-2}{a-1} \cdot 3 = -1 \Rightarrow 3b - 6 = -a + 1 \Rightarrow a + 3b = 7$. Rezolvând sistemul „$3a - b + 9 = 0$ şi $a + 3b = 7$" obţinem $(a, b) = (-2, 3)$.

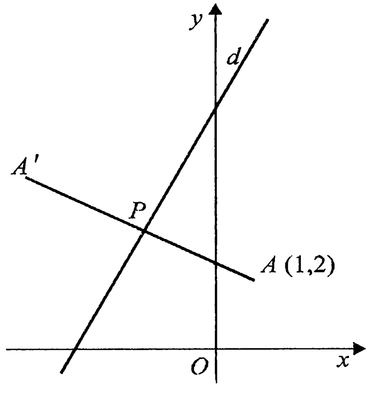


Fig. 6

Metoda 2. Se scriu ecuaţiile parametrice ale dreptei AP. Vectorul normal al dreptei d, anume $\vec{n}(3, -1)$ este vector director al lui AP, deci $AP : \begin{cases} x = 1 + 3t \\ y = 2 - t \end{cases}$.

Există $t \in \mathbb{R}$ astfel încât $P(1 + 3t, 2 - t)$. Cum $P \in d$, avem $3(1 + 3t) - (2 - t) + 9 = 0$ $\Leftrightarrow t = -1$, deci $P(-2, 3)$.

Metoda 3. Se scrie ecuaţia dreptei AP ca fiind dreapta care trece prin A şi este perpendiculară pe d, anume $x + 3y = 7$, şi apoi se rezolvă sistemul „$3x - y + 9 = 0$ şi $x + 3y = 7$".

b) Notăm cu $A'(a', b')$ simetricul lui A faţă de dreapta d. Punctul A' este simetricul lui $A(1, 2)$ faţă de $P(-2, 3)$, proiecţia lui A pe d. Prin urmare, avem $2x_p = a + a'$, $2y_p = b + b'$, de unde $a' = 2x_p - a = -4 - 1 = -5$ şi $b' = 2y_p - b = 6 - 2 = 4$.

E4. Fie triunghiul ABC, unde $A(3, 3)$, $B(1, 0)$, $C(0, 2)$. Să se afle ortocentrul H şi centrul cercului circumscris Ω al triunghiului ABC.

R: Fie A', B' picioarele înălţimilor din A, B, deci $\{H\} = AA' \cap BB'$, unde $AA' : y - 3 = -2(x - 3)$, $BB' : y = \frac{2}{3}(x - 1)$. Rezolvând sistemul format de ecuaţiile dreptelor AA' şi BB' obţinem soluţia $(x, y) = \left(\frac{29}{8}, \frac{7}{4}\right)$, deci $H\left(\frac{29}{8}, \frac{7}{4}\right)$.

Centrul Ω al cercului circumscris se află, de exemplu, la intersecţia mediatoarelor laturilor BC şi AC, care au ecuaţiile $y - 1 = \frac{1}{2}(x - \frac{1}{2})$, $y - \frac{5}{2} = -\frac{3}{2}(x - \frac{3}{2})$. Rezolvând sistemul format de aceste ecuaţii, obţinem soluţia $(x, y) = (2, \frac{7}{4})$, deci $\Omega(2, \frac{7}{4})$.

Scrieţi ecuaţia perpendicularei duse din punctul $A(-2, 1)$ pe dreapta d, dacă d are ecuaţia:

a) $y = 3x - 2$; b) $y + x = -1$; c) $2y - 3x = 5$; d) $x + 2y = 0$.

Arătaţi că dreapta care trece prin punctul $A(x_0, y_0)$ şi este perpendiculară pe dreapta $ax + by + c = 0$ are ecuaţia $b(x - x_0) - a(y - y_0) = 0$.

Scrieţi ecuatia mediatoarei segmentului AB, unde:

a) $A(3, -1)$, $B(5, 4)$; b) $A(4, 2)$, $B(4, -6)$; c) $A(-4, 2)$, $B(6, 2)$.

Fie punctele $A(1, 1)$ şi $B(3, 7)$. Găsiţi un punct M pe Ox şi un punct N pe Oy, astfel încât $MA = MB$, $NA = NB$.

Fie Ω centrul cercului circumscris triunghiului ABC. Se ştie ca punctul Ω are proprietăţile:

* este punctul de intersecţie al mediatoarelor triunghiului;
* este egal depărtat de vârfurile triunghiului.

Folosind aceste proprietăţi aflaţi prin două metode punctul Ω dacă vârfurile triunghiului au coordonatele:

a) $A(0, 1), B(1, -1), C(2, 0)$; b) $A(2, 1), B(-3, 2), C(-1, 1)$.

Arătaţi ca triunghiul ABC este dreptunghic şi aflaţi centrul Ω şi raza R a cercului circumscris triunghiului, dacă:

a) $A(2, 2), B(-5, 1), C(3, -5)$; b) $A(-1, 3), B(3, 1), C(1, -3)$.

Aflaţi ortocentrul triunghiului ABC, unde:

a) $A(1, 5), B(-4, 3), C(2, 9)$; b) $A(5, 6), B(-1, 12), C(1, 0)$.

Fie punctele $H(1, 2)$ şi $A(-6, 2), B(2, -2)$. Să se determine punctul C astfel încât H să fie ortocentrul triunghiului ABC.

Scrieţi ecuaţiile laturilor triunghiului cu un vârf in punctul $A(3, -4)$, ştiind că doua dintre înălţimile sale au ecuaţiile $7x - 2y - 1 = 0$, $2x - 7y - 6 = 0$.

Dacă o latură a unui triunghi se află pe dreapta $2x - 3y + 6 = 0$, iar $2x + y - 2 = 0$, $x + 3y - 12 = 0$ sunt ecuaţiile a două dintre înălţimile triunghiului, să se scrie ecuaţiile celorlalte laturi.

Aflaţi proiecţia punctului A pe dreapta d, unde:

a) $A(-2, 3), d : 3x - y - 3 = 0$; b) $A(-6, 4), d : 4x - 5y + 3 = 0$.

Aflaţi simetricul punctului A faţă de dreapta d, unde:

a) $A(-2, 9), d : 2x - 3y + 18 = 0$; b) $A(5, 2), d : 3x + 2y - 6 = 0$.

Fiind date ecuaţiile a două laturi ale unui dreptunghi, anume $2x - 3y + 5 = $ $3x + 2y - 7 = 0$ şi un vârf al său $A(2, -3)$, scrieţi ecuaţiile celorlalte două laturi.

Fiind date ecuaţiile a două laturi ale unui dreptunghi, anume $x - 2y = 0$, $x - 2y + 15 = 0$ şi ecuaţia unei diagonale, $7x + y - 15 = 0$, aflaţi vârfurile dreptunghiului.

Aflaţi vârfurile unui pătrat care are un vârf în punctul $A(3, -2)$ şi centrul în punctul $I(1,1)$.

Fie în plan dreapta $h : ax + by + c = 0$ şi punctul $A(x_A, y_A)$. Fie punctul $B(x_B, y_B) \in h$ astfel încât $AB \perp h$ (punctul B este proiecţia ortogonală a punctului A pe dreapta h). Lungimea segmentului AB se numeşte *distanţa de la punctul A la dreapta h* şi se notează $d(A, h)$. Ne propunem să găsim o formulă care să exprime $d(A, h)$.

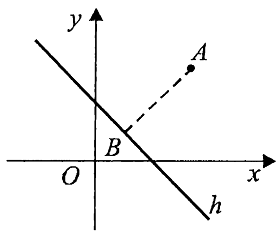


Fig. 7

Vom scrie ecuaţiile parametrice ale dreptei $d = AB$.

Ştim că $\vec{u}(-b, a)$ este un vector director al dreptei h. Considerăm $\vec{n}(a, b)$ şi constatăm că $\vec{u} \cdot \vec{n} = 0$. Prin urmare $\vec{n} \perp \vec{u}$, deci $\vec{n}$ este un vector director al dreptei $d = AB$, deci $d: \begin{cases} x = x_A + ta \\ y = y_A + tb \end{cases}$, cu $t \in \mathbb{R}$. Cum $B \in d$, există $t_0 \in \mathbb{R}$ astfel încât $x_B = x_A + t_0 a$, $y_B = y_A + t_0 b$, iar cum $B \in h$, avem $a(x_A + t_0 a) + b(y_A + t_0 b) + c = 0$, de unde $a\, x_A + \mathrm{b}\, y_A + c = -t_0(a^2 + b^2) \Leftrightarrow t_0 = -\dfrac{ax_A + by_A + c}{a^2 + b^2}$.

Aplicând formula distanţei dintre două puncte avem:

$$\mathrm{d}(A, h) = AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} = |t_0|\ \sqrt{a^2 + b^2}$$

de unde $\mathrm{d}(A, h) = \left|\dfrac{ax_A + by_A + c}{a^2 + b^2}\right| \cdot \sqrt{a^2 + b^2}$. Astfel am obţinut:

T e o r e m ă. Distanţa de la punctul $A(x_A, y_A)$ la dreapta $h: ax + by + c = 0$ este dată de formula $\mathrm{d}(A, h) = \dfrac{|ax_A + by_A + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$.

Exemplu

Distanţa de la punctul $A(2, 4)$ la dreapta $h: x + 2y - 1 = 0$ este $\mathrm{d}(A, h) = \dfrac{|x_A + 2y_A - 1|}{\sqrt{1 + 4}} = \dfrac{|2 + 8 - 1|}{\sqrt{5}} = \dfrac{9}{\sqrt{5}}$.

Verificare: calculăm distanţa de la A la h pe altă cale, anume calculăm AA', unde A' este proiecţia lui A pe dreapta h. Coordonatele lui A' sunt $A'(\frac{1}{5}, \frac{2}{5})$, deci

$$AA' = \sqrt{\left(2 - \frac{1}{5}\right)^2 + \left(4 - \frac{2}{5}\right)^2} = \frac{9}{\sqrt{5}}.$$

Exerciţii rezolvate

E1. Scrieţi ecuaţia unei drepte d care este paralelă cu dreapta $d': 3x - 4y - 2 = 0$ şi se află la distanţa 1 faţă de această dreaptă.

R: Dreapta d fiind paralelă cu d', scriem ecuaţia lui d sub forma $3x - 4y + c = 0$, unde $c \in \mathbb{R}$ va fi determinat. Aflăm un punct al dreptei d, de exemplu $A(-\frac{c}{3}, 0)$ şi punem condiţia ca $\mathrm{d}(A, d') = 1$. Rezultă: $\dfrac{|-c-2|}{5} = 1 \Leftrightarrow |c + 2| = 5 \Leftrightarrow c + 2 = 5$ sau $c + 2 = -5 \Leftrightarrow c = 3$ sau $c = -7$. Prin urmare, există două drepte paralele cu d' şi situate la distanţa 1 faţă de d', anume $3x - 4y + 3 = 0$, $3x - 4y - 7 = 0$.

E2. Scrieţi ecuaţia unei drepte care trece prin punctul $A(-1, 5)$ şi se află la distanţe egale faţă de punctele $B(3, 7)$, $C(1, -1)$.

R: *Metoda 1.* Ecuaţia unei drepte care trece prin $A(-1, 5)$ este $x = -1$ sau $h: y - 5 = m(x + 1)$, $m \in \mathbb{R}$. Distanţele punctelor B şi C la dreapta $x = -1$ nu sunt egale. Să aflăm m astfel încât $\mathrm{d}(B, h) = \mathrm{d}(C, h)$:

$$\frac{|3m-7+m+5|}{\sqrt{m^2+1}} = \frac{|m+1+m+5|}{\sqrt{m^2+1}} \Leftrightarrow |4m-2| = |2m+6| \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow |2m-1| = |m+3| \Leftrightarrow 2m-1 = m+3 \text{ sau } 2m-1 = -m-3 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow m = 4 \text{ sau } m = -\frac{2}{3}.$$

Prin urmare, există două drepte care trec prin A şi sunt egal depărtate de B şi C, anume $4x - y + 9 = 0$ şi $2x + 3y - 13 = 0$.

Metoda 2. Constatăm că A, B şi C nu sunt coliniare. Considerăm dreapta d_1 care trece prin A şi este paralelă cu BC, şi dreapta d_2 care trece prin A şi prin mijlocul lui $[BC]$. Constatăm că dreptele d_1 şi d_2 îndeplinesc condiţiile problemei.

Ecuaţiile bisectoarelor unghiurilor formate de două drepte concurente

Fie dreptele concurente $h : ax + by + c = 0$ şi $h' : a'x + b'y + c' = 0$. Dreptele h şi h' formează patru unghiuri, opuse la vârf (şi congruente) două câte două. Cele patru bisectoare ale acestor unghiuri formează două drepte perpendiculare d_1, d_2. Să scriem ecuaţiile acestor drepte. Fie $M(x_0, y_0)$ un punct din plan.

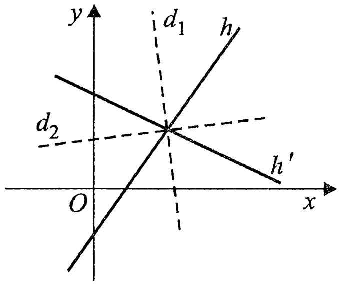


Fig. 8

Avem echivalenţele: $M \in d_1 \cup d_2 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow d(M, h) = d(M, h') \Leftrightarrow \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2+b^2}} = \frac{|a'x_0 + b'y_0 + c'|}{\sqrt{a'^2+b'^2}}$$ de unde rezultă

$$\frac{ax_0 + by_0 + c}{\sqrt{a^2+b^2}} = \pm \frac{a'x_0 + b'y_0 + c'}{\sqrt{a'^2+b'^2}}.$$

Prin urmare, ecuaţiile bisectoarelor unghiurilor formate de cele două drepte sunt:

$$\frac{ax + by + c}{\sqrt{a^2+b^2}} = \pm \frac{a'x + b'y + c'}{\sqrt{a'^2+b'^2}}.$$

Exemplu

Ecuaţiile bisectoarelor unghiurilor formate de dreptele $x + 2y = 0$ şi $2x - 11y + 30 = 0$ sunt $\frac{x+2y}{\sqrt{5}} = \pm \frac{2x - 11y + 30}{\sqrt{125}}$, de unde obţinem $x + 7y - 10 = 0$ şi $7x - y + 30 = 0$.

Pentru a putea deosebi cele două bisectoare, se face apel la elemente suplimentare, de exemplu intersecţia cu axele.

Aria unui triunghi în funcţie de coordonatele vârfurilor

Fie punctele $A(x_A, y_A)$, $B(x_B, y_B)$ şi $C(x_C, y_C)$. Presupunem că aceste puncte nu sunt coliniare şi notăm cu S aria triunghiului ABC. Putem calcula S aplicând formula $S = \frac{1}{2} BC \cdot d(A, BC)$ unde $d(A, BC)$ este distanţa de la punctul A la dreapta BC, cu alte cuvinte înălţimea triunghiului ABC.

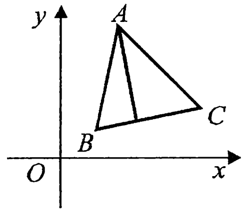


Fig. 9

Scriem forma unitară a ecuaţiei dreptei BC:

$$(x - x_B)(y_C - y_B) = (y - y_B)(x_C - x_B) \text{ sau}$$

$$x(y_C - y_B) - y(x_C - x_B) - x_B y_C + y_B x_C = 0$$

Prin urmare, $d(A, BC) = \dfrac{|x_A(y_C - y_B) - y_A(x_C - x_B) - x_B y_C + y_B x_C|}{\sqrt{(x_C - x_B)^2 + (y_C - y_B)^2}}$.

Numitorul expresiei anterioare este char distanţa BC. Am demonstrat astfel:

T e o r e m ă. Aria S a triunghiului cu vârfurile $A(x_A, y_A)$, $B(x_B, y_B)$ şi $C(x_C, y_C)$ este dată de formula

$$S = \frac{1}{2} |(x_A y_B - y_A x_B) + (x_B y_C - y_B x_C) + (x_C y_A - y_C x_A)|.$$

Observaţie. Dacă punctele A, B şi C sunt coliniare, atunci, conform condiţiei de coliniaritate a trei puncte, rezultă $S = 0$.

Calculaţi distanta de la punctul A la dreapta h, unde:
a) $A(2, -1)$, h : $4 + 3y + 10 = 0$; b) $A(0, -3)$, $h : 5x - 12y - 23 = 0$;
c) $A(-2, 3)$, $h : x = 5$; d) $A(-2, 3)$, $h : y = -1$.

Calculaţi distanţa de la punctul $A(1, -2)$ la dreapta h, unde h *are* ecuaţia:
a) $4x - 3y - 15 = 0$; b) $4x - 3y - 10 = 0$; c) $4x - 3y = 0$.

Arătaţi că distanţele punctelor $A(-5, 7)$, $B(0, -10)$ şi $C(8, -3)$ la dreapta $h : 6x + 8y - 15 = 0$ sunt numere în progresie aritmetică.

În triunghiul ABC, unde $A(\frac{3}{2}, 1)$, $B(1, \frac{5}{3})$ şi $C(3, 3)$, calculaţi lungimea înălţimii vârfului C.

Calculaţi lungimile înălţimilor triunghiului ABC, unde $A(2, 5)$, $B(1, 3)$ şi $C(7, 0)$.

Fie mulţimea dreptelor $d_m : (m - 1)x - (2m - 3)y - 4m + 1 = 0$, $m \in \mathbb{R}$ şi punctul $A(4, 6)$. Determinaţi parametrul m astfel încât distanţa de la A la dreapta d_m să fie egală cu 3.

Găsiţi distanţa dintre dreptele paralele d şi d', unde:
a) $5x - 12y + 26 = 0$, $5x - 12y - 13 = 0$;
b) $12x - 16y - 48 = 0$, $3x - 4y + 43 = 0$.

Găsiţi distanţa dintre dreptele paralele d şi d', unde $d : ax + by + c = 0$, $d' : ax + by + c' = 0$, unde $c \neq c'$.

Două laturi ale unui pătrat se află pe dreptele având ecuaţiile $5x - 12y - 65 = 0$, $5x - 12y + 26 = 0$. Aflaţi aria pătratului.

Două laturi ale unui dreptunghi se află pe dreptele având ecuaţiile $3x - 2y - 5 = 0$ şi $2x + 3y + 7 = 0$, iar $A(-2, 1)$ este unul dintre vârfuri. Calculaţi aria dreptunghiului.

Scrieţi ecuaţiile dreptelor paralele cu dreapta $-2x + y + 5 = 0$ şi care se află la distanţa $\sqrt{20}$ de punctul $A(1, -2)$.

Un triunghi are două vârfuri în punctele $A(1, 2)$ şi $B(5, -1)$, iar al treilea vârf într-un punct C al axei Ox, astfel încât aria triunghiului să fie egală cu 4. Aflaţi punctul C.

Aflaţi un punct A al dreptei $2x - 3y + 4 = 0$ care se află la distanţa 2 faţă de dreapta $3y - 4x = 0$.

Fie dreapta $h : 5x + 12y - 1 = 0$. Aflaţi mulţimea punctelor M din plan cu propietatea că $d(M, h) = 5$.

Determinaţi pe axa Ox un punct A egal depărtat de originea O şi dreapta $5x - 12y - 16 = 0$.

Scrieţi ecuaţia unei drepte care trece prin $A(3, 5)$ şi este egal depărtată de $B(-7, 3)$ şi $C(11, -15)$.

Calculaţi aria triunghiului ABC, unde:

a) $A(-1, 3)$, $B(4, -1)$, $C(3, 3)$; b) $A(2, 5)$, $B(3, -2)$, $C(-4, 1)$;

c) $A(3, -2{:})$, $B(-4, 1)$, $C(-1, 0)$.

Fie punctele $A(1, -2)$, B(5, 4) şi C(−2, 0). Scrieţi ecuaţiile bisectoareior unghiurilor formate de dreptele AB şi AC.

Metoda analitică este o metodă generală de abordare a problemelor de geometrie. Aplicarea ei presupune realizarea următoarelor etape succesive:

1) alegerea reperului, adică a originii şi a axelor de coordonate (am discutat acest aspect la finalul cap.7, paragraful 2);

2) atribuirea de coordonate punctelor (fixe sau mobile) care intervin în problemă;

3) scrierea ecuaţiilor care reprezintă analitic figurile geometrice din enunţul problemei, transpunerea proprietăţilor geometrice în relaţii algebrice;

4) efectuarea calculelor algebrice pe care le presupune rezolvarea problemei şi transpunerea rezultatului în limbaj geometric.

Vom ilustra metoda analitică prin rezolvarea unor probleme de geometrie referitoare la puncte şi drepte din plan.

Exerciţii rezolvate

E1. Să se arate că suma distanţelor unui punct de pe baza unui triunghi isoscel la laturile congruente este constantă.

R: *Metoda 1 (analitică)*

Fie ABC un triunghi isoscel, cu $AB = AC$. Dacă M este un punct punct mobil pe baza $[BC]$ vom arăta că suma distanţelor lui M la laturile AB şi AC este constantă (fig. 10).

Alegerea reperului: O = mijlocul lui $[BC]$, $Ox = BC$, iar Oy = mediatoarea lui $[BC]$. Coordonatele punctelor se aleg astfel;

* punctele fixe sunt $C(c, 0)$, $B(-c, 0)$ şi $A(0, b)$, unde $c > 0$, $b > 0$;

* punctul mobil $M(\lambda, 0)$ unde λ este un parametru, supus condiţiei $\lambda \in [-c; c]$ deoarece $M \in [BC]$.

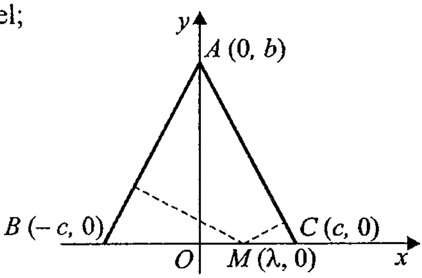


Fig. 10

Rezolvarea problemei constă în a arăta că suma $d(M, AC) + d(M, AB)$ este constantă, adică nu depinde de λ.

Scriem ecuaţia prin tăieturi a dreptelor AB şi AC:

$$AC: \frac{x}{c} + \frac{y}{b} - 1 = 0 \text{ sau } bx + cy - bc = 0.$$

$AB: \dfrac{x}{-c} + \dfrac{y}{b} - 1 = 0$ sau $bx - cy + bc = 0$. Atunci $\mathrm{d}(M, AC) = \dfrac{|b\lambda - bc|}{\sqrt{b^2 + c^2}} = \dfrac{b(c-\lambda)}{\sqrt{b^2+c^2}}$,

$\mathrm{d}(M, AB) = \dfrac{|b\lambda + bc|}{\sqrt{b^2+c^2}} = \dfrac{b(c+\lambda)}{\sqrt{b^2+c^2}}$ deoarece $b > 0$, $|\lambda| \le c$ deci $|\lambda - c| = c - \lambda$, iar $|\lambda + c| = c + \lambda$. Prin urmare, $\mathrm{d}(M, AC) + \mathrm{d}(M, AB) = \dfrac{2bc}{\sqrt{b^2+c^2}}$ = constant (1). Pentru $\lambda = -c$, avem $M = B$, iar (1) se scrie $\mathrm{d}(B, AC) = \dfrac{2bc}{\sqrt{b^2+c^2}}$, ceea ce ne arată că valoarea constantă a sumei este chiar înălţimea asociată unui vârf al bazei triunghiului isoscel.

Metoda 2 (sintetică)

Notăm aria unui triunghi MNP prin $\mathcal{A}[MNP]$. Avem $\mathcal{A}[ABC] = \mathcal{A}[AMB] + \mathcal{A}[AMC]$. Notăm $AB = AC = a$ şi $\mathrm{d}(B, AC) = \mathrm{d}(C, AB) = h$. Cu aceste notaţii, avem: $\frac{1}{2}\mathrm{d}(M, AB)\cdot a + \frac{1}{2}\mathrm{d}(M, AC)\cdot a = \frac{1}{2}ha$ sau $\mathrm{d}(M, AB) + \mathrm{d}(M, AC) = h$ = const.

E2. Se consideră, în planul cartezian $\mathcal{P}$ două puncte fixe $B \ne C$ şi o dreaptă d cu proprietatea $d \ne BC$. Să se determine locul geometric al punctelor G care sunt centrele de greutate (baricentrele) ale tuturor triunghiurilor ABC, formate atunci când punctul A parcurge dreapta d.

R: *Metoda 1 (analitică)*

Noţiunea de loc geometric poate fi considerată, din două puncte de vedere.

1. Din *punct de vedere static* (punctul de vedere al teoriei mulţimilor) numim *loc geometric* mulţimea punctelor din plan care au o anumită proprietate comună.

Pentru a arăta că *locul geometric al punctelor care au proprietatea A este figura geometrică F* trebuie să arătăm că sunt îndeplinite două condiţii:

* orice punct cu proprietatea A se află pe figura F;

* orice punct al figurii F are proprietatea A.

Aici proprietatea punctelor G care formează mulţimea loc geometric F este aceea de a fi baricentrul unui triunghi ABC cu $A \in d$:

$$F = \{G \in \mathcal{P} \mid G \text{ este baricentru pentru } \Delta ABC, A \in d\}.$$

2. Din *punct de vedere cinematic,* numim *loc geometric* traiectoria descrisă de anumite puncte mobile în $\mathscr{P}$ care sunt obţinute cu ajutorul altor puncte mobile, printr-un procedeu precis determinat.

Aici, un punct mobil $A(t)$, care are ca traiectorie dreapta d, generează la fiecare moment t triunghiul $A(t)BC$. Locul geometric F este tocmai, traiectoria lui $G(t)$, când t parcurge axa timpului $\mathbb{R}$:

$$F = \{G_t \in \mathscr{P} \mid G(t) \text{ este baricentru pentru } \Delta A(t)BC, \text{ când } A(t) \text{ parcurge } d\}.$$

În rezolvarea problemei de faţă vom adopta punctul de vedere cinematic. Alegerea reperului (fig. 11): O = mijlocul lui $[BC]$, $Ox = BC$, Oy = mediatoarea lui $[BC]$. Scriem ecuaţia dreptei d sub formă parametrică: $\begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$. Trebuie să avem $d \neq BC$ deci $y_0 \neq 0$ sau $b \neq 0$.

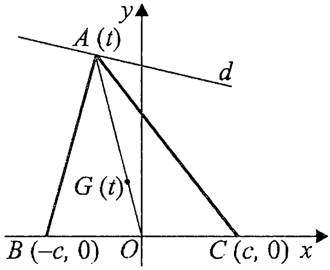


Fig. 11

De asemenea, triunghiul $A(t)BC$ degenerează în trei puncte coliniare dacă $A(t) \in Ox$, adică dacă $y = y_0 + bt = 0$,
iar punctele corespunzătoare acestei situaţii nu aparţin locului geometric.

Ştim că centrul de greutate $G(t)$ are coordonatele $x(t)$, $y(t)$:

$$x(t) = \frac{1}{3}(x_A + x_B + x_C) = \frac{1}{3}(x_0 + at), \quad y(t) = \frac{1}{3}(y_A + y_B + y_C) = \frac{1}{3}(y_0 + bt).$$

Cazul $b = 0$. În acest caz $y(t) = \frac{1}{3}y_0$ şi $y_0 \neq 0$. Am arătat că $F \subset \Delta$, unde $\Delta : y = \frac{1}{3}y_0$. De fapt, avem chiar $F = \Delta$, deorece dacă luăm un punct $G \in \Delta$, dreapta OG va intersecta dreapta d (care în acest caz este paralela $y = y_0$ la dreapta Ox) într-un punct A şi G va fi baricentrul triunghiului ABC.

Cazul $b \neq 0$. Avem $y(t) = \frac{1}{3}(y_0 + bt)$, de unde $t = \frac{1}{b}(3y(t) - y_0)$, deci $x(t) = \frac{1}{3}(x_0 + \frac{a}{b}(3y(t) - y_0))$. Scriind $x(t) = x$, $y(t) = y$, am obţinut relaţia următoare între x şi y, care este ecuaţia carteziană generală a unei drepte $\Delta : 3bx - 3ay - bx_0 + ay_0 = 0$.

Prin urmare, am arătat că $F \subset \Delta$. De fapt avem

$$F = \Delta \setminus \{\frac{bx_0 - ay_0}{3b}; 0\}.$$

Într-adevăr, luând un punct $G \in \Delta$, $G \neq \Delta \cap Ox$, vom putea scrie $G(\frac{1}{3}(x_0 + at), \frac{1}{3}(y_0 + bt))$ cu $t \neq -\frac{1}{b}y_0$. Se vede atunci că $OG \cap d \neq \emptyset$ deoarece OG nu este paralelă cu d. Deci, fie $OG \cap d = \{A\}$. Prin calcul se va obţine $A(x_0 + at, y_0 + bt)$. În triunghiul ABC va rezulta că G este baricentru.

În concluzie, locul geometric este o dreaptă paralelă cu d, mai puţin un punct.

Metoda 2 (sintetică)

Dacă $d \parallel BC$, atunci pentru orice $A \in d$, există triunghiul ABC. Dacă $d \cap BC = \{A_1\}$, atunci B, C şi A_1 sunt coliniare.

Cazul $d \parallel BC$. Fie un punct $A_0 \in d$ şi G_0 = baricentrul ΔA_0BC. Considerăm un punct $A \in d$, $A \neq A_0$ şi G = baricentrul ΔABC. Avem $\frac{GO}{GA} = \frac{1}{2}$, $\frac{G_0O}{G_0A_0} = \frac{1}{2}$, deci $\frac{GO}{GA} = \frac{G_0O}{G_0A_0}$. Conform teoremei lui Thales, rezultă $G_0G \parallel d$.

Fie d' dreapta care trece prin G_0 şi $d' \parallel d$. Am demonstrat:

1) dacă G este baricentrul unui ΔABC cu $A \in d$, atunci $G \in d'$;

Reciproc, fie $G \in d'$. Avem $OG \cap d \neq \varnothing$ şi notăm $OG \cap d = \{A\}$. Avem $GG_0 \parallel d$ deci, conform teoremei lui Thales, $\frac{GO}{GA} = \frac{G_0O}{G_0A_0}$ şi cum $\frac{G_0O}{G_0A_0} = \frac{1}{2}$, avem $\frac{GO}{GA} = \frac{1}{2}$.

Rezultă că G este centrul de greutate al ΔABC. Am demonstrat:

2) dacă $G \in d'$, atunci există $A \in d$ astfel încât G este baricentrul ΔABC.

Din 1) şi 2) rezultă că locul geometric al lui G este o paralelă la dreapta d.

Cazul $d \cap BC \neq \varnothing$. Notăm $d \cap BC = \{A_1\}$. Fie un punct $A_0 \in d$, $A_0 \neq A_1$ şi G_0 = baricentrul ΔA_0BC. Considerăm dreapta d' care trece prin A_0 şi $d' \parallel d$. Notăm $d' \cap BC = \{A_1'\}$. Analog cu cazul anterior se arată că locul geometric al lui G este $d' - \{A_1'\}$.

Observaţie. Dacă d este mediatoarea segmentului BC, atunci locul geometric este $d - \{O\}$.

E3. Fie un triunghi ABC. Să se arate că locul geometric al punctelor M din plan care îndeplinesc condiţia $MB^2 + MC^2 = 2MA^2$ este o dreaptă perpendiculară pe mediana din A.

R: *Metoda 1 (analitică)*

Alegerea reperului (fig. 12): O = mijlocul lui $[BC]$, $Ox = BC$, iar Oy = mediatoarea ui $[BC]$. Coordonatele punctelor: $C(c, 0)$, $B(-c, 0)$ şi $A(a, b)$, unde $b \neq 0$. Fie $M(x, y)$ un punct din plan. Avem echivalenţele: M are proprietatea $MB^2 + MC^2 = 2MA^2 \Leftrightarrow (x + c)^2 + y^2 + (x - c)^2 + y^2 = 2(x - a)^2 + 2(y - b)^2 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow 2ax + 2by + c^2 - a^2 - b^2 = 0 \quad (1)$

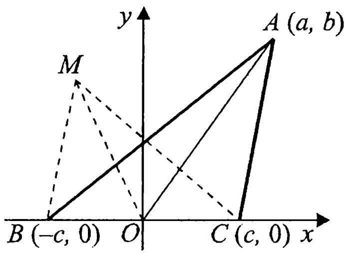


Fig. 12

Conform teoremei, ecuaţiei carteziene generale a dreptei, ştim că ecuaţia (1) reprezintă o dreaptă.

Fie d dreapta de ecuaţie $2ax + 2by + c^2 - a^2 - b^2 = 0$. Rezultă că locul geometric al punctelor cu proprietatea dată este dreapta d.

Să observam că $\vec{u}(-b, a)$ este vector director al dreptei d. Mediana OA are $\overrightarrow{OA} = \vec{v}$ ca vector director, deci $\vec{v}(a, b)$. Cum $\vec{u} \cdot \vec{v} = (-b)a + ab = 0$, rezultă $\vec{u} \perp \vec{v}$, deci d este perpendiculară pe mediana din A.

Metoda 2 (sintetică)

Fie $M \in \mathscr{P}$ un punct cu proprietatea $MB^2 + MC^2 = 2MA^2$. Cum MO este mediană în ΔBMC, conform teoremei medianei avem $4MO^2 = 2(MB^2 + MC^2) - BC^2$, deci $MB^2 + MC^2 = 2MO^2 + \dfrac{BC^2}{2}$. Rezultă că punctul M verifică relaţia $2MO^2 + \dfrac{BC^2}{2} = 2MA^2$ sau $MA^2 - MO^2 = \dfrac{BC^2}{4} = K$ (constant). Cum A şi O sunt fixe iar $MA^2 - MO^2$ = constant, rezultă că locul geometric al lui M este o dreaptă perpendiculară pe OA.

E4. În triunghiul ABC fie punctele $M \in [AC]$ şi $N \in [AB]$ astfel încât MN să fie paralelă cu BC. Notăm $BM \cap CN = \{D\}$. Arătaţi că punctul D aparţine medianei vârfului A în triunghiul ABC.

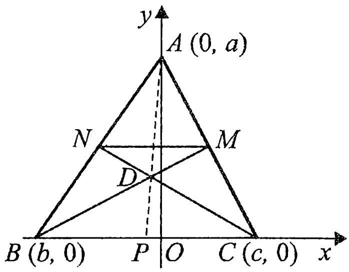


Fig. 13

R: *Metoda 1 (analitică)*

Alegerea reperului şi atribuirea coordonatelor se realizează ca în figura 13.

Fie $MN : y = \lambda$, unde $\lambda \in (0, a)$. Scriem ecuaţiile prin tăieturi ale dreptelor AC şi AB:

$AC : \dfrac{x}{c} + \dfrac{y}{a} - 1 = 0$, $\quad AB : \dfrac{x}{b} + \dfrac{y}{a} - 1 = 0$. Rezultă $M\left(\dfrac{c(a-\lambda)}{a}, \lambda\right)$, $N\left(\dfrac{b(a-\lambda)}{a}, \lambda\right)$. Scriem ecuaţiile parametrice ale dreptelor BM şi CN.

$$BM : \begin{cases} x = b + t\left(b - \dfrac{c(a-\lambda)}{a}\right) \\ y = t(-\lambda) \end{cases}, \qquad CN : \begin{cases} x = c + s\left(c - \dfrac{b(a-\lambda)}{a}\right) \\ y = s(-\lambda) \end{cases}, \qquad s, t \in \mathbb{R}.$$

Pentru a afla coordonatele lui D rezolvăm sistemul

$$\begin{cases} b + t\left(b - \dfrac{c(a-\lambda)}{a}\right) = c + s\left(c - \dfrac{b(a-\lambda)}{a}\right) \\ t(-\lambda) = s(-\lambda) \end{cases}$$

şi găsim $\qquad t = s = \dfrac{a}{\lambda - 2a}$, deci $x_D = (b + c)\dfrac{\lambda - a}{\lambda - 2a}$, $y_D = \dfrac{-a\lambda}{\lambda - 2a} \qquad (1)$

Eliminăm pe λ din relaţiile (1) astfel (presupunem $b + c \neq 0$): $\dfrac{x_D}{b+c} = \dfrac{\lambda - a}{\lambda - 2a}$, $\dfrac{y_D}{a} = \dfrac{-\lambda}{\lambda - 2a} \Rightarrow \dfrac{2x_D}{b+c} + \dfrac{y_D}{a} = 1$. Rezultă că punctul D aparţine dreptei $\dfrac{2x}{b+c} + \dfrac{y}{a} = 1$ care are „tăieturile“ $\left(\dfrac{b+c}{2}, 0\right)$ şi $(0, a)$, adică este chiar mediana vârfului A.

Metoda 2 (sintetică)

Fie $AD \cap BC = \{P\}$. Vom arăta că P este mijlocul lui $[BC]$. Aplicăm teorema lui Menelaus în ΔABP pentru transversala N, D, C şi în ΔACP pentru transversala M, D, B:

$$\frac{CP}{CB}\cdot\frac{NB}{NA}\cdot\frac{DA}{DP}=1,\ \frac{BP}{BC}\cdot\frac{MC}{MA}\cdot\frac{DA}{DP}=1 \qquad (1)$$

Conform teoremei lui Thales, $MN \parallel BC$ implică $\frac{NB}{NA}=\frac{MC}{MA}$, iar din (1) rezultă $\frac{CP}{CB}=\frac{BP}{BC} \Leftrightarrow CP=BP$, deci P este mijlocul lui $[BC]$.

Metoda 3 (sintetică)

Fie P mijlocul lui $[BC]$. Vom arăta că punctele A, D, P sunt coliniare. În ΔBNC avem $\frac{AN}{AB}\cdot\frac{PB}{PC}\cdot\frac{DC}{DN}=\frac{AN}{AB}\cdot\frac{BC}{NM}=\frac{AN}{AB}\cdot\frac{AB}{AN}=1$. Conform teoremei lui Menelaus, rezultă că punctele A, D, P sunt coliniare.

E5. În paralelogramul $ABCD$ fie punctele $M \in (AD)$, $N \in (BC)$ astfel încât $\frac{MA}{MD}=\frac{NC}{NB}=k$, $k>0$. Arătaţi că dreptele DN şi BM sunt paralele.

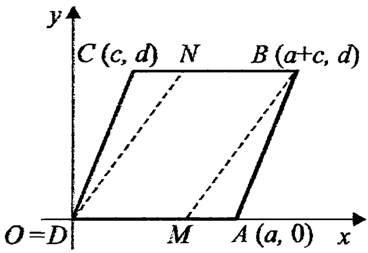


Fig. 14

R: *Metoda 1 (analitică)*

Alegem reperul ca în figura 14. Coordonatele sunt $D(0, 0)$, $A(a, 0)$ şi $C(c, d)$.

Pentru B, ţinem cont că $ABCD$ este paralelogram, deci avem $x_B+0=x_A+x_C$ şi $y_B+0=y_A+y_C$, de unde $B(a+c, d)$.

Avem $M(\frac{a}{1+k}, 0)$, $N(\frac{c+k(a+c)}{1+k}, d)$ deci $\overrightarrow{MB}(a+c-\frac{a}{1+k}, d)$, iar $\overrightarrow{DN}(\frac{c+k(a+c)}{1+k}, d)$. Rezultă că $\overrightarrow{MB}=\overrightarrow{DN}$, deci MB şi DN sunt paralele (în condiţiile date, $MB \neq DN$).

Metoda 2 (vectorială)

Avem $\overrightarrow{MA}=(-k)\overrightarrow{MD}$ de unde $\overrightarrow{MA}=(-k)(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AD})$, deci $\overrightarrow{MA}=\frac{-k}{1+k}\overrightarrow{AD}$.

Analog, din $\overrightarrow{NC}=(-k)\overrightarrow{NB}$ rezultă $\overrightarrow{NC}=\frac{-k}{1+k}\overrightarrow{CB}$ sau $\overrightarrow{CN}=\frac{-k}{1+k}\overrightarrow{BC}$. Prin urmare, $\overrightarrow{MA}=\overrightarrow{CN}$. Aplicând relaţia lui Chasles, avem:

$$\overrightarrow{DN}=\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{CN}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{MA}=\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{MB}.$$

Cum $\overrightarrow{DN}=\overrightarrow{MB}$, rezultă că dreptele distincte DN şi MB au aceeaşi direcţie, deci sunt paralele.

E6. În triunghiul isoscel ABC, unde $AB = AC$, fie D mijlocul laturii BC, E proiecţia lui D pe AC, iar F mijlocul segmentului DE. Arătaţi că dreptele AF şi BE sunt perpendiculare.

R: Alegem reperul şi coordonatele ca în figura 15. Avem $m_{AC} = \dfrac{y_C - y_A}{x_C - x_A} = -\dfrac{a}{c}$,

iar din $m_{OE} \cdot m_{AC} = -1$ rezultă $m_{OE} = \dfrac{c}{a}$.

Ecuaţiile dreptelor AC şi OE sunt:

$AC: y = -\dfrac{a}{c}x + a$, $OE: y = \dfrac{c}{a}$x.

