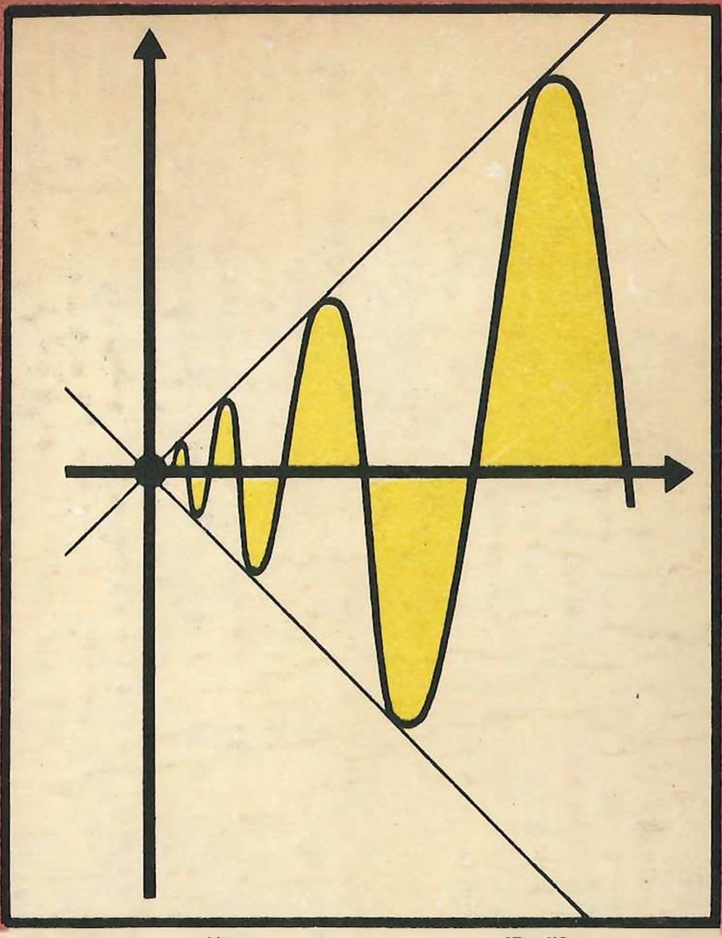
ISBN 973 — 30 — 0064 — 7

Lei 16,90

MINISTERUL EDUCAȚIEI ȘI ÎNVĂȚĂMÎNTULUI



XI

Matematică

Elemente de analiză matematică

Manual pentru clasa a XI-a

EDITURA DIDACTICĂ ȘI PEDAGOGICĂ
BUCUREȘTI, — 1989

MINISTERUL EDUCAȚIEI ȘI ÎNVĂȚĂMÎNTULUI

Cercet. dr. GH. GUSSI   Prof. univ. dr. O. STĂNĂȘILĂ   Prof. T. STOICA

XI

Matematică

Elemente de analiză matematică

Manual pentru clasa a XI-a

Editura Didactică și Pedagogică
București — 1989

Manualul a fost elaborat în anul 1980, pe baza programei şcolare
aprobate de Ministerul Educaţiei şi Învăţămîntului
cu nr. 39490/1978, şi revizuit în anul 1982

Referenţi: *Prof. univ. dr.* N. BOBOC
Cercetător GR. ARSENE
Prof. I. MAFTEI
Prof. D. OGREZEANU
Prof. M. CHIRIŢĂ
Prof. M. RĂDULESCU
Prof. S. RĂDULESCU

ISBN 973 — 30 — 0064 — 7

Redactor: Prof. CĂTĂLIN-PETRU NICOLESCU
Tehnoredactor: ION MIREA
Coperta: NICOLAE SÎRBU

Capitolul I
NUMERE REALE. FUNCȚII REALE

Introducere

Cea mai mare parte a acestui capitol se referă la noțiuni pe care le-ați întîlnit în studiul algebrei sau geometriei. Înainte de orice, enunțăm cîteva probleme a căror rezolvare se poate da prin (sau numai prin) metode de analiză matematică.

a) În calcule aproximative se pune adeseori problema de a afla valoarea unei funcții f într-un punct a, procedîndu-se astfel: se alege o aproximare b a lui a, $b \simeq a$ și se calculează $f(b)$ $\left[\text{de exemplu, pentru } f(x) = \frac{1}{3}(x+1) \text{ și } a = \pi, \text{ se alege } b = 3{,}14 \text{ și } f(\pi) \simeq \frac{1}{3}(3{,}14+1) = 1{,}38\right]$. Mai întîi este necesar un anumit control al erorilor făcute în astfel de aproximări, mai ales în cazul unor calcule lungi în care apar fenomene de „propagare" a erorilor; apoi, ce ne asigură că dacă $b \simeq a$, atunci $f(b) \simeq f(a)$?

Răspunsul la astfel de întrebări poate fi dat cu metode de analiză matematică.

b) Presupunem că trebuie construită o cisternă de forma indicată în figura I.1 (redusă la un cilindru circular drept cu două emisfere) avînd o arie totală prescrisă A. Soluția nu este unică și poate fi de folos să construim o astfel de cisternă, astfel încît volumul ei să fie cel mai mare posibil. Pentru a formula matematic această problemă, notăm cu x raza bazei cilindrului (egală cu raza fiecărei emisfere) și cu h înălțimea cilindrului. Atunci $A = 2\pi xh + 4\pi x^2$, de unde $h = \frac{A - 4\pi x^2}{2\pi x}$. Volumul cisternei va fi:

$$V(x) = \pi x^2 h + \frac{4\pi x^3}{3} = \pi x^2 \cdot \frac{A - 4\pi x^2}{2\pi x} + \frac{4\pi x^3}{3} = \frac{1}{6}(3Ax - 4\pi x^3).$$