Rezolvând sistemul format cu aceste ecuaţii obţinem

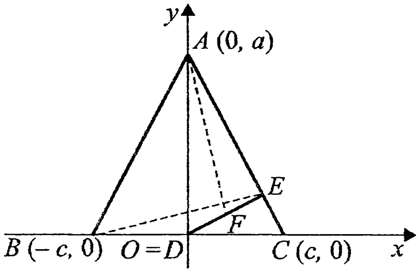


Fig. 15

$$E\left(\frac{a^2c}{a^2+c^2}, \frac{ac^2}{a^2+c^2}\right).$$

Rezultă imediat coordonatele lui F, anume $x_F = \dfrac{1}{2}\, x_E$, $y_F = \dfrac{1}{2} y_E$.

Avem $m_{BE} = \dfrac{y_B - y_E}{x_B - x_E} = \dfrac{ac}{2a^2 + c^2}$, $m_{AF} = \dfrac{y_A - y_F}{x_A - x_F} = -\dfrac{2a^2 + c^2}{ac}$.

Prin urmare, $m_{AF} \cdot m_{BE} = -1$, deci dreptele AF şi BE sunt perpendiculare.

E7. În triunghiul ABC, fie punctele $D \in [AB]$, $E \in [AC]$ astfel încât DE să fie paralelă cu BC şi punctele $G, F \in [BC]$ astfel încât $DG \perp BC$ şi $EF \perp BC$. Considerăm mijlocul P al laturii BC, mijlocul M al înălţimii din A şi centrul N al dreptunghiului $DEFG$. Arătaţi că punctele M, N şi P sunt coliniare.

R: Alegem reperul şi coordonatele ca în figura 16. Rezultă $P(\dfrac{b+c}{2}, 0)$ şi $M(0, \dfrac{a}{2})$. Scriem ecuaţiile prin tăieturi ale dreptelor AB şi AC:

$AB: \dfrac{x}{b} + \dfrac{y}{a} - 1 = 0;$

$AC: \dfrac{x}{c} + \dfrac{y}{a} - 1 = 0$

Ecuaţia dreptei DE este $DE: y = \lambda$, unde $\lambda \in (0, a)$.

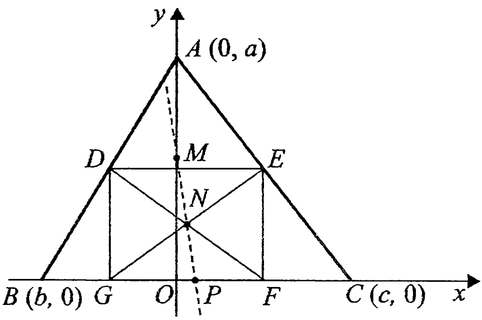


Fig. 16

Rezolvând două sisteme simple găsim $D(\dfrac{b(a-\lambda)}{a}, \lambda)$, $E(\dfrac{c(a-\lambda)}{a}, \lambda)$, de unde rezultă $F(\dfrac{c(a-\lambda)}{a}, 0)$. Punctul N este mijlocul lui $[DF]$, deci obţinem $N(\dfrac{(a-\lambda)(b+c)}{2a}, \dfrac{\lambda}{2})$.

Avem echivalenţele: M, N şi P sunt coliniare $\Leftrightarrow N \in MP \Leftrightarrow$ coordonatele lui N verifică ecuaţia dreptei MP.

Scriind ecuaţia prin tăieturi, avem $MP: \dfrac{x}{b+c} + \dfrac{y}{a} = \dfrac{1}{2}$ (dacă $b + c \neq 0$).

Cum $x_N = \dfrac{(a-\lambda)(b+c)}{2a}$, $y_N = \dfrac{\lambda}{2}$ rezultă $\dfrac{x_N}{b+c} + \dfrac{y_N}{a} = \dfrac{a-\lambda}{2a} + \dfrac{\lambda}{2a} = \dfrac{1}{2}$.

În cazul $b + c = 0$, rezultă că B, C sunt simetrice în raport cu O şi triunghiul ABC este isoscel, iar M, N şi P se află pe înălţimea din A, deci sunt coliniare.

E8. Fie $ABCD$ un pătrat de latură a. Prin vârful C considerăm o dreaptă variabilă d care intersectează dreapta AB în M şi dreapta AD în N, cu condiţia $M \neq N$. Fie d' perpendiculara din A pe dreapta d. Arătaţi că dreptele NB, MD şi d' sunt concurente.

R: *Metoda 1 (analitică)*

Alegem reperul ca în figura 17. Cum d intersectează ambele axe, rezultă că d este oblică, deci $d: y - a = m(x - a)$, unde $m \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$. Obţinem imediat $M(a(1 - \frac{1}{m}), 0)$, $N(0, a(1 - m))$. Scriind ecuaţiile prin tăieturi, obţinem

$$MD: \frac{mx}{a(m-1)} + \frac{y}{a} = 1,$$

$$NB: \frac{x}{a} + \frac{y}{a(1-m)} = 1.$$

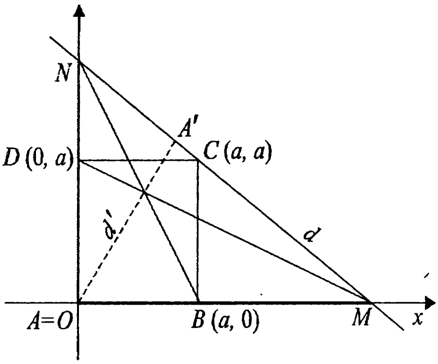


Fig. 17

Dreapta d' care trece prin O şi este perpendiculară pe d, are ecuaţia $d': x + my = 0$. Se verifică imediat că dreptele NB, MD şi d' sunt două câte două concurente. Fie $NB \cap d' = \{Q\}$, unde $x_Q = \dfrac{am(m-1)}{m^2 - m + 1}$, $y_Q = \dfrac{a(1-m)}{m^2 - m + 1}$.

Rezultă $\dfrac{mx_Q}{a(m-1)} + \dfrac{y_Q}{a} = \dfrac{m^2}{m^2 - m + 1} + \dfrac{1-m}{m^2 - m + 1} = 1$, ceea ce ne arată că intersecţia dreptelor NB şi d' aparţine dreptei MD.

Metoda 2 (sintetică)

Fie A' piciorul perpendicularei din A pe d. Conform teoremei lui Ceva, dreptele NB, MD şi AA' sunt concurente dacă şi numai dacă $\dfrac{BA}{BM} \cdot \dfrac{A'M}{A'N} \cdot \dfrac{DN}{DA} = 1$ (1)

Relaţia (1) este succesiv echivalentă cu: $\dfrac{A'M}{A'N} \cdot \dfrac{DN}{BM} = 1 \Leftrightarrow \dfrac{A'M}{A'N} = \dfrac{BM}{DN} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \dfrac{AM^2}{AN^2} = \dfrac{BM}{DN} \Leftrightarrow \dfrac{AM}{AN} = \dfrac{BM}{AM} \cdot \dfrac{AN}{DN} \Leftrightarrow \dfrac{AM}{AN} = \dfrac{BC}{AN} \cdot \dfrac{AM}{DC}$ (adevărat). Prin urmare, relaţia (1) este adevărată, deci dreptele NB, MD şi d' sunt concurente.

Pentru rezolvarea problemei E9 vom face o precizare şi vom demonstra o propoziţie care se referă la rapoarte de segmente orientate.

Precizare privind semnificaţia raportului de segmente orientate $\frac{\overline{MA}}{\overline{MB}}$. (1)

Fie, *în planul cartezian* $\mathscr{P}$, un reper cartezian xOy şi punctele M, A, B pe axa Ox, $M \neq B$. Putem calcula raportul de segmente orientate (1) în sensul definit în clasa a IX-a şi să presupunem că obţinem $\frac{\overline{MA}}{\overline{MB}} = t$.

Atunci am văzut că

$$x_M = \frac{1}{1-t}(x_A - t\,x_B) \text{ şi } y_M = \frac{1}{1-t}(y_A - t\,y_B)$$

Deoarece $M(x_M, 0)$, $A(x_A, 0)$, $B(x_B, 0)$, rezultă că

$$x_M = \frac{1}{1-t}(x_A - t\,x_B) \tag{2}$$

Acum să considerăm aceleaşi puncte M, A, B pe dreapta carteziană Ox, deci $M(x_M)$, $A(x_A)$, $B(x_B)$. Formăm, în spiritul geometriei analitice pe dreaptă raportul

$$\frac{\overline{MA}}{\overline{MB}} = \frac{x_A - x_M}{x_B - x_M} = t'.$$

Atunci, din relaţia (2) obţinem că $t' = t$.

Cu alte cuvinte, raportul (1) calculat pentru segmente orientate în plan sau pentru segmente orientate pe o dreaptă carteziană *este acelaşi*, ceea ce justifică folosirea aceleiaşi notaţii pentru ambele situaţii. Un rezultat similar se obţine pentru puncte situate pe axa Oy.

P r o p o z i ţ i e. Se consideră în planul $\mathscr{P}$ două drepte distincte d şi d' şi punctele M, A, B pe d, $M \neq B$. Prin punctele M, A, B se duc trei drepte paralele între ele, respectiv d_M, d_A, d_B care intersectează pe d' în punctele M', A', B' respectiv. Atunci $M' \neq B'$ şi avem

$$\frac{\overline{MA}}{\overline{MB}} = \frac{\overline{M'A'}}{\overline{M'B'}}$$

(rapoartele se conservă prin paralelism).

Demonstraţie. Deoarece $d_M \parallel d_B$, avem $M' \neq B'$.

Dacă notăm $\frac{\overline{MA}}{\overline{MB}} = t$, ceea ce echivalează cu

$$x_M = \frac{1}{1-t}(x_A - t\,x_B) \text{ şi } y_M = \frac{1}{1-t}(y_A - t\,y_B) \tag{1}$$

avem de arătat că

$$x_{M'} = \frac{1}{1-t}(x_{A'} - t\,x_{B'}) \text{ şi } y_{M'} = \frac{1}{1-t}(y_{A'} - t\,y_{B'}) \tag{2}$$

unde $A(x_A, y_A)$, $A'(x_{A'}, y_{A'})$ etc.

În planul $\mathscr{P}$ alegem un reper cartezian xOy astfel încât $d' = Ox$ (fig. 18). Atunci $A'(x_A, 0)$, $B'(x_B, 0)$ şi $M'(x_{M'}, 0)$, deci a doua egalitate din (2) este în mod evident adevărată.

Dreptele d_A, d_B, d_M au parametrii directori (u, v) cu $v \neq 0$, deoarece aceste drepte nu sunt paralele cu Ox.

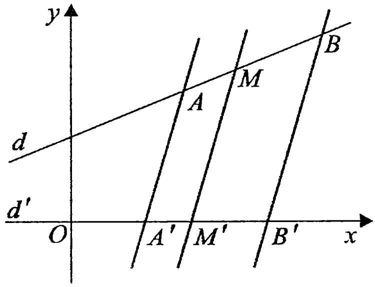


Fig. 18

Reprezentarea parametrică este:

$$d_M : \begin{cases} x = x_M + t_1 u \\ y = y_M + t_1 v \end{cases} \qquad d_A : \begin{cases} x = x_A + t_2 u \\ y = y_A + t_2 v \end{cases} \qquad d_B : \begin{cases} x = x_B + t_3 u \\ y = y_B + t_3 v \end{cases}$$

Intersecţiile M', A', B' ale acestor drepte cu $d' = Ox$ de ecuaţie $y = 0$ se obţin astfel:

$$y_{M'} = 0 = y_M + t_1 v \Rightarrow t_1 = -\frac{y_M}{v}$$

$$y_{A'} = 0 = y_A + t_2 v \Rightarrow t_2 = -\frac{y_A}{v}$$

$$y_{B'} = 0 = y_B + t_3 v \Rightarrow t_3 = -\frac{y_B}{v}$$

de unde rezultă

$$x_{M'} = x_M + t_1 u = x_M - \frac{u}{v} y_M$$

$$x_{A'} = x_A + t_2 u = x_A - \frac{u}{v} y_A$$

$$x_{B'} = x_B + t_3 u = x_B - \frac{u}{v} y_B$$

Folosind (1) obţinem

$$\frac{1}{1-t}(x_{A'} - t\, x_{B'}) = \frac{1}{1-t}\left[(x_A - t\, x_B) - \frac{u}{v}(y_A - t\, y_B)\right] =$$

$$= x_M - \frac{u}{v} y_M = x_{M'}, \text{ adică (2).}$$

E9. Se consideră în planul $\mathscr{P}$ două drepte (nu neapărat distincte) d şi d'. Pe d se consideră punctele distincte M, A, B, iar pe d' se consideră punctele M', A', B' astfel încât $\dfrac{\overline{MA}}{\overline{MB}} = \dfrac{\overline{M'A'}}{\overline{M'B'}}$. Prin M, A, B se duc dreptele paralele între ele d_M, d_A, respectiv d_B, iar prin M', A', B' se duc dreptele paralele între ele $d_{M'}$, $d_{A'}$ respectiv $d_{B'}$ care se intersectează după cum urmează: d_M şi $d_{M'}$ în punctul m, d_A şi $d_{A'}$ în punctul a, d_B şi $d_{B'}$ în punctul b.

Atunci punctele m, a, b sunt distincte, coliniare şi avem

$$\frac{\overline{ma}}{\overline{mb}} = \frac{\overline{MA}}{\overline{MB}} \left(= \frac{\overline{M'A'}}{\overline{M'B'}}\right).$$

R: Punctele m, a, b sunt distincte, fiind situate pe drepte paralele. Notând $\frac{\overline{MA}}{\overline{MB}} = t$ (1) totul revine la a arăta că (notaţii evidente)

$$\frac{1}{1-t}\,(x_a - t\,x_b) \text{ şi } y_M = \frac{1}{1-t}(x_a - t\,x_b) \tag{2}$$

Raportăm $\mathscr{P}$ la un reper cartezian xOy cu $Ox = d$. Trebuie să considerăm următoarele două cazuri posibile:

Cazul I: dreptele $d'_{M'}$, $d'_{A'}$, $d'_{B'}$ nu sunt paralele cu Ox.

Cazul II: dreptele $d'_{M'}$, $d'_{A'}$, $d'_{B'}$ sunt paralele cu Ox.

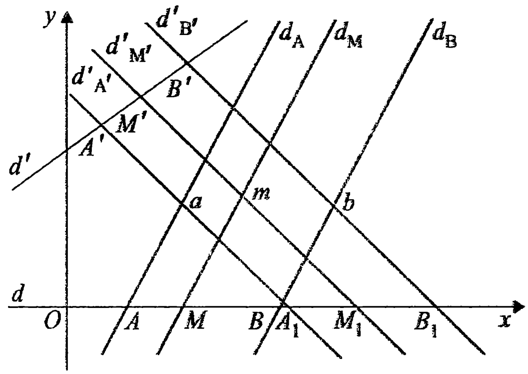


Fig. 19

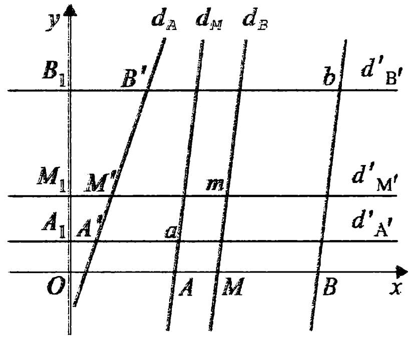


Fig. 20

Cazul I. Aplicăm propoziţia anterioară dreptelor d' şi $d = Ox$, tăiate de paralelele $d'_{A'}$, $d'_{B'}$, $d'_{M'}$ şi obţinem

$$\frac{\overline{M_1A_1}}{\overline{M_1B_1}} = \frac{\overline{M'A'}}{\overline{M'B'}} = \frac{\overline{MA}}{\overline{MB}} = t \tag{3}$$

unde A_1 este intersecţia lui $d'_{A'}$ cu Ox, B_1 este intersecţia lui $d'_{B'}$ cu Ox şi M_1 este intersecţia lui $d'_{M'}$, cu Ox.

Avem reprezentările parametrice (cu notaţii evidente):

$$d_M : \begin{cases} x = x_M + t_1 u \\ y = t_1 v \end{cases} \qquad d_A : \begin{cases} x = x_A + t_2 u \\ y = t_2 v \end{cases} \qquad d_B : \begin{cases} x = x_B + t_3 u \\ y = t_3 v \end{cases}$$

$$d'_{M'} : \begin{cases} x = x_{M_1} + t_1 u' \\ y = \tau_1 v' \end{cases} \qquad d'_{A'} : \begin{cases} x = x_A + t_2 u \\ y = \tau_2 v' \end{cases} \qquad d'_{B'} : \begin{cases} x = x_B + t_3 u \\ y = y_{B_1'} + \tau_3 v' \end{cases}$$

Observăm că avem $v \neq 0$ şi $v' \neq 0$ (deoarece dreptele d_M, d_A, d_B şi $d'_{M'}$, $d'_{A'}$, $d'_{B'}$ nu sunt paralele cu Ox). De asemenea, avem şi $uv' - u'v \neq 0$ deoarece d_M şi $d'_{M'}$ sunt concurente (la fel d_A şi $d'_{A'}$, d_B şi $d'_{B'}$).

Punctele de intersecţie rezultă rezolvând sistemele următoare:

$$m : \begin{cases} x_M + t_1 u = x_{M_1} + \tau_1 u' \\ t_1 v = \tau_1 v' \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \tau_1 = t_1 \dfrac{v}{v'} \\ x_{M_1} + t_1 u = x_M + t_1 \dfrac{v}{v'} u' \end{cases}$$

cu soluţia

$$t_1 = \frac{v'(x_M - x_{M_1})}{u'v - uv'},\ \tau_1 = \frac{v(x_M - x_{M_1})}{u'v - uv'}.$$

Atunci

$$\begin{cases} x_m = x_M + t_1 u = \dfrac{u'v}{u'v - uv'} x_M - \dfrac{uv'}{u'v - uv'} x_{M_1} \\ y_m = t_1 v = \dfrac{vv'}{u'v - uv'}(x_M - x_{M_1}) \end{cases}$$

şi, similar

$$\begin{cases} x_a = \dfrac{u'v}{u'v - uv'} x_A - \dfrac{uv'}{u'v - uv'} x_{A_1} \\ y_a = t_1 v = \dfrac{vv'}{u'v - uv'}(x_A - x_{A_1}) \end{cases} \quad \text{şi} \quad \begin{cases} x_b = \dfrac{u'v}{u'v - uv'} x_B - \dfrac{uv'}{u'v - uv'} x_{B_1} \\ y_b = \dfrac{vv'}{u'v - uv'}(x_B - x_{B_1}) \end{cases}$$

Din (3) avem

$$\begin{cases} x_M = \dfrac{1}{1-t}(x_A - t x_B) \\ y_M = \dfrac{1}{1-t}(y_A - t y_B) \end{cases} \quad \text{şi} \quad \begin{cases} x_{M_1} = \dfrac{1}{1-t}(x_{A_1} - t x_{B_1}) \\ y_{M_1} = \dfrac{1}{1-t}(y_{A_1} - t y_{B_1}) \end{cases}.$$

Folosind aceste ultime relaţii, obţinem egalităţile de la (2), grupând convenabil şi dând factori comuni.

Cazul II. Notăm intersecţiile lui $d'_{A'}$, $d'_{B'}$, $d'_{M'}$ cu Oy prin A_1, B_1, M_1 şi aplicând din nou propoziţia anterioară,avem (v. (1)):

$$\frac{\overline{M_1 A_1}}{\overline{M_1 B_1}} = \frac{\overline{M'A'}}{\overline{M'B'}} = t \Leftrightarrow \begin{cases} y_{M_1} = \dfrac{1}{1-t}(y_{A_1} - t y_{B_1}) \\ x_{M_1} = x_{A_1} = x_{B_1} = 0 \end{cases} \tag{4}$$

În acest caz avem reprezentările parametrice

$$d_M : \begin{cases} x = x_M + t_1 u \\ y = t_1 v \end{cases} \qquad d_A : \begin{cases} x = x_A + t_2 u \\ y = t_2 v \end{cases} \qquad d_B : \begin{cases} x = x_B + t_3 u \\ y = t_3 v \end{cases}$$

$$d'_{M'} : \begin{cases} x = \tau_1 \\ y = y_{M_1} \end{cases} \qquad d'_{A'} : \begin{cases} x = \tau_2 \\ y = y_{A_1} \end{cases} \qquad d'_{B'} : \begin{cases} x = \tau_3 \\ y = y_{B_1} \end{cases}$$

cu $v \neq 0$ (deoarece d_M, d_A, d_B nu sunt paralele cu Ox).

Obţinem punctul de intersecţie m din sistemul

$$\begin{cases} x_M + t_1 u = \tau_1 \\ t_1 v = y_{M_1} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t_1 = \dfrac{y_{M_1}}{v} \\ x_m = x_M + \dfrac{u}{v} y_{M_1} = \tau_1 \end{cases}$$

Aşadar

$$x_m = x_M + \frac{u}{v}\, y_{M_1} \text{ şi } y_m = y_{M_1}$$

şi similar

$$x_a = x_A + \frac{u}{v}\, y_{A_1} \text{ şi } y_a = y_{A_1};\quad x_b = x_B + \frac{u}{v}\, y_{B_1} \text{ şi } y_b = y_{B_1}$$

A doua relaţie din (2) este chiar (4). Deoarece avem şi (v. (1)):

$$x_M = \frac{1}{1-t}\,(x_A - t\, x_B)$$

rezultă prin grupare şi prima relaţie din (4).

Comentariu. Rezolvările precedente arată că alegerea axelor este de o importanţă fundamentală.

Înainte de a trece la rezolvarea problemei următoare, vom aminti următorul rezultat:

Un patrulater plan este convex dacă şi numai dacă diagonalele sale se intersectează într-un punct interior celor două diagonale.

Se vede atunci că cele patru vârfuri ale patrulaterului convex sunt distincte şi oricare trei dintre ele sunt necoliniare.

În enunţul care urmează se consideră că mijlocul unui segment degenerat (redus la un punct) coincide cu acel punct.

E10. Fie $ABCD$ un patrulater în planul $\mathscr{P}$. Următoarele afirmaţii sunt echivalente:

a) $ABCD$ este paralelogram;

b) Pentru orice punct $P \in \mathscr{P}$ are loc următoarea proprietate de închidere:

Notăm $P \overset{D}{=} M_1$. Fie M_2 simetricul lui M_1 faţă de A, M_3 simetricul lui M_2 faţă de B, M_4 = simetricul lui M_3 faţă de C, M_5 = simetricul lui M_4 faţă de D.

Atunci $M_5 = M_1$.

c) Există un patrulater convex $M_1M_2M_3M_4$ cu următoarea proprietate: A, B, C, D sunt respectiv mijloacele laturilor M_1M_2, M_2M_3, M_3M_4 şi M_4M_1.

***R:* a) $\Rightarrow$ b).** Paralelogramul $ABCD$ poate fi dreptunghi sau nu. Fie $P(u, v)$ un punct oarecare în $\mathscr{P}$.

Cazul I. ABCD nu este dreptunghi (fig. 21).

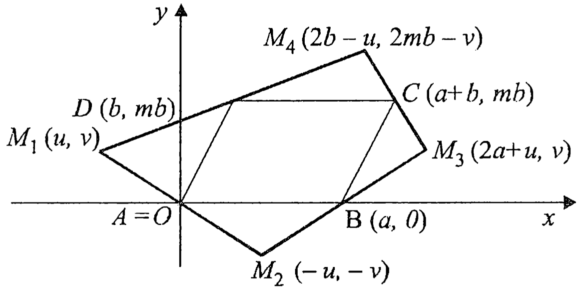


Fig. 21

Luăm axele astfel: $Ox = AB$, $A = O$, $B(a, 0)$ cu $a > 0$. Apoi AD are ecuaţia $y = mx$. Putem considera că $m > 0$ alegând convenabil unghiul ascuţit al paralelogramului în A. Atunci, fie $b > 0$ astfel încât $D = (b, mb)$. Deoarece BC are ecuaţia $y = m(x - a)$ (fiind paralelă cu AD) vom avea $C(a + b, mb)$.

Considerând succesiv mijloacele laturilor, obţinem

$$\begin{cases} 2x_A = x_{M_1} + x_{M_2} \Leftrightarrow 0 = u + x_{M_2} \Leftrightarrow x_{M_2} = -u \\ 2y_A = y_{M_1} + y_{M_2} \Leftrightarrow 0 = v + y_{M_2} \Leftrightarrow y_{M_2} = -v \end{cases}$$

deci $M_2(-u, -v)$.

Cu aceeaşi metodă:

$$\begin{cases} 2x_B = x_{M_2} + x_{M_3} \\ 2y_B = y_{M_2} + y_{M_3} \end{cases} \Rightarrow M_3(2a + u,\ v)$$

$$\begin{cases} 2x_C = x_{M_3} + x_{M_4} \\ 2y_C = y_{M_3} + y_{M_4} \end{cases} \Rightarrow M_4(2b - u,\ 2mb - v)$$

$$\begin{cases} 2x_D = x_{M_4} + x_{M_5} \\ 2y_D = y_{M_4} + y_{M_5} \end{cases} \Rightarrow M_5(u,\ v) = M_1(u,\ v)$$

Cazul II. ABCD este dreptunghi (fig. 22).

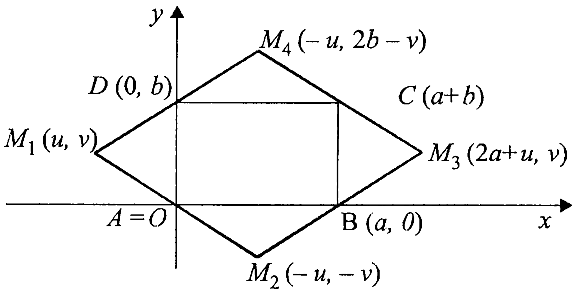


Fig. 22

Din nou luăm $Ox = AB$, $A = 0$, $B(a, 0)$ cu $a > 0$. Putem scrie în continuare $C(a, b)$ şi $D(0, b)$ cu $b > 0$. Pornind cu $P(u, v) \in \mathscr{P}$ arbitrar se obţine în final din nou $M_5 = M_1$, exact ca la cazul I.

Observaţie. Cititorul va observa că dacă luăm $P(u, v) \in AB$, în ambele situaţii, se obţin cazuri de degenerare (de exemplu, studiaţi cazul $P = A$ ...).

b) $\Rightarrow$ c). *Cazul I: ABCD nu este dreptunghi* (fig. 23).

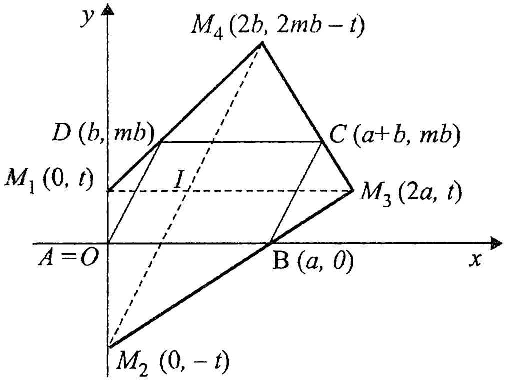


Fig. 23

Axele se aleg ca la cazul I de la **a) $\Rightarrow$ b)**.

Vom considera un număr $t > 0$ astfel încât $t < ma$ şi $t < mb$. Lucrăm ca la **a) $\Rightarrow$ b)** cu $u = 0$ şi $v = t$.

Pornim cu $M_1(0, t)$ şi facem în continuare construcţia de la **a) $\Rightarrow$ b)** obţinând $M_2(0, -t)$, $M_3(2a, t)$, $M_4(2b, 2mb - t)$. Evident A, B, C, D sunt mijloacele laturilor M_1M_2, M_2M_3, M_3M_4 şi M_4M_1.

A rămas să arătăm că $M_1M_2M_3M_4$ este patrulater convex. Vom calcula intersecţia diagonalelor M_1M_3, M_2M_4. Ecuaţiile acestor drepte sunt:

$$M_1M_3 : y = t \qquad (1)$$

$$M_2M_4 : y + t = mx \qquad (2)$$

Intersecţia lor este obţinută raportând sistemul format de (1) şi (2), cu soluţia $x = \dfrac{2t}{m}$, $y = t$. Aşadar, diagonalele M_1M_3 şi M_2M_4 se intersectează în punctul

$I\left(\dfrac{2t}{m}, t\right)$. Rezultă $\dfrac{\overline{IM_1}}{\overline{IM_3}} = \dfrac{x_{M_1} - x_I}{x_{M_3} - x_I} = \dfrac{0 - \dfrac{2t}{m}}{2a - \dfrac{2t}{m}} = -\dfrac{t}{ma - t} < 0$, deci I este între M_1 şi M_3.

$\dfrac{\overline{IM_2}}{\overline{IM_4}} = \dfrac{x_{M_2} - x_I}{x_{M_4} - x_I} = \dfrac{0 - \dfrac{2t}{m}}{2b - \dfrac{2t}{m}} = -\dfrac{t}{mb - t} < 0$, deci I este între M_2 şi M_4. Cum M_1M_3 şi M_2M_4 se intersectează în punctul interior I, rezultă că $M_1M_2M_3M_4$ este patrulater convex.

Cazul II: ABCD este dreptunghi (fig. 24).

Dacă I este centrul dreptunghiului $ABCD$ (intersecţia diagonalelor sale) construim *rombul* $M_1M_2M_3M_4$ cu proprietatea cerută , unde M_1 = simetricul lui I faţă de AD, M_3 = simetricul lui I faţă de BC, M_2 simetricul lui I faţă de AB şi M_4 = simetricul lui I faţă de CD.

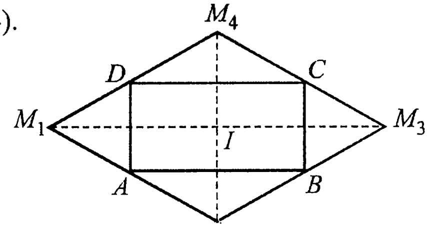


Fig. 24

c) $\Rightarrow$ a). Demonstraţia *sintetică* este cea indicată în acest caz. Folosind figurile 23 şi 24 observăm că $AD \parallel M_2M_4 \parallel BC$ (deoarece AD este linie mijlocie în triunghiul $M_1M_2M_4$ şi BC este linie mijlocie în triunghiul $M_3M_2M_4$), La fel, avem şi $AB \parallel CD$. Deci $ABCD$ este paralelogram.

E11. Se consideră în planul $\mathscr{P}$ un triunghi ABC. Se cere locul geometric al punctelor $M \in \mathscr{P}$ care are proprietatea că ariile triunghiurilor MAB şi MAC sunt egale.

R: Este natural să alegem $Ox = BC$ şi anume O = mijlocul lui BC, deci putem scrie $B(-a, 0)$, $C(a, 0)$, unde $a > 0$ (fig. 25). Atunci vom putea scrie $A(u, v)$ cu $v > 0$.

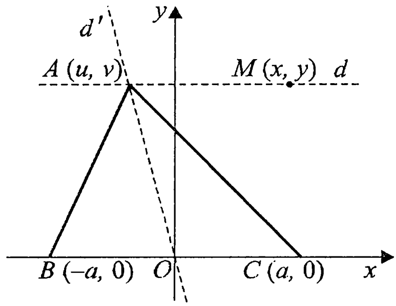


Fig. 25

Cu formulele pe care le-am prezentat, avem pentru $M(x, y) \in \mathscr{P}$, $M \notin AB$, $M \notin AC$ (pentru ca triunghiurile MAB şi MBC să nu fie degenerate):

• aria lui $ABM = \dfrac{1}{2}|vx - ay + av - uy|$;

• aria lui $ACM = \dfrac{1}{2}|vx + ay - av - uy|$.

Să notăm cu L locul geometric căutat. Avem succesiv, pentru un punct $M(x, y) \in \mathscr{P}$, $M \notin AB, M \notin AC$:

$$M(x, y) \in L \Leftrightarrow \frac{1}{2}|vx - ay + av - uy| = \frac{1}{2}|vx + ay - av - uy| \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (vx - ay + av - uy = vx + ay - av - uy) \text{ sau}$$
$$(vx - ay + av - uy = -vx - ay + av + uy) \Leftrightarrow (2ay - 2av = 0) \text{ sau}$$
$$(2vx - 2uy = 0) \Leftrightarrow (y = v) \text{ sau } (vx = uy) \Leftrightarrow (M(x, y) \in d) \text{ sau}$$
$$(M(x, y) \in D') \Leftrightarrow M(x, y) \in d \cup d'.$$

Aici: $\begin{cases} d \text{ este dreapta de ecuaţie } y = v, \text{ deci } d \text{ este paralela la } BC \text{ care trece prin } A; \\ d' \text{ este dreapta de ecuaţie } vx = uy. \end{cases}$

Dacă $u = 0$, rezultă că $A \in Oy$ deci triunghiul ABC este isoscel. În acest caz ecuaţia lui d' devine $x = 0$, adică d' este Oy.

Dacă $u \neq 0$, rezultă că ecuaţia lui d' se poate scrie $y = \frac{v}{u}x$, deci d' este dreapta care trece prin A şi prin mijlocul O al lui BC.

Ţinând seama că un punct $M \in L$ nu poate fi pe AB sau pe AC, obţinem că logul geometric căutat este (în toate cazurile)

$$L = (d \cup d') \setminus \{A\}$$

unde d' este dreapta care trece prin A şi prin mijlocul lui BC.

E12. Se consideră în planul $\mathscr{P}$ două drepte perpendiculare d şi d'. Pe dreapta d (respectiv d') se consideră un punct M_0 (respectiv M_0'). Din punctul M_0 (respectiv M_0') porneşte un punct mobil M (respectiv M') care se mişcă rectiliniu şi uniform pe dreapta d (respectiv d') cu viteza $a > 0$ (respectiv $b > 0$).

Să se studieze mişcarea punctului mobil T, care este mijlocul segmentului MM', la fiecare moment.

R: Alegem în mod natural axele astfel: $Ox = d$ şi $Oy = d'$. Atunci, la momentul $t = 0$, punctul M se află în punctul $M_0(x_0, 0)$, iar punctul M' se află în punctul $M'(0, y_0)$. La momentul $t > 0$, punctul M a ajuns în poziţia $M(t) = M(x_0 + at, 0)$, iar punctul M' a ajuns în poziţia $M'(t) = M'(0, y_0 + bt)$ (fig. 26).

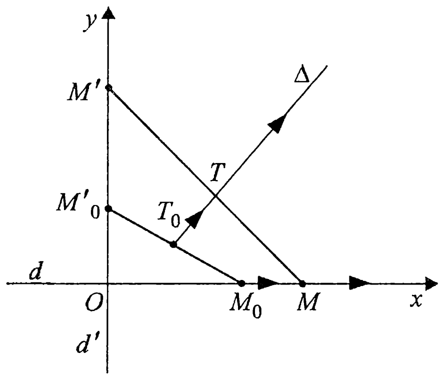


Fig. 26

Atunci vom avea la momentul $t = 0$ mobilul studiat în poziţia $T_0(\frac{x_0}{2}, \frac{y_0}{2})$, iar la momentul $t > 0$ mobilul în poziţia $T(\frac{x_0 + at}{2}, \frac{y_0 + bt}{2})$.

Egalităţile

$$\begin{cases} x = \dfrac{x_0}{2} + \dfrac{a}{2}t \\ y = \dfrac{y_0}{2} + \dfrac{b}{2}t \end{cases} \tag{1}$$

reprezintă parametric o dreaptă δ care trece prin punctul T_0 şi are parametrii directori $(\frac{a}{2}, \frac{b}{2})$. Prin urmare, punctul mobil M se mişcă pe dreapta δ. Această dreaptă are ecuaţia carteziană

$$\delta : 2bx - 2ay + ay_0 - bx_0 = 0 \tag{2}$$

obţinută prin eliminarea lui t:

$$x = \frac{x_0}{2} + \frac{a}{2}t \Rightarrow t = \frac{2x - x_0}{a} \Rightarrow y = \frac{y_0}{2} + \frac{b}{2} \cdot \frac{2x - x_0}{a} \text{ etc.}$$

Prin urmare, ţinând seama de (1) şi (2) putem trage următoarele concluzii:

1) Punctul M se mişcă pe traiectoria $L \subset \mathscr{P}$ definită astfel:

$$L = \{(x, y) \in \mathscr{P} \mid x = \frac{x_0}{2} + \frac{a}{2}t, y = \frac{y_0}{2} + \frac{b}{2}t;\ t \geq 0\}.$$

2) Avem incluziunea $L \subset \Delta$ (3), unde Δ este semidreapta de origine $T_0(\frac{x_0}{2}, \frac{y_0}{2})$ dată astfel:

$$\Delta = \{(x, y) \in \delta \mid x \geq \frac{x_0}{2}, y \geq y_0\}.$$

3) Traiectoria L este parcursă de punctul mobil M *rectiliniu şi uniform*, cu vectorul viteză constant (v. (1))

$$\vec{v} = \frac{a}{2}\vec{i} + \frac{b}{2}\vec{j},$$

iar mărimea vitezei este

$$\|\vec{v}\| = \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2} = \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + b^2}.$$

4) De fapt, *traiectoria L coincide cu* Δ, adică avem

$$L = \Delta. \tag{4}$$

Pentru a arăta (4), a mai rămas de arătat (v. (3)) că

$$\Delta \subset L. \tag{5}$$

Într-adevăr, fie $M(x, y) \in \Delta$. Aşadar (x, y) satisface ecuaţia (2) şi $x \geq \frac{x_0}{2}$, $y \geq \frac{y_0}{2}$. Definim atunci

$$t \stackrel{D}{=} \frac{2x - x_0}{0} \geq 0. \tag{6}$$

Deducem că

$$x = \frac{x_0}{2} + \frac{a}{2}t. \tag{7}$$

Din (2) rezultă

$$y = \frac{2bx + ay_0 - bx_0}{2a} = \frac{y_0}{2} + \frac{b}{2}t. \tag{8}$$

Din (6), (7) şi (8) rezultă că $M(x, y) \in L$.

Reformulare geometrică. Studiul cinematic făcut mai sus şi concluziile sale pot fi reformulate astfel:

Locul geometric al punctelor T obţinute ca în enunţ este semidreapta Δ.

Generalizare (temă de studiu). Cititorul poate încerca să generalizeze rezultatele de mai sus astfel:

a) Dreptele d şi d' pot face un unghi oarecare (deci nu sunt neapărat perpendiculare).

b) Punctul T poate fi supus la restricţia mai generală

$$\frac{\overline{TM}}{\overline{TM'}} = t,$$

unde $t \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ este un număr fixat (în problema noastră am avut $t = -1$).

Arătaţi că suma distanţelor unui punct din interiorul unui triunghi, echilateral la cele trei laturi ale sale este constantă.

Fie un triunghi ABC, Arătaţi că locul geometric al punctelor M din plan care îndeplinesc condiţia $2MB^2 + 3MC^2 = 5MA^2$ este o dreaptă.

3. Fie în plan două puncte distincte A şi B şi un număr real k. Aflaţi locul geometric al punctelor M din plan cu proprietatea $MA^2 - MB^2 = k$.

Dacă A, B şi M sunt coliniare şi $M \in [AB]$, arătaţi că pentru orice punct P din plan avem $PA^2 \cdot MB + PB^2 \cdot MA = PM^2 \cdot AB + AB \cdot MA \cdot MB$ (relaţia lui Stewart).

În triunghiul ABC fie înălţimea AD, $D \in BC$ şi A', B', C' mijloacele laturilor BC, AC, AB. Arătaţi că $A'B'C'D$ este trapez isoscel.

Într-un patrulater oarecare, arătaţi că:

a) mijloacele laturilor sunt vârfurile unui paralelogram.

b) dreptele care unesc mijloacele laturilor opuse şi dreapta care uneşte mijloacele diagonalelor sunt concurente.

În triunghiul ABC, fie punctele $P \in [AB]$ şi $N \in [AC]$ astfel încât $\frac{PA}{PB} = \frac{NC}{NA}$. Arătaţi că mijlocul segmentului PN se află pe mediana vârfului A.

În triunghiul ABC fie M, N mijloacele laturilor AC, AB. Arătaţi că MN este paralelă cu BC şi $MN = \frac{1}{2}$ BC (teorema liniei mijlocii a triunghiului).

În paralelogramul $ABCD$ fie punctele $M \in (AD)$, $N \in (BC)$ şi $P \in (CD)$ astfel încât $AM = \frac{3}{8}AD$, $BN = \frac{3}{4}BC$, $CP = \frac{2}{3}CD$. Arătaţi că dreptele BM şi NP sunt paralele.

În pătratul $ABCD$ fie M, N mijloacele laturilor BC, CD. Arătaţi că dreptele AM şi BN sunt perpendiculare.

Fie un pătrat $ABCD$. Considerăm dreptunghiul $APQR$, unde $P \in [AB]$, $R \in [AD]$ astfel încât $AP = DR$. Arătaţi că dreptele CQ şi RP sunt perpendiculare.

În dreptunghiul $ABCD$, bisectoarea unghiului $\sphericalangle BAD$ intersectează diagonala BD în E, iar latura BC în F. Paralela dusă prin E la AB intersectează diagonala AC în G. Arătaţi că dreptele GF şi BD sunt perpendiculare.

Fie $ABCD$ un patrat de latură a. Considerăm triunghiurile echilaterale ABE şi BCF (E în interiorul, iar F în exteriorul pătratului). Arătaţi că punctele D, E şi F sunt coliniare.

Fie triunghiul oarecare ABC şi punctul $D \in [BC]$ astfel încât $BC = 3DC$. Dacă E este mijlocul medianei CC', $C' \in [AB]$, arătaţi că punctele A, D şi E sunt coliniare.

Fie un dreptunghi $ABCD$ şi un punct $M \in (BD)$ prin care se duc paralela EG la latura AD şi paralela FH la latura AB, unde $E \in (AB)$, $G \in (CD)$ şi $F \in (BC)$, $H \in (AD)$. Arătaţi că:

a) dreptunghiurile $AEMH$ şi $MFCG$ au arii egale.

b) dreptele EH, FG şi BD sunt concurente.

Pe catetele AB şi AC ale unui triunghi dreptunghic se construiesc, în exteriorul triunghiului pătratele $ABDE$ şi $ACFG$. Arătaţi că dreptele BF, CD şi înălţimea din A a triunghiului sunt concurente.

(Ecuaţia mediatoarei unui segment)

Fie $M_1(x_1, y_1)$ şi $M_2(x_2, y_2)$ două puncte distincte. Atunci, mediatoarea segmentului $M_1 M_2$ are ecuaţia

$$2(x_1 - x_2)x + 2(y_1 - y_2)y - x_1^2 - y_1^2 + x_2^2 + y_2^2 = 0.$$

(Coordonatele simetricului unui punct faţă de o dreaptă)

Se consideră dreapta $d : ax + by + c = 0$ şi punctul $M_1(x_1, y_1) \notin d$. Atunci, dacă $M_2(x_2, y_2)$ este simetricul lui M_1 faţă de d, avem formulele

$$x_2 = x_1 - \frac{2a}{a^2 + b^2}(ax_1 + by_1 + c);$$

$$y_2 = y_1 - \frac{2b}{a^2 + b^2}(ax_1 + by_1 + c).$$

Viaţa publică sau cea privată impun foarte frecvent luarea unor decizii, iar acestea sunt cu atât mai corecte cu cât informaţia de care dispune decidentul este mai bună, mai adecvată.

Informaţia privind un anumit fenomen poate fi completă, parţială, sau estimativă. Desigur, informaţia completă reprezintă situaţia ideală, foarte rar întâlnită în practică. De cele mai multe ori, procesul de luare a unei decizii se desfăşoara **în prezenţa unei incertitudini.** Există două surse majore de incertitudine: lipsa unor cunostinţe despre fenomen (informaţie incompletă), sau caracterul aleator al acestuia (informaţia se obţine printr-un experiment probabilist).

Fenomenele din lumea reală înconjurătoare sunt de două tipuri:

• fenomene *deterministe*, generatoare de mărimi cu valori unice. Aşa este, de exemplu, câştigul pe care îl obţine o persoană care depune la bancă o anumită sumă de bani, pentru un anumit timp (acest câştig, exprimat prin dobândă, este stabilit chiar la momentul încheierii contractului dintre bancă şi deponent);

• fenomene *aleatoare*, generatoare de mărimi ale căror valori pot varia în funcţie de factori necontrolabili care reprezintă „hazardul". Aşa este, de exemplu, câştigul pe care îl poate obţine o persoană care joacă o anumită sumă de bani la o loterie.

Observarea fenomenelor din lumea reală oferă informaţii sub forma unor mărimi cantitative sau calitative. Termenul de „date statistice" se utilizează în două accepţiuni total diferite:

• ca date obţinute prin investigarea exhaustivă a unei mulţimi finite, Ω, ale cărei elemente se numesc „unităţi";

• ca date obţinute prin investigarea unui eşantion de unităţi, $e \subset \Omega$, construit printr-o metoda probabilistă.

De exemplu, mulţimea Ω este formată din elevii unui liceu, iar la sfârşitul anului şcolar se cunoaşte situaţia şcolară a fiecărui elev. Dăm elevilor indicativele 1, 2, ..., N, începând de la prima clasa a IX-a şi până la ultima clasă a XII-a. Astfel se pot identifica „datele statistice" care exprimă mediile tuturor elevilor la fiecare dintre disciplinele de studiu şi acestea pot fi reprezentate într-un tabel de forma următoare:

	lb. română	matematică	geografie	...	sport
elev 1	8,30	9,20	9,75	...	10
elev 2	7,50	6,75	9,20	...	8,50
...	...	...	...	...	...
elev N	9,50	8,90	8,70	...	10

Acestea sunt date statistice obţinute prin investigarea exhaustivă a mulţimii Ω. „Incertitudinea" poate să apară dacă ne lipsesc date, adică informaţia este incompletă. Având în vedere aceste elemente, vom folosi denumirea de **„date statistice de provenienţă deterministă"**.

Pe de altă parte, să presupunem că la nivelul oraşului se face o investigaţie privind modul în care privesc elevii de liceu orele de sport.

În cadrul unui chestionar, se formulează întrebarea „Cum apreciaţi rolul orelor de sport pentru sănătatea dumneavoastră?", cu răspunsurile posibile „nici un rol / rol foarte mic / rol mic/ rol mare / rol foarte mare". Cei care organizează investigaţia extrag un eşantion de n elevi dintre cei N ai liceului nostru. Să notăm cu $i_1, \ldots, i_m$ indicativele elevilor care au fost selectaţi în mod aleator şi să notam cu „1" varianta de răspuns aleasă de fiecare dintre ei şi cu „0" variantele care nu au fost alese. Răspunsurile la întrebarea formulată reprezintă date statistice, care se pot înregistra de asemenea într-un tabel de forma:

	nici un rol	rol f. mic	rol mic	rol mare	rol f. mare
elev i_1	0	0	1	0	0
elev i_2	0	0	0	0	1
...	...	...	...	...	...
elev i_m	0	1	0	0	0

Acestea sunt date statistice obţinute prin investigarea unui eşantion construit prin metode probabiliste. „Incertitudinea" apare datorită caracterului aleator al modului în care a fost construit eşantionul de elevi (ştim că numărul modurilor în care se poate extrage o submulţime de n unităţi distincte dintr-o mulţime de N unităţi distincte este egal cu C_N^n). Având în vedere aceste elemente, vom folosi denumirea de **„date statistice de provenienţă aleatoare"**.

Datele statistice furnizează informaţie despre un fenomen. Dar este important ca, în fiecare situaţie practică, să identificăm cu ce fel de date statistice avem de-a face, căci prelucrarea matematică şi interpretarea acestor date depinde în mod esenţial de natura lor, de sursa de incertitudine care a fost implicată în culegerea datelor.

Matematicile financiare cuprind metode matematice speciale, utilizate pentru modelarea şi măsurarea unor fenomene economice. Principalii indicatori financiari au definiţii deterministe şi se calculează utilizând date statistice de provenienţă deterministă. Dacă însă se utilizează date statistice de provenienţă aleatoare, atunci şi aceşti indicatori pot căpăta un caracter aleator.

Finanţele se concretizează în transferuri băneşti între părţi, cu prilejul formării sau utilizării diverselor fonduri. Părţile implicate sunt: bugetul de stat, agenţii economici, instituţii, sau persoane fizice.

Relaţiile financiare reprezintă transferuri definitive de fonduri, fără contraprestaţie directă şi imediată. Aşa sunt finanţările de la bugetul de stat, finanţările din fonduri proprii, taxele plătite către bugetul de stat.

Relaţiile de credit sunt transferuri de fonduri pe perioadă determinată, totdeauna rambursabile la scadenţă şi purtătoare de *dobândă*. Creditul are la bază două principii: să fie garantat de debitor şi să fie rambursat la scadenţă. *Creditul bancar* este forma cea mai extinsă de credit. El este acordat de bancă pentru a acoperi un scop al debitorului, în condiţiile stabilite de bancă. Există o mare varietate de credite bancare care se deosebesc între ele după obiectul creditului, după garanţia oferită, după sezonalitate şi alte criterii.

În activitatea de creditare, băncile folosesc nu numai fondurile lor proprii, ci şi un însemnat volum de fonduri atrase de la terţi, cum sunt *depunerile (sau plasamentele) bancare*. Aceste depuneri sunt modalităţi prin care clientul creditează banca, urmând ca aceasta să-i ramburseze, la scadenţă, depunerea plus dobânda aferentă.

Vom prezenta în continuare câţiva indicatori financiari care sunt utilizaţi pentru definirea şi caracterizarea unor noţiuni cum sunt:

– plasamentele bancare purtătoare de dobândă,
– creditele bancare şi rambursarea lor,
– metodele de finanţare la care poate apela un agent economic,
– taxele pe care le plăteşte un agent economic,
– întocmirea unui buget.

2.1. Dobânda

Modalităţile de definire a dobânzii sunt cel mai uşor de ilustrat în cazul plasamentelor bancare.

Dobânda pentru un plasament este suma de bani plătită de bancă şi primită de client pentru un capital pe care clientul l-a depus la bancă. Ea este direct proporţională cu capitalul plasat şi depinde de durata plasamentului.

Dobânda simplă se calculează asupra unei sume, pe toată durata contractului de plasament. Dacă notăm cu S_0 suma depusă exprimată în unităţi bancare (lei, euro, dolari), cu t durata contractului exprimată în unităţi de timp (ani sau luni), cu $p/100$ dobândă care se plăteşte pentru o unitate bancară pe unitatea de timp, atunci dobânda simplă se calculează după formula

$$D = S_0 \cdot \frac{p}{100} \cdot t.$$

Notând dobânda unitară cu i, $i = p/100$, expresia lui D devine

$$D = S_0 \cdot i \cdot t.$$

Suma sau valoarea finală ridicată de client este

$$S_t = S_0 + D = S_0 (1 + it).$$

Spunem că o sumă este plasată cu *dobândă compusă* când, la sfârşitul primei unităţi de timp, dobânda simplă a acestei perioade este adăugată la suma plasată pentru a produce la rândul ei dobândă în perioada următoare şi aşa mai departe. Expresia sumei finale obţinute pe baza dobânzii compuse se poate deduce uşor cu ajutorul următorului tabel:

unitatea de timp	suma plasată	dobânda	suma la sfârşitul unităţii de timp
1	S_0	$S_0 \cdot i$	$S_1 = S_0(1 + i)$
2	S_1	$S_1 \cdot i$	$S_2 = S_0(1 + i)^2$
...	...	...	...
t	S_{t-1}	$S_{t-1} \cdot i$	$S_t = S_0(1 + i)^t$

Deci, în acest caz suma finală este:

$$S_t = S_0(1 + i)^t.$$

Depozitele la care scadenţa t este un multiplu întreg de unităţi de timp se numesc „depozite la termen". În practica bancară există însă şi aşa numitele „depozite la vedere", pentru care timpul t nu este un multiplu întreg de unităţi, deponentul putând să-şi ridice capitalul plus dobânda aferentă în orice moment. Şi în această situaţie se foloseşte o dobândă compusă, iar calculul sumei finale este prezentat în continuare.

Presupunem că retragerea se face după o perioadă egală cu un număr n de ani şi un număr z de zile. Atunci putem scrie:

$$t = n + \frac{z}{365}$$

Conform calculului ce utilizează dobânda compusă, după n ani suma era:

$$S_n = S_0(1 + i)^n.$$

Acestei sume i se adauga dobânda simplă D pentru cele z zile, dată de expresia:

$$D = S_n \cdot i \cdot \frac{z}{365} = S_0(1 + i)^n \cdot i \cdot \frac{z}{365}$$

Astfel, suma finală retrasă de client este:

$$S_t = S_n + D = S_0(1 + i)^n(1 + i \cdot \frac{z}{365}).$$

Exemplul 1

Un client vine la bancă având intenţia de a face un plasament de 1 000 unităţi bancare. Banca oferă o dobândă unitară de 1% pentru „depozitele la vedere" şi de 3% pentru „depozitele la termen". Să se calculeze ce sumă ar ridica deponentul după 3 ani în cazul unui depozit la termen şi ce sumă ar ridica după o perioadă de 3 ani şi 50 de zile în cazul unui depozit la vedere.

R: Dacă depozitul la termen se face în varianta dobânzii simple, pentru $S_0 = 1000$, $i = 0{,}03$ şi $t = 3$, suma finală este:

$$S_3 = 1\,000(1 + 0{,}03 \cdot 3) = 1090.$$

Dacă depozitul la termen se face în varianta dobânzii compuse, suma finală este

$$S_3 = 1\,000(1 + 0{,}03)^3 = 1092{,}7.$$

Dacă clientul alege un depozit la vedere cu dobânda unitară $i = 0{,}01$ şi menţine depozitul timp de 3 ani şi 50 de zile, suma finală pe care o ridică este:

$$S_t = 1\,000(1 + 0{,}01)^3(1 + 0{,}01 \cdot \frac{50}{365}) = 1031{,}3.$$

Exemplul 2

Un client depune anual la bancă o sumă de 1 000 unităţi bancare, în regim de depozite la termen (cu dobândă compusă), la o dobânda unitară de 3% oferită de bancă. Să se determine de ce sumă dispune clientul după 10 ani (respectiv după 10 depuneri consecutive).

R: Notăm S_0 suma depusă anual (de exemplu la datele de 1.02.1995, 1.02.1996 şi aşa mai departe, până la data de 1.02.2004) şi cu i dobânda unitară anuală.

valoarea finală a primei depuneri	$S_0(1 + i)^{10}$
valoarea finală a celei de-a doua depuneri	$S_0(1 + i)^9$
valoarea finală a celei de-a treia depuneri	$S_0(1 + i)^8$
...	...
valoarea finală a celei de-a noua depuneri	$S_0(1 + i)^2$
valoarea finală a celei de-a zecea depuneri	$S_0(1 + i)$

Astfel, valoarea finală pe care clientul o ridică după 10 ani de la prima depunere (la data de 1.02.2005) este de:

$$S_{10} = S_0(1 + i) + S_0(1 + i)^2 + \ldots + S_0(1 + i)^{10}.$$

Utilizând formula de calcul a sumei termenilor unei progresii geometrice, obţinem:

$$S_{10} = S_0(1 + i) \cdot \frac{(1+i)^{10} - 1}{i}.$$

Valoarea numerică obţinută pentru $S_0 = 1\ 000$ şi $i = 0,03$ este:

$$S_{10} = 1000(1 + 0,03)\frac{(1 + 0,03)^{10} - 1}{0,03} = 11\ 808,$$

deci, pentru depunerile cumulate de 10 000, clientul primeşte o dobândă de $D = 11808 - 10\ 000 = 1\ 808$ unităţi bancare.

2.2. Credit, anuitate şi amortisment

În cazul creditelor bancare pe care le ia un client, acesta este cel care plăteşte o dobândă băncii creditoare, simultan cu rambursarea sumei împrumutate. Restituirea creditului se numeşte *rambursare*, iar termenul până la care trebuie rambursat creditul se numeşte *scadenţă*. Rambursarea unui credit se poate face într-o singură tranşă (pentru creditele pe termen scurt) sau eşalonat (pentru credite pe termen mijlociu sau lung).

Rambursarea creditului într-o singura tranşă

Să presupunem că un client ia un credit de T_0 unităţi bancare cu o scadenţă la z zile ($z \leq 365$), iar banca percepe o dobândă unitară anuală i. Suma totală datorată la scadenţă este:

$$T = T_0 + D = T_0 + T_0 \cdot i \cdot \frac{z}{365} = T_0(1 + \frac{i \cdot z}{365}).$$

Rambursarea creditului în mai multe tranşe

Să presupunem acum că un client ia un credit de T_0 unităţi bancare, pentru un termen de t unităţi de timp. Prin contractul de creditare, banca percepe o dobândă anuală pentru suma împrumutată. Împrumutul plus dobânda vor fi rambursate prin plăţi anuale numite *anuităţi*. O parte din suma pe care o plăteşte efectiv clientul în fiecare an va acoperi împrumutul iniţial. Această fracţiune a anuităţii se numeşte *amortisment*.

Presupunem că anuităţile sunt constante şi se plătesc la sfârşitul fiecărui an. Mecanismul de rambursare a unui credit T_0, luat pentru t ani, la care banca percepe o dobândă unitară anuală i este prezentat în următorul „*tabel de amortizare*":

An	Suma datorată la începutul anului	Dobânda datorată la începutul anului	Anuităţi (constante)	Amortisment	Suma datorată la sfârşitul anului
1	T_0	$D_0 = T_0 i$	$A = \dfrac{T_0(1+i)}{t}$	$Q_1 = A - D_0$	$T_1 = T_0 - Q_1$
2	T_1	$D_1 = T_1 i$	$A = \dfrac{T_0(1+i)}{t}$	$Q_2 = A - D_1$	$T_2 = T_1 - Q_2$
...	...	...	...	...	...
$t-1$	T_{t-2}	$D_{t-2} = T_{t-2} i$	$A = \dfrac{T_0(1+i)}{t}$	$Q_{t-1} = A - D_{t-2}$	$T_{t-1} = T_{t-2} - Q_{t-1}$
t	T_{t-1}	$D_{t-1} = T_{t-1} i$	$A = \dfrac{T_0(1+i)}{t}$	$Q_t = A - D_{t-1}$	$T_t = T_{t-1} - Q_t$

O observaţie se impune imediat: termenul de rambursare a creditului, t, nu poate fi oricât de mare. Impunând condiţia $Q_1 > 0$, obţinem:

$$\frac{T_0(1+i-it)}{t} > 0,$$

respectiv

$$t < 1 + \frac{1}{i}.$$

Ultima sumă datorată este T_t şi ea se plăteşte integral, având proprietatea $T_t < A$. De asemenea, au loc următoarele proprietăţi:

• Suma totală datorată de client este egală cu suma anuităţilor plătite,

$$T_0(1 + i) = A \cdot t.$$

• Suma totală plătită de client este de $A \cdot t + T_t$.

• Dacă anuităţile sunt egale, amortismentele succesive formează o progresie geometrică crescătoare, cu primul termen Q_1 şi raţia $(1 + i)$.

Într-adevar, făcând diferenţa dintre două anuităţi consecutive de la momentele k şi $k + 1$, obţinem

$$0 = A - A = (Q_{k+1} + T_k i) - (Q_k + T_{k-1} i),$$

de unde rezultă

$$Q_{k+1} + (T_{k-1} - Q_k)i - Q_k - T_{k-1}i = 0,$$

adică

$$Q_{k+1} - Q_k(1 + i) = 0.$$

Rezultă că

$$Q_{k+1} = Q_k(1 + i),\ k = 1, 2, \ldots, t - 1,$$

deci

$$Q_{k+1} = Q_1(1 + i)^k,\ k = 1, 2, \ldots, t - 1,$$

• Dacă anuităţile sunt constante, atunci diferenţele dobânzilor pentru ani consecutivi formează o progresie geometrică crescătoare, cu primul termen $Q_1 i$ şi cu raţia $(1 + i)$.

Într-adevăr, făcând diferenţa dintre dobânzile pentru doi ani consecutivi obţinem:

$$d_k = D_{k-1} - D_k = (A - Q_k) - (A - Q_{k+1}) = Q_1(1 + i)^k - Q_1(1 + i)^{k-1},$$

adică

$$d_k = Q_1 i(1 + i)^{k-1},\ k = 1, \ldots, t - 1.$$

Exemplul 3

O persoană ia de la bancă un credit de 1 000 de unităţi bancare, pe un termen de 5 ani, cu o dobândă de 5%. Să se alcătuiască tabelul de amortizare corespunzator.

Notam T_0 = 1 000, t = 5, i = 0,05. Rezultă că anuitatea este de A = 210 unităţi bancare şi se obţine următorul tabel de amortizare:

An	Suma datorată la începutul anului	Dobânda datorată la începutul anului	Anuităţi (constante)	Amortisment	Suma datorată la sfârşitul anului
1	1000	$D_0 = 50$	210	$Q_1 = 160$	$T_1 = 840$
2	840	$D_1 = 42$	210	$Q_2 = 168$	$T_2 = 672$
3	672	$D_2 = 33,6$	210	$Q_3 = 176,4$	$T_3 = 495,6$
4	495,6	$D_3 = 24,78$	210	$Q_4 = 185,22$	$T_4 = 310,38$
5	310,38	$D_4 = 15,519$	210	$Q_5 = 194,48$	$T_5 = 115,9$

Suma totală plătită de client este de (5 · 210 + 115,9) = 1 165,9 unităţi bancare. Diferenţa dintre suma returnată de client şi creditul luat este de (1 165,9 – 1 000) = 165,9 unităţi bancare.

Să admitem, într-o variantă foarte simplificatoare, că banca efectuează doar două tipuri de activităţi: administrarea plasamentelor şi acordarea de credite. Pentru a-şi justifica existenţa, banca trebuie să realizeze un câştig. Diferenţa dintre contraprestaţia directă şi imediată pe care o încasează pentru credite şi contraprestaţia directă şi imediată pe care o plăteşte pentru plasamente reprezintă *profitul* bancii.

Exemplul 4

Să presupunem că banca acordă unui client un credit de 1000 unităţi bancare, pentru 2 ani, cu o dobândă unitară de 6%. Simultan, banca primeşte un plasament de 1 000 unităţi bancare, tot pentru 2 ani, pentru care acordă o dobândă unitară de 4%, în regim de depozit cu dobândă compusă. Să evaluăm profitul băncii în urma acestor două operaţiuni.

Tabelul de amortizare pentru creditul acordat este următorul:

An	Suma datorată la începutul anului	Dobânda datorată la începutul anului	Anuităţi (constante)	Amortisment	Suma datorată la sfârşitul anului
1	1 000	$D_0 = 60$	530	$Q_1 = 470$	$T_1 = 530$
2	530	$D_1 = 31{,}8$	530	$Q_2 = 498{,}2$	$T_2 = 31{,}8$

Aşadar, banca încasează suma de 530 + 530 + 31,8 = 1 091,8 unităţi bancare şi obţine un câştig de 91,8 unităţi bancare.

Pe de altă parte, suma finală pe care o încasează deponentul este

$$S_2 = 1\,000(1 + 0{,}04)^2 = 1\,081{,}6.$$

Aşadar, banca plăteşte clientului o dobândă de 81,6. Rezultă ca profitul băncii realizat în urma celor două operaţiuni este

$$p = 91{,}8 - 81{,}6 = 10{,}2.$$

2.3. Finanţele întreprinderii

Finanţele întreprinderii sunt organizate pentru a satisface realizarea obiectului activităţii acesteia, în condiţii de rentabilitate. Ansamblul de măsuri şi activităţi financiare implicate trebuie să asigure un echilibru corect între fluxurile de intrare (diverse forme de finanţare) şi fluxurile de ieşire (rambursări de credite, plata furnizorilor, impozite şi taxe etc.).

De asemenea, activitatea trebuie organizată în aşa fel încât întreprinderea să fie profitabilă.

Metode de finanţare

Procurarea fondurilor se poate realiza fie din *surse interne* (de exemplu, profitul reinvestit, creşteri de capital), fie din *surse externe* (de exemplu, credite bancare, subvenţii de la bugetul statului).

O importantă sursă internă de finanţare o reprezintă fondul de amortizare.

Prin amortizarea capitalului fix al întreprinderii se înţelege procesul de recuperare treptată a valorii capitalului fix investit iniţial (construcţii, utilaje, maşini, instalaţii, echipamente etc.). Timpul necesar recuperării integrale a valorii capitalului fix se numeşte *termen de amortizare.*

Amortizarea anuală este partea din valoarea capitalului fix recuperată într-un an. *Fondul de amortizare* este constituit din amortizările anuale consecutive.

Notând cu V valoarea capitalului fix, cu T termenul de amortizare, cu A amortizarea anuală şi cu a rata anuală de amortizare (procentul din valoarea capitalului fix reprezentat de amortizarea anuală), putem scrie următoarele relaţii:

$$A = \frac{V}{T};$$

$$a = \frac{A}{V} \cdot 100(\%).$$

Costul de producţie

Costul reprezintă totalitatea cheltuielilor efectuate de întreprindere pentru realizarea de produse destinate vânzării. După natura cheltuielilor, costurile sunt de două tipuri: costuri materiale şi costuri salariale. După dependenţa lor de mărimea producţiei, costurile sunt de două tipuri: costuri fixe (care nu depind de volumul producţiei) şi costuri variabile (care depind de volumul producţiei).

Preţul unui produs şi profitul realizat

Prin *profit* se întelege venitul obţinut de întreprindere şi acesta este egal cu diferenţa dintre încasări şi cheltuieli. Astfel, preţul P al unui produs va fi calculat ca suma următoarelor componente: cheltuielile pentru producerea şi desfacerea produsului ($C_{producţie}$, respectiv $C_{desfacere}$) şi profitul p preconizat a fi obţinut

$$P = C + p = (C_{producţie} + C_{desfacere}) + p.$$

Impozite şi taxe, taxa pe valoarea adăugată (TVA)

Orice agent economic are o serie de obligaţii fiscale faţă de bugetul de stat. Acestea sunt:

- impozitul pe profit;
- impozitul pe salarii;
- taxe vamale;
- taxe asupra terenurilor proprietate de stat;
- taxa pe valoarea adăugată (TVA).

Valoarea adăugată, ca indicator pentru analiza activităţii economico-financiare, reprezintă diferenţa dintre producţie şi consum. Ea este un instrument care arată bogăţia creată de întreprindere.

Taxa pe valoarea adăugată este o taxă generală de consum, care cuprinde toate fazele circuitului economic: producţie, servicii, distribuţie până la vânzarea mărfurilor către consumatorii finali. Pentru bugetul statului, TVA reprezintă un impozit indirect, cuprins în preţuri şi tarife, iar statul este cel care fixează cota TVA. Pentru întreprindere, TVA este egală cu diferenţa dintre taxa calculată asupra vânzării produselor şi taxa aferentă cumpărării materiilor prime, materialelor, combustibilului etc.

Să notam cu C_1 preţul de vânzare al produsului, cu C_2 preţul de cumpărare al materiilor prime, materialelor, combustibilului şi cu t cota TVA percepută de stat (exprimată procentual). Atunci:

TVA aferentă vânzarii produsului este $C_1 \cdot t$

TVA aferentă consumului este $C_2 \cdot t$

Valoarea adăugată este $C_1 - C_2$

TVA este $(C_1 - C_2)t = C_1 \cdot t - C_2 \cdot t$

Exemplul 5

Dacă un produs se vinde cu 750 000 lei, costul materiilor prime, materialelor, combustibilului este de 420 000 lei, iar cota TVA este de 18%, taxa pe valoarea adăugată se calculează de întreprindere astfel:

TVA aferentă vânzării produsului: $750\ 000 \cdot \frac{18}{100} = 135\ 000$;

TVA aferentă consumului: $420\ 000 \cdot \frac{18}{100} = 75\ 600$;

TVA aferentă fabricaţiei şi vânzării: $135\ 000 - 75\ 600 = 59\ 400$.

Se observă ca TVA aferentă fabricaţiei şi vânzării reprezintă aplicarea taxei de 18% asupra valorii adaugate. Astfel, prin sistemul TVA se evită „dubla impozitare".

Exemplul 6

Să presupunem că o întreprindere consumă 2 milioane de lei pentru fabricarea unui produs. Prin procesul de producţie se obţine un produs care valorează 3 milioane. Produsul finit este vândut unei societăţi comerciale angrosiste care, la rândul ei, ambalează produsul şi îl livrează unei societăţi comerciale cu amănuntul la preţul de 3,5 milioane. Societatea cu amănuntul practică un adaos comercial de 10%, iar cota unică TVA este de 18%. Preţul final al produsului, cu TVA inclus se calculează în modul următor:

Valoarea adăugată la producător:

$$3\ 000\ 000 - 2\ 000\ 000 = 1\ 000\ 000.$$

TVA datorată de producător:

$$1\ 000\ 000 \cdot \frac{18}{100} = 180\ 000.$$

Valoarea adăugată la societatea angrosistă:

$$3\ 500\ 000 - 3\ 000\ 000 = 500000.$$

TVA datorată de societatea angrosistă:

$$500\ 000 \cdot \frac{18}{100} = 90\ 000.$$

Valoarea adăugată la societatea cu amănuntul:

$$3\ 500\ 000 \cdot (1+10/100) - 3\ 500\ 000 = 3\ 850\ 000 - 3\ 500\ 000 = 350\ 000.$$

TVA datorată de societatea cu amănuntul:

$$350\ 000 \cdot \frac{18}{100} = 63\ 000.$$

Valoarea adăugată totală:

$$1\ 000\ 000 + 500\ 000 + 350\ 000 = 1\ 850\ 000.$$

TVA total de plată:

$$180\ 000 + 90\ 000 + 63\ 000 = 333\ 000.$$

Preţul produsului, cu TVA inclus:

$$2\ 000\ 000 + 1\ 850\ 000 + 333\ 000 = 4\ 183\ 000.$$

Bugetul de venituri şi cheltuieli

Agenţii economici întocmesc anual un buget de venituri şi cheltuieli ca instrument de lucru şi de conducere a întregii activităţi economico-financiare. Prin intermediul bugetului sunt cunoscute şi ţinute sub control toate intrările şi ieşirile de fonduri băneşti, se asigură capacitatea de plată. Veniturile şi cheltuielile prevăzute trebuie să reflecte operaţiunile economice pe care-şi propune să le realizeze întreprinderea, să exprime posibilităţi reale de obţinere.

Fluxurile de intrare cuprind:

- venituri proprii din încasări;
- încasări de la bugetul de stat;
- credite bancare;
- alte încasări.

Fluxurile de ieşire cuprind:

- plăţi pentru salarii şi alte drepturi pentru salariaţi;
- rambursarea creditelor, inclusiv plata dobânzilor;
- cheltuieli suportate direct din venituri (cheltuieli pentru pregatirea profesională a angajaţilor, pentru cercetare, pentru publicitate şi protocol, donaţii etc.);
- vărsăminte la bugetul de stat (impozite şi taxe);
- dividende ce se plătesc deţinătorilor de acţiuni.

2.4. Valori medii şi reprezentări grafice

La încheierea unui an financiar, orice agent economic dispune de o informaţie completă asupra operaţiunilor financiare pe care le-a realizat.

Aceste date statistice, de provenienţă deterministă, pot fi mai uşor valorificate şi interpretate dacă se utilizează indicatori sintetici şi reprezentări grafice. Cei mai utilizaţi indicatori sintetici sunt valorile medii, care evidenţiază caracteristici generale ale unităţilor de la care provine informaţia.

Să considerăm că se urmăreşte o anumită componentă a finanţelor întreprinderii pe parcusul întregului an financiar sau pe parcursul unui alt interval format din n perioade de timp. Notăm cu $x_1, x_2, ..., x_n$ valorile numerice înregistrate.

Media aritmetică a valorilor $x_1, x_2, ..., x_n$ se defineşte prin relaţia

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i .$$

Ea este un indicator intern, în sensul că

$$\min_{1\le i\le n} x_i \le \bar{x} \le \max_{1\le i\le n} x_i ,$$

este puternic influenţată de apariţia unor valori „aberante" (foarte mici sau foarte mari), iar suma abaterilor valorilor $x_1, x_2, ..., x_n$ de la media aritmetică este nulă,

$$\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x}) = 0 .$$

Exemplul 7

Un agent economic realizează profit (exprimat în unităţi bancare) în trimestrele 1, 2 şi 4 şi are o pierdere (exprimată în unităţi bancare) în trimestrul 3 al anului, conform tabelului:

interval	trim. 1	trim. 2	trim. 3	trim. 4
profitul p	80	50	–10	60

Profitul mediu anual este

$$\overline{p} = \frac{1}{4}(80 + 50 - 10 + 60) = 45.$$

Media geometrică a valorilor $x_1, x_2, ..., x_n$ se defineşte prin relaţia:

$$\overline{x}_g = (x_1 \cdot x_2 \cdot ... \cdot x_n)^{1/n}.$$

Media geometrică se aplică la determinarea intensităţii creşterii unor valori în timp.

Exemplul 8

Un agent comercial îşi începe activitatea în ianuarie, cu o investiţie de 1 000 unităţi bancare. La sfârşitul primului trimestru realizează un venit de 1 200 unităţi bancare, la sfârşitul trimestrului al doilea are un venit de 1 450 unităţi bancare, la sfârşitul celui de-al treilea trimestru are 1 600 unităţi bancare, iar la sfârşitul anului constată că are un venit de 2 000 unităţi bancare. Astfel, creşterile realizate şi coeficienţii de creştere exprimaţi în raport cu cele 1 000 unităţi bancare iniţiale sunt:

intervalul	creştere	coeficient de creştere
trim. 1	200	1,20
trim. 2	250	1,25
trim. 3	150	1,15
trim. 4	400	1,40

Ritmul mediu trimestrial de creştere a venitului se exprimă prin media geometrică:

$$\overline{x}_g = (1{,}20 \cdot 1{,}25 \cdot 1{,}15 \cdot 1{,}40)^{\frac{1}{4}} = 1{,}2466$$

Media armonică a valorilor $x_1, x_2, ..., x_n$ se defineşte prin relaţia:

$$\frac{1}{\overline{x}_h} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{x_i},$$

de unde deducem expresia:

$$\overline{x}_h = \frac{n}{\sum_{i=1}^{n}(x_i)^{-1}}.$$

Media armonică se întrebuinţează în acel tip de probleme în care valorile $x_1, x_2, ..., x_n$ intervin în relaţii invers proporţionale cu anumiţi indicatori financiari.

Exemplul 9

Trei agenţi economici fac fiecare câte o investiţie de capital fix de o unitate bancară. Primul îşi amortizează investiţia în 3 ani, al doilea în 4 ani, iar al treilea în 5 ani. Să se calculeze amortizarea anuală medie pentru cei trei agenţi şi termenul mediu de amortizare.

agent	termen de amortizare	amortizare anuală
1	3	1/3 = 0,33
2	4	1/4 = 0,25
3	5	1/5 = 0,20

Calculând media aritmetică a amortizărilor anuale obţinem:

$$\bar{a} = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5}\right) = 0{,}26111,$$

de unde rezultă că termenul mediu de amortizare este de 1/0,26111 = 3,8298. Observăm că această valoare coincide cu media armonică a termenelor de amortizare

$$\bar{x}_h = \frac{3}{\frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5}} = 3{,}8298.$$

Informaţia completă de care dispune un agent economic la sfârşit de an poate fi reprezentată grafic, utilizând diferite tipuri de diagrame. Programele de calculator oferă foarte multe facilităţi pentru asemenea reprezentări grafice, cel mai frecvent utilizat fiind EXCEL. Cel mai des utilizate sunt diagramele cu bare, diagramele cu coloane şi diagramele circulare.

Exemplul 10

Un agent comercial a comercializat într-un an 5 tipuri de cafea. Cantităţile vândute în cele 4 trimestre apar în tabelul următor:

tipul de cafea	A	B	C	D	E	total
cantităţi, trim. I	1000 kg	250 kg	750 kg	1500 kg	500 kg	4000 kg
cantităţi, trim. II	850 kg	450 kg	950 kg	1400 kg	700 kg	4350 kg
cantităţi, trim. III	1000 kg	400 kg	1000 kg	1350 kg	650 kg	4400 kg
cantităţi, trim. IV	1100 kg	500 kg	800 kg	1600 kg	800 kg	4800 kg

Informaţia conţinută în acest tabel poate fi reprezentată prin diagrame, în două moduri: pe trimestre (în funcţie de tipurile de cafea comercializate) sau pe tipuri de produs (în funcţie de vânzările trimestriale).

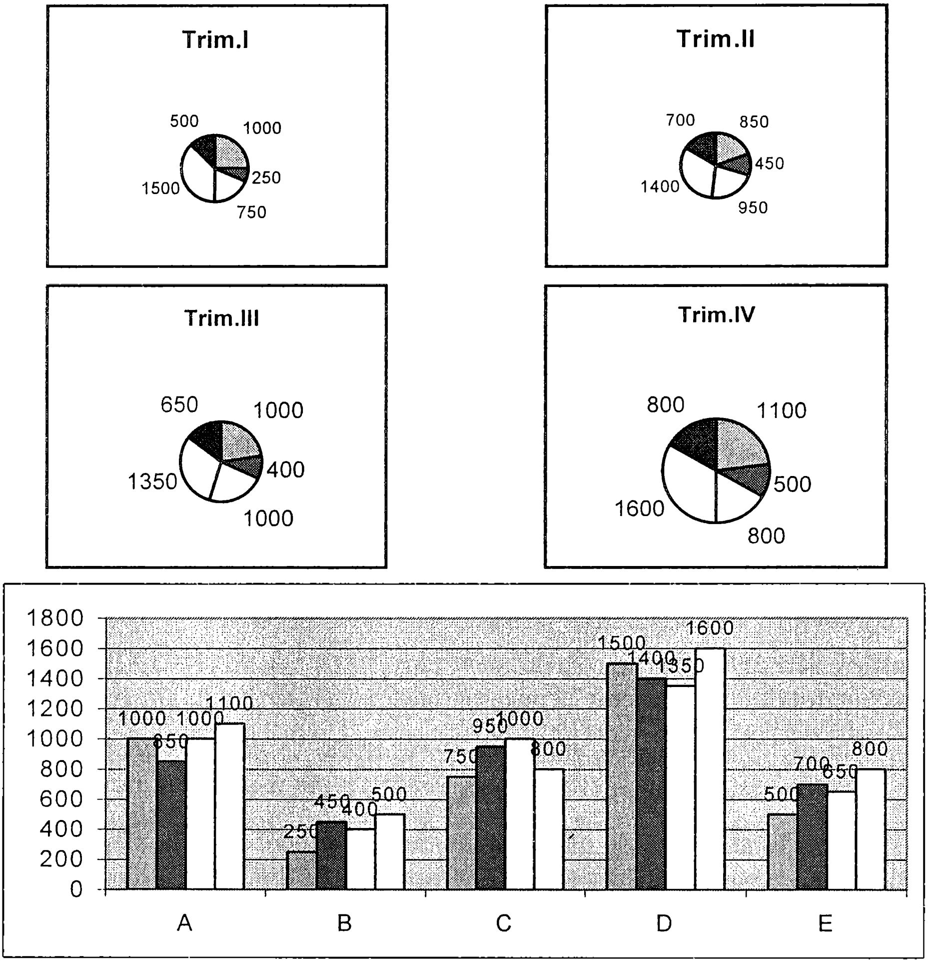


Fig. 1

Să se calculeze suma totală obţinută prin plasarea unui capital de 10 000 unităţi bancare pe o perioadă de 4 ani, cu rata anuală de 6%, în regim de dobândă compusă.

Să se calculeze dobânda obţinută după 180 de zile prin plasarea unui capital de 1 000 unităţi bancare în regim de dobândă simplă, ştiind că rata anuală a dobânzii este de 3%.

O persoană face un plasament bancar de 10 000 unităţi bancare în regim de dobândă compusă. După doi ani ridică suma de 11 000 unităţi bancare. Cât a fost rata anuală a dobânzii?

O persoană ia de la bancă un credit de 10 000 de unităţi bancare, pe un termen de 10 ani, cu o dobândă anuală de 8%. Să se alcătuiască tabelul de amortizare cu anuităţi egale.

Un agent economic ia de la bancă un credit pe termen scurt. Suma împrumutată este de 10 000 de unităţi bancare, scadenţa este de 180 de zile, iar banca percepe o dobândă unitară anuală de 20%. Care este suma pe care o achită agentul economic pentru returnarea creditului într-o singura tranşă?

Dacă un produs se vinde cu 1 000 unităţi bancare, costul materiilor prime, materialelor, combustibilului este de 400 unităţi bancare, iar cota TVA este de 18%, să se calculeze taxa pe valoarea adăugată.

Considerăm un produs care trece prin două operaţii consecutive de vânzare-cumpărare. Un comerciant angrosist cumpără produsul de la producător la preţul de 5 milioane lei şi îl vinde unui comerciant cu amănuntul la preţul de 6 milioane de lei. Acesta percepe un adaos comercial de 10%. Ştiind că statul percepe o cotă TVA de 18%, care este valoarea TVA de plată în urma activităţii de comercializare a produsului?

Calculaţi care este profitul mediu anual al unui agent economic care înregistrează profit în 5 ani consecutivi după cum urmează:

primul an	al doilea an	al treilea an	al patrulea an	al cincilea an
1000	1300	800	950	1200

Un agent economic face câte o investitie de o unitate de capital fix în 4 localităţi. Prima şi a doua investiţie se amortizează în câte 2 ani, a treia investiţie se amortizează în 4 ani, iar a patra în 3 ani. Să se calculeze termenul mediu de amortizare.

După 5 ani de funcţionare, valoarea rămasă de amortizat a unui utilaj este de 10 milioane lei. Ştiind că rata anuală de amortizare este de 10%, să se calculeze valoarea utilajului şi termenul de amortizare.