Problema pusă revine atunci la determinarea valorii maxime a lui V cînd x ia diverse valori strict pozitive. Se poate da o soluție directă, luînd $x_0 = \frac{\sqrt{A}}{2\sqrt{\pi}}$, deci $V(x_0) = \frac{1}{6} \cdot \frac{A\sqrt{A}}{\sqrt{\pi}}$ și arătînd că $V(x) \leqslant V(x_0)$ pentru orice $x > 0$; într-adevăr, aceasta revine la $\frac{1}{6}(3Ax - 4\pi x^3) \leqslant \leqslant \frac{1}{6} \cdot \frac{A\sqrt{A}}{\sqrt{\pi}}$, $\frac{1}{6}\left(4\pi x^3 - 3Ax + \frac{A\sqrt{A}}{\sqrt{\pi}}\right) \geqslant 0$, $\frac{2}{3}(\pi x + \sqrt{\pi A})\left(x - \frac{\sqrt{A}}{2\sqrt{\pi}}\right)^2 \geqslant 0$, ceea ce este

Fig. I.1

clar. Aşadar, $V(x) \leqslant V(x_0)$, pentru orice $x > 0$ şi volumul maxim este obţinut pentru $x = x_0$. Dar, în situaţii mai complicate o astfel de abordare directă nu este posibilă. În capitolul V, pag. 200, vom da o metodă practică, utilizînd Analiza Matematică, pentru rezolvarea problemelor de extrem, aplicabilă în situaţii mai generale.

c) Considerăm o funcţie $f: (a, b) \to \mathbf{R}$ şi fixăm $x_0 \in (a, b)$. Fie $M_0(x_0, f(x_0))$ punctul corespunzător pe graficul lui f, raportat la un sistem ortogonal xOy de axe (figura I.2).

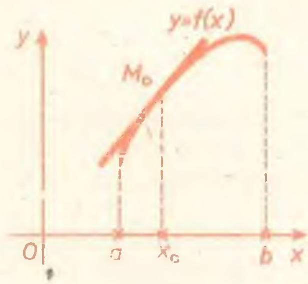


Fig. I.2

Se pune problema ca dintre toate dreptele trecînd prin punctul M_0 să găsim, dacă este posibil, tangenta în M_0 la grafic, adică dreapta care „aproximează cel mai bine graficul lui f în jurul lui x_0“. Ecuaţia oricărei drepte trecînd prin M_0 este $y = f(x_0) + m(x - x_0)$ şi problema revine la a găsi numărul real m astfel încît să aibă loc aproximarea $f(x) \simeq f(x_0) + m(x - x_0)$ în jurul punctului x_0, într-un sens care va fi precizat. În cazul cînd funcţia f descrie un proces fizic, problema anterioară corespunde „liniarizării“ acelui proces în jurul poziţiei x_0, fapt utilizat în mod curent în aplicaţii. Răspunsul matematic la această problemă va fi dat în capitolul IV.

d) În algebră şi în trigonometrie au fost considerate unele funcţii cu valori reale de variabilă reală, foarte importante pentru aplicaţiile matematicii — funcţiile polinomiale, raţionale, exponenţiale, logaritmice, trigonometrice etc. În analiză va fi adîncit studiul acestora.

Pînă acum ştiţi să reprezentaţi graficul unor funcţii reale simple. Analiza matematică va da metode generale de determinare a unor puncte (puncte de maxim, de minim, inflexiuni etc.) şi a unor drepte (de exemplu, asimptote) ataşate în mod corespunzător funcţiilor reale dintr-o clasă largă de funcţii, permiţînd studiul acestor funcţii şi trasarea graficului lor. Desenul constituie un excelent mijloc vizual de concentrare de informaţie, iar în cazul graficelor de funcţii descriind procese fizice, desenul permite să se obţină dintr-o privire o idee (şi chiar mai mult) asupra evoluţiei acelor procese.

e) Noţiuni importante ca: viteza şi acceleraţia unui mobil la un moment dat, intensitatea unui curent electric la un moment dat, tangenta la o curbă într-un punct, lungimea unui arc de curbă, aria unei figuri plane, volumul unui corp în spaţiu, centrul de greutate, momentul de inerţie etc. nu pot fi definite şi utilizate în mod corespunzător decît înţelegînd noţiunea de *limită*.

§ 1. Numere reale

Dacă privim cu atenţie, în toate aceste probleme, obiectele matematice utilizate au fost numerele (şi funcţiile). În clasele primare aţi învăţat calculele cu numere naturale, descriind în fond operaţii cu mulţimi finite, iar în gimnaziu aţi învăţat să rezolvaţi ecuaţii de tipul $a + x = b$ cu a, b naturale date şi

$qx = p$, cu p, q numere întregi date, $q \neq 0$. Cu alte cuvinte, au fost considerate următoarele mulţimi de numere (naturale, întregi şi respectiv raţionale):

$\mathbf{N} = \{0, 1, 2, ...\}$, $\mathbf{Z} = \{..., -2, -1, 0, 1, 2, ...\}$, $\mathbf{Q} = \left\{\frac{p}{q} \mid p, q \in \mathbf{Z}, q \neq 0\right\}$.

Dar multe probleme de tipul celor considerate mai sus nu pot fi rezolvate în cadrul mulţimii $\mathbf{Q}$ şi sînt necesare numerele iraţionale. Aceasta a impus, atît din raţiuni practice cît şi prin resorturile interne ale dezvoltării matematicii, lărgirea conceptului de număr ca măsură a mărimilor din realitatea fizică dar şi ca obiect matematic de studiu. Elaborarea noţiunii matematice de număr real a constituit un proces lung, sinuos, încheiat abia în secolul trecut prin lucrările matematicienilor K. Weierstrass (1815—1897), R. Dedekind (1831—1916), G. Cantor (1845—1918). Fundamentarea analizei matematice pe baze teoretice solide este necesară pentru că există o multitudine de probleme care nu pot fi rezolvate prin metode intuitive şi numai conceptele matematice definite riguros conferă valabilitate rezultatelor şi permit studiul unor situaţii mai complicate. În acest manual vom adînci conceptele de număr real şi funcţie reală de o variabilă reală, care stau la baza rezultatelor analizei matematice.