Informaţia de care dispunem la un moment dat despre un fenomen este cel mai adesea afectată de incertitutine, de hazard. Spunem că avem de-a face cu date statistice de provenienţă aleatoare. Caracterul aleator al datelor poate să fie generat de:

– natura aleatoare a fenomenului studiat,

– procedura aleatoare de colectare a informaţiei.

Să presupunem că o unitate sanitară este interesată de eficienţa unui nou medicament. Răspunsul la tratament al unui bolnav depinde de mulţi factori biologici şi el poate fi exprimat într-una din următoarele variante: a_1 = „ameliorat", a_2 = „staţionar", a_3 = „înrăutăţit". Un număr de n pacienţi sunt trataţi cu noul medicament, în mod independent unul de altul, înregistrându-se răspunsul lor la tratament. Notăm cu $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ valorile obţinute, unde $x_i \in \{a_1, a_2, a_3\}$ pentru orice $i = 1, 2, \ldots, n$. Mulţimea $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ conţine date statistice, natura lor aleatoare fiind generată de însuşi fenomenul studiat.

Pe de altă parte, să presupunem ca Ministerul de Finanţe este interesat să afle câţi contribuabili au depus declaraţia anuală de venit global, până la data de 1 mai (care nu este data limită a depunerii declaraţiilor). Există posibilitatea de a face o numărare exactă, sau aceea de a estima totalul dorit. Investigaţia exhaustivă este costisitoare, aşa că se preferă o investigatie prin sondaj statistic. Se aleg la întâmplare un număr de n administraţii financiare dintre cele N existente în ţară şi se face numărarea celor care au depus declaratia la aceste unităţi. Notăm cu $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ valorile obţinute, unde x_i este numărul de contribuabili care au depus declaraţia la unitatea i până la data de 1 mai. Acestea reprezintă date statistice, natura lor aleatoare fiind generată de sondajul statistic prin care au fost colectate datele.

3.1. Repartiţii de frecvenţe

Fie $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ o mulţime de date statistice, aşa încât se înregistrează doar r valori distincte notate $\{a_1, \ldots, a_r\}$, adică $x_k \in \{a_1, \ldots, a_r\}$ pentru orice $k = 1, \ldots, n$. Condiţia $r \leq n$ este foarte naturală. Notăm cu n_i numărul de apariţii ale valorii a_i în această mulţime, $i = 1, \ldots, r$.

Definiţie. Numerele n_i/n, $i = 1, \ldots, r$ se numesc *frecvenţele* observate ale valorilor distincte, iar mulţimea

$$\left\{ \frac{n_1}{n}, \frac{n_2}{n}, \ldots, \frac{n_r}{n} \,\middle|\, \sum_{i=1}^{r} \frac{n_i}{n} = 1 \right\}$$

se numeşte *repartiţie de frecvenţe.*

Reprezentări grafice ale repartiţiilor de frecvenţe

a) Orice repartiţe de frecvenţe poate fi reprezentată grafic cu ajutorul diagramelor. Exprimând procentual frecvenţele valorilor distincte observate, putem concepe o figură geometrică plană sau în spaţiu care ar urma să reprezinte totalul de 100%. Figura plană sau corpul sunt împărţite în părţi cu ariile sau volumele proporţionale cu frecvenţele înregistrate. Se utilizează dreptunghiuri sau paralelipipede având înălţimile proporţionale cu frecvenţele; se utilizează sectoare de cerc cu unghiurile la centru proporţionale cu frecvenţele. Cele mai frumoase diagrame sunt cele „în felii de tort“, în care se construiesc părţi detaşate ale unui cilindru, având unghiurile la centru proporţionale cu frecvenţele.

Exemplul 1

Considerăm problema eficienţei unui nou tratament. Răspunsul unui bolnav la acest nou tratament poate fi a_1 = „ameliorat“, a_2 = „staţionar“, a_3 = „înrăutăţit“. Se fac observaţii asupra a 100 de bolnavi trataţi în mod independent, înregistrându-se 80 de ameliorări, 15 situaţii în care starea bolnavului a rămas staţionară şi 5 cazuri în care starea bolnavului s-a înrăutăţit. Repartiţia de frecvenţe obţinută este

răspuns	a_1	a_2	a_3
frecvenţă	0,80	0,15	0,05

Repartiţia obţinută poate fi reprezentată printr-o diagramă circulară de forma următoare:

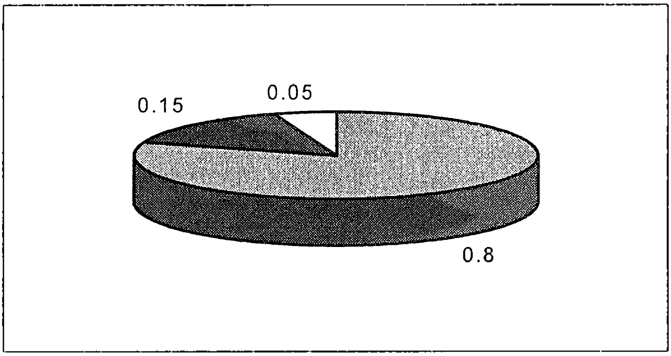


Fig. 2

b) Pentru caracteristicile cantitative cu un număr mic de valori distincte se utilizează reprezentarea în batoane şi poligonul frecvenţelor.

Reprezentarea în batoane. Se consideră un sistem rectangular de axe de coordonate. Pe abscisă se înscriu în ordine crescătoare valorile distincte observate $(a_1 < a_2 < ... < a_r)$, iar pe ordonată se înscriu frecvenţele acestor valori $(n_1/n, n_2/n, ..., n_r/n)$. În dreptul fiecărei observaţii se trasează o linie verticală (baton), de lungime egală cu frecvenţa valorii respective.

Poligonul frecvenţelor. Se consideră sistemul de axe ca la reprezentarea în batoane. Se reprezintă în plan punctele de coordonate $\left(a_i, \frac{n_i}{n}\right)$ $i = 1, ..., r$ şi se unesc apoi aceste puncte printr-o linie poligonală. Această linie poligonală se numeşte poligon al frecvenţelor.

Exemplul 2

Considerăm problema evaluării adaosului comercial mediu pe care îl practică agenţii comerciali care acţionează în domeniul vânzărilor de aparate de aer condiţionat. Se construieşte un eşantion aleator format din 20 de agenţi comerciali dintre cei 2 000 existenţi şi se înregistrează adaosul comercial pe care îl practică.

adaos comercial	7%	10%	15%	18%
frecvenţă	$\frac{6}{20}$	$\frac{8}{20}$	$\frac{5}{20}$	$\frac{1}{20}$

Repartiţia de frecvenţe obţinută poate fi reprezentată prin batoane sau prin poligonul frecvenţelor, ca în figura următoare:

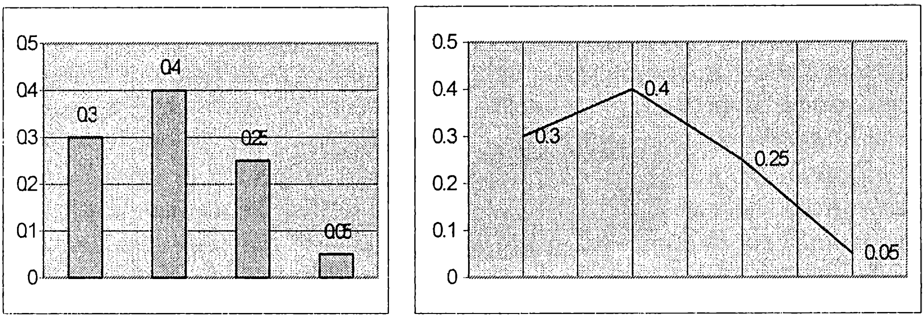


Fig. 3

c) Pentru caracteristicile cantitative cu un număr mare de valori distincte observate, ca şi pentru cele care pot lua orice valoare reală într-un anumit interval, este necesar ca observaţiile să fie grupate în „clase" – înainte de a fi reprezentate grafic.

Histograma este o reprezentare grafică a repartiţiei de frecvenţe prin dreptunghiuri care au ariile proporţionale cu suma frecvenţelor observaţiilor care aparţin fiecăreia dintre clasele considerate (frecvenţele cumulate).

Observaţiile distincte, aşezate în ordine crescătoare, $x_1 \le x_2 \le \dots x_n$, sunt grupate în clase de amplitudini egale. Aceste clase se reprezintă prin segmente egale pe axa Ox. Corespunzător fiecărei clase, se construieşte un dreptunghi cu înălţimea proporţională cu frecvenţa cumulată a observaţiilor ce intră în clasa respectivă. La fel se procedează şi în cazul când clasele se obţin prin împărţirea în subintervale de lungimi egale a intervalului în care se încadrează observaţiile. Prin histogramă se pun foarte clar în evidenţă variaţiile frecvenţelor cumulate ale diferitelor clase.

Dacă datele se grupează în mod firesc în clase de amplitudini neegale (de exemplu, grupele de vârstă „adolescenţi/ tineri/ maturi/ persoane în vârstă"), dreptunghiurile ce formează histograma trebuie să aibă ariile proporţionale cu frecvenţele cumulate ale claselor considerate.

Exemplul 3

Considerăm problema evaluării numărului de contribuabili care au depus declaraţia anuală de venit global, până la data de 1 mai. Se construieşte un eşantion aleator format din 20 de unităţi de administraţie financiară dintre cele 1 000 existente în ţara şi se face numărarea contribuabililor care au depus declaraţia anuală de venit global la aceste unităţi până la data de 1 mai. Valorile obţinute, aşezate în ordine crescătoare sunt: {1000, 1120, 1140, 1150, 1170, 1180, 1190, 1250, 1260, 1280, 1300, 1310, 1350, 1370, 1400, 1420, 1440, 1450, 1460, 1490}.

Grupăm valorile observate în 4 clase:

clasa	[1000, 1200)	[1200, 1300)	[1300, 1400)	[1400, 1500)
frecvenţa	$\frac{7}{20}$	$\frac{3}{20}$	$\frac{4}{20}$	$\frac{6}{20}$

Repartiţia de frecvenţe obţinută poate fi reprezentată printr-o histogramă, ca în figura următoare:

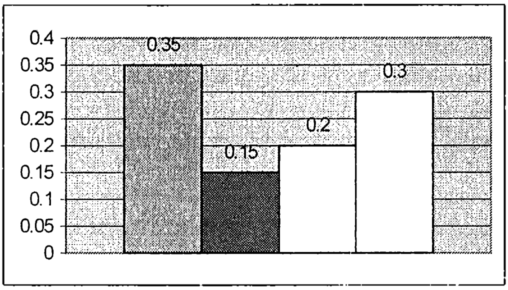


Fig. 4

3.2. Analiza statistică a datelor cantitative

Fie $\{x_1, \ldots, x_n\} \subset \mathbb{R}$ datele statistice de care dispunem, înregistrându-se r valori reale distincte, notate

$$x_1 < x_2 < \ldots < x_r$$

şi fie $\{\frac{n_1}{n}, \frac{n_2}{n}, \ldots, \frac{n_r}{n}\}$ repartiţia de frecvenţe corespunzătoare.

3.2.1. Caracteristici de poziţie a observaţiilor

Definiţii

Media de selecţie este media aritmetică a observaţiilor

$$\bar{x} = \frac{1}{n}(x_1 + \ldots + x_n)$$

Se observă că $\bar{x}$ este egală cu media aritmetică ponderată a celor r observaţii distincte,

$$\bar{x} = \frac{1}{n}(n_1 x_1 + \ldots + n_r x_r)$$

Mediana de selecţie este valoarea „de mijloc" a şirului tuturor celor n observaţii ordonate crescător. Astfel, pentru $x_1 \leq x_2 \leq \ldots \leq x_n$, mediana de selecţie este

$$Me = \begin{cases} x_{k+1}, & \text{dacă } n = 2k+1 \\ \frac{1}{2}(x_k + x_{k+1}), & \text{dacă } n = 2k \end{cases}$$

Mod-ul de selecţie (sau valoarea dominantă din selecţie), notat *Mo*, este observaţia (unică sau nu) care are cea mai mare frecvenţă.

Comentariu. Aceste trei caracteristici de poziţie descriu tendinţa centrală a datelor. Media de selecţie este folosită cu predilecţie când ne interesează o ierarhizare după mărime a datelor (de exemplu, înălţimea medie a unor plante, producţia medie la hectar, greutatea medie a unor animale etc.).

Mediana de selecţie este foarte utilă în ierarhizarea unor persoane (de exemplu, dintre 25 de elevi din eşantion, ne interesează care este al 13-lea, adică „la mijloc"). Mod-ul de selecţie este caracteristica ce evidenţiază cel mai bine valoarea „tipică", cea care apare cel mai frecvent în mulţimea datelor (de exemplu, postul TV cu audienţa cea mai mare la o anumită oră).

3.2.2. Caracteristici de împrăştiere (sau de variabilitate) a observaţiilor

Definiţii

Dispersia de selecţie este egală cu media aritmetică a abaterilor pătratice de la media de selecţie, fiind dată de expresia

$$s^2 = \frac{1}{n}\left[(x_1 - \bar{x})^2 + \ldots + (x_n - \bar{x})^2\right]$$

Se observă că s^2 se poate scrie ca

$$s^2 = \frac{1}{n}\left[n_1(x_1 - \bar{x})^2 + \ldots + n_r(x_r - \bar{x})^2\right]$$

unde $x_1 < x_2 < \ldots < x_r$ sunt valorile distincte observate. Prin calcul direct se obţin relaţiile

$$s^2 = \frac{1}{n}(x_1^2 + \ \ldots\ + x_n^2) - \bar{x}^2$$

$$s^2 = \frac{1}{n}(n_1 x_1^2 + \ldots + n_r x_r^2) - \bar{x}^2$$

Abaterea standard de selecţie este rădăcina pătrată pozitivă a dispersiei de selecţie

$$s = \sqrt{s^2}\,.$$

Dispersia de selecţie şi abaterea standard de selecţie măsoară variabilitatea datelor faţă de media de selecţie.

Comentariu. Dar dacă ne interesau „abaterile de la medie" $(x_1 - \bar{x})$, $(x_2 - \bar{x})$, ..., $(x_n - \bar{x})$, de ce nu am folosit pur şi simplu suma lor? Răspunsul este foarte simplu: pentru că suma acestor valori este egala cu zero,

$$(x_1 - \bar{x}) + \ldots + (x_n - \bar{x}) = (x_1 + \ldots + x_n) - n \cdot \bar{x} = 0.$$

Pentru a evita acest neajuns, se utilizează valorile $(x_1 - \bar{x})^2$, $(x_2 - \bar{x})^2$, ..., $(x_n - \bar{x})^2$.

Pentru a putea compara două seturi diferite de date – din punctul de vedere al variabilităţii lor – avem nevoie de un coeficient adimensional. Acesta este *coeficientul de variaţie*, exprimat procentual şi definit prin raportul dintre abaterea standard de selecţie şi media de selecţie,

$$cv = \frac{s}{\bar{x}} \cdot 100\ (\%).$$

Amplitudinea de selecţie este diferenţa dintre cea mai mare şi cea mai mică observaţie

$$a = x_{max} - x_{min}.$$

Exemplul 4

Se face un studiu statistic privind înălţimea copiilor între 13 şi 14 ani. Se fac observaţii independente asupra a 100 de băieţi şi a 100 de fete. Notăm cu x_i măsurătorile pentru băieţi şi cu y_i măsurătorile pentru fete. Se obţin următoarele repartiţii de frecvenţe:

înălţime băieţi (cm) : x_i	136	140	148	150	153	156	160
frecvenţe	8/100	10/100	25/100	20/100	18/100	13/100	6/100

înălţime fete (cm): y_i	144	148	152	160	164	166
frecvenţe	11/100	9/100	18/100	26/100	26/100	10/100

Să se compare înălţimea medie a băieţilor cu cea a fetelor. Să se compare apoi variabilitatea datelor obţinute pentru băieţi, respectiv pentru fete.

Pentru datele statistice $\{x_1, \ldots, x_{100}\}$ obţinem:

$$\bar{x} = 149{,}3; \quad s_x^2 = 38{,}49; \quad s_x = 6{,}204\,; \; cv_x = 4{,}15\%.$$

Pentru datele statistice $\{y_1, \ldots, y_{100}\}$ obţinem:

$$\bar{y} = 157{,}36; \quad s_y^2 = 53{,}43; \quad s_y = 7{,}309\,; \; cv_y = 4{,}64\%.$$

Se observă că înălţimea medie a fetelor este mai mare decât cea a băieţilor, iar variabilitatea celor două seturi de date (pentru băieţi şi pentru fete) este aproape aceeaşi.

Exemplul 5

Revenim la problema evaluării adaosului comercial mediu pe care îl practică agenţii comerciali care acţionează în domeniul vânzărilor de aparate de aer condiţionat, care a fost introdusă în exemplul 2. Datele statistice obţinute pentru un eşantion aleator de volum 20 au condus la repartiţia de frecvenţe

adaos comercial	7%	10%	15%	18%
frecvenţă	$\frac{6}{20}$	$\frac{8}{20}$	$\frac{5}{20}$	$\frac{1}{20}$

Adaosul comercial mediu este

$$\bar{a} = 10{,}75\%,$$

iar celelalte caracteristici de poziţie şi de împrăştiere sunt:

$$Me = 10, \; Mo = 10$$

$$s^2 = 11{,}587,$$

$$s = 3{,}404, \qquad cv = 31{,}665\%$$

Se efectuează un studiu de piaţa printre clienţii unui anumit supermarket. Pentru un eşantion de volum $n = 500$, se adresează următoarele întrebări:

– De obicei, cumpăraţi produse cosmetice din magazinul nostru? (răspunsuri posibile: da / nu);

– Dacă da, aţi cumpărat măcar o dată pastă de dinţi marca „A"? (răspunsuri posibile: da / nu);

– Dacă da, aţi fost multumit de calitatea aceastei paste de dinţi? (răspunsuri posibile: da / nu).

400 persoane răspund „da" la prima întrebare, dintre aceştia 150 răspund „da" la a doua întrebare, iar dintre aceştia din urmă 60 răspund „da" la a treia întrebare. Să se reprezinte printr-o diagramă rezultatele anchetei. Să se estimeze proporţia cumpărătorilor care au cumpărat măcar o dată pastă de dinţi marca „A" şi proporţia celor care au fost mulţumiţi de calitatea acesteia.

2. Se face un studiu statistic privind numărul copiilor cu vârsta cuprinsă între 6 şi 10 ani care locuiesc în Bucureşti pentru a vedea evoluţia populaţiei şcolare din ciclul primar. Se aleg, la întâmplare, 12 şcoli şi se numără elevii aparţinând acestor clase de vârstă. Datele obţinute sunt prezentate în tabelul următor:

vârsta	6-7	7-8	8-9	9-10
nr. băieţi	5831	6074	5906	6472
nr fete	5733	5579	5950	6264
total	11564	11653	11856	12736

Să se reprezinte grafic repartiţiile de frecvenţe, pe grupe de vârste şi pe sexe.

3. Se face un studiu privind valoarea creditelor acordate de bănci întreprinderilor mici şi mijlocii (IMM). Pentru datele statistice rezultate dintr-un eşantion aleator de 200 IMM-uri se obţine următoarea repartiţie de frecvenţe:

x_i	160	162	165	169	170	171	172	174	176	178	180	182	185	186	190
$\frac{n_i}{n}$	$\frac{2}{200}$	$\frac{1}{200}$	$\frac{7}{200}$	$\frac{5}{200}$	$\frac{10}{200}$	$\frac{25}{200}$	$\frac{19}{200}$	$\frac{16}{200}$	$\frac{57}{200}$	$\frac{33}{200}$	$\frac{13}{200}$	$\frac{7}{200}$	$\frac{2}{200}$	$\frac{2}{200}$	$\frac{1}{200}$

Să se reprezinte repartiţia de frecvenţe utilizând poligonul frecvenţelor şi să se construiască o histogramă cu 5 clase de amplitudini egale. Să se calculeze valoarea medie a creditelor acordate şi celelalte caracteristici numerice de selecţie.

4. Se studiază caracteristica „durabilitate" pentru un tip de burghiu elicoidal cu diametrul de 6 mm şi cu miez îngroşat. Se fac încercări pe acelaşi material pentru 15 burghie şi se înregistrează duratele lor de funcţionare (până la rupere), exprimate în minute. Datele obţinute sunt:

$$16,10;\ 19,25;\ 22,44;\ 19,18;\ 26,50;\ 32,18;\ 22,58;\ 27,22;$$
$$39,56;\ 24,58;\ 36,58;\ 30,26;\ 33,58;\ 23,20;\ 17,34.$$

Să se reprezinte repartiţia de frecvenţe utilizând o histogramă cu 5 clase de amplitudini egale şi să se calculeze caracteristicile numerice de selecţie.

5. Se cercetează timpul de combustie pentru 100 probe de bumbac. Notând cu x_i durata combustiei (exprimată în secunde), se obţine următoarea repartiţie de frecvenţe:

x_i	85	86	87	88	89	90	91	92	93	94
$\frac{n_i}{n}$	$\frac{1}{100}$	$\frac{2}{100}$	$\frac{6}{100}$	$\frac{14}{100}$	$\frac{21}{100}$	$\frac{23}{100}$	$\frac{16}{100}$	$\frac{10}{100}$	$\frac{5}{100}$	$\frac{2}{100}$

Să se reprezinte grafic repartiţia de frecvenţe, utilizând o reprezentare în batoane şi poligonul frecvenţelor. Să se calculeze caracteristicile numerice de selecţie corespunzătoare.

6. Se face un studiu antropometric privind greutatea corporală a băieţilor şi a fetelor de 18 ani. Se fac măsurători pe un eşantion de 200 de băieţi şi pe un eşantion de 200 de fete. Notăm cu x_i măsurătorile pentru băieţi şi cu y_i măsurătorile pentru fete. Se obţin următoarele repartiţii de frecvenţe:

x_i (kg)	65	70	76	78	80	85	88	92
frecvenţe	$\frac{5}{200}$	$\frac{35}{200}$	$\frac{50}{200}$	$\frac{45}{200}$	$\frac{30}{200}$	$\frac{9}{200}$	$\frac{24}{200}$	$\frac{2}{200}$

y_i (kg)	50	52	54	56	60	65	68
frecvenţe	$\frac{32}{200}$	$\frac{28}{200}$	$\frac{45}{200}$	$\frac{50}{200}$	$\frac{45}{200}$	$\frac{15}{200}$	$\frac{5}{200}$

Să se compare greutatea corporală medie a băieţilor cu cea a fetelor. Să se compare apoi variabilitatea datelor obţinute pentru băieţi, respectiv pentru fete.

Calculul probabilităţilor este ştiinţa care îşi propune să modeleze şi să studieze mărimile şi fenomenele aleatoare. Modelul este construit aşa încât să cuprindă cât mai bine trăsăturile fenomenului real. Principalele noţiuni matematice care modelează fenomenele aleatoare sunt *câmpul de probabilitate asociat unui experiment aleator, evenimentele şi variabilele aleatoare.*

4.1. Experimente aleatoare şi evenimente asociate

În capitolul Elemente de Combinatorică ne-am pus problema de a număra toate mulţimile ordonate care se pot forma cu n elemente date, de a număra submulţimile de k obiecte distincte care se pot forma dintr-o mulţime de n obiecte etc.

În fapt, suntem în faţa unor experimente:

- plasarea a n obiecte pe n poziţii fixe,
- formarea unui grup de k obiecte alese din n obiecte disponibile.

Dacă procedăm la o efectuare practică a acestor experimente, constatăm că fiecare dintre ele are mai multe rezultate posibile.

Definiţii

a) Un ***experiment aleator*** (notat $\mathscr{E}$) este o acţiune ale cărei rezultate nu pot fi pronosticate cu certitudine. O efectuare a unui experiment se numeşte ***probă.***

b) Un rezultat obţinut prin efectuarea experimentului aleator se numeşte ***eveniment elementar*** şi este modelat printr-o mulţime formată dintr-un singur element $\{e\}$.

c) Mulţimea tuturor rezultatelor posibile ale unui experiment aleator se numeşte ***eveniment sigur*** sau mulţime totală şi se notează cu E.

d) Părţile mulţimii totale se numesc ***evenimente*** şi ele sunt reprezentări ale unor situaţii care pot rezulta dintr-un experiment aleator. Familia tuturor evenimentelor asociate unui experiment aleator se notează cu $\mathscr{P}(E)$.

e) Prin analogie cu teoria mulţimilor, mulţimea vidă reprezintă un eveniment ce nu se poate realiza într-o probă. El se numeşte ***evenimentul imposibil*** şi se notează cu $\varnothing$.

Exemplul 1

Considerăm experimentul aleator care constă în aruncarea simultană a două zaruri, unul alb şi unul negru. Evenimentele elementare ale acestui experiment sunt în numar de 36, şi anume $\{(i, j)\}$, $i = 1, \dots, 6$, $j = 1, \dots, 6$, unde i reprezintă numărul de puncte de pe zarul alb şi j numărul de puncte de pe zarul negru. Evenimentul sigur este $\{(1, 1), (1, 2), \dots, (6, 6)\}$. Evenimentul „suma punctelor obţinute pe cele două zaruri este egală cu 5” se scrie ca

$$\{S = 5\} = \{(1, 4), (2, 3), (3, 2), (4,1)\},$$

iar evenimentul „numărul punctelor de pe zarul alb este par şi al celor de pe zarul negru este impar” este

$$\{(par,\ impar)\} = \{(2, 1), (2, 3), (2, 5), (4,1), (4, 3), (4, 5), (6, 1), (6,3), (6, 5)\}.$$

4.2. Operaţii cu evenimente

Operaţiile cu evenimente au o semnificaţie probabilistă clară, iar pentru ele se foloseşte o notaţie analoagă cu cea din teoria mulţimilor.

Definiţii

a) Pentru două evenimente date $A, B \in \mathscr{P}(E)$, definim următoarele operaţii:

- evenimentul **„*A* sau *B*“**, care constă în realizarea evenimentului A sau a evenimentului B şi se notează cu $A \cup B$;

- evenimentul **„*A* şi *B*“**, care constă în realizarea simultană a evenimentelor A şi B şi se notează cu $A \cap B$;

- **evenimentul contrar** lui A, notat A^C, revine la nerealizarea evenimentului A. El este dat de complementara mulţimii A, în raport cu mulţimea totală E. Aceasta înseamnă că $A \cap A^C = \varnothing$ şi $A \cup A^C = E$.

b) Două evenimente A şi B pentru care $A \cap B = \varnothing$ se numesc ***incompatibile***, iar două evenimente A şi B pentru care $A \cap B \neq \varnothing$ se numesc ***compatibile***.

Exemplul 2

Considerăm experimentul aleator de la exemplul precedent. Evenimentul „numărul punctelor de pe zarul alb este mai mic decât cel de pe zarul negru” este format din 15 evenimente elementare:

$$A = \{(1, 2), \dots (1, 6), (2, 3), \dots (2, 6), (3, 4), \dots (3, 6), (4, 5), (4, 6), (5, 6)\}.$$

Evenimentul „numărul punctelor de pe zarul alb este mai mare decat cel de pe zarul negru” este format din alte 15 evenimente elementare:

$$B = \{(2, 1), \dots (6, 1), (3, 2), \dots (6, 2), (4, 3), \dots (6, 3), (5, 4), (6, 4), (6, 5)\}$$

Observăm că cele două evenimente sunt incompatibile căci $A \cap B = \varnothing$, iar

$$A \cup B = \{(i, j) \mid i, j = 1, \ldots, 6,\ i \neq j\}.$$

De asemenea, observăm că $(A \cup B)^C = \{(i, i),\ i = 1, \ldots, 6\} = A^C \cap B^C$.

4.3. Probabilitatea unui eveniment. Probabilitate condiţionată

Pentru a introduce noţiunea de „probabilitate" facem o ipoteză esenţială: experimentul aleator are proprietatea că toate evenimentele sale elementare au aceeaşi şansă de a se realiza. Pentru exemplul discutat, aceasta înseamnă că cele două zaruri sunt „corecte".

Să presupunem că aruncăm un zar de 10 ori. Valorile obţinute sunt {2, 6, 1, 2, 5, 4, 3, 2, 5, 6}, deci frecvenţele celor 6 numere sunt $n_1/n = 0{,}1$, $n_2/n = 0{,}3$, $n_3/n = 0{,}1$, $n_4/n = 0{,}1$, $n_5/n = 0{,}2$ şi $n_6/n = 0{,}2$. Dacă, însă, aruncăm zarul de 1000 de ori, de 10 000 de ori, de 100 000 ori,vom constata că frecvenţele se apropie tot mai mult de valorile $n_i/n = 1/6$ pentru toţi $i = 1, 2, \ldots, 6$.

Probabilitatea unui eveniment aleator poate fi astfel definită pornind de la forma evenimentului sigur şi impunând condiţia ca toate evenimentele elementare să fie de probabilităţi egale.

Definiţii

Fie $E = \{e_1, \ldots, e_N\}$ evenimentul sigur asociat unui experiment aleator.

a) Probabilitatea unui eveniment elementar $\{e_i\}$ este definită prin

$$P(\{e_i\}) = \frac{1}{N},\ i = 1, \ldots, N,$$

b) Probabilitatea unui eveniment $A \in \mathscr{P}(E)$ se defineşte ca raportul dintre numărul evenimentelor elementare care îl formează pe A şi numărul total N al evenimentelor elementare.

Definiţia generală a probabilităţii

Se numeşte probabilitate o funcţie $P : \mathscr{P}(E) \to \mathbb{R}$ cu următoarele proprietăţi:

1) $P(A) \geq 0,\ \forall A \in \mathscr{P}(E)$;

2) $P(E) = 1$;

3) $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$, dacă $A \cap B = \varnothing$.

Exemplul 3

Considerăm din nou experimentul aleator de la exemplul 1, constând în aruncarea simultană a două zaruri de culori diferite şi evenimentele A şi B introduse la exemplul 2.

Atunci $P(\{(i,\ j)\}) = \frac{1}{36},\ \forall i, j = 1, \ldots, 6$.

$$P(\{S = 5\}) = \frac{4}{36},\ P(A) = P(B) = \frac{15}{36},\ P(A \cup B) = \frac{30}{36},\ P(A \cap B) = 0.$$

Definiţie. Asociem unui experiment aleator $\mathscr{E}$ tripletul $(E, \mathscr{P}(E), P)$ pe care îl numim *câmp de probabilitate*, unde E este evenimentul sigur, $\mathscr{P}(E)$ este mulţimea evenimentelor asociate experimentului, iar $P : \mathscr{P}(E) \to \mathbb{R}$ este o probabilitate.

Probabilitatea evenimentului contrar lui A

Conform definiţiei evenimentului A^C şi conform axiomelor probabilităţii, rezultă

$$P(A^C) = 1 - P(A).$$

*Probabilitatea evenimentului **„A sau C"** când A şi C sunt compatibile*

În exemplul aruncării celor două zaruri, notăm cu A evenimentul „numărul punctelor de pe zarul alb este mai mic decât cel de pe zarul negru" şi cu C evenimentul ca „suma punctelor obţinute să fie un număr mai mic sau egal cu 4".

Atunci

$$C = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 1), (2, 2)\},$$

$$A \cup C = \{(1, 1), (1, 2), \ldots (1, 6), (2, 1), (2, 2), (2, 3), \ldots (2, 6), (3, 4), \ldots (3, 6), (4, 5), (4, 6), (5, 6)\}$$

şi

$$A \cap C = \{(1, 2), (1, 3)\}.$$

Observăm că $P(A \cup C) = \frac{18}{36}$, $P(A) + P(C) - P(A \cap C) = \frac{(15+5-2)}{36} = \frac{18}{36}$.

Formula generală de calcul a probabilităţii evenimentului „A sau C" când A şi C sunt compatibile este

$$P(A \cup C) = P(A) + P(C) - P(A \cap C).$$

Definiţie. Două evenimente $A, B \in \mathscr{P}(E)$ se numesc *independente* dacă

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B).$$

Exemplul 4

Considerăm din nou experimentul aleator de la exemplul 1, constând în aruncarea simultană a două zaruri de culori diferite şi notăm de această dată cu M_2 evenimentul „apariţia numărului 2 pe primul zar" şi cu N_3 apariţia numărului 3 pe al doilea zar". Atunci $M_2 = \{(2, 1), (2, 2), (2, 3), (2, 4), (2, 5), (2, 6)\}$, $N_3 = \{(1, 3), (2, 3), (3, 3), (4, 3), (5, 3), (6, 3)\}$, $M_2 \cap N_3 = \{(2, 3)\}$,

$$P(M_2) \cdot P(N_3) = \frac{6}{36} \cdot \frac{6}{36} = \frac{1}{36} = P(M_2 \cap N_3),$$

deci cele două evenimente sunt independente.

Definiţie. Fie două evenimente $A, B \in \mathscr{P}(E)$ aşa încât $P(A) > 0$. Definim *probabilitatea lui B condiţionată de A*, notată $P(B \mid A)$, prin raportul

$$P(B \mid A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

Rezultă de aici formula $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B \mid A)$ cu următoarea *interpretare:* probabilitatea să se realizeze A şi B este egală cu probabilitatea să se realizeze A înmulţită cu probabilitatea lui B ştiind că s-a realizat A.

Exemplul 5

Pentru experimentul aleator constând în aruncarea simultană a două zaruri de culori diferite, notăm cu A evenimentul „numărul obţinut pe primul zar este mai mic decât cel obţinut pe al doilea zar" şi cu B evenimentul „suma punctelor obţinute pe cele două zaruri este mai mică sau egală cu 5". Atunci

$$A \cap B = \{(1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 3)\},$$

$$P(A) = \frac{15}{36},\ P(B) = \frac{10}{36},\ P(A \cap B) = \frac{4}{36},\ P(B \mid A) = \frac{\frac{4}{36}}{\frac{15}{36}} = \frac{4}{15}.$$

Exemplul 6

O urnă conţine 5 bile albe şi 2 bile roşii. Se extrag pe rând 2 bile din urnă şi se aşează pe masă. Care este probabilitatea de a avea pe masă o bilă albă şi una roşie – în această ordine?

Notăm cu A_1 evenimentul de a obţine o bilă albă la prima extragere şi cu A_2 evenimentul de a obţine o bilă roşie la a doua extragere. Atunci

$$P(A_1 \cap A_2) = P(A_1)\, P(A_2 \mid A_1) = \frac{5}{7} \cdot \frac{2}{6} = \frac{5}{21}.$$

4.4. Variabile aleatoare. Caracteristici numerice asociate

Variabila aleatoare este corespondentul noţiunii de funcţie – în cazul unui câmp de probabilitate.

Exemplul 7

Fie $(E, \mathscr{P}(E), P)$ câmpul de probabilitate asociat experimentului de aruncare a unei perechi de zaruri. Construim funcţia care asociază unui eveniment elementar suma punctelor obţinute pe cele două zaruri:

$$S : E \to \{2, 3, \ldots, 11, 12\}$$
$$S((i, j)) = i + j$$

Observăm că cele 11 valori posibile ale acestei funcţii se obţin pentru anumite evenimente aleatoare şi deci ele apar cu anumite probabilităţi:

$$P(\{S = 2\}) = P((1, 1)) = \frac{1}{36},$$

$$P(\{S = 3\}) = P((1, 2), (2, 1)) = \frac{2}{36},$$

.................................,

$$P(\{S = 12\}) = P((6, 6)) = \frac{1}{36},$$

Este adevărată relaţia $P(\{S = 2\}) + P(\{S = 3\}) + \ldots + P(\{S = 12\}) = 1$.

Definiţii

a) Se numeşte *variabilă aleatoare* o funcţie definită pe mulţimea totală asociată unui experiment aleator, care ia o mulţime finită de valori,

$$X : E \to \{x_1, \ldots, x_r\}$$

şi pentru care se cunosc probabilităţile fiecărei valori posibile

$$P(X = x_i) = p_i,\ i = 1, \ldots r$$

aşa încât $p_i \geq 0,\ i = 1, \ldots r$

$$p_1 + \ldots + p_r = 1.$$

b) Mulţimea de numere $\{P(X = x_i) = p_i,\ i = 1, 2, \ldots r\}$ definite mai sus se numeşte *repartiţia de probabilitate* a variabilei X.

Variabilele aleatoare întâlnite în practică sunt de două tipuri: *calitative* sau *cantitative.*

Variabile aleatoare calitative au, de obicei, un număr mic de valori distincte. Iată câteva exemple:

– Unele întrebări din sondajele de opinie cum ar fi: întrebarea „Urmăriţi emisiunea A?", cu răspunsurile „Da/ Nu", sau întrebarea „Sunteţi mulţumit de calitatea emisiunii A?", cu răspunsurile „Foarte nemulţumit / Nemulţumit / Mulţumit / Foarte mulţumit / Nu ştiu";

– Calitatea pieselor dintr-un lot de produse supus controlului – exprimată prin „Piesă bună / Rebut";

– Nivelul efectului curativ pe care îl are un nou medicament supus testării – exprimat prin „Nici un efect / Efect mic / Efect moderat / Efect mare".

Observăm că pentru a lucra cu asemenea variabile calitative este necesară o codificare a valorilor ce pot să apară. Astfel, răspunsurile „Da / Nu" se codifică de obicei prin 1 / 0, iar răspunsurile „Foarte nemulţumit / Nemulţumit / Mulţumit / Foarte mulţumit / Nu ştiu" pot fi codificate prin literele $a_1 / a_2 / a_3 / a_4 / a_5$.

Variabilele aleatoare cantitative sunt mărimi măsurabile, cum ar fi numărul de rebuturi dintr-un lot supus controlului, numărul de defecţiuni care se identifică la controlul unui aparat electronic, înălţimea unor plante, greutatea corporală a unor oameni, sumele depuse de clienţi la o bancă etc. Pentru variabilele cantitative, numărul valorilor distincte ce pot să apară este mare sau foarte mare, adesea toate valorile sunt distincte şi sunt cuprinse între o limită inferioară şi una superioară. De exemplu, sumele depuse de diferiţi clienţi în anul 2000 la banca B sunt cuprinse între 100.000 lei (depozitul minim) şi 10 miliarde de lei (cel mai mare depozit existent la momentul respectiv).

O variabilă aleatoare X este dată deci prin valorile sale şi prin probabilităţile acestor valori. Pentru a face o legătură între aceste elemente, se definesc caracteristicile numerice ale variabilei X, care pun în evidenţă ce valori apar cel mai frecvent, cum sunt poziţionate valorile unele faţă de altele, cât de mare este variabilitatea valorilor lui X etc. Caracteristicile numerice pot fi calculate fie pentru variabilele aleatoare cantitative, fie pentru cele calitative ale căror valori sunt codificate prin numere reale.

Definiţii

a) *Caracteristici de poziţie* ale unei variabile aleatoare X, pentru care $P(X = x_i) = p_i$, $i = 1, \ldots, r$.

• *Media* este valoarea numerică asociată variabilei X care se calculează după formula

$$M(X) = x_1p_1 + x_2p_2 + \ldots + x_rp_r.$$

• *Mediana* este o valoare numerică notată $Me(X)$, care împarte valorile lui X în două grupe de probabilităţi aproximativ egale. Ea se defineşte astfel: Se consideră valorile variabilei ordonate crescător, $x_1 \le x_2 \le \ldots \le x_r$. Mediana este acea valoare a variabilei X care satisface proprietăţile

$$P(X < Me(X)) \le \frac{1}{2},\ P(X \le Me(X)) \ge \frac{1}{2}.$$

• *Mod-ul* (sau *dominanta*), notat $Mo(X)$, este valoarea (unică sau nu) care are probabilitatea cea mai mare de apariţie.

b) *Caracteristici de împrăştiere* ale unei variabile aleatoare X, pentru care $P(X = x_i) = p_i$, $i = 1, \ldots, r$.

• *Dispersia* este valoarea numerică asociată variabilei X care se calculează după formula

$$D^2(X) = (x_1 - M(X))^2p_1 + \ldots + (x_r - M(X))^2p_r.$$

Observăm că $$D^2(X) = (x_1^2p_1 + \ldots + x_r^2p_r) - (M(X))^2.$$

• *Abaterea medie standard* este egală cu rădăcina pătrată pozitivă a dispersiei,

$$D(X) = \sqrt{D^2(X)}.$$

• *Amplitudinea* este egală cu diferenţa dintre cea mai mare şi cea mai mică dintre valoarile variabilei X

$$A(X) = \max\{x_1, \ldots, x_r\} - \min\{x_1, \ldots, x_r\}.$$

Dispersia şi abaterea medie standard măsoară deviaţia valorilor variabilei X de la media $M(X)$, adică variabilitatea valorilor lui X. Există situaţii când o variabilitate mare este benefică (de exemplu, în unele fenomene biologice). Cel mai adesea, însă, este preferabilă o variabilitate mică, respectiv valori cât mai omogene pentru variabila X.