Reamintim că mulţimea $\mathbf{R}$ a numerelor reale este o mulţime care include mulţimea $\mathbf{Q}$ $\left(\text{deci } 3, -2, \frac{2}{3}, \frac{1}{10^4}, -\frac{8}{7} \text{ sînt numere reale}\right)$. Pe mulţimea $\mathbf{R}$ sînt definite o operaţie de adunare, o operaţie de înmulţire şi o relaţie de ordine. Se mai spune că sînt definite o structură algebrică şi o structură de ordine. Precizăm aceşti termeni. În general, dacă $f : A \to B$ este o funcţie oarecare, atunci oricărui element $u \in A$ i se asociază $f(u) \in B$ şi vom scrie uneori $u \mapsto f(u)$. Dacă M este o mulţime, prin *operaţie algebrică (binară)* pe M cu eticheta $*$ înţelegem o funcţie $M \times M \to M$, $(x, y) \mapsto x * y$; prin *relaţie (binară) pe M* înţelegem o submulţime R a produsului cartezian $M \times M$; pentru $x, y \in M$ scriem xRy în loc de $(x, y) \in R$ şi citim: x este în relaţia R cu y. Relaţia R se numeşte *relaţie de ordine* dacă este reflexivă (xRx pentru orice $x \in M$), tranzitivă ($x, y, z \in M$; xRy, $yRz \Rightarrow xRz$) şi antisimetrică ($x, y \in M$; xRy, $yRx \Rightarrow x = y$).

Exemple

1) Pe mulţimea $M = \mathbf{Z}$ a numerelor întregi sînt definite operaţiile algebrice de adunare (cu eticheta $+$) şi înmulţire (cu eticheta $\cdot$), precum şi relaţia de ordine „mai mic sau egal“, notată cu $\leq$.

2) În mod similar, pe mulţimea $M = \mathbf{Q}$ sînt definite operaţiile algebrice de adunare $+$, înmulţire $\cdot$ şi relaţia de ordine $\leq$, cu proprietăţile uzuale care vă sînt binecunoscute.

Aşa cum am mai spus, pe mulţimea $\mathbf{R}$ sînt date două operaţii algebrice care extind operaţiile din $\mathbf{Q}$. Oricărui cuplu (x, y) de numere reale i se asociază suma $x + y$ şi produsul xy şi se definesc astfel operaţiile de adunare $\mathbf{R} \times \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $(x, y) \to x + y$ şi înmulţire $\mathbf{R} \times \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $(x, y) \to xy$.

1.1 Proprietățile algebrice ale lui $\mathbb{R}$ (axiomele adunării și înmulțirii)

1°. *Adunarea este asociativă și comutativă.*

2°. *Există numărul real* 0 (zero) *astfel încît* $x + 0 = x$, *pentru orice* $x \in \mathbb{R}$.

3°. *Pentru orice* $x \in \mathbb{R}$ *există numărul* $-x \in \mathbb{R}$ *astfel încît* $x + (-x) = 0$.

Numărul 0 este unic avînd proprietatea 2°: într-adevăr, dacă $0' \in \mathbb{R}$ și $x + 0' = x$, $\forall x \in \mathbb{R}$, atunci pentru $x = 0$, rezultă $0 + 0' = 0$ și, pe de altă parte, din 2°, pentru $x = 0'$ rezultă $0' + 0 = 0'$. Așadar $0 = 0'$. În mod similar, se arată că pentru orice $x \in \mathbb{R}$ fixat există un unic element y astfel încît $x + y = 0$, anume $y = -x$; în plus, $-(-x) = x$. Dacă $x, y \in \mathbb{R}$, atunci se notează $x - y = x + (-y)$ (*diferența* numerelor x, y). Ecuația $a + x = b$ ($a, b \in \mathbb{R}$ fiind date) are o soluție și aceasta este unică, anume $x = b - a$.

4°. *Înmulțirea este asociativă și comutativă.*

5°. *Există numărul real* 1 ($1 \neq 0$) *astfel încît* $x \cdot 1 = x$ *pentru orice* $x \in \mathbb{R}$.

6°. *Pentru orice* $x \in \mathbb{R}$, $x \neq 0$ *există numărul* x^{-1} $\left(\textit{notat și } \frac{1}{x}\right)$ *din* $\mathbb{R}$, *astfel încît* $x \cdot x^{-1} = 1$.

7°. *Înmulțirea este distributivă în raport cu adunarea, adică* $x(y + z) = xy + xz$, *pentru orice* $x, y, z \in \mathbb{R}$.

Din aceste proprietăți rezultă că 1 este unic, avînd proprietatea 5° și, de asemenea, pentru $x \neq 0$ dat inversul x^{-1} este unic. Apoi $x \cdot 0 = 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$ [într-adevăr, $x \cdot 0 = x(0 + 0) = x \cdot 0 + x \cdot 0$, conform 7°; notînd $x \cdot 0 = u$, rezultă așadar $u = u + u$, deci $u = 0$]. Remarcăm că dacă $xy = 0$, atunci $x = 0$ sau $y = 0$ [într-adevăr, dacă $xy = 0$ și $x \neq 0$, atunci există x^{-1} și înmulțind cu x^{-1} relația anterioară obținem $x^{-1}(xy) = 0$, adică $(x^{-1}x)y = 0$, $1 \cdot y = 0$, deci $y = 0$].

Dacă $x, y \in \mathbb{R}$ și $y \neq 0$, se notează $\frac{x}{y} = xy^{-1}$ (*cîtul* numerelor x și y). Reținem că împărțirea cu zero nu este definită. Este evident că, pentru orice $a, b \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, ecuația $ax = b$ are soluție unică, anume $x = \frac{b}{a}$.

Proprietățile 1° — 7° se pot exprima pe scurt spunînd că *mulțimea* $\mathbb{R}$ *are o structură de corp comutativ* (relativ la operațiile de adunare și înmulțire).

1.2. Proprietățile de ordine ale lui $\mathbb{R}$ (axiomele de ordine)

8°. *Pe mulțimea* $\mathbb{R}$ *este fixată o relație de ordine notată* $\leqslant$. Așadar, dacă $x, y, z \in \mathbb{R}$ și $x \leqslant y$, $y \leqslant z$, atunci $x \leqslant z$, iar dacă $x \leqslant y$, $y \leqslant x$, atunci $x = y$; se mai scrie $y \geqslant x$ în loc de $x \leqslant y$. Pentru $x, y \in \mathbb{R}$ se scrie $x < y$ (echivalent $y > x$) și se citește x este *strict mai mic* decît y dacă $x \leqslant y$ și $x \neq y$.

9°. *Pentru orice* $x, y \in \mathbb{R}$ *avem* $x \leqslant y$ *sau* $y \leqslant x$ (se mai spune că *relația de ordine pe* $\mathbb{R}$ *este totală*).

Dăm acum proprietățile de compatibilitate între structura algebrică și structura de ordine pe mulțimea $\mathbf{R}$.

10°. *Dacă $x, y \in \mathbf{R}$ și $x \leqslant y$, atunci $x + z \leqslant y + z$ pentru orice $z \in \mathbf{R}$.*

11°. *Dacă $x, y \in \mathbf{R}$ și $x \leqslant y$, atunci $xz \leqslant yz$ pentru orice $z \in \mathbf{R}$, $z \geqslant 0$.*

Din proprietățile algebrice (1° — 7°) și de ordine (8° — 11°) se deduc, așa cum știți de fapt din manualele de algebră ale claselor anterioare, toate regulile calculului algebric și ale calculului cu inegalități. În analiza matematică este utilizat sistematic calculul cu inegalități și este esențială mînuirea lui corectă. Proprietățile anterioare sînt satisfăcute nu numai de elementele mulțimii $\mathbf{R}$; de exemplu, elementele lui $\mathbf{Q}$ au aceleași proprietăți. Se mai spune că $\mathbf{R}$ și $\mathbf{Q}$ sînt corpuri comutative *total ordonate*. Ceea ce deosebește mulțimea $\mathbf{R}$ de mulțimea $\mathbf{Q}$ este axioma lui Cantor a marginii superioare, care stă la baza obținerii tuturor rezultatelor profunde ale analizei matematice și pe care o enunțăm mai jos. Sînt necesare unele pregătiri și începem cu un exemplu. Să considerăm mulțimile următoare:

$$A = \{x \in \mathbf{Q} \mid x^2 \leqslant 3\} \text{ și } B = \{x \in \mathbf{R} \mid x^2 \leqslant 3\}.$$

Ambele mulțimi sînt majorate de numărul 2, în sensul că pentru orice $x \in A$ avem $x \leqslant 2$ și pentru orice $x \in B$ avem $x \leqslant 2$. Se observă că ele sînt majorate și de numerele 1,8; 1,74; 1,733 etc. (orice element din A sau din B este mai mic decît fiecare din aceste numere). Luînd așadar aproximațiile succesive prin adaos ale lui $\sqrt{3}$, se găsesc majoranți „din ce în ce mai mici“ ai mulțimilor A, B. Remarcăm că $A \subset \mathbf{Q}$, $B \subset \mathbf{R}$. Deoarece $\sqrt{3}$ este irațional (adică $\sqrt{3} \notin \mathbf{Q}$), rezultă că $\sqrt{3} \notin A$; dar $\sqrt{3} \in B$.

O submulțime nevidă $C \subset \mathbf{R}$ se numește *majorată* (sau *mărginită superior*) dacă există cel puțin un număr real k astfel încît pentru orice $x \in C$ să avem $x \leqslant k$. Un astfel de număr k se numește un *majorant* al lui C.

Putem acum formula proprietatea următoare, a cărei înțelegere cere oarecare efort:

12°. *Orice submulțime nevidă majorată $C \subset \mathbf{R}$ admite un cel mai mic majorant (axioma lui Cantor).* Acest element este un număr real unic, numit *marginea superioară a lui C* și este notat $\sup C$.

În exemplul anterior mulțimile A, B, ca submulțimi ale lui $\mathbf{R}$, sînt majorate și se poate arăta că $\sup A = \sqrt{3}$, $\sup B = \sqrt{3}$. Se observă că $\sup A \notin A$ și $\sup B \in B$. De asemenea, se observă că, în general, submulțimile lui $\mathbf{Q}$ nu au proprietatea 12° (într-adevăr, $A \subset \mathbf{Q}$ este majorată în $\mathbf{Q}$, dar nu admite un cel mai mic majorant număr rațional).

La punctul 4.1 vom reveni asupra acestor noțiuni și le vom fixa mai bine.

Cu aceasta definiția axiomatică a mulțimii $\mathbf{R}$ este încheiată. Pe scurt, ea se rezumă astfel: $\mathbf{R}$ satisface proprietățile 1° — 12° sau echivalent, *este un corp comutativ total ordonat, în care orice submulțime nevidă majorată are margine superioară, aparținînd lui* $\mathbf{R}$.

Se pun în mod natural două întrebări:

a) Există o mulțime $\mathbf{R}$ avînd proprietățile 1° — 12°?

b) Pot exista mai multe mulțimi satisfăcînd proprietățile 1° — 12°?