Exemplul 8

Să se calculeze caracteristicile numerice ale variabilei aleatoare S = „suma punctelor obţinute la aruncarea a două zaruri", care a fost construită în exemplul 7.

$$M(S) = 2\frac{1}{36} + 3\frac{2}{36} + 4\frac{3}{36} + 5\frac{4}{36} + 6\frac{5}{36} + 7\frac{6}{36} + 8\frac{5}{36} + 9\frac{4}{36} + 10\frac{3}{36} + 11\frac{2}{36} + 12\frac{1}{36} = 7;$$

$Me(S) = 7$ căci $P(X < 7) = \frac{15}{36} < \frac{1}{2}$ şi $P(X \le 7) = \frac{21}{36} > \frac{1}{2}$;

$Mo(S) = 7$, deci valoarea cea mai probabilă este $S = 7$;

$$D^2(S) = \left(2^2\frac{1}{36} + 3^2\frac{2}{36} + \ldots + 11^2\frac{2}{36} + 12^2\frac{1}{36}\right) - (7)^2 = \frac{1974}{36} - 49 = 5{,}83;$$

$D(S) = 2{,}41$; $A(S) = 12 - 2 = 10$.

4.5. Probleme rezolvate

1. Într-un liceu există patru clase a IX-a, trei clase a X-a, cinci clase a XI-a şi patru clase a XII-a, fiecare clasă având câte 30 de elevi. Alegem la întâmplare un elev din liceu.

a) Să se construiască câmpul de probabilitate asociat acestui experiment.

b) Să se calculeze probabilitatea ca elevul ales să fie din clasa a X-a.

c) Presupunem că vârstele elevilor sunt, respectiv, de 15, 16, 17 şi 18 ani. Să se construiască variabila aleatoare care descrie vârsta unui elev ales la întâmplare din liceu. Să se calculeze caracteristicile numerice ale acestei variabile.

R: a) Câmpul de probabilitate $(E, \mathscr{P}(E), P)$ este dat de mulţimea totală E şi probabilitatea P:

$$E = \{e_1, \ldots, e_{120}, e_{121}, \ldots, e_{210}, e_{211}, \ldots, e_{360}, e_{361}, \ldots, e_{480}\}$$

$$P : \mathscr{P}(E) \to [0, 1], \quad P(\{e_i\}) = \frac{1}{480}, \forall i = 1, \ldots, 480.$$

b) Evenimentul A = „elevul ales este din clasa a X-a" este $A = \{e_{121}, \ldots, e_{210}\}$, iar $P(A) = \frac{90}{480} = \frac{3}{16}$.

c) Variabila aleatoare cerută este $X : E \to \{15,16,17,18\}$, cu

$$P(X = 15) = \frac{4}{16}, P(X = 16) = \frac{3}{16}, P(X = 17) = \frac{5}{16}, P(X = 18) = \frac{4}{16},$$

iar caracteristicile sale numerice sunt:

$$M(X) = 15\frac{4}{16} + 16\frac{3}{16} + 17\frac{5}{16} + 18\frac{4}{16} = 16{,}56; \quad Mo(X) = Me(X) = 17;$$

$$D^2(X) = \left(15^2\frac{4}{16} + 16^2\frac{3}{16} + 17^2\frac{5}{16} + 18^2\frac{4}{16}\right) - (16{,}56)^2 = 1{,}2461;$$

$$D(X) = 1{,}1163; \quad A(X) = 18 - 15 = 3.$$

2. Se aruncă de trei ori o monedă de 50 de cenţi şi notăm cu „50" valoarea şi cu „0" efigia.

a) Să se construiască câmpul de probabilitate asociat acestui experiment.

b) Să se calculeze probabilitatea de a obţine de fiecare dată valoarea.

c) Atribuind efigiei valoarea zero, să se construiască variabila aleatoare care dă suma valorilor obţinute în cele trei aruncări. Să se calculeze caracteristicile numerice ale acestei variabile.

R: a) Câmpul de probabilitate $(E, \mathscr{P}(E), P)$ este dat de mulţimea totală E şi probabilitatea P:

$$E = \{(i, j, k) \mid i, j, k \in \{0, 50\}\}.$$

Numărul de elemente ale mulţimii E este $C_3^0 + C_3^1 + C_3^2 + C_3^3 = 8$. Rezultă că probabilitatea P este

$$P : \mathscr{P}(E) \to [0, 1], \quad P((i, j, k)) = \frac{1}{8}, \forall (i, j, k) \in E.$$

b) Evenimentul de a obţine de trei ori valoarea (50) este $A = (50, 50, 50)$ şi $P(A) = \frac{1}{8}$.

c) Variabila aleatoare cerută este $X: E \to \{0, 50, 100, 150\}$, cu

$$P(X=0) = \frac{1}{8},\ P(X=50) = \frac{3}{8}, P(X=100) = \frac{3}{8}, P(X=150) = \frac{1}{8}.$$

Calculam caracteristicile numerice ale acestei variabile.

$$M(X) = 0 \cdot \frac{1}{8} + 50 \cdot \frac{3}{8} + 100 \cdot \frac{3}{8} + 150 \cdot \frac{1}{8} = 75.$$

$$Mo_1(X) = 50;\quad Mo_2(X) = 100;\quad Me(X) = 50;$$

$$D^2(X) = 1875;\quad D(X) = 43{,}3;\quad A(X) = 150.$$

Observăm că dominanta variabilei nu este unică.

3. Se formează la întâmplare un număr din patru cifre distincte, cifrele utilizate fiind 1,2,3,4.

a) Să se construiască câmpul de probabilitate asociat acestui experiment.

b) Să se calculeze probabilitatea ca suma primelor două cifre ale numărului să fie cel mult 4.

c) Să se construiască variabila aleatoare ce dă suma primelor două cifre ale numărului format şi să se calculeze caracteristicile numerice ale acestei variabile.

R: a) Câmpul de probabilitate $(E, \mathcal{P}(E), P)$ este dat de mulţimea totală E şi probabilitatea P:

$$E = \{(i_1i_2i_3i_4) \mid i_1, i_2, i_3, i_4 \in \{1, 2, 3, 4\}, i_j \neq i_k \text{ pentru } j \neq k\}.$$

Numărul evenimentelor elementare este 4!. Rezultă că probabilitatea P este

$$P: \mathcal{P}(E) \to [0, 1],\quad P((i_1i_2i_3i_4)) = \frac{1}{4!}, \forall (i_1i_2i_3i_4) \in E.$$

b) Evenimentul ca suma primelor două cifre ale numărului să fie cel mult 4 este

$$A = \{(1234), (1243), (2134), (2143), (1324), 1342), (3124), (3142)\}$$

şi $$P(A) = \frac{8}{24} = \frac{1}{3}.$$

c) Variabila aleatoare cerută este $X: E \to \{3,4,5,6,7\}$, cu

$$P(X=3) = P(X=4) = P(X=6) = P(X=7) = \frac{4}{24}, P(X=5) = \frac{8}{24},$$

şi cu caracteristicile numerice:

$$M(X) = 5;\ Mo(X) = 5;\ Me(X) = 5;$$

$$D^2(X) = \left(\frac{36}{24} + \frac{64}{24} + \frac{200}{24} + \frac{144}{24} + \frac{196}{24}\right) - 25 = 1{,}66;\ D(X) = 1{,}29;\ A(X) = 4.$$

4.6. Modele probabiliste
(Schema Bernoulli, Schema Poisson, Schema hipergeometrică)

4.6.1. Schema Bernoulli (Schema extragerilor cu revenire)

a) *Experimentul aleator, câmpul de probabilitate şi formula binomială*

Experimentul aleator care este modelul acestei scheme este următorul: considerăm o urnă care conţine a bile albe şi b bile negre. Se fac m extrageri succesive, cu revenirea bilei extrase înapoi în urnă.

1) Să construim *câmpul de probabilitate* asociat acestui experiment.

Notăm cu U mulţimea celor $(a + b)$ bile albe şi negre din urnă. Câmpul de probabilitate $(E, \mathscr{P}(E), P)$ este dat de mulţimea totală E şi probabilitatea P:

$$E = \{(e_1,...,e_m) \mid e_i \in U, i = 1, \ldots, m\}.$$

Numărul evenimentelor elementare este $(a + b)^m$.

$$P : \mathscr{P}(E) \to [\,0,\,1],\ P((e_1,...,e_m)) = \frac{1}{(a+b)^m},\ \forall (e_1, ..., e_m) \in E.$$

2) Să calculăm acum *probabilitatea de a obţine k bile albe şi* $(m - k)$ *bile negre* în acest experiment. Notăm cu $A_{i_1,\ldots,i_k}$ evenimentul ca bilele de pe poziţiile $i_1,...,i_k$ să fie albe, iar celelalte negre. Numărul evenimentelor elementare care îl compun pe $A_{i_1,\ldots,i_k}$ este $a^k \cdot b^{m-k}$. Atunci

$$P(A_{i_1,\ldots,i_k}) = \frac{a^k \cdot b^{m-k}}{(a+b)^m} = \left(\frac{a}{a+b}\right)^k \left(\frac{b}{a+b}\right)^{m-k}$$

Notând $\frac{a}{a+b} = p$, putem scrie $P(A_{i_1,\ldots,i_k}) = p^k(1 - p)^{m-k}$.

Fie A evenimentul care constă în obţinerea a k bile albe şi $(m - k)$ bile negre, indiferent de poziţii. Atunci

$$A = \bigcup_{i_1,\ldots,i_k} A_{i_1,\ldots,i_k},$$

reuniunea făcându-se după toate submulţimile de k indici diferiţi ce se pot forma din $\{1, ..., m\}$. Cum elementele reuniunii sunt evenimente incompatibile (disjuncte) şi de probabilităţi egale, rezultă $P(A) = C_m^k p^k (1-p)^{m-k}$.

Aceasta se numeşte *formula binomială.*

b) *Variabila aleatoare* care dă numărul de bile albe ce pot fi obţinute în acest experiment este

$$X : E \to \{0, 1, ..., m\}$$

cu

$$P(X = k) = C_m^k p^k (1-p)^{m-k},\ k = 0, 1, \ldots m.$$

Conform dezvoltării binomului lui Newton, avem

$$\sum_{k=0}^{m} P(X = k) = \sum_{k=0}^{m} C_m^k p^k (1-p)^{m-k} = [p + (1-p)]^m = 1.$$

Spunem că variabila aleatoare astfel construită este o *variabilă cu repartiție binomială* $B(m, p)$.

1) *Media* acestei variabile aleatoare este $M(X) = mp$. Într-adevăr,

$$M(X) = 0 \cdot C_m^0 p^0 (1-p)^m + 1 \cdot C_m^1 p(1-p)^{m-1} + \ldots + kC_m^k p^k (1-p)^{m-k} + \ldots + mC_m^m p^m (1-p)^0,$$

Înlocuind combinările cu raportul de factoriale şi simplificând, obţinem

$$M(X) = mp(1-p)^{m-1} + \frac{m(m-1)}{1!} p^2 (1-p)^{m-2} + \ldots +$$

$$+ \frac{m!}{(k-1)!(m-k)!} p^k (1-p)^{m-k} + \ldots + mp^m,$$

$$M(X) = mp\left[(1-p)^{m-1} + C_{m-1}^1 p(1-p)^{m-2} + \ldots \right.$$
$$\left. \ldots + C_{m-1}^{k-1} p^{k-1} (1-p)^{m-1-(k-1)} + \ldots + C_{m-1}^{m-1} p^{m-1}\right]$$

sau

$$M(X) = mp \cdot [p + (1-p)]^{m-1} = mp.$$

2) Dispersia variabilei X este $D^2(X) = mp(1-p)$. Pentru a obţine acest rezultat, folosim formula de calcul

$$D^2(X) = M(X^2) - (M(X))^2.$$

$$M(X^2) = \left[0 \cdot C_m^0 p^0 (1-p)^m + 1 \cdot C_m^1 p(1-p)^{m-1} + \ldots \right.$$
$$\left. \ldots + k^2 C_m^k p^k (1-p)^{m-k} + \ldots + m^2 C_m^m p^m (1-p)^0\right].$$

Înlocuind combinările cu raportul de factoriale şi simplificând, obţinem

$$M(X^2) = \left[mp(1-p)^{m-1} + 2\frac{m(m-1)}{1!} p^2 (1-p)^{m-2} + \ldots + \right.$$

$$\left. + k\frac{m!}{(k-1)!(m-k)!} p^k (1-p)^{m-k} + \ldots + m^2 p^m\right],$$

$$M(X^2) = mp\left[(1-p)^{m-1} + (1+1)(m-1)p(1-p)^{m-2} + \ldots \right.$$
$$\left. \ldots + (1+(k-1)) \cdot \frac{(m-1)!}{(k-1)!(m-k)!} p^{k-1} (1-p)^{m-k} + \ldots + (1+(m-1))p^{m-1}\right],$$

$$M(X^2) = mp\left[(1-p)^{m-1} + \ldots + C_{m-1}^{k-1} p^{k-1} (1-p)^{m-k} + \ldots + C_{m-1}^{m-1} p^{m-1}\right] +$$
$$+ m(m-1)p^2\left[(1-p)^{m-2} + \ldots + C_{m-2}^{k-2} p^{k-2} (1-p)^{m-k} + C_{m-2}^{m-2} p^{m-2}\right],$$

$$M(X^2) = mp[p + (1-p)]^{m-1} + m(m-1)p^2[p + (1-p)]^{m-2}.$$

de unde rezultă

$$D^2(X) = mp + m(m-1)p^2 - m^2 p^2 = mp(1-p).$$

Interpretare. Considerăm un experiment care constă în efectuarea a m probe independente, identice, care pot da fiecare ca rezultat un „succes“ sau un „insucces“. Presupunem că probabilitatea de a obţine un „succes“ într-o probă este p, $0 < p < 1$. Atunci probabilitatea de a obţine k succese în m probe independente este $C_m^k p^k (1-p)^{m-k}$, iar variabila aleatoare care dă numărul de „succese“ în cele m probe este o variabilă cu repartiţie binomială $B(m, p)$.

Observaţie importantă. Repartiţia binomială $B(1, p)$ se numeste *repartiţie Bernoulli de parametru p*, $0 < p < 1$. O variabilă aleatoare cu repartiţie Bernoulli de parametru p este modelul unei caracteristici calitative cu două valori posibile (Da / Nu, Succes / Insucces, Piesă bună / Rebut etc.).

4.6.2. Schema Poisson (Schema celor m urne)

Experimentul aleator care este modelul acestei scheme este următorul: considerăm m urne conţinând bile albe şi negre. Urna i conţine a_i bile albe şi b_i bile negre, $i = 1, ..., m$. Se extrage la întâmplare câte o bilă din fiecare urnă.

a) Să construim *câmpul de probabilitate* asociat acestui experiment.

Notăm cu U_i mulţimea celor $(a_i + b_i)$ bile albe şi negre din urna i. Câmpul de probabilitate $(E, \mathscr{P}(E), P)$ este dat de mulţimea totală E şi probabilitatea P:

$$E = \{(e_1, ..., e_m) \mid e_i \in U_i,\ i = 1, ..., m\}$$

Numărul evenimentelor elementare este $(a_1 + b_1)(a_2 + b_2)...(a_m + b_m)$.

$$P : \mathscr{P}(E) \to [0, 1]$$

$$P((e_1, ..., e_m)) = \frac{1}{(a_1 + b_1)(a_2 + b_2)...(a_m + b_m)},\quad \forall (e_1, ..., e_m) \in E.$$

b) Să calculăm acum probabilitatea de a obţine k bile albe şi $(m - k)$ bile negre în acest experiment. Notăm cu $A_{i_1,...,i_k}$ evenimentul ca bilele extrase din urnele $U_{i_1}, ..., U_{i_k}$ să fie albe, iar celelalte negre. Atunci

$$P(A_{i_1,...,i_k}) = \frac{a_{i_1} a_{i_2} ... a_{i_k} b_{i_{k+1}} ... b_{i_m}}{(a_1 + b_1)(a_2 + b_2)...(a_m + b_m)}.$$

Notând $a_j / (a_j + b_j) = p_j$, putem scrie

$$P(A_{i_1,...,i_k}) = p_{i_1} p_{i_2} ... p_{i_k} (1 - p_{i_{k+1}})...(1 - p_{i_m}).$$

Fie A evenimentul care constă în obţinerea a k bile albe şi $(m - k)$ bile negre, indiferent de provenienţă. Atunci

$$A = \bigcup_{i_1,...,i_k} A_{i_1,...,i_k},$$

reuniunea făcându-se după toate submulţimile de k indici diferiţi ce se pot forma din $\{1, ..., m\}$. Cum elementele reuniunii sunt evenimente incompatibile (disjuncte), rezultă $P(A) = \sum_{i_1,...,i_k} P(A_{i_1,...,i_k})$. Suma obţinută este egală cu coeficientul lui x^k din polinomul $p(x) = (p_1 x + 1 - p_1)(p_2 x + 1 - p_2) ... (p_m x + 1 - p_m)$.

Exemplul 9

Pe masă se află 4 cutii de chibrituri. Prima cutie conţine 50 de chibrituri dintre care 5 sunt defecte, a doua cutie conţine 48 de chibrituri dintre care 4 sunt defecte, a treia cutie conţine 47 de chibrituri dintre care 5 sunt defecte, a patra cutie conţine 51 de chibrituri dintre care 6 sunt defecte. O persoană scoate câte un chibrit din fiecare cutie. Notăm cu X variabila aleatoare care dă numărul de chibrituri defecte ce pot să rezulte în acest experiment. Vom scrie explicit valorile acestei variabile şi probabilităţile acestora şi vom calcula media şi dispersia acestei variabile.

Problema se înscrie în schema Poisson, cu $m = 4, p_1 = \frac{5}{50}, p_2 = \frac{4}{48}, p_3 = \frac{5}{47}$, $p_4 = \frac{6}{51}$. Scriem polinomul asociat acestei scheme:

$$p(x) = (0,1x + 0,9)(0,083x + 0,917)(0,106x + 0,894)(0,117x + 0,883) \text{ sau}$$

$$p(x) = 0,0001x^4 + 0,0038x^3 + 0,0497x^2 + 0,2949x + 0,6515.$$

Obţinem probabilităţile evenimentelor cerute:

– nici un chibrit defect: $P(X = 0) = 0,6515$;
– un chibrit defect: $P(X = 1) = 0,2949$;
– două chibrite defecte: $P(X = 2) = 0,0497$;
– trei chibrite defecte: $P(X = 3) = 0,0038$;
– patru chibrite defecte: $P(X = 4) = 0,0001$.

Media şi dispersia variabilei X sunt:

$$M(X) = 0 \cdot 0,6515+1 \cdot 0,2949 + 2 \cdot 0,0497 + 3 \cdot 0,0038 + 4 \cdot 0,0001 = 0,4061;$$

$$D^2(X) = (0 \cdot 0,6515 + 1 \cdot 0,2949 + 2^2 \cdot 0,0497 + 3^2 \cdot 0,0038 + 4^2 \cdot 0,0001) - 0,4061^2 = 0,5295^2 - 0,4061^2 = 0,11545.$$

Celelalte caracteristici numerice sunt:

$$Mo(X) = 0;\ Me(X) = 0;\ D(X) = 0,33978;\ A(X) = 4.$$

Se remarcă gruparea (poziţionarea) valorilor lui X cu predilecţie către 0 şi 1 (repartiţia de probabilitate este puternic asimetrică).

4.6.3. Schema hipergeometrică (Schema extragerilor fără revenire)

a) *Experimentul aleator, câmpul de probabilitate* şi *formula extragerilor fără revenire.*

Experimentul aleator care este modelul acestei scheme este următorul: Considerăm o urnă care conţine a bile albe şi b bile negre. Se fac m extrageri fără revenirea bilei extrase înapoi în urnă, aşa încât $m \leq a$ şi $m \leq b$.

1) Să construim câmpul de probabilitate asociat acestui experiment.

Notăm cu U mulţimea celor $(a + b)$ bile albe şi negre din urnă şi presupunem că bilele se extrag succesiv, fără revenire. Atunci

$$E = \{(e_1, ..., e_m) \mid e_1 \in U, e_2 \in U - \{e_1\}, ..., e_m \in U - \{e_1, ..., e_{m-1}\}\}.$$

Numărul elementelor lui E este A_{a+b}^m. Probabilitatea $P : \mathcal{P}(E) \to [0, 1]$ este dată de $P((e_1, ..., e_m)) = \frac{1}{A_{a+b}^m}$, $\forall (e_1, ..., e_m) \in E$.

2) Să calculăm acum probabilitatea de a obţine k bile albe şi $(m - k)$ bile negre în acest experiment. Notăm cu $A_{i_1, ..., i_k}$ evenimentul ca bilele de la extragerile $i_1, ..., i_k$ să fie albe, iar celelalte negre. Atunci

$$P(A_{i_1, ..., i_k}) = \frac{A_a^k \cdot A_b^{m-k}}{A_{a+b}^m}.$$

Fie A evenimentul care constă în obţinerea a k bile albe şi $(m - k)$ bile negre, indiferent de poziţii.

Atunci $A = \bigcup_{i_1,\dots,i_k} A_{i_1,\dots,i_k}$, reuniunea făcându-se după toate submulţimile de k indici diferiţi ce se pot forma din $\{1, \dots, m\}$, de unde rezultă $P(A) = C_m^k \dfrac{A_a^k \cdot A_b^{m-k}}{A_{a+b}^m}$.

Prin calcul se obţine $P(A) = \dfrac{m!\, a!\, b!\, (a+b-m)!}{k! \cdot (m-k)!\, (a-k)!\, (b-m+k)!\, (a+b)!}$, sau $P(A) = \dfrac{C_a^k \cdot C_b^{m-k}}{C_{a+b}^m}$. Aceasta se numeşte *formula extragerilor fără revenire.*

Observaţie importantă. Remarcăm faptul că se obţine aceeaşi valoare pentru $P(A)$ dacă se presupune că cele m bile se extrag *simultan* din urnă. Atunci

$$E = \{(e_1, \dots, e_m) \mid e_i \in U, i = 1, \dots, m, e_i \neq e_j \text{ pentru } i \neq j\}.$$

Numărul elementelor acestei mulţimi este C_{a+b}^m, probabilitatea unui eveniment elementar este $\dfrac{1}{C_{a+b}^m}$ şi se obţine direct formula $P(A) = \dfrac{C_a^k \cdot C_b^{m-k}}{C_{a+b}^m}$. Deci probabilitatea de a obţine k bile albe şi $(m - k)$ bile negre în acest experiment nu depinde de modul în care se fac cele m extrageri fără revenire (succesiv sau simultan).

b) *Variabila aleatoare* care dă numărul de bile albe ce pot fi obţinute în acest experiment este

$$X : E \to \{0, 1, \dots m\},$$

cu
$$P(X = k) = \frac{C_a^k \cdot C_b^{m-k}}{C_{a+b}^m}, \; k = 0, 1, \dots m$$

Faptul că $P(X = 0) + P(X = 1) + \dots + P(X = m) = 1$ rezultă din egalitatea combinatorială cunoscută $\sum_{k=0}^{m} C_a^k \cdot C_b^{m-k} = C_{a+b}^m$.

Spunem că variabila aleatoare astfel construită este o variabilă cu *repartiţie hipergeometrică* $H(m;\, a,\, b)$. Întâlnim asemenea variabile aleatoare în practică, de exemplu în controlul de calitate (se controlează un lot ce conţine a piese bune şi b rebuturi, prin verificarea calităţii a m piese extrase aleator din lot).

1) Media acestei variabile aleatoare se calculează astfel:

$$M(X) = 0 \cdot \frac{C_a^0 \cdot C_b^m}{C_{a+b}^m} + 1 \cdot \frac{C_a^1 \cdot C_b^{m-1}}{C_{a+b}^m} + \dots + m \cdot \frac{C_a^m \cdot C_b^0}{C_{a+b}^m}.$$

Printr-un calcul combinatorial, obţinem $M(X) = \dfrac{am}{(a+b)}$.

Notând $p = \dfrac{a}{a+b}$, putem scrie $M(X) = mp$.

Observaţie. În experimentul de mai sus am presupus că $m \le a$ şi $m \le b$. Dacă renunţăm la aceste ipoteze, variabila aleatoare care dă numărul de bile albe ce pot fi obţinute în acest experiment este

$$X: E \to \{\max(0, m - b), \max(0, m - b) + 1, ..., \min(a, m)\}$$

şi se poate demonstra că este adevărată relaţia $\displaystyle\sum_{k=\max(0,\, m-b)}^{\min(a,\, m)} \frac{C_a^k \cdot C_b^{m-k}}{C_{a+b}^m} = 1.$

Exemplul 10

Se cercetează calitatea unui lot de 500 piese. Fabricantul spune că probabilitatea apariţiei unei piese defecte în procesul de fabricaţie este de 0,01, adică numărul de piese defecte din lot ar fi de 5. Beneficiarul decide să controleze 5 piese alese la întâmplare din acest lot. Variabila aleatoare care dă numărul de piese defecte găsite în cadrul controlului este o variabilă cu repartiţie hipergeometrică H(5;5,495).

Valorile acestei variabile sunt $\{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ şi probabilităţile acestora sunt

$$P(X = k) = \frac{C_5^k \cdot C_{495}^{5-k}}{C_{500}^5}, k = 0, 1, \dots, 5.$$

de unde obţinem probabilităţile evenimentelor cerute.

k	0	1	2	3	4	5
$P(X = k)$	0,95	0,048	$7{,}87 \cdot 10^{-4}$	$2{,}395 \cdot 10^{-6}$	$1{,}94 \cdot 10^{-9}$	$0{,}39 \cdot 10^{-11}$

Numărul mediu de piese defecte este $M(X) = 5 \times 5/500 = 0{,}05$.

O persoană urmează să dea trei telefoane la trei numere diferite. Fiecare număr este format o singură dată. Notăm cu A_i evenimentul ca la apelul i să nu primească răspuns ($i = 1, 2, 3$). Să se scrie evenimentele: „primeşte răspuns la toate apelurile“, „la cel mult un apel nu primeşte răspuns“, „la cel puţin un apel nu primeşte răspuns“, „la un singur apel nu primeşte răspuns“.

Într-o urnă sunt bile de trei culori: albe, negre şi galbene. Se extrag din urnă 3 bile, fără a pune înapoi bila extrasă. Notând cu A, N, G obţinerea unei bile albe / negre / galbene (respectiv), să se scrie evenimentele: „se extrage câte o bilă de fiecare culoare“, „se extrag cel puţin două bile albe“, „se extrag cel mult trei bile negre“, „se extrag trei bile de aceeaşi culoare“.

Se consideră experimentul aleator care constă în aruncarea simultană a doua monede diferite, pentru care notăm cu E_1, respectiv E_2 apariţia efigiei pe prima (a doua) monedă şi cu V_1, respectiv V_2 apariţia valorii corespunzatoare fiecarei monede. Să se scrie evenimentele elementare asociate acestui experiment şi să se construiască evenimentele: „apariţia a cel puţin uneia dintre valori“, „apariţia a cel mult uneia dintre valori“.

Se consideră experimentul aleator care constă în aruncarea simultană a două zaruri. Fie A evenimentul „numărul punctelor de pe al doilea zar este egal cu de două ori numărul punctelor de pe primul zar“ şi fie B evenimentul „pe primul zar se obţine numărul 2“. Să se arate că $(A \cap B)^C = A^C \cup B^C$.

Se consideră un circuit electric conţinând o sursă şi 4 becuri montate în paralel. Notăm cu A_i evenimentul ca becul i să fie ars. Să se scrie evenimentele: „prin circuit trece curent electric", „două becuri sunt arse", „cel puţin trei becuri sunt arse".

Se consideră experimentul aleator ce constă în ordonarea mulţimii $\{1, 2, ..., n\}$, adică plasarea numerelor 1, 2, ..., n pe n poziţii consecutive. Să se scrie câmpul de probabilitate asociat experimentului şi să se calculeze probabilitatea ca numerele 1, 2, 3 să stea la rând şi în ordine crescătoare.

Se consideră o mulţime formată din m băieţi şi n fete care se aşează în mod aleator pe $(m + n)$ scaune puse într-un şir. Să se construiască câmpul de probabilitate asociat experimentului şi să se calculeze probabilitatea ca pe primul scaun să se aşeze o fată, iar pe ultimul scaun un băiat.

Se dau în plan trei puncte coliniare M_1, M_2, M_3 şi încă patru puncte M_4, M_5, M_6, M_7 aşa încât singurele puncte coliniare să fie M_1, M_2, M_3 (exceptând coliniaritatea oricăror două puncte). Se construiesc triunghiuri cu vârfurile în aceste puncte. Să se scrie câmpul de probabilitate asociat experimentului.

Se repartizează trei profesori de matematică la nouă clase (3 clase a IX-a, 3 clase a X-a, 3 clase a XI-a), dându-se fiecăruia câte trei clase. Care este probabilitatea ca un profesor să primească numai clase a X-a?

Se consideră două loterii diferite, cu numerele 1, 2, ..., n. Cum trebuie să fie n pentru ca probabilitatea de a extrage 5 numere la prima loterie să fie mai mică decât probabilitatea de a extrage 7 numere la a doua loterie?

Se consideră două urne: U_1 – conţinând 2 bile albe şi 3 bile negre şi U_2 – conţinând 3 bile albe şi 4 bile negre. Se extrage câte o bilă din fiecare urnă. Să se scrie evenimentele elementare ale acestui experiment aleator şi să se determine probabilităţile lor. Se notează cu A evenimentul „din prima urnă se obţine o bilă albă" şi cu B evenimentul „din a doua urnă se obţine o bilă neagră". Să se arate că A şi B sunt evenimente independente.

Într-un lot format din 1 000 de servicii de cafea există 5 servicii cu defecte şi anume: 2 servicii au câte o cană ciobită şi 3 servicii au câte o farfurioţă ciobită. Se controlează la întâmplare un serviciu din lot. Să se scrie evenimentele elementare ale acestui experiment aleator şi să se determine probabilităţile lor. Ştiind că s-a găsit un serviciu defect, care e probabilitatea ca el să conţină o cană ciobită?

Doi trăgători trag simultan asupra unei ţinte. Probabilităţile ca ei să nimerească ţinta sunt, respectiv, 0,7 şi 0,85. Să se calculeze probabilitatea ca ţinta să fie atinsă de cel puţin un trăgător.

O urnă conţine n bile numerotate 1, 2, ..., n. Din această urnă se extrage o bilă. Să se scrie câmpul de probabilitate asociat experimentului. Să se calculeze probabilitatea ca numărul bilei extrase să fie un pătrat perfect. Să se calculeze probabilitatea ca numărul bilei extrase să dea restul 2 la împărţirea cu 3.

Se administrează acelaşi tratament la 10 pacienţi, probabilitatea de a obţine o ameliorare fiind de 1/3. Să se calculeze probabilitatea de a obţine o ameliorare la cel puţin 7 pacienţi.

Pe masă sunt trei cutii conţinând bomboane roşii şi verzi. În prima cutie există 2 bomboane verzi, în a doua o bomboană verde, iar în a treia 3 bomboane verzi. Un copil scoate din fiecare cutie câte o bomboană. Să se scrie câmpul de probabilitate asociat experimentului şi să se calculeze probabilitatea de a obţine cel puţin două bomboane roşii.

Se aruncă un zar de 10 ori. Care este probabilitatea obţinerii de 6 ori a unei feţe cu un număr mai mic sau egal cu 3?

La o loterie sunt aşezate în urnă toate numerele întregi de la 1 la 45. Din urnă se extreg pe rând 6 numere care sunt declarate „câştigătoare". Să se calculeze probabilitatea ca trei dintre numerele $\{1, 22, 14, 37, 19, 40\}$ aflate pe un bilet de loterie să fie declarate câştigătoare.

Din cifrele 0, 1, 2, 3 se scriu numere naturale nenule astfel încât în fiecare astfel de număr orice cifră să intre cel mult o dată. Să se scrie câmpul de probabilitate asociat experimentului. Să se construiască variabila aleatoare „suma cifrelor numărului format" şi să se calculeze media sa.

Un grup de 20 de elevi şi 3 profesori au plecat într-o excursie. Ajunşi la munte, se hotărăsc să joace o partidă de fotbal cu colegii lor din liceul local. Excursioniştii îşi formează echipa în mod aleator. Să se construiască variabila aleatoare ce dă numărul de profesori ce pot să apară în echipa oaspeţilor şi să se calculeze media ei.

O mie de persoane răspund în scris la o întrebare cu caracter publicitar, iar dintre acestea 890 de persoane răspund corect. La tragerea la sorţi organizată de agentul publicitar se extrag 5 scrisori, se verifică corectitudinea răspunsurilor, iar expeditorul este declarat câştigător dacă răspunsul conţinut în scrisoare este corect. Să se stabilească valorile şi repartiţia de probabilitate a variabilei aleatoare X care dă numărul persoanelor care pot fi declarate câştigătoare (al scrisorilor extrase care conţin răspunsul corect la întrebare). Să se calculeze probabilitatea ca cel mult 2 dintre cele 5 scrisori extrase să fie câştigătoare.

Se consideră experimentul aleator al aruncării a două zaruri de culori diferite. Notăm cu i numărul obţinut pe primul zar, cu j numărul obţinut pe al doilea zar şi cu X variabila aleatoare care ia valorile $|i - j|$, $i, j = 1, ..., 6$. Să se stabilească valorile şi repartiţia de probabilitate ale variabilei aleatoare X.

De-a lungul unei străzi sunt trei chioşcuri de ziare. Probabilitatea ca o persoană să găsească ziarul dorit este aceeaşi pentru fiecare chioşc – şi anume $p = 0,7$. Notăm cu $\{X = 1\}$ evenimentul ca clientul să găsească ziarul la primul chioşc, cu $\{X = 2\}$ evenimentul să-l găsească la al doilea chioşc, cu $\{X = 3\}$ evenimentul să-l găsească la al treilea chioşc şi cu $\{X = 0\}$ evenimentul ca clientul să nu găsească ziarul dorit la niciunul dintre cele trei chioşcuri. Să se stabilească repartiţia de probabilitate a variabilei aleatoare X astfel construite.

Statistica matematică este acea ramură a matematicii care se ocupă cu analiza şi interpretarea datelor statistice de provenienţă aleatoare, esenţial fiind faptul că se porneşte de la un model matematic, probabilist al fenomenului care a generat datele.

5.1. Colectarea datelor statistice

În paragraful 3 am prezentat modalităţi de descriere a datelor statistice, fără a evidenţia de unde a provenit caracterul aleator al acestora. În continuare, luăm în discutie două modele matematice pentru obţinerea datelor statistice cu caracter aleator: variabilele aleatoare şi eşantioanele aleatoare.

5.1.1. Obţinerea datelor statistice prin observarea variabilei aleatoare de interes

Fie X o variabilă aleatoare cu mulţimea valorilor posibile $\{a_1, \ldots, a_r\}$ şi cu repartiţia de probabilitate necunoscută $\{P(X = a_i),\ i = 1, \ldots, r\}$. Se fac n observaţii independente asupra acestei variabile şi se obţin datele statistice $\{x_1, \ldots, x_n\}$, cu repartiţia de frecvente $\{n_i/n,\ i = 1, \ldots, r\}$.

Frecvenţele n_i/n, $i = 1, \ldots, r$ sunt estimaţii ale repartiţiei de probabilitate a lui X.

valori	a_1	...	a_r
rep. de prob.	$P(X = a_1)$	...	$P(X = a_r)$
rep. de frecv.	n_1/n	...	n_r/n

Exemplul 1

Considerăm din nou problema eficienţei unui nou tratament. Răspunsul unui bolnav la acest nou tratament poate fi modelat printr-o variabilă aleatoare cu valorile a_1 = „ameliorat“, a_2 = „staţionar“, a_3 = „înrăutăţit“ şi cu repartiţia de probabilitate necunoscută,

$$\{P(X = a_i),\ i = 1, 2, 3 \mid \sum_{i=1}^{3} P(X = a_i) = 1\}.$$

Se fac observaţii asupra a 100 de bolnavi trataţi în mod independent, înregistrându-se 80 de ameliorări, 15 situaţii în care starea bolnavului a rămas staţionară şi 5 cazuri în care starea bolnavului s-a înrăutăţit.

Repartiţia de frecvenţa obţinută este

răspuns	a_1	a_2	a_3
frecvenţa	0,80	0,15	0,05

Pe baza datelor statistice, estimăm repartiţia de probabilitate astfel:

$$P(X = a_1) = 0{,}80;\quad P(X = a_2) = 0{,}15;\quad P(X = a_3) = 0{,}05.$$

5.1.2. Obţinerea datelor statistice prin observarea unui eşantion aleator

Populaţia este o mulţime finită de unităţi, $\Omega = \{u_1, \ldots, u_N\}$, numărul N al unităţilor fiind foarte mare. Din această populaţie se extrage în mod aleator un *eşantion* de volum n, notat $(u_1, \ldots, u_n)$. Construcţia eşantionului poate fi făcută în mai multe moduri, în funcţie de aceasta putându-se calcula probabilitatea de obţinere a eşantioanelor n – dimensionale.

• Pentru o *alegere secvenţială* a celor n unităţi, un eşantion $(u_1, \ldots, u_n)$ se obţine astfel: Se alege, la întâmplare, unitatea u_1 din populaţia Ω, apoi se alege, la întâmplare, unitatea u_2 din populaţia rămasă $\Omega - \{u_1\}$ şi aşa mai departe. Rezultă că probabilitatea de a obţine un asemenea eşantion este

$$P((u_1, \ldots, u_n)) = \frac{1}{N(N-1)\ldots(N-n+1)} = \frac{1}{A_N^n}$$

• Pentru o *alegere simultană* a celor n unităţi, se obţine un eşantion $(u_1, \ldots, u_n)$ format din unităţi distincte alese la întâmplare, în acelaşi moment, din populaţia Ω (adică $u_j \neq u_k$ pentru $j \neq k$). Probabilitatea de a obţine un asemenea eşantion este $P((u_1, \ldots, u_n)) = \dfrac{1}{C_N^n}$.

Caracteristica de interes a populaţiei este o funcţie care poate lua r valori distincte $X : \Omega \to \{a_1, \ldots, a_r\}$ şi notăm cu N_i numărul unităţilor populaţiei cu proprietatea că $X(u) = a_i$, $i = 1, \ldots, r$. Valorile $\{N_1, N_2, \ldots, N_r\}$ sunt necunoscute.

Se observă că $\sum_{i=1}^{r} N_i = N$.

Evaluând caracteristica X pentru toate unităţile selectate obţinem *mulţimea observaţiilor*, notată $\{x_1, \ldots, x_n\}$, unde $x_1 = X(u_1), \ldots, x_n = X(u_n)$.

Notăm cu n_i numărul de apariţii ale valorii a_i în această mulţime, $i = 1, \ldots, r$. Apare astfel o repartiţie de frecvenţe pentru eşantionul de sondaj,

$$\left\{ \frac{n_1}{n}, \frac{n_2}{n}, \ldots, \frac{n_r}{n} \,\middle|\, \sum_{i=1}^{r} \frac{n_i}{n} = 1 \right\}.$$

Frecventele n_i/n, $i = 1, \ldots, r$ sunt estimaţii ale frecvenţelor necunoscute N_i/N, $i = 1, \ldots, r$ corespunzatoare întregii populaţi Ω.

5.2. Estimarea unei proporţii printr-un sondaj statistic

Considerăm o populaţie finita $\Omega = \{u_1, \ldots, u_N\}$ şi o caracteristică de interes X care poate lua doar două valori, codificate prin 1 şi 0, aşa încât

$$X = \Omega \to \{1, 0\},$$

iar numărul unităţilor lui Ω pentru care $X(u) = 1$ este N_0 şi numărul unităţilor lui Ω pentru care $X(u) = 0$ este $N - N_0$.

Parametrul de interes este proporţia unităţilor care dau valoarea 1,

$$P = \frac{N_0}{N}.$$

Mulţimea eşantioanelor aleatoare de volum n extrase din Ω prin alegerea simultană a n unităţi distincte dintre cele N ale populaţiei este

$$E = \{(u_1, \ldots, u_n \mid u_i \in \Omega, i = 1, \ldots, n, u_i \neq u_j, \text{ pentru } i \neq j\},$$

iar probabilitatea de obţinere a unui eşantion este

$$P((u_1, \ldots, u_n)) = \frac{1}{C_N^n}.$$

Notam cu X_i, $i = 1, \ldots, n$ variabilele aleatoare care dau valorile lui X pentru unităţile din eşantion:

$$X_i = \begin{cases} 1, \text{ dacă } X(u_i) = 1 \\ 0, \text{ dacă } X(u_i) = 0 \end{cases}, \; i = 1, \ldots, n.$$

Variabila aleatoare $\sum_{i=1}^{n} X_i$ dă numărul unităţilor din eşantion pentru care se obţine valoarea 1 şi ea are o repartiţie hipergeometrică $H(n,N_0,N - N_0)$. Rezultă că repartiţia sa de probabilitate este dată de:

$$P(\sum_{i=1}^{n} X_i = n_0) = \frac{C_{N_0}^{n_0} \cdot C_{N-N_0}^{n-n_0}}{C_N^n},\ n_0 = 0, 1, \ldots, n,$$

iar media sa este

$$M(\sum_{i=1}^{n} X_i) = nP,$$

de unde rezulta că

$$M(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i) = P.$$

Dacă numărul de unităţi din eşantion pentru care se obţine valoarea 1 este egal cu n_0, atunci estimaţia lui P este

$$p = \frac{n_0}{n}.$$

Spunem că estimaţia aceasta este nedeplasată, căci media sa este egală cu P, parametrul ce trebuia estimat.