La prima întrebare se poate răspunde construind prin operații de teoria mulțimilor pornind de la $\mathbf{Q}$ o mulțime avînd proprietățile 1° — 12°. În acest sens se cunosc construcția zecimală a lui Weierstrass, construcția lui Dedekind (folosind „tăieturile" în mulțimea $\mathbf{Q}$) și construcția lui Cantor (folosind șirurile de numere raționale), fiecare din aceste construcții fiind laborioasă.

La cea de-a doua întrebare răspunsul este mai delicat. Anume, se poate arăta că dacă S este un alt corp comutativ total ordonat satisfăcînd axioma lui Cantor, atunci există o aplicație bijectivă $f : S \to \mathbf{R}$ astfel încît $f(x + y) = f(x) + f(y)$, $f(xy) = f(x)f(y)$ pentru orice $x, y \in S$, $f(0) = 0$, $f(1) = 1$ și, în plus, dacă $x \leqslant y$, atunci $f(x) \leqslant f(y)$. Orice calcul efectuat cu elemente $x, y, z, \ldots$ din S poate fi transformat într-un calcul cu numerele reale $f(x), f(y), f(z), \ldots$ și orice element $x \in S$ se poate identifica prin numărul real $f(x)$. Se mai spune că proprietățile 1° — 12° caracterizează mulțimea $\mathbf{R}$ „pînă la izomorfism".

Ca o consecință a proprietăților 1° — 12° se poate stabili următorul rezultat important, numit *proprietatea* (sau, într-un alt context, *axioma*) *lui Arhimede* (287—212 î.e.n.):

Pentru orice $x \in \mathbf{R}$ există un număr întreg n unic astfel încît $n \leqslant x < n+1$. Acest număr este numit partea întreagă a lui x și este notat $[x]$.

Exemple: $[2,67] = 2$, $[3] = 3$, $[\pi] = 3$, $[-\pi] = -4$, $[-0,6347] = -1$. Deși mulțimea $\mathbf{Q}$ nu satisface proprietatea lui Cantor, totuși în $\mathbf{Q}$ are loc proprietatea lui Arhimede.

1.3. Reprezentarea geometrică a lui R

Convenim să spunem că o mulțime P *admite o reprezentare* pe o mulțime Q dacă există o aplicație bijectivă de la P la Q, adică o corespondență bijectivă între elementele mulțimilor P și Q.

Considerînd o axă avînd originea A_0 și vectorul unitate $\vec{u} = \overrightarrow{A_0A_1}$ (figura I.3) și notînd cu Δ mulțimea punctelor axei, se definește, așa cum de altfel s-a făcut în clasele anterioare, aplicația $\alpha : \mathbf{R} \to \Delta$ care asociază oricărui

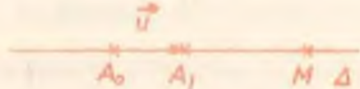


Fig. I.3

număr real x acel unic punct $M \in \Delta$ astfel încît $\overrightarrow{A_0M} = x\vec{u}$. Așadar, $\alpha(x) = M$ și, în particular, $\alpha(0) = A_0$, $\alpha(1) = A_1$. Aplicația α este bijectivă și se numește *reprezentarea geometrică a lui* $\mathbf{R}$ *pe* Δ (depinzînd de $\vec{u}$); inversa ei $\alpha^{-1} : \Delta \to \mathbf{R}$ asociază oricărui punct al lui Δ abscisa acestui punct. Dacă $a, x, b \in \mathbf{R}$, faptul că $a < x < b$ înseamnă că punctul $\alpha(x)$ este situat între punctele $\alpha(a)$ și $\alpha(b)$. Aplicația α a fost stabilită pentru prima dată de R. Descartes (1596—1650) și-a constituit punctul de plecare în elaborarea geometriei analitice și în interpretarea geometrică a unor rezultate ale analizei matematice. Existența aplicației α, care permite o identificare a punctelor de pe Δ cu elementele lui $\mathbf{R}$, justifică faptul că mulțimea $\mathbf{R}$ este uneori numită *dreaptă reală*, iar numerele reale se mai numesc *puncte*.

Considerînd un plan P şi un sistem ortogonal de axe în acel plan, se poate stabili (aşa cum ştiţi) o aplicaţie bijectivă de la P la $\mathbf{R}^2 = \mathbf{R} \times \mathbf{R}$, asociind oricărui punct din planul P perechea ordonată a coordonatelor lui. Astfel de reprezentări geometrice au fost considerate în clasele anterioare; ele au avantaje considerabile în privinţa comunicării rezultatelor analizei matematice şi vor fi utilizate sistematic în continuare.

La prima vedere, dreapta reală are o descriere foarte simplă, dar la o cercetare mai atentă se remarcă coexistenţa pe $\mathbf{R}$ a cel puţin trei structuri — structura algebrică, structura de ordine, precum şi structura de convergenţă, care va fi definită în capitolul următor.

Presupunem că $a, b \in \mathbf{R}$, $a < b$. Se pot considera intervalele *mărginite*

$(a, b) = \{x \in \mathbf{R} \mid a < x < b\}$ (interval *deschis*);

$[a, b] = \{x \in \mathbf{R} \mid a \leqslant x \leqslant b\}$ (interval *închis şi mărginit*);

$[a, b) = \{x \in \mathbf{R} \mid a \leqslant x < b\}$, $(a, b] = \{x \in \mathbf{R} \mid a < x \leqslant b\}$ (intervale *semideschise*).

De asemenea, se definesc $(a, a) = [a, a) = (a, a] = \varnothing$ şi $[a, a] = \{a\}$. Pentru un interval ca mai sus, numărul real $b - a$ se numeşte *lungimea* intervalului respectiv; dacă I este un interval mărginit, vom nota cu $l(I)$ lungimea acelui interval. Intervalele închise şi mărginite se mai numesc intervale *compacte*. De exemplu, $[0, 1]$, $[-5, 3]$, $[-\pi, \pi]$ sînt intervale compacte.

Se utilizează de asemenea intervale *nemărginite* pe dreapta reală, de forma

$(-\infty, a) = \{x \in \mathbf{R} \mid x < a\}$, $(-\infty, a] = \{x \in \mathbf{R} \mid x \leqslant a\}$,

$(a, \infty) = \{x \in \mathbf{R} \mid x > a\}$, $[a, \infty) = \{x \in \mathbf{R} \mid x \geqslant a\}$, $(-\infty, \infty) = \mathbf{R}$,

unde a este un număr real. În general, un *interval* este o submulţime $I \subset \mathbf{R}$, astfel încît $a, b \in I$, $a \leqslant c \leqslant b \Rightarrow c \in I$ (şi se poate arăta că singurele intervale sînt cele indicate anterior).

Reamintim că o mulţime F se numeşte *finită* dacă $F = \varnothing$ sau există $n \geqslant 1$ întreg şi o funcţie bijectivă f: $\{1, 2, \ldots, n\} \to F$; în acest caz, avem $F = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ unde $a_k = f(k)$, $1 \leqslant k \leqslant n$. Mulţimile care nu sînt finite se numesc *infinite*; evident, intervalele de lungime >0 sînt mulţimi infinite. Reamintim, de asemenea, că dacă $M = \{M_i\}_{i \in I}$ este o colecţie de mulţimi, se definesc *intersecţia* $\bigcap_{i \in I} M_i = \{x \mid \forall i \in I, x \in M_i\}$ şi reuniunea $\bigcup_{i \in I} M_i = \{x \mid \exists\, i \in I, x \in M_i\}$.

Pentru orice $a, b \in \mathbf{R}$, notăm prin max (a, b) cel mai mare dintre numerele a, b. Pentru orice $x \in \mathbf{R}$, *modulul lui* x este

$$|x| = \max(x, -x) = \begin{cases} x, & \text{dacă } x > 0 \\ 0, & \text{dacă } x = 0 \\ -x, & \text{dacă } x < 0. \end{cases} \tag{1}$$

Evident, $x \leqslant |x|$ şi $|-x| = |x|$ pentru orice $x \in \mathbf{R}$. Proprietăţile modulului sînt cuprinse în teorema următoare.

TEOREMA 1.1 *(proprietăţile modulului)*. **M$_1$. Pentru orice $x \in \mathbf{R}$ avem** $|x| \geqslant 0$; $|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

M_2. **Dacă** $x, y \in \mathbf{R}$, **atunci** $|x + y| \leqslant |x| + |y|$;

M_3. **Pentru orice** $x, y \in \mathbf{R}$ **avem** $|xy| = |x| \cdot |y|$ **și dacă** $y \neq 0$, **atunci** $\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}$.

La aceste proprietăți se mai adaugă:

M_4. **Fie** $x \in \mathbf{R}$, $\varepsilon > 0$. **Avem** $|x| < \varepsilon \Leftrightarrow x \in (-\varepsilon, \varepsilon)$; $|x| \leqslant \varepsilon \Leftrightarrow x \in [-\varepsilon, \varepsilon]$; $|x| > \varepsilon \Leftrightarrow x \in (-\infty, -\varepsilon) \cup (\varepsilon, \infty)$ și $|x| \geqslant \varepsilon \Leftrightarrow x \in (-\infty, -\varepsilon] \cup [\varepsilon, \infty)$.

M_5. **Pentru orice** $x, y \in \mathbf{R}$ **avem** $||x| - |y|| \leqslant |x - y|$.

Demonstrație. Proprietățile M_1, M_2, M_3 sînt bine cunoscute. Demonstrăm M_4. Dacă $|x| < \varepsilon$, atunci $\max(x, -x) < \varepsilon$, deci $x < \varepsilon$ și $-x < \varepsilon$, adică $-\varepsilon < x < \varepsilon$ și reciproc. Faptul că $|x| > \varepsilon$ revine la $\max(x, -x) > \varepsilon$, adică $-x > \varepsilon$ *sau* $x > \varepsilon$, deci $x \in (-\infty, -\varepsilon) \cup (\varepsilon, \infty)$ etc. Pentru a demonstra M_5 este suficient de dovedit că $-|x - y| \leqslant |x| - |y| \leqslant |x - y|$ (conform inegalității secunde din M_4). Prima inegalitate rezultă observînd că $|y| = |y - x + x| \leqslant |y - x| + |x| = |x - y| + |x|$, iar pentru inegalitatea secundă observăm că $|x| = |x - y + y| \leqslant |x - y| + |y|$, în ambele cazuri aplicînd M_2.

1.4. Reprezentarea zecimală a lui R

Ideea fundamentală a scrierii zecimale este aceea de a exprima orice număr real folosind un număr finit de semne, anume cifrele zecimale 0, 1, 2, ..., 9, la care se adaugă „—“ (minus) și „,“ (virgula). Același lucru se poate realiza prin scrierea binară.

Reamintim că numerele raționale de forma $\frac{a}{10^n}$, cu $a \in \mathbf{Z}$ și $n \geqslant 0$ natural, pot fi identificate cu fracții zecimale finite.

Exemple: avem $2{,}471 = \frac{2\,471}{10^3}$; $\frac{1\,127}{10^4} = 0{,}1127$; $-4{,}38 = -\frac{438}{10^2}$.

Acestea sînt insuficiente atît în construcții matematice,cît și în descrierea matematică a măsurătorilor fizice $\left(\text{de exemplu, } \frac{1}{3}, \frac{12}{7} \text{ nu se exprimă prin fracții zecimale finite}\right)$. Este esențială de aceea considerarea fracțiilor zecimale infinite.