Exemplul 2

Se face un studiu statistic pentru estimarea proporţiei firmelor din Bucureşti care raportează profit pe o anumită lună. Să presupunem că în Bucureşti există 400 000 de firme, dintre care 4 000 se aleg în mod simultan pentru a forma un eşantion aleator. Dintre firmele selectate, 3 500 raportează că au obţinut profit, iar 500 raportează „profit zero" sau chiar pierderi. O estimaţie a proporţiei firmelor din Bucureşti care raportează profit este

$$p = \frac{3500}{4000} = \frac{7}{8}.$$

Aceasta înseamnă că numărul total, estimat, al firmelor din Bucureşti care raportează profit este egal cu 400 000 · 7/8 = 350 000.

Probleme rezolvate

1. Se face o evaluare statistică a riscului de infarct de miocard la femeile de vârstă cuprinsă între 50 şi 59 de ani, care locuiesc în Bucureşti.

a) Care este modelul probabilist care poate fi folosit pentru a descrie apariţia sau neapariţia infarctului la o persoană, într-un interval de un an?

b) Descrieţi o modalitate de culegere a datelor statistice şi prezentaţi metoda de estimare a probabilităţii de apariţie a unui infarct de miocard la o persoană, într-un interval de un an.

c) Utilizând modelul construit, evaluaţi probabilitatea ca cel mult 3 din 1000 de femei de vârstă cuprinsă între 50 şi 59 de ani să facă un infarct într-o perioadă de 5 ani.

R: Modelul probabilist care descrie apariţia sau neapariţia infarctului la o persoană într-un interval de un an este dat de o variabilă aleatoare X, cu repartiţie

Bernoulli, $B(1; p)$. Evenimentul $\{X = 1\}$ revine la faptul că persoana face infarct, iar evenimentul $\{X = 0\}$ înseamnă că persoana nu a face infarct. Avem

$$P(X = 1) = p, P(X = 0) = 1 - p.$$

Valoarea necunoscută p trebuie estimată din date statistice.

Se aleg, la întâmplare, n medici de familie şi se înregistrează numărul femeilor de vârstă cuprinsă între 50 şi 59 de ani înscrise la aceşti medici şi numărul celor care au făcut infarct în ultimul an. De exemplu, se aleg 6 medici de familie, câte unul din fiecare sector al Bucureştiului, iar datele se înregistrează în următorul tabel:

medic	1	2	3	4	5	6	total
nr. persoane	175	200	185	130	180	130	1000
nr. infarcturi	0	1	0	0	1	0	2

Repartiţia de frecvenţe pentru apariţia sau neapariţia infarctului la o persoană este dată de valorile

$$\frac{n_1}{n} = \frac{2}{1000} = 0{,}002; \quad \frac{n_2}{n} = \frac{998}{1000} = 0{,}998.$$

Rezultă că putem să-l estimăm pe p prin $2/1000 = 0{,}002$, deci modelul considerat este dat de variabila aleatoare X cu repartiţie Bernoulli, $B(1; 0{,}002)$.

În continuare ne interesează o nouă variabilă aleatoare, care descrie apariţia sau neapariţia infarctului la o persoană într-un interval de 5 ani. O notăm cu Y şi identificăm repartiţia ei ca fiind $B(1; 0{,}01)$.

Variabila aleatoare Z care descrie numărul de infarcte ce pot să apară într-un lot de 1000 de femei de vârstă cuprinsă între 50 şi 59 de ani într-o perioadă de 5 ani are o repartiţie binomială $B(1000; 0{,}01)$. Evenimentul ca cel mult 3 din 1000 de femei de vârstă cuprinsă între 50 şi 59 de ani să facă un infarct într-o perioadă de 5 ani se scrie ca $\{Z \le 3\} = \{Z = 0\} \cup \{Z = 1\} \cup \{Z = 2\} \cup \{Z = 3\}$, iar probabilitatea sa este

$$P\{Z \le 3\} = \sum_{k=0}^{3} C_{1000}^{k} (0{,}01)^k (0{,}99)^{1000-k}.$$

Utilizând funcţia BINOMDIST din EXCEL, obţinem valoarea numerică

$$P(Z \le 3) = 0{,}01.$$

2. Directorul unei maternităţi vrea să înfiinţeze un salon pentru nou-născuţii subponderali (cu greutate între 1800 grame şi 2500 grame) şi vrea să ştie câte paturi ar trebui să aloce acestui salon. Din experienţa medicală se ştie că un nou-născut subponderal trebuie supravegheat în spital timp de 4 zile.

a) Care este modelul probabilist care poate fi folosit pentru a descrie variabila „numărul de nou-născuţi subponderali, într-un interval de 4 zile"?

b) Descrieţi o modalitate de culegere a datelor statistice şi prezentaţi metoda de estimare a parametrilor modelului.

c) Care este cel mai mic număr x de paturi necesare, aşa încât probabilitatea ca numărul nou-născuţilor subponderali dintr-un interval de 4 zile să depăşească numărul paturilor să fie mai mică sau egală cu 0,05?

R: Notăm cu p probabilitatea de apariție a unui nou-născut subponderal, $0 \leq p \leq 1$ și cu m numărul de nou-născuți într-un interval de 4 zile. Modelul probabilist folosit este dat de o variabilă aleatoare X, cu o repartiție binomială $B(m, p)$.

Valorile necunoscute p și m trebuie estimate din date statistice. Se aleg, la întâmplare, n perioade de câte 4 zile din anul anterior și se identifică numărul de nou-născuți, respectiv de nou-născuți subponderali înregistrați în respectivele intervale. De exemplu, se aleg 10 intervale de câte 4 zile, iar datele statistice sunt trecute în următorul tabel:

Interval 4 zile	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	total
Nr. nou-născuți	25	23	27	26	23	29	22	25	27	23	250
Nr. nou-născuți subponderali	3	5	4	1	3	5	0	1	2	1	25

Repartiția de frecvențe pentru apariția sau neapariția unui nou-născut subponderal este dată de valorile

$$\frac{n_1}{n} = \frac{25}{250} = 0{,}1; \quad \frac{n_2}{n} = \frac{225}{250} = 0{,}9.$$

Rezultă că putem să-l estimăm pe p prin $25/250 = 0{,}1$.

Pe de altă parte, numărul mediu de nou-născuți într-un interval de 4 zile este de $250/10 = 25$. Putem deci să-l estimăm pe m prin $250/10 = 25$.

Așadar, modelul probabilist care poate fi folosit pentru a descrie variabila „numărul de nou-născuți subponderali, într-un interval de 4 zile" este dat de o variabilă aleatoare X, cu repartiție $B(25;0{,}1)$. Probabilitățile valorilor acestei variabile se calculează după formula

$$P\{X = k\} = C_{25}^{k}(0{,}1)^k(0{,}9)^{25-k},\ k = 0, 1, \ldots, 25.$$

Pentru a răspunde la ultima întrebare, evaluăm, pe rând, probabilitățile $P(X > x)$ pentru $x = 0, 1, \ldots$, oprindu-ne la acea valoare x pentru care $P(X > x) \leq 0{,}05$.

$$P(X > 0) = 1 - P(X = 0) = 1 - C_{25}^{k}(0{,}1)^0(0{,}9)^{25} = 0{,}928;$$

$$P(X > 1) = 1 - P(X \leq 1) = 1 - \sum_{k=0}^{1} C_{25}^{k}(0{,}1)^k(0{,}9)^{25-k} = 0{,}729;$$

$$P(X > 2) = 1 - P(X \leq 2) = 1 - \sum_{k=0}^{2} C_{25}^{k}(0{,}1)^k(0{,}9)^{25-k} = 0{,}463;$$

$$P(X > 3) = 1 - P(X \leq 3) = 1 - \sum_{k=0}^{3} C_{25}^{k}(0{,}1)^k(0{,}9)^{25-k} = 0{,}236;$$

$$P(X > 4) = 1 - P(X \leq 4) = 1 - \sum_{k=0}^{4} C_{25}^{k}(0{,}1)^k(0{,}9)^{25-k} = 0{,}098;$$

$$P(X > 5) = 1 - P(X \leq 5) = 1 - \sum_{k=0}^{5} C_{25}^{k}(0{,}1)^k(0{,}9)^{25-k} = 0{,}033.$$

Rezultă că cel mai mic număr de paturi necesare este $x = 5$.

1. Fie funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definită prin $f(x) = \begin{cases} 3x - 2, \text{ dacă } x \le 2 \\ x^2, \text{ dacă } x > 2 \end{cases}$. Să se arate că f este bijectivă şi să se calculeze inversa sa.

2. Să se arate că dacă n şi k sunt numere naturale cu $n \ge k + 3$, atunci coeficienţii binomiali C_n^k, C_n^{k+1}, C_n^{k+2}, C_n^{k+3} nu pot fi termenii consecutivi ai unei progresii aritmetice.

3. Dacă $a + b = 2\pi$, arătaţi că $\sin a + \sin b = 0$ şi apoi calculaţi

$$S = \sin\frac{\pi}{36} + \sin\frac{2\pi}{36} + \ldots + \sin\frac{70\pi}{36} + \sin\frac{71\pi}{36},$$

unde $\frac{\pi}{36}, \frac{2\pi}{36}, \ldots, \frac{70\pi}{36}, \frac{71\pi}{36}$ sunt numere în progresie aritmetică.

4. Două laturi ale unui dreptunghi se află pe dreptele de ecuaţii $3x - 2y - 5 = 0$, $2x + 3y + 7 = 0$ şi unul dintre vârfuri se află în punctul $A(-2, 1)$. Calculaţi aria dreptunghiului.

5. O persoană depune anual la bancă o sumă de S_0 unităţi bancare în regim de depozite la termen (cu dobândă compusă) şi ridică după 2 ani o sumă egală cu m unităţi bancare. Care este valoarea dobânzii unitare (discuţie după m)? Cât a fost dobânda unitară oferită de bancă în cazul $S_0 = 100$ unităţi bancare şi $m = 231$ unităţi bancare?

1. Fie funcţia $f_m : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definită prin $f_m(x) = \begin{cases} -x^2 + mx + 1, \text{ dacă } x \le 0 \\ x + 1, \text{ dacă } x > 0 \end{cases}$,

unde m este un parametru real. Să se determine valorile lui m pentru care funcţia f_m este surjectivă, injectivă, respectiv inversabilă. În cazul în care f_m este inversabilă să se determine inversa sa.

2. Să se arate că numărul complex $z = \frac{2+i}{2-i}$ are modulul egal cu 1, dar nu este rădăcină de ordinul n a unităţii pentru nici un număr natural n.

3. a) Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sin 3x + \cos 9x$. Aflaţi perioada principală a funcţiei f.

b) Dacă $\sin^n x + \cos^n x = 1$, oricare ar fi $x \in \mathbb{R}$, arătaţi că $n = 2$.

4. În planul cartezian fie punctele $A(1, 3)$ şi $B(4, 2)$. Fie A' simetricul lui A faţă de Ox şi B' simetricul lui B faţă de Oy. Dreapta $A'B'$ întâlneşte pe Ox în M şi pe Oy în N. Arătaţi că dreptele AM şi BN sunt paralele.

5. O persoană rambursează un credit $T_0 = 10\ 000$ unităţi bancare, pe care l-a contractat cu o dobândă unitară $i = 10\%$. Ştiind că anuităţile sunt egale şi că al 5-lea amortisment este de 732,05 unităţi bancare, să se calculeze termenul pentru care a fost contractat creditul.

1. Fie A o mulţime nevidă şi finită de numere reale. Dacă $f: A \to A$ este o funcţie strict crescătoare (respectiv strict descrescătoare), să se arate că $f = 1_{\mathbb{R}}$.

2. Să se rezolve sistemul de ecuaţii:

$$\begin{cases} 8A_x^{y-3} = A_x^{y-2} \\ 8C_x^{y-3} = 5C_x^{y-2} \end{cases}$$

3. a) Fie funcţia $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \sin x + \cos \alpha x$, $\alpha \in \mathbb{R}$. Dacă f este funcţie periodică, arătaţi că $\alpha \in \mathbb{Q}$.

b) Rezolvaţi şi discutaţi în funcţie de $a \in \mathbb{R}$ ecuaţia

$$a \cos 3x + \sin 2x \sin x - \cos x = 0.$$

4. Fie A un punct în primul cadran al sistemului de axe xOy şi A_1, A_2 proiecţiile lui A pe Ox, Oy. Presupunem că punctul A este mobil astfel încât dreptunghiul OA_1AA_2 să aibă perimetrul constant $2a$, $a > 0$. Să se arate că perpendiculara din A pe diagonala A_1A_2 trece printr-un punct fix.

5. Un client vine la bancă având intenţia de a face un plasament de 1000 unităţi bancare. Banca oferă o dobândă unitară de 4% pentru depozitele la vedere şi de 9% pentru depozitele la termen cu dobândă compusă. Să se calculeze ce sumă ar ridica deponentul după 4 ani în cazul unui depozit la termen şi ce sumă ar ridica după o perioadă de 4 ani şi 150 zile în cazul unui depozit la vedere. Să se calculeze raportul procentual al celor două sume.

1. Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuaţia:

$$\sqrt{x+1+4\sqrt{x-3}} + \sqrt{x+1-4\sqrt{x-3}} = 4.$$

2. Să se calculeze:

$$(C_2^2)^2 + (C_3^2)^2 + \ldots + (C_n^2)^2.$$

3. a) Fie două numere reale x, y. Ştiind că există $a, b \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ astfel încât $x = \mathrm{tg}a, y = \mathrm{tg}b$, demonstraţi inegalitatea

$$\left|\frac{(x-y)(1+xy)}{(1+x^2)(1+y^2)}\right| \leq \frac{1}{2}.$$

b) Fie funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \arcsin(\sin x)$ şi $a \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. Calculaţi suma $S = f(a) + f(a+\pi) + f(a+2\pi) + f(a+3\pi)$.

4. Arătaţi că prin punctul $P(2, 7)$ putem duce două drepte astfel încât distanţa dintre fiecare dreaptă şi punctul $Q(1, 2)$ să fie egală cu 5.

5. Un lot de produse fabricate de o întreprindere este distribuit spre desfacere la 3 agenţi comerciali. Producătorul vinde o unitate de produs la preţul de 100 unităţi bancare. Cei trei agenţi comerciali percep adaosuri comerciale diferite, respectiv de 2%, 4%, 7%. Cota TVA este de 18%. Să se calculeze preţul mediu al produsului şi media taxelor pe valoarea adăugată aferente vânzării pentru cei 3 agenţi comerciali.

1. Să se rezolve ecuaţia:

$$\sqrt[4]{97-x} + \sqrt{9+x} = 8.$$

2. Ştiind că $\varepsilon = \cos\frac{2\pi}{3} + \mathrm{i}\sin\frac{2\pi}{3}$ să se calculeze produsul:

$$(1+\varepsilon)(1+\varepsilon^2)\ldots(1+\varepsilon^{2005}).$$

3. Fie ecuaţia $2(2a+1)\cos^2 x + 3\cos x + (1-a) = 0$, unde $a \in \mathbb{R}$. Determinaţi valorile lui a astfel încât ecuaţia să admită soluţii în intervalul $[0, \frac{\pi}{4}]$.

4. Fie punctele $A(a, 0)$, $C(c, 0)$ şi $B(0, b)$, unde a, b, c sunt strict pozitive şi distincte. Perpendiculara din C pe AB intersectează Oy în D. Arătaţi că AD şi BC sunt perpendiculare.

5. Se face o evaluare statistică a adaosului comercial pe care îl practică agenţii care comercializează computere. Se aleg în mod aleator 100 de agenţi comerciali şi se înregistrează adaosurile comerciale practicate, obţinându-se următoarea repartiţie de frecvenţe:

adaos comercial	8%	10%	14%	18%
frecvenţa	$\frac{20}{100}$	$\frac{50}{100}$	$\frac{25}{100}$	$\frac{5}{100}$

Să se calculeze adaosul comercial mediu şi coeficientul de variaţie.

1. Să se rezolve ecuaţia:

$$(a+x)^{2/3} + 4(a-x)^{2/3} - 5(a^2-x^2)^{2/3} = 0.$$

2. Dacă $z + \frac{1}{z} = 2\sin\alpha$, să se calculeze $z^n + \frac{1}{z^n}$, n fiind un număr natural nenul.

3. a) Arătaţi că funcţia $f: [\frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}] \to [-1, 1]$, $f(x) = \sin x$ este inversabilă şi aflaţi f^{-1}.

b) Arătaţi că inegalitatea

$$(3 + 2\cos a - 2\sin a)x^2 - 2(\cos a + \sin a)x + 1 \geq 0$$

este adevărată pentru orice $x \in \mathbb{R}$ şi orice $a \in \mathbb{R}$.

4. Fie dreptele $d_1 : 3ax - 8y + 13 = 0$, $d_2 : (a + 1)x - 2ay - 21 = 0$, $a \in \mathbb{R}$. Să se determine parametrul a astfel încât dreptele d_1, d_2 să fie:

a) paralele; b) perpendiculare.

5. Să se compare variabilitatea următoarelor două seturi de date statistice privind adaosurile comerciale practicate de agenţii care comercializează produse alimentare şi cei care comercializează produse cosmetice:

adaosuri comerciale, produse alimentare x_i	2%	2,5%	3%	4%	4,5%
frecvenţe	0,30	0,25	0,25	0,15	0,05

adaosuri comerciale, produse cosmetice y_i	7%	9%	15%	20%
frecvenţe	0,25	0,25	0,25	0,25

1. Să se rezolve ecuaţia:

$$\sqrt[3]{a+\sqrt{x}} + \sqrt[3]{a-\sqrt{x}} = \sqrt[3]{b}.$$

2. Se consideră ecuaţia

$$(m-2)4^x + (2m-3)2^{x+1} + 5m - 6 = 0,$$

unde $m \in \mathbb{R} \setminus \{2\}$. Să se arate că:

i) ecuaţia are o singură rădăcină reală dacă şi numai dacă $m \in (\frac{6}{5}, 2)$;

ii) nu există valori ale lui m astfel încât ecuaţia să aibă două rădăcini reale distincte.

3. Arătaţi că funcţia $f: [\frac{5\pi}{2}, \frac{7\pi}{2}] \to [-1, 1], f(x) = \sin x$, este inversabilă şi aflaţi f^{-1}.

4. În planul cartezian cu reperul Ox, Oy considerăm triunghiul OAB unde $A(a, 0)$, $B(0, a)$, $a > 0$. Pe dreapta AB se consideră un punct $P \notin \{A, B\}$. Fie Q proiecţia lui P pe Ox şi R proiecţia lui P pe Oy. Să se arate că perpendiculara din P pe RQ trece printr-un punct fix.

5. O urnă conţine 5 bile albe şi 7 bile roşii. Se extrag, pe rând, 3 bile din urnă şi se aşază pe masă. Să se scrie câmpul de probabilitate asociat experimentului. Să se scrie evenimentul „pe masă există trei bile de aceeaşi culoare" şi să se calculeze probabilitatea acestui eveniment.

1. Să se determine valorile reale ale lui a pentru care inegalitatea

$$\log_{\frac{a-1}{a+1}} (x^2 + 3) \geq 1$$

este adevărată pentru orice x real.

2. Să se determine coeficientul lui x^4 din dezvoltarea $(1 + 2x + 3x^2)^{10}$.

3. a) Avem $\sin\frac{2\pi}{5} = \sin\frac{3\pi}{5}$, deoarece $\frac{2\pi}{5} + \frac{3\pi}{5} = \pi$. Plecând de la această egalitate, arătaţi că numărul $\cos\frac{\pi}{5}$ este soluţie a ecuaţiei $4t^2 - 2t - 1 = 0$ şi deduceţi $\cos\frac{\pi}{5} = \frac{1}{\sqrt{5} - 1}$.

b) Arătaţi că funcţia $f: (1, \infty) \to \mathbb{R}, f(x) = \cos\frac{\pi}{x} - \frac{1}{\sqrt{x} - 1}$ este strict crescătoare.

Aplicaţie: determinaţi $n \in \mathbb{N}$ astfel încât $\cos\frac{\pi}{n} = \frac{1}{\sqrt{n} - 1}$

4. Fie ABC un triunghi cu toate unghiurile ascuţite în care înălţimea AD, $D \in [BC]$ are aceeaşi lungime cu latura $[BC]$. Se construieşte pătratul $CDEF$ şi pătratul $BDGH$, unde E, G sunt de aceeaşi parte a lui BC ca şi A. Să se arate că dreptele BF şi CH sunt înălţimi în triunghiul ABC.

5. Se consideră un joc în care la aruncarea unei monede de 50 cenţi se acordă 0 puncte pentru apariţia efigiei şi 50 puncte pentru apariţia valorii. Presupunem că jocul constă în aruncarea simultană a trei monede de câte 50 cenţi. Să se scrie variabila aleatoare care exprimă numărul de puncte ce se pot obţine în acest joc şi să se calculeze media sa.

1. Să se rezolve inecuaţia:

$$\log_x(x+2) > \log_{x+2} x.$$

2. Să se determine n şi x dacă în dezvoltarea $\left(3^{\frac{x}{2}} + 3^{\frac{1-x}{2}}\right)^n$ suma coeficienţilor binomiali ai primilor trei termeni este egală cu 22, iar suma dintre termenul al treilea şi termenul al cincilea este 420.

3. Dacă n numere reale astfel încât $a_1 \le 1$, $a_2 \le 1$, ..., $a_n \le 1$ îndeplinesc condiţia $a_1 + a_2 + \ldots + a_n = n$, arătaţi că $a_1 = 1, a_2 = 1, \ldots, a_n = 1$.

Aplicaţie: arătaţi că ecuaţia $\sin 2x + \sin 3x + \sin 4x = 3$ nu are soluţii.

4. Fie un paralelogram $ABCD$ şi M un punct în plan. Considerăm punctele N, P, Q astfel: N este simetricul lui M faţă de A, P este simetricul lui N faţă de D, iar Q este simetricul lui P faţă de C. Arătaţi că punctul Q este simetricul lui M faţă de B.

5. O urnă conţine 4 bile albe şi 6 bile negre. Se fac trei extrageri, cu revenirea bilei extrase înapoi în urnă. Să se scrie câmpul de probabilitate asociat experimentului şi să se calculeze probabilitatea de a obţine cel mult două bile albe.

1. i) Fie $a, b, c \in (0, 1) \cup (1, +\infty)$. Să se arate că $a^{\log_c b} = b^{\log_c a}$.

ii) Să se rezolve ecuaţia

$$(x+1)^{\log_2(x-2)} + 2(x-2)^{\log_2(x+1)} = 3x^2 + 6x + 3.$$

2. Fie $n \in \mathbb{N}$, $n \ge 2$ şi $n + 1$ numere în progresie aritmetică $a_1, a_2, \ldots, a_{n+1}$. Să se calculeze suma

$$S = \sum_{k=1}^{n} (-1)^k C_n^k \, a_{k+1}.$$

3. a) Arătaţi că ecuaţia $\dfrac{\sin 7x + \sin 3x}{\cos 9x - \cos x} = 0$ nu are soluţii.

b) Rezolvaţi ecuaţia

$$1 + \sin x + \cos x + \sin 2x + \cos 2x = 0.$$

4. În triunghiul ABC avem $\sphericalangle A = 60°$, iar lungimea înălţimii din A este egală cu jumătate din raza cercului circumscris triunghiului. Aflaţi unghiurile triunghiului.

5. Se consideră 3 urne care conţin, respectiv, 4 bile albe şi 6 bile negre, 6 bile albe şi 4 bile negre, 5 bile albe şi 15 bile negre. Se extrage câte o bilă din fiecare urnă. Să se scrie câmpul de probabilitate asociat experimentului şi să se calculeze probabilitatea de a obţine cel puţin două bile albe.

1. Funcţia nu este nici injectivă şi nici surjectivă. **2.** f(Galaţi) = Galaţi; f(Făgăraş) = = Braşov, g(Teleorman) = Alexandria, g(Mehedinţi) = Drobeta Turnu-Severin. **4.** Există 6 funcţii injective. Nu există funcţii surjective. **8.** oricare $y \geq 0$, pentru $x = \sqrt{y}$ avem $f(x) = y$, deci f este surjectivă; $f(-1) = f(1) = 1$, deci f nu este injectivă. **12.** Funcţia $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, $f(x) = 2x$ este injectivă şi nu este surjectivă; funcţia $g : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, $g(x) = \begin{cases} \frac{x}{2}, \text{ dacă } x \text{ este par} \\ \frac{x-1}{2}, \text{ dacă } x \text{ este impar} \end{cases}$ este surjectivă şi nu este injectivă. **13.** Se poate folosi reprezentarea grafică a funcţiei f în plan. **14.** h şi k nu sunt nici injective, nici surjective. Avem $f^{-1}: \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, $f^{-1}(x) = 4 - x$ şi $g^{-1}: \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, $g^{-1}(x) = x - 1$. **16.** Se verifică că $f \circ f^{-1} = 1_{\mathbb{N}}$ şi deci $f^{-1} = f$. **17.** $f^{-1} = f$. **18.** Inversa este: $f^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f^{-1}(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x, x \geq 0, \\ \frac{1}{3}x, x < 0. \end{cases}$ **19.** $f^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f^{-1}(x) = \begin{cases} \frac{x-1}{2}, \text{ dacă } x \leq 3, \\ x - 2, \text{ dacă } x > 3. \end{cases}$

20. $f^{-1}(x) = \begin{cases} -\sqrt{x}, \text{ dacă } x \geq 0 \\ -\frac{x}{2}, \text{ dacă } x < 0 \end{cases}$. **21.** $f^{-1}(x) = \begin{cases} -\sqrt{\frac{x-1}{2}}, \text{ dacă } x \geq 1 \\ 1 - x, \text{ dacă } x < 1 \end{cases}$. **22.** $m = 5$. În acest caz inversa este $f^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f^{-1}(x) = \begin{cases} \frac{5-x}{2}, \text{ dacă } x < 1, \\ 3 - x, \text{ dacă } x \geq 1. \end{cases}$ **23.** Distingem cazurile:

i) $a \geq 0$, $b \geq 0$, funcţia f nu este inversabilă; ii) $a > 0$, $b < 0$, funcţia f este inversabilă, $f^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f^{-1} = \begin{cases} \frac{1}{b}x, \text{ dacă } x \leq 0, \\ \sqrt{\frac{x}{a}}, \text{ dacă } x > 0. \end{cases}$ iii) $a < 0$, $b > 0$, funcţia f este inversabilă, $f^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f^{-1} = \begin{cases} -\sqrt{\frac{x}{a}}, \text{ dacă } x < 0, \\ \frac{1}{b}x, \text{ dacă } x \geq 0. \end{cases}$ iv) $a < 0$, $b \leq 0$, funcţia f nu este inversabilă,

24. $(f+g)(x) = \begin{cases} x, \text{ dacă } x < 0, \\ 3x, \text{ dacă } x \geq 0. \end{cases}$; $(f \cdot g)(x) = \begin{cases} -2x^2, \text{ dacă } x < 0, \\ 2x^2, \text{ dacă } x \geq 0. \end{cases}$; $f^2(x) = x^2, f^3(x) = |x|^3$.

1. a) 2^4; b) 15^3; c) $\frac{1}{3^{10}}$; d) $-\frac{1}{5^3}$; e) 15^5; f) $\frac{1}{2^2}$. **2.** a) $60x^6$; b) $1875x^{10}$. 3. a) $m < 1$, este pozitivă; $m = 1$, este zero; $m > 1$, este negativă; b) $m < \frac{2}{3}$, este pozitivă; $m = \frac{2}{3}$, este zero; $m > \frac{2}{3}$, este negativă; c) este pozitivă oricare ar fi $m \neq 2$. Pentru $m = 2$, este zero. **4.** a) xy^3; b) $(a + b)^2$; c) $5^n + 2^n$. **5.** Se calculează membrul drept. **6.** Se descompune în factori $a^{32} - b^{32} = (a^{16})^2 - (b^{16})^2$. **7.** a) $(x^{m+n} + 1)(x^{m-n} + 1)$; b) Dacă $m < n$, se descompune în $(x - 1)(x^{n-1} + ... + x^m)$; dacă $m = n$, este 0; dacă $m > n$ se descompune în $(1 - x)(x^{m-1} + ... + x^n)$. **8.** a) 2^8; b) 9^6; c) sunt egale; d) $4^{300} = (4^3)^{100}$ şi $3^{400} = (3^4)^{100}$, $4^3 < 3^4$, 3^{400} este mai mare; e) $\left(-\frac{1}{32}\right)^3$; f) $\left(\frac{1}{16}\right)^{100}$; g) 5^{-63}; h) sunt egale. **10.** Dacă $\alpha \in \mathbb{R}$ $\alpha \neq 0$, atunci $\alpha \neq -\alpha$, iar $f(\alpha) = \alpha^{2m} = f(-\alpha)$. Oricare ar fi $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = x^{2m} \geq 0$, deci dacă $y < 0$, atunci $y \notin \operatorname{Im} f$. **11.** i) $a^{-3}b^{-4}$; $(a + b)^{-5}(a - b)^{-2}$; $3a^{-5}b^{-6}c^{-2}$; ii) $2 \cdot 10^{-4}$; iii) $3 \cdot 10^{-6}$; $15 \cdot 10^{-4}$. **12.** a) $a^{-4}(1 + a^2)(a^6 + a^2 - 1)$; b) $4a^{-2}$; c) 1. **13.** a) 2; b) $\frac{2}{17}$; c) 6. **14.** a) $\frac{(x+y+z)^2}{2yz}$; b) $\frac{3x^2y-3xy^2+y^3}{(x-y)^4}$.

1. a) $|x-1|$; b) $|x+5|$; d) $|-3x^2+x-1| = 3x^2-x+1$. **2.** a) $x \geqslant 2$; b) mulţimea tuturor numerelor reale; c) $x \geqslant 1$; d), e) mulţimea tuturor numerelor reale. **3.** a) 165; b) 275; c) 238. **4.** $\sqrt{2}$; $\sqrt[3]{5}$; $\sqrt{|a|}$; $\frac{25}{16}$; $\sqrt{\sqrt{7}-2}$; $\sqrt{\sqrt{2}-1}$; $\sqrt[3]{\sqrt{3}-\sqrt{5}}$; $\sqrt[5]{4-\sqrt{3}}$; $\sqrt[3]{\sqrt{2}-1}$.

5. a) $\sqrt{|x-2|}$; b) $\sqrt{|x^2-1|}$; c) $\sqrt{|x-1|(x^2+1)}$. **6.** $3\sqrt{2} > 2\sqrt{3}$; $8\sqrt{3} > 5\sqrt{7}$; $4\sqrt[3]{2} > 3\sqrt[3]{4}$.

7. a) $5\sqrt[6]{5}$; b) $\sqrt[20]{2^7}$; c) $\sqrt[4]{\frac{2+\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}}}$; d) $\sqrt[4]{\frac{a+1}{a-1}}$. **8.** a) $-12\sqrt{2}$; b) $-3\sqrt[3]{2}$; c) $4\sqrt{6}-8\sqrt{3}$; d) 8. **9.** a) $-3+2\sqrt{2}$; b) $5\sqrt[3]{5}+2\sqrt[3]{15}+4\sqrt[3]{9}$; c) $2\left(-1+2\sqrt{2}-\sqrt{5}+\sqrt{10}\right)$; d) $\frac{3}{2}\left(\sqrt[3]{9}-\sqrt[3]{21}+\sqrt[3]{49}\right)$; e) $4+\sqrt[3]{75}+\sqrt[3]{45}$; f) $\frac{31}{4}\left(1+\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)$; g) $\frac{\sqrt{5+\sqrt{2}}\left(5-\sqrt{2}\right)}{23}$; h) $-\left(2+\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{6}\right)$; i) $\frac{\sqrt{a-b}\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)}{a-b}$. **10.** i) $\sqrt{a}-\sqrt[20]{a^5}$; ii) $\frac{\sqrt{xy}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}$. **11.** a) $\sqrt{2}=\sqrt[4]{4}<\sqrt[3]{3}$; b) $\sqrt{3}<\sqrt[6]{30}<\sqrt[3]{6}$; c) $\sqrt[8]{72}<\sqrt[4]{12}<\sqrt{6}$. **12.** a) -3; b) 3, 4; c) 4; d) 12; e) -5, 4; f) 5, 7; g) 4; h) 0 şi 5; i) $-a$, a; j) 7; k) nu are soluţii; l) 3. **13.** a) -2; b) 25; c) -109 şi 80. **14.** Se notează $u = \sqrt[4]{97-x}$, $v = \sqrt[4]{x}$ şi obţinem sistemul $\begin{cases} u+v=5 \\ u^4+v^4=97 \end{cases}$. **16.** a) $x \in (-\infty, 1)$; b) $x \in [1, 2]$; c) $x \in [55, +\infty)$; d) $x \in (2, +\infty)$. **17.** a) $x_1 = 34$, $y_1 = -30$ şi $x_2 = 12$, $y_2 = 4$;

b) $x_1 = 27, y_1 = -1$ şi $x_2 = 1, y_2 = 27$; **19.** a) $\left(\frac{16}{49}\right)^{\frac{1}{4}} < \left(\frac{4}{7}\right)^{\frac{2}{3}} < \left(\frac{49}{16}\right)^{\frac{4}{3}}$; b) $\left(\frac{9}{4}\right)^{-0,1} < \left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{1}{6}} < \left(\frac{9}{4}\right)^{0,2}$;

21. a) $\sqrt{3}+\sqrt{2}$; b) $\sqrt{5}-1$; c) $\sqrt{7}-\sqrt{3}$; d) $\sqrt{\frac{15}{2}}-\sqrt{\frac{3}{2}}$; e) $\sqrt{\frac{x+|y|}{2}}-\sqrt{\frac{x-|y|}{2}}$. **22.** Se scrie $x + 2\sqrt{x-1}$ sub forma $x - 1 + 2\sqrt{x-1} + 1 = \left(\sqrt{x-1}+1\right)^2$. Analog, se procedează cu $x - 2\sqrt{x-1}$. **23.** 0,1. **24.** $\frac{a\sqrt[3]{a^2}}{\sqrt[3]{a^2}-1}$. **25.** $\frac{1}{243}$. **27.** Funcţia putere de grad impar este strict crescătoare deci f este injectivă. Cum există radical de ordin impar din orice număr real, rezultă că f este surjectivă. **28.** Se observă că ecuaţia $f(x) - c = 0$ are două rădăcini reale distincte. **29.** $f(0) = f(\sqrt[1999]{2}) = 1$. **30.** $f^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f^{-1}(x) = \sqrt[7]{x^3}$.

1. a) $3^{\frac{5}{6}}$; b) $\sqrt[15]{6^7}$; c) $\left(\frac{2}{5}\right)^{\frac{7}{2}}$; d) egale; e) egale; f) $2^{-\sqrt{3}}$; g) $5^{\sqrt{3}}$; h) $\sqrt[6]{\left(\frac{7}{8}\right)^{38}}$

2. a) $2^{-1-\sqrt{3}}$; b) $\left(3\cdot 2^{20}\right)^{\sqrt{3}}$; c) 5^{-5}; d) $2^{\frac{-\sqrt{3}}{4}}$. **3.** a) $x \geq 6$; b) $x \leq -2$; c) $x > -7$; d) $x < 1$; e) $x > -8$; f) $x < 8$; h) $x < -10$; i) $x > -21$. **4.** a) $m > n$; b) $m > n$; c) $m \leq n$; d) $m \geq n$. **5.** Mai mari decât 1: b); d); e); mai mici decât 1: a); c); f). **6.** a) $\left(\frac{1}{\pi}\right)^{-\sqrt{2}}$; b) $\left(\frac{\pi}{6}\right)^2$; c) $\left(\frac{2}{5}\right)^{1+\sqrt{6}}$; d) $\left(\sqrt{5}\right)^{\sqrt{3}-2}$. **7.** Dacă $0 < a < 1$, atunci $x < 0$; dacă $a > 1$, atunci $x > 0$. **8.** a) Pentru $a > 1$, da; pentru $0 < a < 1$, nu; b) da; c) da; d) nu.

1. a) $x < 1$; b) $-1 < x < 1$; c) $x \in \mathbb{R}$; d) $x \in (-\infty, -2) \cup (1, +\infty)$; e) $x \in (2, 3)$; f) $x \in \mathbb{R}$; g) $x > 1$; h) $x > 1$; i) $0 < x < 1$. **2.** a) $\log_2 5$; b) $\log_3 10$; c) $\log_5 \frac{1}{2}$; d) 3. **3.** a) $x > 4$; b) $0 < x \leq \frac{5}{2}$; c) $x \in (-\infty, -2\sqrt{2}\,] \cup [\,2\sqrt{2}, +\infty)$; d) $x \in (1, 5]$. **5.** a) 2; b) 2; c) 2; d) 2; e) –2; f) 2; g) 1; h) –1. **7.** a) $E = \log_7 8$; b) $E = \log_2 3$; c) $\frac{1}{2}$. **8.** a) $\log_a E = 2\log_a 41 + \frac{1}{13}(\log_a 41 + 5\log_a 37)$; b) $\log_a E = 3\log_a 31 + \frac{1}{7}(\log_a 41 + 4\log_a 33) - 2\log_a 17 - \frac{1}{3}(2\log_a 23 + \log_a 29)$; c) $\log_\alpha E = 2\log_\alpha a + \frac{1}{5}(\log_\alpha a + 3\log_\alpha b + \log_\alpha c)$. **9.** a) $x = \frac{12}{5}$; b) $x = \frac{7^2\cdot 6^3}{5^4}$; c) $x = \frac{a^2(a+b)^3}{(a-b)^2}$.

1. a) 3; b) 5; c) –3; d) $-\frac{1}{2}$; e) 2; f) $\frac{4}{3}$. **2.** a) $\frac{5}{2}$; b) 3; c) $\frac{5}{2}$; d) $x_1 = 7$, $x_2 = -1$. **3.** a) 4; b) 1; c) 3; d) 1; e) 2. **4.** a) 35; c) 24. **5.** a) 2; b) 1; c) 3; d) 4;

e) $x_1 = \log_5 3$, $x_2 = 1 - \log_5 4$; f) 0; g) $x_1 = 0$, $x_1 = 1$; h) 0; i) $x_1 = 0$, $x_2 = 1$. **6.** a) 1; b) $\log_{\frac{3}{2}} \frac{7}{5}$; c) 0; d) 0; e) 4. **7.** a) 2; b) $\frac{1}{2}$; c) 5; d) 4. **8.** a) 4; b) $\sqrt{\frac{2}{3}}$; c) 2. **9.** a) $x_1 = 10$, $x_2 = 10^{-4}$; b) $x_1 = \sqrt[3]{10}$, $x_2 = \frac{1}{\sqrt[4]{10}}$; c) $x_1 = 10^{\frac{1}{3}}$, $x_2 = 10^{-\frac{1}{6}}$; d) $x_1 = \frac{1}{5}$, $x_2 = \frac{1}{5} \cdot 3^{\frac{7}{4}}$. **10.** 100. **11.** $x_1 = 2^{\frac{1}{4}}$, $x_2 = 2^4$. **12.** a) $x_1 = 5$, $y_1 = 2$ sau $x_2 = 2$, $y_2 = 5$; b) (2, 1); c) (100, 10); d) (4, 2); e) $x_1 = 4$, $y_1 = 10$ sau $x_2 = 10$, $y_2 = 4$; f) (1, 1). **13.** a) $x \in (-3, -2) \cup (3, +\infty)$; $0{,}01 \le x \le 10\,000$; c) $x \le -4$. **14.** a) $0 < x < 3$; b) $2 \le x \le 4$. **15.** Împărţind cu 5^x, obţinem inecuaţia: $\left(\frac{3}{5}\right)^x + \left(\frac{4}{5}\right)^x > 1$; funcţia $f(x) = \left(\frac{3}{5}\right)^x + \left(\frac{4}{5}\right)^x$ este strict descrescătoare şi $f(2) = 1$, deci $f(x) > 1$ pentru $x < 2$. **16.** a) pentru $0 < a < 1$, $0 < x \le a$; pentru $a > 1$, $x \ge a$; b) pentru $0 < a < 1$, $x > 5$; pentru $a > 1$, $0 < x < 5$.

2. a) $\sin t = \frac{3}{5}$, $\cos t = -\frac{4}{5}$; b) $\sin t = \frac{\sqrt{5}}{5}$, $\cos t = -\frac{2\sqrt{5}}{5}$. **3.** $E = \frac{10}{11}$. **4.** $E = 5$. **5.** a) $T = \frac{\pi}{2}$; b) $T = \frac{2\pi}{3}$; c) $T = 10\pi$; d) $T = \frac{\pi}{3}$; e) $T = 8\pi$; f) $T = 2$.