Notăm cu $\mathcal{F}$ mulțimea *fracțiilor zecimale infinite*, adică a succesiunilor infinite de cifre zecimale de forma $m, x_1x_2x_3...$, unde $m \in \mathbf{Z}$, iar $0 \leqslant x_k \leqslant 9$, x_k întregi (pentru orice $k \geqslant 1$). Facem convenția de a elimina din mulțimea $\mathcal{F}$ fracțiile zecimale infinite în care toate cifrele sînt egale cu 9 de la un rang încolo. Cu această convenție, două elemente $\alpha = m, x_1x_2x_3...$ și $\beta = n, y_1y_2y_3...$ din $\mathcal{F}$ se consideră *egale* dacă $m = n$ și $x_k = y_k$, pentru orice $k \geqslant 1$. Din clasele anterioare se știe că *orice număr real se reprezintă printr-o fracție zecimală infinită.*

Anume, oricărui număr real $x \in \mathbf{R}$ i se poate asocia în mod bine determinat o fracție zecimală infinită notată $\beta(x) = m, x_1x_2x_3...$; în acest mod s-a definit o aplicație

$$\beta : \mathbf{R} \to \mathcal{F},$$

numită *reprezentarea zecimală a lui* $\mathbf{R}$ (în analogie cu reprezentarea geometrică a lui $\mathbf{R}$, definită în 1.3). Aplicația β este bijectivă și vom identifica orice număr real x cu fracția zecimală infinită $\beta(x)$ scriind $x = m, x_1x_2x_3...$; reamintim că x este irațional dacă și numai dacă reprezentarea sa zecimală nu este periodică.

TEOREMA 1.2. **Pentru orice $x \in \mathbf{R}$, $x \geqslant 0$ şi pentru orice întreg $n \geqslant 0$ avem**

$$x^{(n)} \leqslant x < x^{(n)} + \frac{1}{10^n}, \tag{2}$$

unde $x^{(n)}$ este numărul obţinut reţinînd partea întreagă şi primele n zecimale ale lui x. Un rezultat similar are loc pentru $x < 0$, anume $|x^{(n)} - x| < \frac{1}{10^n}$.

Demonstraţie. Pentru orice x fixat, $x^{(n)}$ este aproximarea prin lipsă (trunchierea) de ordin n a numărului x; aproximarea prin adaos de ordin n a lui x este $x^{(n)} + \frac{1}{10^n}$. Dar orice număr real este cuprins între aproximările lui prin lipsă şi prin adaos de orice ordin şi se obţine astfel relaţia (2).

Exemplu. Fie $x = \pi$; în acest caz, inegalităţile (2) pentru $n = 0, 1, 2, \ldots$ sînt: $3 \leqslant \pi < 4$; $3{,}1 \leqslant \pi < 3{,}2$; $3{,}14 \leqslant \pi < 3{,}15, \ldots$.

Unul din avantajele reprezentării zecimale a numerelor reale îl constituie posibilitatea de comparare a acestora şi efectuarea unor calcule aproximative cu numere reale folosind trunchierile lor. De exemplu, nu este evident care din numerele $\sqrt{2}$ şi $\frac{707}{500}$ este mai mare, dar considerînd reprezentările lor zecimale 1,4142... şi 1,4140... respectiv, este evident că primul număr este mai mare.

Fie $a \in \mathbf{R}$ fixat. Dacă un număr real x este o aproximare a numărului a, atunci se scrie $x \simeq a$ sau $a \simeq x$. De exemplu: $\pi \simeq 3{,}1416$; $\frac{1}{3} \simeq 0{,}33$; $\sqrt{2} \simeq 1{,}414$. În această formulare nu este însă precizat sensul termenilor utilizaţi şi, în plus, în orice formulă aproximativă este necesară evaluarea erorii făcute. Formularea riguroasă este următoarea: dacă se dă numărul pozitiv ε, atunci se numeşte ε — *aproximare* (sau *aproximare de ordin cel mult* ε) a lui a orice număr real x astfel încît $|x - a| < \varepsilon$; numărul real şi pozitiv $|x - a|$ se numeşte *eroarea absolută* în formula aproximativă $x \simeq a$.

Exemple

1) 3,1416 este o aproximare de ordin cel mult $\frac{1}{10^4}$ a lui π, deoarece $|\pi - 3{,}1416| < \frac{1}{10^4}$ şi similar, 0,33 este o aproximare de ordin cel mult $\frac{1}{10^2}$ a lui $\frac{1}{3}$.

2) Fie $a = 2{,}9998$ şi $b = 3{,}0001$. Eroarea absolută în formula aproximativă $b \simeq a$ este $|a - b| = 0{,}0003 = \frac{3}{10^4} < \frac{1}{10^3}$. În general, dacă numerele a şi b au aceeaşi parte întreagă şi aceleaşi prime n zecimale, atunci $a^{(n)} = b^{(n)}$, şi $|a - b| = |a - a^{(n)} + b^{(n)} - b| \leqslant |a - a^{(n)}| + |b^{(n)} - b| < \frac{2}{10^n} < \frac{1}{10^{n-1}}$, adică b este o aproximare

de cel mult $\frac{1}{10^{n-1}}$ a lui a. Afirmaţia inversă nu este adevărată, aşa cum arată numerele a şi b considerate la început, unde a şi b nu au zecimale comune, deşi $|a - b| < \frac{1}{10^3}$.

3) Teorema I.2 se mai poate enunţa astfel: pentru orice x real, are loc formula aproximativă $x \simeq x^{(n)}$, cu eroare absolută mai mică decît 10^{-n}, $\forall\, n \in \mathbf{N}$.