3. a) $\frac{2\pi}{3}$; b) $\frac{5\pi}{4}$; c) $\frac{5\pi}{6}$. **5.** a) $-1{,}43$; b) $-\frac{\pi}{3}$; c) 2; d) $\frac{3\pi}{5}$; e) $-\frac{\pi}{5}$; f) $-\frac{\pi}{3}$. **8.** a) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; b) $\frac{7}{25}$. **9.** Se arată că fiecare membru este egal cu $\frac{24}{25}$. **10.** a) $\frac{84}{85}$; b) -1; **13.** a) $\mathbb{R}$; b) $\mathbb{R}$; c) $[0, 1] \cup [2, 3]$. **15.** a) $x = \sin\frac{1}{2}$; b) $x = -3\operatorname{tg}1$; c) $x = -\frac{1}{2}$, $x = \frac{\sqrt{3}}{2}$. **16.** a) $x = -\frac{1}{12}$; b) $x = \frac{1}{2}$; c) $x = 1$; d) $x = \sqrt{2}$; e) $x = 0$, $x = \pm\frac{1}{2}$.

4. a) $\frac{\pi}{3} + (-1)^k \frac{\pi}{6} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$; b) $\frac{\pi}{8} + k\frac{\pi}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$; c) $k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. **5.** a) $m \in [\frac{1}{2}; 1]$; b) $m \in [-\frac{1}{2}; 1]$; c) Avem $|m + \frac{1}{m}| \ge 2$, $\forall\, m \in \mathbb{R}^*$, deci $m \in \varnothing$; d) $m \in \mathbb{R} - \{3\}$. **6.** Se aplică formulele: $1 - \sin^2 t = \cos^2 t$, $1 - \cos^2 t = \sin^2 t$, $2\cos^2 t - 1 = \cos 2t$, $1 - 2\sin^2 t = \cos 2t$. **7.** $\cos t = 0 \Rightarrow \sin t = 1 \Rightarrow \sin t \ne 0$. În concluzie, $\cos t = 0 \Rightarrow \sin t \ne 0$, deci numerele $(2k+1)\frac{\pi}{2}$ nu sunt soluţii ale ecuaţiei $a\sin x + b\cos x = 0$. Rezultă echivalenţele: $a\sin x + b\cos x = 0 \Leftrightarrow \frac{a\sin x + b\cos x}{\cos x} = 0 \Leftrightarrow \Leftrightarrow a\operatorname{tg}x + b = 0 \Leftrightarrow \operatorname{tg}x = -\frac{b}{a}$, deci $x = \operatorname{arctg}(-\frac{b}{a}) + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.
8. a) Avem $\sin^2\frac{\pi}{10} = \frac{1}{2}(1 - \cos\frac{\pi}{5}) = = \frac{1}{8}(3 - \sqrt{5})$, de unde $\sin\frac{\pi}{10} = \frac{1}{2\sqrt{2}}\sqrt{3-\sqrt{5}} = = \frac{1}{2\sqrt{2}}\left[\sqrt{\frac{3+2}{2}} - \sqrt{\frac{3-2}{2}}\right] = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$. b) De la a) rezultă $\arcsin\frac{\sqrt{5}-1}{4} = \frac{\pi}{10}$, deci $x = (-1)^k \frac{\pi}{10} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, adică $x \in \{\frac{\pi}{10} + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\} \cup \{\frac{9\pi}{10} + 2n\pi \mid n \in \mathbb{Z}\}$.

9. a) $\frac{7\pi}{12}+2k\pi$, $\frac{\pi}{36}+2n\frac{\pi}{3}$, $k, n\in\mathbb{Z}$; b) $\frac{\pi}{6}+2k\frac{\pi}{3}$, $-\frac{5\pi}{6}-2n\pi$, $k, n\in\mathbb{Z}$; c) $\frac{\pi}{36}+k\frac{\pi}{3}$, $k\in\mathbb{Z}$; d) $\varnothing$. **10.** a) $(4k+1)\frac{\pi}{8}$, $(4k-1)\frac{\pi}{4}$, $k, n\in\mathbb{Z}$; b) $\frac{\pi}{10}+2k\frac{\pi}{5}$, $k\in\mathbb{Z}$; c) $\frac{\pi}{40}+k\frac{\pi}{10}$, $\frac{\pi}{20}+n\frac{\pi}{5}$, $k, n\in\mathbb{Z}$; d) $\frac{\pi}{4}+2k\frac{\pi}{3}$, $\frac{3\pi}{4}+2n\pi$, $k, n\in\mathbb{Z}$. **13.** a) $k\frac{\pi}{5}$, $\frac{\pi}{2}+n\pi$, $k, n\in\mathbb{Z}$; b) $-\frac{\pi}{12}+k\frac{\pi}{3}$, $k\in\mathbb{Z}$. **14.** $\frac{\pi}{16}+k\frac{\pi}{2}$, $\frac{\pi}{24}+n\frac{\pi}{3}$, $k, n\in\mathbb{Z}$; b) $\frac{\pi}{6}+2k\frac{\pi}{3}$, $2n\pi$, $k, n\in\mathbb{Z}$; d) $(2k+1)\frac{\pi}{8}$, $(2n+1)\frac{\pi}{4}$, $k, n\in\mathbb{Z}$; e) $\frac{\pi}{6}+2k\frac{\pi}{3}$, $\frac{\pi}{2}+2n\pi$, $k, n\in\mathbb{Z}$.

14. a) $\pm\frac{\pi}{3}+2k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$; b) $\frac{\pi}{2}+2k\pi$; c) $\varnothing$; d) $\pm\frac{\pi}{6}+2k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$; e) $\mathrm{tg}x=3$ sau $\mathrm{tg}x=\frac{1}{3}$. **15.** $2n\pi$, $n\in\mathbb{Z}$; b) $-\frac{\pi}{2}+2k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$; c) $\mathrm{tg}x=-2$ sau $\mathrm{tg}x=4$; d) $(-1)^{n+1}\frac{\pi}{6}+k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$; e) $2k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$. **16.** a) $\frac{\pi}{4}+k\frac{\pi}{2}$, $k\in\mathbb{Z}$; b) $(-1)^k\frac{\pi}{6}+k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$; c) $\frac{\pi}{2}+2k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$. **17.** a) $(-1)^{n+1}\frac{\pi}{3}+2n\pi$, $n\in\mathbb{Z}$; b) $(-1)^{n+1}\frac{\pi}{12}+n\frac{\pi}{2}$, $n\in\mathbb{Z}$; c) $(2n+1)\frac{\pi}{4}$, $n\in\mathbb{Z}$; d) $\frac{7\pi}{12}+k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$: e) $2k\pi$, $\pm\frac{2\pi}{3}+2n\pi$, $k, n\in\mathbb{Z}$; **18.** a) Înlocuim $\cos 4x=2\cos^2 2x-1$, $2\cos^2 x=1+\cos 2x$ şi obţinem $2\cos^2 2x+\cos 2x=0$; b) $4\cos^2 2x+\cos 2x-3=0$; c) $2\cos^2 x-5\cos x+3=0$; d) $\sin^4 x-10\sin^2 x+9=0$. **19.** a) $\sin x=0$ sau $\mathrm{tg}x=-\frac{3}{2}$; b) $\cos x=0$ sau $\mathrm{tg}x=\frac{5}{4}$; c) $2\mathrm{tg}^2x-7\mathrm{tg}x+3=0$; d) $\mathrm{tg}^2x-3\mathrm{tg}x++2=0$. **20.** a) $\mathrm{tg}^2x+2\mathrm{tg}x-3=0\Rightarrow$ $\Rightarrow\mathrm{tg}x=1$ sau $\mathrm{tg}x=-3$; b) $3\mathrm{tg}x+3\mathrm{tg}x-5=0\Rightarrow\mathrm{tg}x=\frac{1}{6}(-3\pm\sqrt{69})$; c) $\frac{\pi}{2}+k\pi$, $-\frac{\pi}{6}+n\pi$, $k, n\in\mathbb{Z}$. **21.** a) $\pm\frac{\pi}{6}+k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$; b) $\pm\frac{\pi}{4}+k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$; c) $\pm\frac{\pi}{6}+k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$; d) $\pm\frac{\pi}{3}+k\pi$; e) Se obţine $\cos^2 x=\frac{3}{4}\Leftrightarrow\frac{\cos 2x+1}{2}=\frac{3}{4}$. **22.** a) $\mathrm{tg}x=1+\sqrt{3}$; b) $\mathrm{tg}x=\frac{1}{4}(\sqrt{5}\pm 1)$; c) $\mathrm{tg}x=\frac{1}{2}$ sau $\mathrm{tg}x=\frac{7}{2}$; d) $\sin x=0$, $\mathrm{tg}x=-\sqrt{3}$. **23.** $\frac{\pi}{6}$, $\frac{\pi}{3}$, $\frac{2\pi}{3}$, $\frac{5\pi}{6}$. **24.** Notăm $\sin 2x=t$. Ecuaţia $t^2-2t-2(a+1)=0$ are $\Delta=2a+3$, iar pentru $2a+3\geq 0$, $t_1=1+\sqrt{2a+3}$, $t_2=1-\sqrt{2a+3}$. Ecuaţia are soluţii numai dacă: $2a+3\geq 0$ şi $|1-\sqrt{2a+3}|\leq 1\Leftrightarrow a\in[-\frac{3}{2}, \frac{1}{2}]$. **25.** a) $\cos x=-\frac{1}{2}$, $\cos x=\frac{m-1}{m+1}$; b) $\sin x=-\frac{1}{2}$, $\sin x=m$; c) $\sin x=1$, $\sin x=\frac{m+2}{m}$; d) $\sin 2x=1$, $\sin 2x=\frac{m-2}{m}$. **27.** a) $\frac{\pi}{2}+2k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$; b) $2\mathrm{arctg}\frac{1}{2}+2k\pi$, $-2\mathrm{arctg}\frac{1}{3}+2n\pi$, $k, n\in\mathbb{Z}$; c) $\varnothing$; d) $(2k+1)\pi$, $2\mathrm{arctg}2+2n\pi$, $k, n\in\mathbb{Z}$. **28.** a) Avem $\frac{4}{3}\cos x+\sin x=\frac{5}{3}$ sau $\sin(x+\alpha)=\frac{5}{3}\cos\alpha$, unde $\mathrm{tg}\alpha=\frac{4}{3}$, $\alpha\in(0, \frac{\pi}{2})$ şi $\cos\alpha=\frac{3}{5}$. Ecuaţia devine $\sin(x+\alpha)=1$, deci are soluţiile $x=-\mathrm{arctg}\frac{4}{3}+\frac{\pi}{2}+2k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$; b) $-\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{2}+2k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$. **30.** a) $\frac{\pi}{8}\pm\frac{\pi}{6}+k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$; b) $k\frac{\pi}{2}$, $-\frac{\pi}{8}+n\frac{\pi}{2}$, $k, n\in\mathbb{Z}$;

c) $\frac{\pi}{18} + (-1)^n\frac{\pi}{18} + n\frac{\pi}{3}$, $n \in \mathbb{Z}$; d) $-\frac{\pi}{4} + k\pi$, $\frac{\pi}{2} + n\pi$, $k, n \in \mathbb{Z}$; e) $\frac{\pi}{36} + k\frac{\pi}{3}$, $k \in \mathbb{Z}$.

31. a) Avem $a^2 + b^2 \geq c^2 \Leftrightarrow m \in [-\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}] = I$. Dacă $m = 0$, $\sin x = 0$; dacă $m \in I \setminus \{0\}$, $\operatorname{tg}\frac{x}{2} = \frac{1-\sqrt{1-3m^2}}{3m}$; b) Condiţia $a^2 + b^2 \geq c^2$ are loc pentru $\forall\ m \in \mathbb{R}$. Dacă $m = 0$, $\sin x = 0$. Dacă $m \neq 0$, $\operatorname{tg}\frac{x}{2} = -\frac{m+1}{m}$. c) Avem $a^2 + b^2 \geq c^2 \Leftrightarrow \Leftrightarrow m \geq 0$. Pentru $m \in [0, 9] \cup (9, \infty)$, soluţiile sunt $x = 2\operatorname{arctg}\frac{m-3\pm\sqrt{4m}}{m-9} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$; pentru $m = 9$, $x = (2k + 1)\pi$ sau $x = 2\operatorname{arctg}\frac{2}{3} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. **33.** a) $\frac{\pi}{4} + 2k\pi$, $(-1)^{n+1}\frac{\pi}{6} - -\frac{\pi}{4} + n\pi$, $k, n \in \mathbb{Z}$; b) $\frac{\pi}{4} \pm \frac{2\pi}{3} + 2n\pi$, $n \in \mathbb{Z}$; c) $\frac{\pi}{4} + (-1)^{k+1}\frac{\pi}{3} + k\pi$, $\frac{\pi}{4} + (-1)^n \arcsin\frac{\sqrt{3}}{3} + n\pi$, $k, n \in \mathbb{Z}$; d) $\sin x - \cos x = 1$.

1. a) $x = \frac{11}{7}$, $y = -\frac{2}{17}$; b) $x = t$, $y = \frac{2}{3}(4-t)$, unde t este un număr real oarecare; c) $x = -\frac{92}{77}$, $y = -\frac{194}{77}$; d) $x = 0$, $y = 7$. **2.** a) $8 - i$; b) $-32 - 7i$; c) $(2+\sqrt{6})+(2\sqrt{2}-\sqrt{3})i$; d) $6\sqrt{2}+7i$; **3.** a) $-\frac{1}{2}+\frac{5}{2}i$; b) $-\frac{1}{2}+i$; c) $-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$; d) i; e) $-\frac{44}{17}+\frac{4}{17}i$; f) $-1 - i$; g) $2a$; h) 1. **6.** a) -1; b) i; c) 0, dacă $n = 4k$; i dacă $n = 4k + 1$; $i - 1$, dacă $n = 4k + 2$; -1, dacă $n = 4k + 3$; d) -1; f) $4i - 3$. **7.** a) $m = -2$; b) $m = -\frac{5}{12}$; c) $m \in \mathbb{R}$. **8.** a) $\pm\frac{1}{\sqrt{2}}(1+i)$; b) $\pm\frac{\sqrt{3}-i}{2}$. **11.** a) $(x - 1 - i)(x - 1 + i)$; b) $(2x + 1 - 2i)(2x + 1 + 2i)$; c) $(x - 7 - 5i)(x - 7 + 5i)$. **12.** $m(x^2 + 20x + 200) = 0$, $m \in \mathbb{R}^*$; b) $m(2x^2 - 14x + 205) = 0$, $m \in \mathbb{R}^*$; c) $m(x^2 - 2\sqrt{a}\,x + a + b) = 0$, $m \in \mathbb{R}^*$. **13.** Dacă $z = a + bi$, atunci $\bar{z} = a - bi$. Avem $z^3 = (a^3 - 3ab^2) + (3a^2b - b^3)i$, $\bar{z}^3 = (a^3 - 3ab^2) - (3a^2b - b^3)i$. Deci $\overline{z^3} = \bar{z}^3$. **14.** a) $\{(3 - 6i, 3 + 6i), (3 + 6i, 3 - 6i)\}$; b) $\{(-1, -1), (3/2, 2/3)\}$. **16.** a) $x_1 = 1$, $y_1 = 2$ şi $x_2 = -1$, $y_2 = -2$; b) Pentru $b = 1$ sau $b = 2$ nu se obţin soluţii; pentru $b \neq 1$ şi $b \neq 2$, $x = \frac{a(b-2)}{b-1}$, $y = a(b - 2)$. **17.** a) $\{(x, y) \mid y = -x^2 + 10, -\sqrt{6} \leq x \leq \sqrt{6}\}$; b) $\{(x, y) \mid y = x - 1, -1 \leq x \leq 2\}$. **18.** Pentru $b \geq 0$, găsim două soluţii: $x_1 = \sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2+b^2}}{2}}$, $y_1 = \sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}-a}{2}}$ şi $x_2 = -\sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2+b^2}}{2}}$, $y_2 = -\sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}-a}{2}}$, iar pentru $b < 0$ găsim tot două soluţii: $x_1 = \sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2+b^2}}{2}}$, $y_1 = -\sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}-a}{2}}$ şi $x_2 = -\sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2+b^2}}{2}}$,

$y_2 = \sqrt{\dfrac{\sqrt{a^2+b^2}-a}{2}}$. **20.** b) $\{(1, \sqrt{2}), (1, -\sqrt{2}), (2, 1), (2, -1), (-1, i\sqrt{2}), (-1, -i\sqrt{2}), (-2, i), (-2, -i)\}$; c) $\{(7, 3), (-7, -3)\}$. **21.** Se notează $z^2 = y$ şi se aplică ex. 18.

1. a) $\cos \pi + i \sin \pi$; b) $\cos \pi + i \sin \pi$; c) $\sqrt{2}\left(\cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4}\right)$; d) $2\left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3}\right)$; e) $2\left(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6}\right)$; f) $5\left[\cos\left(-\arccos\frac{3}{5}\right) + i \sin\left(-\arccos\frac{3}{5}\right)\right]$; g) $\sqrt{29}$ ($\cos \alpha + i \sin \alpha$), unde $\alpha = \arccos\frac{5}{\sqrt{29}}$; h) $\left(\sqrt{2}+\sqrt{6}\right)\left(\cos\frac{\pi}{12} + i \sin\frac{\pi}{12}\right)$. **2.** a) $\frac{2\pi}{3} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, $\frac{2\pi}{3}$; b) $-\frac{\pi}{4} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, $\frac{7\pi}{4}$; c) $\frac{4\pi}{3} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, $\frac{4\pi}{3}$; d) $\frac{\pi}{6} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, $\frac{\pi}{6}$.
3. a) $2\cos\frac{\alpha}{2}\left(\cos\frac{\alpha}{2} + i\sin\frac{\alpha}{2}\right)$; b) $\cos\left(\alpha + \frac{3\pi}{2}\right) + i\sin\left(\alpha + \frac{3\pi}{2}\right)$; c) $\sqrt{2}\left[\cos\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right)\right]$.
4. a) Semiaxa pozitivă Ox, inclusiv originea; b) raza plecând din origine (fără punctul O) care face cu semiaxa pozitivă Ox un unghi egal cu $\frac{\pi}{3}$; c) interiorul cercului cu centrul în origine şi de rază 2; e) mulţimea punctelor exterioare cercului de rază 1 şi cu centrul în punctul $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$. **5.** $z = \frac{1}{\sqrt{3}} + i$. **6.** Axa absciselor şi punctele (x, y) ale căror coordonate satisfac condiţiile: $x = -\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2} < y < \frac{\sqrt{3}}{y}$. **7.** $|z_1| = 2$, $|z_2| = \sqrt{2}$, $|z_3| = 2$, $\arg z_1 = \frac{\pi}{3}$, $\arg z_2 = \frac{\pi}{4}$, $\arg z_3 = \pi$; atunci $z_1z_2z_3 = 4\sqrt{2}\left(\cos\frac{17\pi}{12} + i\sin\frac{17\pi}{12}\right)$. **8.** a) $-i$; b) $-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$; c) -1; d) $4096(1 + i)$; e) -64. **9.** a) $\frac{1}{2^9}i$; b) $1 + i\sqrt{3}$. **12.** $2^n\cos^n\frac{\alpha}{2}\left(\cos\frac{n\alpha}{2} + i\sin\frac{n\alpha}{2}\right)$.
13. Din $z + \frac{1}{z} = 2\cos \alpha$, rezultă $z_{1,2} = \cos \alpha \pm \sin \alpha$. Avem $z_1 + \frac{1}{z_1} = z_2 + \frac{1}{z_2} = 2\cos \alpha$.
14. Dacă $z = \frac{1+ai}{1-ai}$, $a \in \mathbb{R}$, se vede uşor că $|z| = 1$. Reciproc, fie $z \in \mathbb{C}$ şi $x = \frac{1+ai}{1-ai}$. Atunci $a = \frac{z-1}{i(z+1)}$ şi a este unic. Cum $|z| = 1$, adică $z\bar{z} = 1$, rezultă $\bar{z} = \frac{1}{z}$. Obţinem $\bar{a} = a$ şi deci $a \in \mathbb{R}$. **15.** $z_0z_1\ldots z_n = \cos \alpha + i \sin \alpha$, unde $\alpha = \frac{(2^{n+1}-1)\pi}{2n}$. **16.** Rădăcinile de ordinul 3din 2 – 2i sunt: $\sqrt{2}\left(\cos\frac{(8k+7)\pi}{12} + i\sin\frac{(8k+7)\pi}{12}\right)$, $k \in \{0, 1, 2\}$, iar rădăcinile de ordinul 4 din 2 – 2i sunt: $\sqrt[8]{8}\left(\cos\frac{(8k+7)\pi}{16} + i\sin\frac{(8k+7)\pi}{16}\right)$, $k \in \{0, 1, 2, 3\}$. **18.** a) $\cos \frac{\pi}{8} + i \sin \frac{\pi}{8}$, $\cos\frac{5\pi}{8} + \quad + i\sin\frac{5\pi}{8}$, $\cos\frac{9\pi}{8} + i\sin\frac{9\pi}{8}$, $\cos\frac{13\pi}{8} + i\sin\frac{13\pi}{8}$; b) $\pm\frac{1}{2}\left[\sqrt{3}+1-(\sqrt{3}-1)i\right]$,

$\pm\left[\sqrt{3}-1+(\sqrt{3}+1)\mathrm{i}\right]$; c) $\frac{\sqrt[6]{2}}{4}\left[\sqrt{2}-\sqrt{6}+\mathrm{i}(\sqrt{2}+\sqrt{6})\right]$, $-\frac{\sqrt[3]{4}}{2}(1+\mathrm{i})$, $\frac{\sqrt[6]{2}}{4}\left[\sqrt{6}+\sqrt{2}-\mathrm{i}(\sqrt{6}-\sqrt{2})\right]$;

d) $\pm\frac{\sqrt[4]{2}}{2}(\sqrt{3}+\mathrm{i})$, $\pm\frac{\sqrt[4]{2}}{2}(1-\mathrm{i}\sqrt{3})$. **19.** a) ± 3, ± 1; b) ± 4, ± 1; c) ± 1; $\pm\sqrt[4]{2}$;

d) $\pm\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}$; $\pm\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}$; e) $\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$; $\pm\frac{\sqrt{3}}{3}$; f) $\pm\frac{1}{2}$; $\pm\frac{1}{2\sqrt{2}}$. **20.** a) 1, $\frac{-1\pm\mathrm{i}\sqrt{3}}{2}$, 2,

$-1\pm\mathrm{i}\sqrt{3}$; b) ± 1, $\pm\mathrm{i}$, $\frac{1}{2}\left(\pm\sqrt{2-\sqrt{2}}\pm\mathrm{i}\sqrt{2-\sqrt{2}}\right)$. **21.** Se calculează $S_1+\mathrm{i}S_2$ şi se aplică formula lui

Moivre. Obţinem $S_1=\dfrac{\sin\frac{nt}{2}\cos\frac{(n+1)t}{2}}{\sin\frac{t}{2}}$, $S_2=\dfrac{\sin\frac{nt}{2}\sin\frac{(n+1)t}{2}}{\sin\frac{t}{2}}$. **22.** Demonstraţie analoagă cu cea a relaţiei (3) din demonstraţia teoremei lui Pompeiu, prezentată în manual.

1. a) (2); b) (4, 5), (5, 4); c) (α, β, γ), (α, γ, β), (β, α, γ), (β, γ, α), (γ, α, β), (γ, β, α). **2.** a) 5 760; b) 322 560; d) $n(n-1)$; e) $(n-3)(n-4)$; f) $\frac{n^2+3n+1}{(n+2)!}$. **3.** a) $n=7$; b) $n=6$; c) $n=2$. **4.** a) $n\in\{3, 4, \ldots, 9\}$; b) $n\in\{0, 1, 2, \ldots, 6\}$. **5.** $4!=24$. **6.** $10!=3\ 628\ 800$. **8.** Numărul permutărilor este $mn(m+n-2)!$. **9.** Dacă n este numărul de elemente al mulţimii; atunci $500\le n!\le 1\ 000$, de unde $n=6$. **10.** $6!-5!=600$. **11.** $(n-1)!$ **13.** 48. **14.** $A_8^4=1\ 680$ moduri; dacă unul din examene trebuie dat în ziua a 8-a, atunci avem $4\cdot A_7^3=840$ moduri. **15.** $A_{30}^2=30\cdot 29=870$. **16.** a) $(n-4)^2$; b) $n(n-1)$; c) $2n\,A_{2n+1}^{k+1}$. **17.** a) $n\in\{9, 10\}$; b) 19; c) $n=10$. **18.** Trebuie să avem $A_n^k=p\,A_n^{k-2}$. Rezultă că problema este posibilă dacă numărul p este produsul a două numere naturale consecutive, adică $p=m(m+1)$. Apoi, se deduce că $n=k+m-1$. **19.** a) $\varnothing$, $\{3\}$, $\{4\}$, $\{3, 4\}$. **20.** $C_{30}^3=4\ 060$. **21.** $C_n^2=\frac{n(n-1)}{2}$. **22.** $C_9^4=126$; $C_{10}^4=210$. **23.** a) $C_n^2-C_k^2+1$; b) $C_n^3-C_k^3$. **24.** $C_{20}^4\cdot C_3^1=14\ 535$. **25.** $C_9^3\cdot C_6^3\cdot C_3^3=1\ 680$. **26.** a) 5; b) 560; c) $C_{n+1}^{k+1}=\frac{(n+1)n\ldots(n-k+1)}{1\cdot 2\ldots(k+1)}$; d) 101; e) $C_{n-k}^{k+1}=\frac{(n-k)(n-k-1)\ldots(n-2k)}{1\cdot 2\ldots(k+1)}$; f) 55. **27.** a) 6; b) 5; c) 4; d) 17. **28.** O clasă oarecare conţine C_n^k submulţimi. Aşadar se cere să determinăm care dintre numerele $C_n^0, C_n^k, \ldots, C_n^n$ este cel mai mare. Dacă $n=2m$ este număr par, atunci C_{2m}^m este cel mai mare dintre numerele C_{2m}^k. Dacă $n=2m+1$ este un număr impar, atunci $C_{2m+1}^m=C_{2m+1}^{m+1}$ este cel mai mare. **29.** a) $n>11$; b) $7\le n<12$; c) $1\le k\le 10$; d) $9<k\le 16$. **32.** $C_7^3C_4^2+C_7^2C_4^3+C_7^1C_4^4$.

1. a) $x^{12} - 6ax^{10} + 15a^2x^8 - 20a^3x^6 + 15a^4x^4 - 6a^5x^2 + a^6$; b) $a^5 - 5a^4b + 10a^3b^2 - 10a^2b^3 + 5ab^4 - b^5$; c) $a^2 - 4a\sqrt{ab} + 6ab - 4b\sqrt{ab} + b^2$; d) $x^7 + 14x^6 + 84x^5 + 280x^4 + 560x^3 + 672x^2 + 448x + 128$. **2.** a) $-330x$; b) $70\sqrt{2}\,a^3b^2\sqrt{a}$; c) $-20xy\sqrt{xy}$; d) $126a^2b\sqrt{a}\,\sqrt[3]{b}$, $-126a^2b\,\sqrt[3]{b^2}$. **3.** a) $k = 3$; b) $\frac{286}{3^7}a^4$; c) $k = 6$. **4.** $k = 9$. **5.** $n = 17$. **6.** 26. **7.** $70a^3$. **8.** Din dezvoltare, avem $nm - (m + p)k = 0$, $nm - 11(m + p) = 1$, $nm - 23(m + p) = 5$. Scăzând prima ecuaţie din celelalte două şi făcând câtul, se obţine $k = 8$. Apoi, $m + p = -\frac{1}{3}$, $n = -\frac{8}{3m}$ şi, deoarece n este întreg pozitiv, avem $n = 8l$, cu l întreg pozitiv ş.a.m.d. **9.** Punem $x^2 = y^3 = 1$. Atunci, dezvoltând după formula binomului lui Newton şi înlocuind x^2 şi y^3 prin 1, obţinem suma căutată a coeficienţilor. Astfel, suma coeficienţilor este egală cu $(7 - 6)^9 = 1$. **10.** a) 51; b) 26. **11.** a) Se foloseşte relaţia $\frac{n+1}{k+1}C_n^k = C_{n+1}^{k+1}$; b) În dezvoltarea $(1 + x)^{n+1} = 1 + C_{n+1}^1x + C_{n+2}^2x^2 + \ldots + C_{n+1}^{n+1}x^{n+1}$ care se poate scrie: $\frac{(1+x)^{n+1}-1}{n+1} = C_n^0x + \frac{C_n^1}{2}x^2 + \frac{C_n^2}{3}x^3 + \ldots + \frac{C_n^n}{1+n}x^{n+1}$, pentru $x = 1$ se obţine: a) şi pentru $x = k$ se obţine b); c) Se foloseşte egalitatea: $kC_n^k = nC_{n-1}^{k-1}$; d) Se foloseşte aceeaşi egalitate ca la punctul c); e) Dacă S_1 este prima sumă, iar S_2 cea de-a doua, se calculează $S_1 + iS_2$. Se aplică formula lui Moivre.

2. a) $\vec{u}(5, 4)$; b) $\vec{u}(0, 6)$; c) $\vec{u}(-1, 0)$. **3.** a) $a = 3$, $b = -2$; b) $a = -\frac{1}{4}$, $b = -\frac{11}{8}$. **6.** a) $r = 2$; b) $r = 3$; c) $r = -\frac{1}{2}$. **7.** a) $a = -6$; b) $a = -2$, $a = 2$; c) $a = \frac{2}{5}$. **9.** a) $(-14, -8)$; b) $(17, 14)$. **10.** a) $M(4, 10)$; b) $N(3, 2)$; c) $P(6, -6)$. **13.** a) $\vec{u}(-13, 1)$; b) $\vec{u}(-19, 3)$; **15.** a) $4a + 5b - 15 = 0$; b) $C \in AB, D \notin AB$.

3. Fiqura $\mathcal{F}$ este formată cu punctele situate pe laturile pătratului $ABCD$, unde $A(1, 1)$, $B(2, 1)$, $C(2, 2)$ şi $D(1, 2)$. **4.** Numai punctele B, C, E şi F aparţin dreptei d. **5.** $(1, \frac{3}{2})$, $(3, \frac{1}{2})$, $(-2, 3)$, $(0, 2)$. **6.** $(\frac{1}{7}, 2)$, $(\frac{3}{7}, 1)$, $(\frac{5}{7}, 0)$, $(\frac{11}{7}, -3)$, $(-\frac{3}{7}, 4)$. **7.** $c = -3$. **8.** $m = -3$, $n = 6$. **9.** O ecuaţie de forma $ax + by + c = 0$ este ecuaţia unei drepte numai dacă $a \neq 0$ sau $b \neq 0$. În cazul nostru $a = m + 2$ şi $b = m^2 - 9$, $m \in \mathbb{R}$. Cum $m + 2$ şi $m^2 - 9$ nu se anulează simultan, condiţia „$a \neq 0$ sau $b \neq 0$“ este îndeplinită. a) $m = -2$; b) $m = 3$ sau $m = -3$; c) $m = 1$ sau $m = \frac{5}{3}$. **12.** $p = -7$, $q = \frac{41}{4}$. **13.** a) nu; b) nu; c) da. **14.** a) $\mathcal{M}$ este dreapta $x - 2y = 0$; b) M este reuniunea dreptelor $3x - y + 2 = 0$, $3x - y - 2 = 0$; c) $\mathcal{M}$ este reuniunea dreptelor $x - 2y = 0$, $x - 3y = 0$; d) $\mathcal{M}$ se reduce la punctul $(1, -2)$.

2. $m_{AB} = 1$, $m_{AC} = \frac{3}{4}$, $m_{BC} = \frac{5}{6}$. **3.** a) -3 ; b) $= \frac{1}{2}$; c) $\frac{2}{3}$; d) nu există; e) 0. **4.** a) $y = \frac{\sqrt{3}}{3}x$; b) $y = \sqrt{3}x$; c) $y = x$; d) $y = -x$. **5.** Cum $A \notin d$, avem $AM \parallel d \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow m_{AM} = m_d \Leftrightarrow \frac{a-4}{a-1} = \frac{5}{3} \Leftrightarrow a = -\frac{7}{2}$. **8.** Se arată că $m_{AB} = m_{DC}$ şi $AB \neq DC$, de unde rezultă $AB \parallel DC$ ($AB \neq DC \Leftrightarrow A, B, C$ nu sunt coliniare $\Leftrightarrow m_{AB} \neq m_{BC}$). Analog se arată că $AD \parallel BC$. **10.** a) $y = 3x - 1$; b) $y = -2x$. **11.** a) $y - 4 = \sqrt{3}(x + 3)$; b) $y - 3 = x - 2$; c) $y = -\sqrt{3}x$. **12.** Există două drepte paralele care îndeplinesc condiţiile date anume dreptele care trec prin $B(0, 2)$ şi $B'(0, -2)$ şi au panta -3, deci $d : y = -3x + 2$ sau $d : y = -3x - 2$. **13.** a) $y - \sqrt{3}x \pm 5$; b) $y = -x \pm 5$; c) $y = \pm 5$. **14.** a) $x - 4y + 7 = 0$; b) $2x - y + 2 = 0$; c) $x = 2$; d) $y = -3$. **15.** Două metode: 1) se scrie ecuaţia dreptei AA', unde A' este mijlocul laturii BC; 2) se scrie ecuaţia dreptei AG, unde G este centrul de greutate al lui ABC. Ecuaţia medianei: $2y = x - 1$. **16.** a) $4y - x + 3 = 0$, $5y + x - 1 = 0$, $y + 4x - 4 = 0$; b) $x - 3 = 0$, $x + y - 3 - 0$, $y = 0$. **17.** $3x + 8y - 9 = 0$, $3x + 2y + 9 = 0$. **18.** Se obţine $A(-4, 3)$ şi $5x + 2y - 13 = 0$, $x - 5y + 19 = 0$, $4x + 7y - 5 = 0$. **19.** Perimetrul este 12, iar aria 6. **20.** $2|ab|S = c^2$. **21.** „Tăieturile" dreptei d sunt $(a, 0)$ şi $(0, a)$ sau $(a, 0)$ şi $(0, -a)$. Se scrie ecuaţia prin tăieturi a lui d şi cum $A \in d$, rezultă $a = 1$ şi $a = 5$. Deci problema are două soluţii. **24.** a) $p = \frac{8}{5}$; b) $p = -1$; c) $p = 4$.

1. a) $\vec{u}(4, -5)$; b) $\vec{u}(1, 7)$; c) $\vec{u}(0, 3)$ sau $\vec{v} = \frac{1}{3}\vec{u}$, adică $\vec{v}(0, 1)$; d) $\vec{u}(-5, 0)$ sau $\vec{v} = -\frac{1}{5}\vec{u}$, adică $\vec{v}(1, 0)$. **2.** Fie θ măsura unghiului dintre dreapta d şi axa Ox. Dacă $\alpha = 0$, avem o dreaptă verticală, deci $\theta = \frac{\pi}{2}$. Dacă $\alpha \neq 0$, d nu este verticală şi are panta $m = \frac{\beta}{\alpha}$, deci $\mathrm{tg}\theta = \frac{\beta}{\alpha}$, de unde $\theta = \mathrm{arctg}\frac{\beta}{\alpha}$. Obţinem: a) $\frac{\pi}{3}$; b) $-\frac{\pi}{4}$; c) $-\frac{\pi}{6}$; d) $\frac{\pi}{2}$; e) 0. **3.** a) $x = 1 + 3t$, $y = 2 - t$; b) $x = 3t$, $y = 4t$; c) $x = 1$, $y = 7 + t$; d) $x = -1 + 3t$, $y = 5 - 9t$. **4.** b) $t_x = -3$, $t_y = \frac{1}{4}$; c) Numai A şi C aparţin lui d; d) Înlocuind $x = 1 - 4t$ şi $y = 3 + t$ în ecuaţia lui d' găsim $(1 - 4t) - (3 + t) + 2 = 0$ de unde $t = 0$, deci intersecţia $d \cap d'$ este $E(1, 3)$. **5.** a) $3x + y - 4 = 0$; b) $x - 2 = 0$; c) $y - 1 = 0$. **6.** a) $x = 2 + t$, $y = 1 + 2t$; b) $x = t$, $y = 5t$; c) $x = 2 - 2t$, $y = 3t$; d) $x = 3 + 4t$, $y = -5 + 2t$; e) $x = \frac{3}{2}$, $y = t$.

1. a) concurente; b) paralele; c) confundate. **2.** a) $(5, 6)$; b) $(3, 2)$; c) $(-\frac{5}{3}; 2)$. **3.** Sunt paralele: a), c) şi e). Sunt confundate: b) şi d). **4.** a) $a = -\frac{8}{5}$, $b = -\frac{15}{2}$; b) $ab = 12$ şi $a \neq -\frac{8}{5}$ sau $b \neq -\frac{15}{2}$. **5.** a) $a \in \mathbb{R} \setminus \{3\}$, $b \in \mathbb{R}$; b) $a = 3$, $b \in \mathbb{R} \setminus \{2\}$; c) $a = 3$, $b = 2$. **6.** a) d şi d' concurente $\Leftrightarrow m \in \mathbb{R} \setminus \{-4, 4\}$; b) $d \parallel d' \Leftrightarrow m = -4$ şi $n \in \mathbb{R} \setminus \{2\}$ sau $m = 4$ şi $n \in \mathbb{R} \setminus \{-2\}$;

c) $d = d' \Leftrightarrow m = -4$ şi $n = 2$, sau $m = 4$ şi $n = -2$. **7.** $(\frac{10}{3}; \frac{7}{6})$. **9.** a) d şi d' sunt concurente $\Leftrightarrow$ $ab' - a'b = (m + 2)(m + 4) - 8 \neq 0 \Leftrightarrow m \in \mathbb{R} \setminus \{-6, 0\}$; dacă $m = 0$, avem $d = d'$; dacă $m = -6$, avem $d \parallel d'$; b) d şi d' sunt concurente $\Leftrightarrow m \in \mathbb{R} \setminus \{-\frac{1}{3}, 2\}$; dacă $m = -\frac{1}{3}$ avem $d \parallel d'$; dacă $m = 2$ avem $d = d'$. **13.** a) $\frac{x+3}{2} = \frac{y-4}{3}$; b) $\begin{cases} x = -3 + t \\ y = 4 - 7t \end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$. **14.** $3x - 5y + 9 = 0$, $x - y + 3 = 0$, $x - 3y + 11 = 0$. **15.** $x + y - 6 = 0$, $2x - y - 14 = 0$. **16.** a) $m = -7$; b) $m = \frac{1}{5}$. **17.** a) $A(9, -4)$; b) $m = 1$; c) $m = \frac{1}{2}$; d) $m = 5$; e) $m = \frac{7}{5}$. **21.** $A(-1, -\frac{1}{2})$. **22.** a) da; b) nu; c) nu. **23.** a) $m = -7$; b) $m = \frac{5}{4}$.

7. $\vec{v}_1(0, 3)$, $\vec{v}_2(\frac{12}{5}, \frac{9}{5})$. **8.** $\vec{v}_1(2\sqrt{2}, -\sqrt{2})$, $\vec{v}_2(-2\sqrt{2}, \sqrt{2})$.

1. a) 5; b) $4\sqrt{2}$; c) $2\sqrt{5}$. **2.** Avem $AB = 5$, $BC = 5\sqrt{2}$, $AC = 5$, deci $AB = AC$ şi $AB^2 + AC^2 = BC^2$. **4.** $ABDE$ este paralelogram, BCE este dreptunghic în C, iar ACE este triunghi isoscel cu vârful în E. **5.** $\sqrt{5}$, $5\sqrt{2}$, $\sqrt{65}$. **6.** Patru puncte: (0, 4), (0, –12), $(6 + 2\sqrt{21}, 0)$, $(6 - 2\sqrt{21}, 0)$.

1. a) $3y + x = 1$; b) $y - x = 3$; c) $3y + 2x = 5$; d) $y - 2x = 5$. **4.** $M(14, 0)$, $N(0, \frac{14}{3})$. Problema se poate rezolva şi fără a scrie ecuaţia mediatoarei lui $[AB]$. Fie $M(a, 0)$ astfel că $MA = MB \Leftrightarrow MA^2 = MB^2 \Leftrightarrow (1 - a)^2 + 1 = (3 - a)^2 + 49 \Leftrightarrow a = 14$. **5.** a) $(\frac{5}{6}, \frac{1}{6})$; b) $(\frac{1}{2}, \frac{13}{2})$. **6.** a) Se constată că $m_{AB} \cdot m_{AC} = -1$, deci $A = 90°$. Rezultă că Ω este mijlocul ipotenuzei BC, deci $\Omega(-1, -2)$, iar $R = \Omega A = 5$. **7.** Ecuaţia înălţimii din A este a) $x + y - 6 = 0$; b) $2x + 3y - 2 = 0$. **8.** $C(2, 4)$. **9.** $2x + 7y + 22 = 0$, $7x + 2y - 13 = 0$, $x - y + 2 = 0$. **10.** $3x - y + 2 = 0$, $3x - 6y + 14 = 0$. **11.** a) $(\frac{8}{5}, \frac{9}{5})$; b) (–2, –1). **12.** a) (2, 3); b) (–1, –2). **13.** $3x + 2y = 0$, $2x - 3y - 13 = 0$. **14.** (2, 1), (4, 2), (–1, 7), (1, 8).

1. a) 3; b) 1; c) 4. **2.** a) 1; b) 0; c) 2. **4.** Avem $AB : 4x + 3y - 9 = 0$ şi $d(C, AB) = \frac{12}{5}$. **5.** $3\sqrt{5}$, $\frac{3}{2}\sqrt{2}$, $\sqrt{5}$. **6.** $m_1 = 1$, $m_2 = \frac{15}{11}$. **7.** a) $d = 3$; b) $d = 11$. **8.** $\frac{|c - c'|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$. **9.** Pătratul are aria 49. **10.** Dreptunghiul are aria 6. **11.** $y = 2x + 6$, $y = 2x - 14$. **12.** $C_1(5, 0)$, $C_2(\frac{7}{3}, 0)$. **13.** $A_1(7, 6)$, $A_2(-3, -\frac{2}{3})$. **14.** Mulţimea căutată este reuniunea a două drepte paralele cu h, $5x + 12y - 66 = 0$ şi $5x + 12y + 64 = 0$. **15.** $A_1(-2, 0)$, $A_2(\frac{8}{9}, 0)$. **16.** $x + y - 8 = 0$, $11x - y - 28 = 0$. **17.** a) $S = 8$; b) $S = 23$; c) $S = 1$. **18.** $5x + y - 3 = 0$, $x - 5y - 11 = 0$.

3. Locul geometric este o dreaptă perpendiculara pe AB. În cazul $k = 0$ se obține mediatoarea lui $[AB]$. **4.** Alegem O = piciorul perpendicularei din P pe AB, $Ox = AB$ și $Oy = OP$. Coordonatele sunt $A(a, 0)$, $M(m, 0)$, $B(b, 0)$ cu $a < m < b$ și $P(0, q)$ cu $q > 0$. **5.** Alegem $O = D$, $Ox = BC$ și $Oy = AD$. **6.** Fie un patrulater $ABCD$ în planul raportat la un reper oarecare, unde $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $C(x_3, y_3)$ și $D(x_4, y_4)$. Fie M, N, P, Q mijloacele laturilor AB, BC, CD, DA. a) Se arată, de exemplu, $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{QP}$. b) Fie E, F mijloacele diagonalelor AC, BD și R mijlocul lui $[EF]$. Se arată că R coincide cu mijlocul lui MP și cu mijlocul lui NQ. **11.** Alegem reperul astfel: $O = A$, $Ox = AB$, $Oy = AD$. Dacă notăm $AB = a$ și $AP = DR = h$, avem $P(h, 0)$, $R(0, a - h)$, $Q(h, a - h)$ și $C(a, a)$. Vectorii $\overrightarrow{CQ}(h - a, -h)$ și $\overrightarrow{PR}(-h, a - h)$ au produsul scalar nul, deci sunt perpendiculari. **13.** Alegerea reperului: $O = A$, $Ox = AB$, $Oy = AD$. Punctele D, E și F au coordonatele $D(0, a)$, $E(\frac{a}{2}, \frac{a\sqrt{3}}{2})$, $F(\frac{a(1+\sqrt{3})}{2}, \frac{a(1-\sqrt{3})}{2})$. **15.** Se alege reperul $O = A$, $Ox = AB$, $Oy = AD$, deci $B(b, 0)$, $C(b, d)$, $D(0, d)$. Se consideră $M(x_0, y_0) \in BD$, unde $x_0 \in (0, b)$, $y_0 \in (0, d)$. **17.** Dacă m este mediatoarea lui M_1M_2, avem $M(x, y) \in m \Leftrightarrow MM_1^2 = MM_2^2 \Leftrightarrow$ $\Rightarrow (x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 = (x - x_2)^2 + (y - y_2)^2 \Leftrightarrow 2(x_1 - x_2)x + 2(y_1 - y_2)y - x_1^2 - y_1^2 + x_2^2 + y_2^2 = 0$. **18.** Folosim formula de la ex. **17** și scriem ecuația mediatoarei segmentului M_1M_2, unde $M_2(x_2, y_2)$ este dat ca în enunț. Obținem $\frac{4(ax_1 + by_1 + c)}{a^2 + b^2}(ax + by + c) = 0$, ceea ce este echivalent cu ecuația lui $d : ax + by + c = 0$ deoarece $ax_1 + by_1 + c \neq 0$, pentru că $M_1 \notin d$. Așadar, mediatoarea lui M_1M_2 coincide cu d, deci M_2 este simetricul lui M_1 față de d.

1. 12 625 unități bancare. **2.** 14,8 unități bancare. **3.** 4,88%. **5.** 10 986 unități bancare. **6.** 108 unități bancare. **7.** 288 000 lei. **8.** 1 050 unități bancare. **9.** 2,5263 ani. **10.** $V = 20$ milioane, $T = 10$ ani.

6. $P((i_1, ..., i_n)) = \frac{1}{n!}$ pentru orice permutare $(i_1, ..., i_n)$ a mulțimii $(1, ..., n)$. Fie A evenimentul dorit. $P(A) = \frac{(n-2)(n-3)!}{n!} = \frac{1}{n(n-1)}$. **7.** Fie A = „Pe primul scaun se așează o fată, iar pe ultimul un băiat". $P(A) = \frac{n \cdot m(m+n-2)!}{(m+n)!} = \frac{n \cdot m}{(m+n)(m+n-1)}$. **8.** Numărul evenimentelor elementare este $C_7^3 - C_3^3 = 34$. **10.** Se rezolvă inegalitatea $C_n^5 < C_n^7$. **11.** $P(A) = \frac{2}{5}$, $P(B) = \frac{4}{7}$, $P(A \cap B) = \frac{8}{35}$. **12.** Se aplică formula probabilității condiționate. **13.** Se aplică formula de la independență. **14.** Fie A = „numărul bilei extrase este un pătrat perfect" și B = „numărul bilei extrase să dea restul 2 la împărțirea cu 3". $P(A) = \frac{[\sqrt{n}]}{n}$, $P(B) = \frac{\left[\frac{n+1}{3}\right]}{n}$, unde $[a]$ reprezintă partea întreagă a lui a. **15.** Se aplică schema Bernoulli.

16. Se aplică schema Poisson. **17.** Se aplică schema Bernoulli, considerând ca „succes" evenimentul „obţinerea, la o aruncare, a unui număr mai mic sau egal cu trei". **18.** Se aplică schema hipergeometrică. **19.** $P(S = 1) = \frac{2}{48}$, $P(S = 2) = \frac{2}{48}$, $P(S = 3) = \frac{8}{48}$, $P(S = 4) = \frac{6}{48}$, $P(S = 5) = \frac{6}{48}$, $P(S = 6) = \frac{24}{48}$. **22.** $P(S = 0) = \frac{6}{36}$, $P(S = 1) = \frac{10}{36}$, $P(S = 2) = \frac{8}{36}$, $P(S = 3) = \frac{6}{36}$, $P(S = 4) = \frac{4}{36}$, $P(S = 5) = \frac{2}{36}$.
23. $P(X = 0) = 0{,}027$, $P(X = 1) = 0{,}7$, $P(X = 2) = 0{,}21$, $P(X = 3) = 0{,}063$.

Testul 1

1. $f^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f^{-1}(x) = \begin{cases} \frac{x+2}{3}, \text{ dacă } x \le 4 \\ \sqrt{x}, \text{ dacă } x > 4 \end{cases}$. **2.** Cei patru coeficienţi sunt în progresie aritmetică dacă şi numai dacă $2C_n^{k+1} = C_n^k + C_n^{k+2}$ şi $2C_n^{k+2} = C_n^{k+1} + C_n^{k+3}$. Aceste egalităţi sunt echivalente, respectiv, cu $n^2 + 4k^2 + 8k - 4nk - 5n + 2 = 0$ (1) şi $n^2 + 4k^2 + 16k - 4nk - 9n + 14 = 0$ (2). Scăzând (1) şi (2) se obţine $n = 2k + 3$ care, înlocuit în (1) ne dă $k = -2$, care nu este număr natural. **3.** $a = 2\pi - b \Rightarrow \sin a = \sin(2\pi - b) = \sin(-b) \Rightarrow \sin a + \sin b = 0$. Termenul general este $a_n = a_1 + (n-1)r = \frac{\pi}{36} + (n-1)\frac{\pi}{36} = \frac{n\pi}{36}$. Progresia are 71 de numere şi $a_1 + a_{71} = a_2 + a_{70} = \ldots = a_{35} + a_{37} = \frac{\pi}{36} + \frac{71\pi}{36} = 2\pi$, iar $a_{36} = \pi$. Rezultă $\sin\frac{\pi}{36} + \sin\frac{71\pi}{36} = \sin\frac{2\pi}{36} + \sin\frac{70\pi}{36} = \ldots = 0$ şi $\sin a_{36} = \sin\pi = 0$. În concluzie, $S = 0$. **4.** Fie $d_1 : 3x - 2y - 5 = 0$, $d_2 : 2x + 3y + 7$. Constatăm că $d_1 \perp d_2$ şi $A \notin d_1 \cup d_2$. Avem $d(A, d_1) = \sqrt{13}$, $d(A, d_2) = \frac{6}{\sqrt{13}}$, deci aria dreptunghiului este 6.
5. Formula utilizată pentru calculul sumei încasate după 2 ani este $S_2 = S_0(1 + i) + S_0(1 + i)^2 = S_0(1 + i)(2 + i)$. Dobânda unitară i este soluţie a ecuaţiei $S_0 \cdot i^2 + 2S_0 \cdot i + (2S_0 - m) = 0$. Se observă că natura financiară a problemei impune condiţiile $S_0 > 0$, $m > 0$, $m \ge 2S_0$. Dintre cele două rădăcini reale ale ecuaţiei doar una satisface aceste condiţii, şi anume $i = -\frac{3}{2} + \frac{1}{2\sqrt{S_0}}(S_0 + 4m)$. În cazul $S_0 = 100$ şi $m = 231$, rezolvând ecuaţia $100(1 + i)(2 + i) = 231$ se obţine soluţia $i = \frac{1}{10}$, deci $i = 10\%$.

Testul 2

1. f_m este surjectivă pentru orice $m \in \mathbb{R}$, f_m este injectivă pentru orice $m \ge 0$. Pentru $m \ge 0$, f_m este inversabilă şi $f_m^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_m^{-1}(x) = \begin{cases} \frac{m - \sqrt{m^2 + 4(1-x)}}{2}, \text{ dacă } x \le 1 \\ x - 1, \text{ dacă } x > 1 \end{cases}$.
2. Evident, $|z| = 1$. Să presupunem prin absurd că există un număr natural n cu $z^n = 1$.

Atunci $(2-i)^n = (2+i)^n$. Avem $(2-i)^n = [(2+i)-2i]^n = (2-i)^n + C_n^1(2-i)^{n-1}2i + \ldots + C_n^{n-1}(2-i)(2i)^{n-1} + (2i)^n$, de unde $(2i)^n = (-2+i)[C_n^1(2-i)^{n-2}\cdot 2i + \ldots + C_n^{n-1}(2i)^{n-1}] = (2-i)(p+qi)$, cu $p, q \in \mathbb{Z}$. Deci $|2i|^n = |2-i||p+qi|$, adică $2^n = 5(p^2+q^2)$, ceea ce este imposibil. **3.** a) Fie T o perioadă a funcţiei f, deci $f(x+T) = f(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$ (1). Înlocuind $x = 0$ şi $x = -T$ în relaţia (1), rezultă $\sin 3T + \cos 9T = 1$ şi $-\sin 3T + \cos 9T = 1$, de unde $\sin 3T = 0$ şi $\cos 9T = 1$. Prin urmare, avem: $3T = k\pi$ şi $9T = 2n\pi \Rightarrow \frac{k\pi}{3} = \frac{2n\pi}{9} \Rightarrow 3k = 2n$, unde $k, n \in \mathbb{Z}$. Constatăm că $n = 3$ şi $k = 2$ verifică ecuaţia $3k = 2n$, deci $T = \frac{2\pi}{3}$. Se arată că $\frac{2\pi}{3}$ este cea mai mică perioadă strict pozitivă, deci $T_0 = \frac{2\pi}{3}$; b) Pentru $x = \frac{\pi}{4}$ obţinem $(\frac{\sqrt{2}}{2})^n + (\frac{\sqrt{2}}{2})^n = 1$, ecuaţie exponenţială cu soluţia $n = 2$. **4.** Avem $A'(1, -3)$, $B'(-4, 2)$ şi $A'B' : y + 3 = \frac{2+3}{-4-1}(x-1)$ sau $y + 3 = -x + 1 \Leftrightarrow x + y + 2 = 0$. Rezultă $M(-2, 0)$, $N(0, -2)$ şi $m_{AM} = \frac{3-0}{1+2} = 1$, $m_{BN} = \frac{2-(-2)}{4-0} = 1$. Cum $m_{AM} = m_{BN}$ şi $AM \neq BN$ (deoarece $A \neq B$), rezultă $AM \parallel BN$. **5.** Ştim că dacă anuităţile sunt egale, amortismentele succesive formează o progresie geometrică crescătoare, cu primul termen Q_1 şi raţia $(1+i)$. Putem scrie $732{,}05 = Q_1(1+0{,}1)^4$, de unde rezultă valoarea primului amortisment $Q_1 = 500$. Utilizăm acum formula $Q_1 = A - D_0 = T_0 i - \frac{T_0(1+i)}{t}$ şi obţinem $t = \frac{T_0(1+i)}{T_0 i - Q_1}$. Înlocuind valorile numerice obţinem $t = 22$.

Testul 3

1. Putem scrie $A = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ cu $x_1 < x_2 < \ldots < x_n$. Dacă f este strict crescătoare avem $f(x_1) < f(x_2) < \ldots < f(x_n)$. Cum $f : A \to A$, atunci $f(x_1), f(x_2), \ldots, f(x_n) \in \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ şi deci $x_1 \leq f(x_1)$. dacă $x_1 \neq f(x_1)$, atunci $x_1 < f(x_1)$. Avem $f(x_1) < f(f(x_1))$ şi deci $x_1 < f(x_1) < (f\circ f)(x_1)$. Deci pentru un număr natural $n > 1$ oarecare, avem $x_1 < f(x_1) < (f\circ f)(x_1) < \ldots < (\underbrace{f\circ f\circ \ldots \circ f}_{n \text{ ori}})(x_1)$. Cum n este arbitrar, obţinem că mulţimea A conţine o infinitate de elemente, contradicţie. Deci $f(x_1) = x_1$. În continuare, procedând la fel, avem $f(x_2) = x_2, \ldots, f(x_n) = x_n$ şi deci $f = 1_A$. **2.** $x = 12$, $y = 7$. **3.** a) Presupunem că f este periodică şi are perioada $T \neq 0$, deci $f(x+T) = f(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Pentru $x = 0$ şi $x = -T$ avem $\sin T + \cos\alpha T = 1$ şi $-\sin T + \cos\alpha T = 1$. Rezultă $\sin T = 0$ şi $\cos\alpha T = 1$, deci există $n, m \in \mathbb{Z}$ astfel încât $T = n\pi$ şi $\alpha T = 2m\pi$. Prin urmare, $\frac{\alpha T}{T} = \alpha = \frac{2m}{n} \in \mathbb{Q}$; b) Ecuaţia este echivalentă cu $\cos x\,[(4a-2)\cos^2 x - 3a + 1] = 0 \Leftrightarrow \cos x\,[(2a-1)\cos 2x - a] = 0$. Avem $\left|\frac{a}{2a-1}\right| \leq 1 \Leftrightarrow a \in (-\infty, \frac{1}{3}] \cup [1, \infty)$, iar soluţiile sunt: 1) $a \in (-\infty, \frac{1}{3}] \cup [1, \infty)$ $\Rightarrow x = \pm\frac{1}{2}\arccos\frac{a}{2a-1} + k\pi, x = (2k+1)\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$; 2) $a \in (\frac{1}{3}, 1) \Rightarrow x = (2n+1)\frac{\pi}{2}, n \in \mathbb{Z}$.
4. Fie $A_1(\lambda, 0)$, $A_2(0, a-\lambda)$ şi $A(\lambda, a-\lambda)$ unde $0 < \lambda < a$. Fie d perpendiculara din A pe diagonala A_1A_2. Cum $m_{A_1A_2} = -\frac{a-\lambda}{\lambda}$, avem $m_d = \frac{\lambda}{a-\lambda}$ şi $d : y - (a-\lambda) = \frac{\lambda}{a-\lambda}(x-\lambda)$

sau $-ay + a^2 + \lambda(x + y - 2a) = 0$. Sistemul $\begin{cases} x+y-2a=0 \\ a(a-y)=0 \end{cases}$ are soluţia $(x, y) = (a, a)$. În concluzie, dreapta d trece prin punctul fix (a, a). **5.** Dacă clientul alege depozitul la termen, suma finală este $S_4 = 1000(1 + 0{,}09)^4 = 1411{,}6$ unităţi bancare. Dacă clientul alege un depozit la vedere, suma finală pe care o ridică este $S_t = 1000(1 + 0{,}04)^4(1 + 0{,}04\cdot\frac{150}{365}) = 1189{,}1$ unităţi bancare. Raportul procentual al celor două sume este $\frac{S_t}{S_4}\cdot 100\% = 84{,}238\%$, respectiv $\frac{S_4}{S_t}\cdot 100\% = 118{,}71\%$.

Testul 4

1. Oricare $x \in [3, 7]$ este soluţie a ecuaţiei date. **2.** Suma se scrie $\sum_{k=2}^{n}(C_k^2)^2 =$
$= \sum_{k=2}^{n}\frac{k^2(k-1)^2}{2} = \frac{1}{4}\sum_{k=2}^{n}k^4 - \frac{1}{2}\sum_{k=2}^{n}k^3 + \frac{1}{4}\sum_{k=2}^{n}k^2$ şi ţinem cont că $\sum_{k=1}^{n}k^2 = \frac{n(n+1)}{2}$,
$= \sum_{k=1}^{n}k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$, $\sum_{k=1}^{n}k^4 = \frac{n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n+1)}{30}$ (vezi manual, cap. 6, pct. 5.3).
3. a) Expresia din interiorul modulului devine $\frac{1}{2}\sin 2(a-b)$, deci $|\frac{1}{2}\sin 2(a-b)| \le \frac{1}{2}$.
b) Avem $\sin(a + k\pi) = (-1)^k\sin a = \sin[(-1)^k a]$, $\forall\ k \in \mathbb{N}$, deci $\arcsin(\sin(a + k\pi)) =$
$= (-1)^k a$, deoarece $a \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \Rightarrow (-1)^k a \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. Prin urmare $S = a - a + a - a = 0$.
4. Ecuaţia unei drepte prin $P(2, 7)$ este $x = 2$ sau $h : y - 7 = m(x - 2)$, unde $m \in \mathbb{R}$. Distanţa dintre Q şi dreapta $x = 2$ este egală cu 1. Să aflăm m astfel încât $d(Q, h) = 5 \Leftrightarrow$
$\frac{|m-2+7-2m|}{\sqrt{1+m^2}} = 5 \Leftrightarrow |-m + 5| = 5\sqrt{1+m^2} \Leftrightarrow 24m^2 + 10m = 0$. Obţinem $m_1 = 0$ şi
$m_2 = -\frac{5}{12}$, deci dreptele cerute sunt $y - 7 = 0$, $5x + 12y - 94 = 0$. **5.** Cei 3 agenţi comerciali practică următoarele preţuri: $p_1 = 102$, $p_2 = 104$, $p_3 = 107$, iar preţul mediu al produsului este $\overline{p} = 104{,}33$. Valorile TVA aferente vânzării pentru cei 3 agenţi comerciali sunt: $T_1 = (102 - 100)\cdot\frac{18}{100} = 0{,}36$; $T_2 = (104 - 100)\cdot\frac{18}{100} = 0{,}72$;
$T_3 = (107 - 100)\cdot\frac{18}{100} = 1{,}26$; valoarea medie a TVA este $\overline{T} = 0{,}78$.

Testul 5

1. Condiţiile de existenţă ne dau $x \in [-9, 97]$. Notând $u = \sqrt[4]{97-x} \ge 0$ şi $v = \sqrt{9+x} \ge 0$, obţinem sistemul $\begin{cases} u+v=8, \\ u^4+v^2=106 \end{cases}$. Rezolvând sistemul, obţinem $u = 3$,

$v = 5$, de unde $x = 16$. **2.** Avem $\varepsilon^3 = 1$ şi $\varepsilon^2 + \varepsilon + 1 = 0$. Deci $1 + \varepsilon^k = \begin{cases} -\varepsilon^2, \text{ dacă } k = 3q+1 \\ -\varepsilon, \text{ dacă } k = 3q+2 \\ 2, \text{ dacă } k = 3q \end{cases}$

şi, prin urmare, pentru orice $k \geq 1$ avem $(1 + \varepsilon^k)(1+ \varepsilon^{k+1})(1 + \varepsilon^{k+2}) = 2$. Cum $2005 = 668 \cdot 3 + 1$, rezultă $(1 + \varepsilon)(1 + \varepsilon^2) \ldots (1 + \varepsilon^{2005}) = 2^{668}(1 + \varepsilon) = -2^{662}(-\varepsilon^2) = 2^{661}(1 + i\sqrt{3})$

3. Notăm $\cos x = t$; ecuaţia $2(2a + 1)\, t^2 + 3t + (1 - a) = 0$ are $\Delta = (4a - 1)^2$ şi $t_1 = -\dfrac{1}{2}$, $t_2 = \dfrac{a-1}{2a+1}$. Pentru $\cos x = -\dfrac{1}{2}$, rezultă $x \notin [0, \dfrac{\pi}{4}]$, deci dacă x este o soluţie a ecuaţiei din $[0, \dfrac{\pi}{4}]$ atunci $\cos x = \dfrac{a-1}{2a+1}$. Funcţia cosinus este strict descrescătoare pe $[0, \pi]$, deci $0 \leq x \leq \dfrac{\pi}{4}$ implică $\cos 0 \geq \cos x \geq \cos\dfrac{\pi}{4}$ sau $\dfrac{\sqrt{2}}{2} \leq \dfrac{a-1}{2a+1} \leq 1 \Leftrightarrow a \in [-\dfrac{4+3\sqrt{2}}{2}; -2]$.

4. Avem $m_{AB} = -\dfrac{b}{a}$, deci $m_{CD} = \dfrac{a}{b}$, iar $CD : y = \dfrac{a}{b}(x - c)$, deci $D(0, -\dfrac{ac}{b})$. Se arată că $m_{BC} \cdot m_{AD} = -1$. **5.** Adaosul comercial mediu este $\overline{a} = 11\%$. Dispersia de selecţie este $s^2 = 7$, iar coeficientul de variaţie este $cv = \dfrac{\sqrt{7}}{11} \cdot 100\% = 24{,}052\%$.

Testul 6

1. Dacă $x = a$, se obţine $a = 0$ şi deci $x = 0$. Dacă $x \neq a$, ecuaţia se scrie $\left(\dfrac{a+x}{a-x}\right)^{\frac{2}{3}} - 5\left(\dfrac{a+x}{a-x}\right)^{\frac{1}{3}} + 4 = 0$. Notând $t = \left(\dfrac{a+x}{a-x}\right)^{\frac{1}{3}}$, obţinem $t = 1$ şi $t = 4$. Pentru $t = 1$ rezultă $x = 0$, iar pentru $t = 4$ rezultă $x = \dfrac{63}{65}a$. Deci $x_1 = 0$, $x_2 = \dfrac{63}{65}a$. **2.** $2\cos\left[n\left(\dfrac{\pi}{2} - \alpha\right)\right]$.

3. a) Avem $\dfrac{3\pi}{2} = 2\pi - \dfrac{\pi}{2}$, $\dfrac{5\pi}{2} = 2\pi + \dfrac{\pi}{2}$. Fie $I = [\dfrac{3\pi}{2}, \dfrac{5\pi}{2}]$. Vom arăta că f este bijectivă, adică $\forall\, y \in [-1, 1]$, ecuaţia $y = \sin x$ are soluţie unică în I. Fie $y \in [-1, 1]$; ştim că există şi este unic $x' \in [-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}]$ astfel încât $y = \sin x'$, anume $x' = \arcsin y$. Rezultă că $x' + 2\pi \in I$ şi $\sin(x' + 2\pi) = \sin x' = y$, deci luăm $x = \arcsin y + 2\pi$. Funcţia inversă este $f^{-1} : [-1, 1] \to [\dfrac{3\pi}{2}, \dfrac{5\pi}{2}]$, $f^{-1}(x) = \arcsin x + 2\pi$. b) Inegalitatea $Ax^2 + Bx + C \geq 0$ este adevărată pentru orice $x \in \mathbb{R}$ dacă şi numai dacă $\Delta = B^2 - 4AC \leq 0$ şi $A > 0$. Avem $\Delta = 4(\cos a + \sin a)^2 - 4(3 + 2\cos a - 2\sin a) = 8(\cos a + 1)(\sin a - 1) \leq 0$ deoarece $\cos a \geq -1$ şi $\sin a \leq 1$, $\forall\, a \in \mathbb{R}$. De asemenea, $A = 3 - 2\sqrt{2}\, \sin(a - \dfrac{\pi}{4}) \geq 3 - 2\sqrt{2} > 0$. **4.** a) $d_1 \parallel d_2 \Leftrightarrow 3a(-2a) - (-8)(a + 1) = 0$. Obţinem $3a^2 - 4a - 4 = 0$, deci $a_1 = 2$, $a_2 = -\dfrac{2}{3}$; b) $d_1 \perp d_2 \Leftrightarrow 3a(a + 1) + (-8)(-2a) = 0$. Obţinem $3a^2 + 19a = 0$, deci $a_1 = 0$, $a_2 = -\dfrac{19}{3}$. **5.** Compararea variabilităţii celor două seturi de date statistice se face prin compararea coeficienţilor de variaţie, care sunt indicatori adimensionali. Avem: $\overline{x} = 2{,}8$; $s_x^2 = 0{,}585$; $cv_x = 27{,}316\%$; $\overline{y} = 12{,}75$; $s_y^2 = 26{,}188$; $cv_y = 40{,}137\%$.

Testul 7

1. Dacă $b = 0$ şi $a = 0$, mulţimea soluţiilor ecuaţiei date este $[0, +\infty]$; dacă $b = 0$ şi $a \neq 0$ ecuaţia nu are soluţii reale; dacă $b \neq 0$ şi $a^2 - \frac{(b-2a)^2}{27b} \geq 0$, ecuaţia are soluţia $x = a^2 - \frac{(b-2a)^2}{27b}$; dacă $b \neq 0$ şi $a^2 - \frac{(b-2a)^2}{27b} < 0$, ecuaţia nu are soluţii reale. **2.** Fie $y = 2^x > 0$ şi obţinem $(m-2)y^2 + 2(2m-3)y + 5m - 6 = 0$ (1). Avem $\Delta = 4(-m^2 + 4m - 3)$. i) Ecuaţia dată are o singură rădăcină reală $\Leftrightarrow$ ecuaţia (1) are o singură rădăcină pozitivă $\Leftrightarrow \Delta \geq 0$ şi $P = \frac{5m-6}{m-2} < 0 \Leftrightarrow m \in (\frac{6}{5}, 2)$. ii) Ecuaţia dată are două rădăcini reale distincte $\Leftrightarrow$ ecuaţia (1) are două rădăcini distincte pozitive $\Delta > 0$, $S = -\frac{2(2m-3)}{m-2} > 0$, $P = \frac{5m-6}{m-2} > 0$. Sistemul de inecuaţii obţinut nu are soluţii. **3.** Avem $\frac{5\pi}{2} = 3\pi - \frac{\pi}{2}$, $\frac{7\pi}{2} = 3\pi + \frac{\pi}{2}$. Fie $J = [\frac{5\pi}{2}, \frac{7\pi}{2}]$. Vom arăta că f este bijectivă, adică $\forall\, y \in [-1, 1]$ ecuaţia $y = \sin x$ are soluţie unică în J. Fie $y \in [-1, 1]$; ştim că există şi este unic $x' \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ astfel încât $y = \sin x'$, anume $x' = \arcsin y$. Rezultă că $3\pi - x' \in J$ şi $\sin(3\pi - x') = \sin x' = y$, deci luăm $x = 3\pi - \arcsin y$. Funcţia inversă este $f^{-1} : [-1, 1] \to [\frac{5\pi}{2}, \frac{7\pi}{2}]$, $f^{-1}(x) = 3\pi - \arcsin x$. **4.** Fie λ raportul în care P împarte segmentul AB, deci $P(\frac{a}{1-\lambda}; \frac{-a\lambda}{1-\lambda})$. Prin urmare, $Q(\frac{a}{1-\lambda}; 0)$ şi $R(0; \frac{-a\lambda}{1-\lambda})$, de unde $m_{QR} = \frac{y_Q - y_R}{x_Q - x_R} = \lambda$. Dreapta care trece prin P şi este perpendiculară pe QR are ecuaţia $y + \frac{a\lambda}{1-\lambda} = -\frac{1}{\lambda}(x + \frac{a}{1-\lambda})$ sau $x - a + \lambda(y - a)$, deci trece prin punctul fix $C(a, a)$. **5.** Evenimentul sigur este $E = \{x, y, z) \mid x \in U,\ y \in U - \{x\}, z \in U - \{x, y\}\}$, iar probabilitatea unui eveniment elementar $e = (x, y, z)$ este $P(\{e\}) = \frac{1}{1320}$, $\forall\, e \in E$. Notăm cu M evenimentul ca cele trei bile extrase să fie de aceeaşi culoare şi cu M_a, M_r evenimentele ca cele trei bile extrase să fie albe, res-pectiv roşii. Avem $M = M_a \cup M_r$, iar cele două evenimente sunt incompatibile. Rezultă $P(M) = M(M_a) + P(M_r) = \frac{5\cdot 4\cdot 3}{1320} + \frac{7\cdot 6\cdot 5}{1320} = \frac{270}{1320} = \frac{9}{44}$.

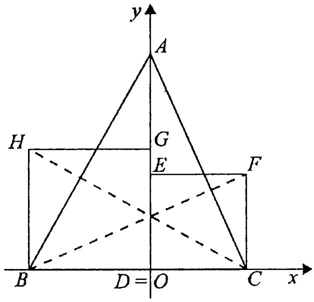
Testul 8

1. Se consideră separat cazurile: 1° $\frac{a-1}{a+1} > 1$ şi 2° $0 < \frac{a-1}{a+1} < 1$. În cazul 1°, inegalitatea devine $x^2 \geq \frac{-2(a+2)}{a+1}$ pentru orice x real. Deci $\frac{-2(a+2)}{a+1} \leq 0$, de unde $a \in (-\infty, -2]$. În cazul 2°, inegalitatea devine $x^2 + 3 \leq \frac{a-1}{a+1}$. Cum $x^2 + 3 \geq 0$, iar $\frac{a-1}{a+1} < 1$, nu se obţine

nici o valoare pentru a. Deci $a \in (-\infty, -2]$. **2.** Avem $(1 + 2x + 3x^2)^{10} = [(1 + 2x) + 3x^2]^{10} =$
$= \sum_{k=0}^{10} C_{10}^{k} (1 + 2x)^{10-k}(3x^2)^k = (1 + 2x)^{10} + C_{10}^{1} (1 + 2x)^9 3x^2 + C_{10}^{2} (1 + 2x)^8(3x^2)^2 + P(x)$
unde $P(x)$ nu conţine x^4. Coeficientul lui x^4 este $C_{10}^{4} \cdot 2^4 + C_{10}^{1} \cdot C_9^2 \cdot 2^2 \cdot 3 + C_{10}^{2} \cdot 3^2 = 8\ 085$.

3. b) $n = 5$.

4. Alegem axele astfel: $O = D$; $Ox = BC$, $Oy = AD$. Avem $D(0, 0)$, $C(c, 0)$, $B(-b, 0)$, $A(0, b + c)$ şi $F(c, c)$, $E(0, c)$, $H(-b, b)$, $G(0, b)$. Se arată că $m_{BF} \cdot m_{AC} = -1$ şi $m_{CH} \cdot m_{AB} = -1$.



5. Evenimentul sigur este $E = \{x, y, z) \mid x, y, z \in \{0, 50\}\}$, iar probabilitatea unui eveniment elementar $e = (x, y, z)$ este $P(\{e\}) = \frac{1}{8}$, $\forall\ e \in E$. Variabila aleatoare care dă suma punctelor obţinute este $X: E \to \{0, 50, 100, 150\}$, $X(e) = x + y + z$, cu $P(X = 0) =$ $P(X = 150) = \frac{1}{8}$, $P(X = 50) = P(X = 100) = \frac{3}{8}$. Rezultă $M(X) = 75$.

Testul 9

1. Trebuie ca $x > 0$ şi $x \neq 1$. Inecuaţia se scrie $\log_{x+2}x - \frac{1}{\log_{x+2} x} < 0$, adică $\frac{\log^2_{x+2} x - 1}{\log_{x+2} x} < 0$ sau $\frac{(\log_{x+2} x - 1)(\log_{x+2} x + 1)}{\log_{x+2} x} < 0$. Cum $\log_{x+2} x - 1 < 0$, oricare ar fi x, obţinem ecuaţia echivalentă $\frac{\log_{x+2} x + 1}{\log_{x+2} x} > 0$ care, rezolvată, ne dă $x \in (0, \sqrt{2} - 1) \cup (1, +\infty)$.
2. Din $C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 = 22$ rezultă $n = 6$. Pentru $n = 6$ din $T_3 + T_5 = 420$ rezultă $x_1 = -1$, $x_2 = 2$. **3.** Avem $(a_1 - 1) + (a_2 - 1) + \ldots + (a_n - 1) = 0$ şi $a_1 - 1 \leq 0$, $a_2 - 1 \leq 0$, $\ldots$, $a_n - 1 \leq 0$. O sumă nulă cu termenii negativi are toţi termenii nuli. Rezultă $a_1 = 1$, $a_2 = 1$, $\ldots$, $a_n = 1$. *Aplicaţie:* dacă $\sin 2x + \sin 3x + \sin 4x = 3$ avem $\sin 2x = 1$, $\sin 3x = 1$şi $\sin 4x = 1$. Din $\sin 2x = 1$ obţinem $x = \frac{\pi}{4} + k\pi$, dar $\sin 3(\frac{\pi}{4} + k\pi) \neq 1$.
4. Alegem $O = A$, $Ox = AB$, $Oy =$ perpendiculara în A pe AB, iar $A(0, 0)$, $B(b, 0)$, $D(e, d)$ şi $C(b + e, d)$. **5.** Evenimentul sigur este $E = \{x, y, z) \mid x, y, z \in U\}$, iar probabilitatea unui eveniment elementar $e = (x, y, z)$ este $P(\{e\}) = \frac{1}{1000}$, $\forall\ e \in E$.
Notăm cu M_i evenimentul de a obţine exact i bile albe, $i = 0, 1, 2, 3$ şi cu B evenimentul de a obţine cel mult două bile albe. Atunci putem scrie $B = M_0 \cup M_1 \cup M_2 = M_3^C$. Rezultă $P(B) = 1 - P(M_3)$, iar $P(M_3)$ se calculează conform schemei lui Bernoulli, $P(B) = 1 - P(M_3) =$
$= 1 - C_3^3\left(\frac{4}{10}\right)^3\left(\frac{6}{10}\right)^0 = 1 - \frac{8}{25} = \frac{17}{125}$.

Testul 10

1. ii) Trebuie ca $x > 2$. Conform cu i), avem $(x-2)^{\log_2(x+1)} = (x+1)^{\log_2(x-2)}$ deci ecuaţia devine $3(x+1)^{\log_2(x-2)} = 3(x+1)^2$ sau $(x+1)^{\log_2(x-2)-2} = 1$. Avem $\log_2(x-2) = 2$, de unde $x = 6$. **2.** Fie r raţia progresiei. Avem $S = \sum_{k=1}^{n}(-1)^k C_n^k (a_1 + kr) = a_1\sum_{k=1}^{n}(-1)^k C_n^k + r\sum_{k=1}^{n}(-1)^k kC_n^k$. Dar $\sum_{k=1}^{n}(-1)^k C_n^k = -C_n^0 = -1$, iar $\sum_{k=1}^{n}(-1)^k kC_n^k = 0$ (aici folosim egalitatea $kC_n^k = nC_{n-1}^{k-1}$) şi deci $S = a_1(-1) + r\cdot 0 = -a_1$. **3.** a) Ecuaţia este echivalentă cu $\sin 7x + \sin 3x = 0$ şi $\cos 9x - \cos x \neq 0$, adică $\sin 5x \cos 2x = 0$ şi $\sin 5x \sin 4x \neq 0 \Leftrightarrow \sin 5x \neq 0$ şi $\sin 4x \neq 0$. De aici rezultă că nu putem avea nici $\sin 5x = 0$, nici $\cos 2x = 0$ ($\cos 2x = 0 \Rightarrow \sin 4x = 2\sin 2x \cos 2x = 0$). b) Cum $1 + \sin 2x = (\sin x + \cos x)^2$, ecuaţia se scrie: $\sin x + \cos x + (\sin x + \cos x)^2 + (\cos^2 x - \sin^2 x) = 0 \Leftrightarrow (\sin x + \cos x)(1 + 2\cos x) = 0$. **4.** Notăm $m(\sphericalangle ACB) = x$(grade), deci $B = 180° - (60° + x) = 120° - x$. Aplicând teorema sinusurilor, deducem $\frac{AC}{2\sin(120° - x)} = R$ (1). Fie A' piciorul înălţimii din A, deci $AA' = AC\sin x$. Cum $AA' = \frac{R}{2}$, avem $R = 2AA' = 2AC\sin x$ (2). Din (1), (2) deducem $\frac{AC}{2\sin(120° - x)} = 2AC\sin x \Leftrightarrow \sin x \cdot \sin(120° - x) = \frac{1}{4} \Leftrightarrow \cos(2x - 120°) = 0 \Leftrightarrow 2x - 120° = 90° + k\cdot 180°$, $k \in \mathbb{Z}$. Pentru $k = -1$ rezultă $x = 15°$, iar pentru $k = 0$ rezultă $x = 105°$. Pentru orice alte valori ale lui k, obţinem că $x \notin (0, 180°)$. **5.** Evenimentul sigur este $E = \{(x, y, z) \mid x \in U_1, y \in U_2, z \in U_3\}$, iar probabilitatea unui eveniment elementar $e = (x, y, z)$ este $P(\{e\}) = \frac{1}{2000}$, $\forall\, e \in E$. Notăm cu M_i evenimentul de a obţine exact i bile albe, $i = 0, 1, 2, 3$ şi cu B evenimentul de a obţine cel puţindouă bile albe. Atunci putem scrie $B = M_2 \cup M_3$, cele două evenimente fiind incompatibile. Rezultă $P(B) = P(M_2) + P(M_3)$. Probabilităţile $P(M_2)$, $P(M_3)$ se calculează conform schemei lui Poisson. Polinomul asociat schemei este $p(x) = (0{,}4x + 0{,}6)(0{,}6x + 0{,}4)(0{,}25x + 0{,}75) = 0{,}06x^3 + 0{,}31x^2 + 0{,}45x + 0{,}18$. Rezultă că $P(M_2) = 0{,}31$, $P(M_3) = 0{,}06$ şi $P(B) = 0{,}37$.

1. **D. Mihalca, I. Chiţescu, M. Chiriţă,** *Geometria patrulaterului*, Editura Teora, 1998.

2. **C. Năstăsescu, C. Niţă, M. Brandiburu, D. Joiţa,** *Exerciţii şi probleme de algebră, clasele IX–XII,* Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti 1992.

3. **C. Năstăsescu, C. Niţă, Gh. Andrei, M. Răduţiu, Fl. Vornicescu, N. Vornicescu,** *Matematică*, manual pentru clasa a IX-a – M1 şi M2, Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1999.

4. **C. Năstăsescu, C. Niţă, M. Dumitrescu, N. Soare, D. Niţescu,** *Matematică – M1, manual pentru clasa a X-a*, Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti 2000.

5. **C. Năstăsescu, C. Niţă, I. Chiţescu, D. Mihalca,** *Matematică, trunchi comun şi curriculum diferenţiat,* manual pentru clasa a IX-a, Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti 2004.

6. **Gh. D. Simionescu,** *Noţiuni de algebră vectorială şi aplicaţii în geometrie*, Editura Tehnică, 1982.

7. **Gh. D. Simionescu,** *Geometrie analitică*, manual pentru clasa a XI-a, Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti 1976.

8. **G. Ţiţeica,** *Probleme de geometrie*, Editura Tehnică, 1981.