TEOREMA I.3. **Fie a, b numere reale fixate şi $\varepsilon_1 > 0$, $\varepsilon_2 > 0$. Presupunem că x este o ε_1 — aproximare a lui a şi y este o ε_2 — aproximare a lui b. Atunci**

1°. suma $x + y$ este o $(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)$ — aproximare a lui $a + b$

2°. diferenţa $x - y$ este o $(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)$ — aproximare a lui $a - b$

3°. produsul xy este o ε — aproximare a lui ab, unde $\varepsilon = \varepsilon_1\varepsilon_2 + |x|\varepsilon_2 + |y|\varepsilon_1$.

Demonstraţie. Conform ipotezei, $|x - a| < \varepsilon_1$ şi $|y - b| < \varepsilon_2$.

1°. Avem $|(x + y) - (a + b)| = |(x - a) + (y - b)| \leqslant |x - a| + |y - b| < \varepsilon_1 + \varepsilon_2$.

2°. În mod similar, $|(x - y) - (a - b)| = |(x - a) + (b - y)| \leqslant |x - a| + |y - b| < \varepsilon_1 + \varepsilon_2$.

3°. Mai întîi, se observă că are loc identitatea

$xy - ab = (x - a)(b - y) + y(x - a) + x(y - b)$, de unde

$|xy - ab| \leqslant |x - a| \cdot |y - b| + |y| \cdot |x - a| + |x| \cdot |y - b| < \varepsilon_1\varepsilon_2 + |y|\varepsilon_1 + |x|\varepsilon_2$.

Exemplu. În formulele aproximative $\pi \simeq 3{,}1416$, $\sqrt{2} \simeq 1{,}4142$, erorile absolute sînt mai mici decît $\varepsilon = 0{,}0001$. Atunci, în formulele aproximative $\pi + \sqrt{2} \simeq 4{,}5558$, $\pi - \sqrt{2} \simeq 1{,}7274$, eroarea absolută este mai mică decît 0,0002.

Rezultate de tipul celor din teorema I.3 sînt aplicate în mod curent în prelucrarea matematică a datelor experimentale. La introducerea datelor numerice pe calculator se utilizează fracţii zecimale finite, în care numărul de zecimale considerate depinde de precizia urmărită ca şi de mărimea memoriei calculatorului. În orice caz, trebuie făcută distincţia netă dintre un număr real şi trunchierile sale de diverse ordine. De exemplu, trebuie făcută distincţia între numărul π şi oricare din aproximările lui: 3,14; 3,1416 etc.

EXERCIŢII (capitolul I, § 1)

1. Fie $a \in \mathbf{R}$, $a \neq 0$ dat. Să se rezolve în mulţimea $\mathbf{R}$ ecuaţiile: $x^2 = a^2$, $x^3 = a^3$, $x^4 = a^4$.

2. Folosind proprietatea lui Arhimede, să se arate că dacă $x, y \in \mathbf{R}$, $x > 0$, atunci există n natural astfel încît $nx > y$.

3. Să se rezolve în mulţimea $\mathbf{R}$ ecuaţiile:

a) $|x| + |x - 1| = 1$; b) $|x - 1| + |x + 1| = 2$.

4. Dacă $x, y \in \mathbf{R}$ şi $|x - 1| \leqslant 4$, $|y - 2| \leqslant 5$, să se arate că $-6 \leqslant x + y \leqslant 12$.

5. Să se rezolve în **R** inecuaţiile: a) $|x| + |x - 1| > 0$; b) $|x| + |x - 3| < 0$; c) $|x - 1| \leqslant 1$; d) $|x| + |x - 2| \leqslant 2x$; e) $|x + 1| > 2$; f) $|x + 1| > -1$; g) $|x - 1| + |x^2 - 3x + 2| > 0$.

6. Să se exprime cu ajutorul modulului faptul că $x \neq y$ şi faptul că $x - \frac{1}{10} < y < x + \frac{1}{10}$ (x, y fiind numere reale).

7. Fie $a_1, \ldots, a_n$ numere reale. Dacă $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n$ sînt numere reale luînd doar valorile 0, 1 şi -1, să se arate că $\left|\sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i a_i\right| \leqslant \sum_{i=1}^{n} |a_i|$.

8. a) Presupunem că $0 < x < y$ în **R**; să se arate că $\frac{1}{x} > \frac{1}{y}$. Este adevărată reciproca?

b) Presupunem că $x_1 \leqslant y_1$, $x_2 \leqslant y_2$ şi $x_1 + x_2 = y_1 + y_2$ în **R**. Să se arate că $x_1 = y_1$ şi $x_2 = y_2$. Generalizare.

9. Pentru orice $x \in \mathbf{R}$ se notează $x_+ = \frac{x + |x|}{2}$ şi $x_- = \frac{-x + |x|}{2}$. Să se arate că $x = x_+ - x_-$, $|x| = x_+ + x_-$. Să se reprezinte graficele funcţiilor $f, g: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ definite prin $f(x) = x_+$ şi $g(x) = x_-$.

10. Fie b_1, b_2 numere reale fixate. Să se arate că funcţia $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ definită prin $f(x) = |x + b_1| + |x + b_2|$, $\forall x \in \mathbf{R}$, nu este injectivă.

11. Pentru orice numere reale $x > 0$, $y > 0$ se pot considera mediile: aritmetică $m_a = \frac{x + y}{2}$, geometrică $m_g = \sqrt{xy}$ şi armonică $m_\alpha = \frac{2xy}{x + y}$. Să se arate că $m_\alpha \leqslant m_g \leqslant \frac{m_a + m_\alpha}{2} \leqslant m_a$.

12. Fie x, y, a, b numere reale oarecare. Să se arate că:

1°. $(xa + yb)^2 \leqslant (x^2 + y^2)(a^2 + b^2)$ (inegalitatea lui Cauchy-Buniakowski-Schwartz); A.L. Cauchy, 1789–1857; V. Buniakowski, 1804–1889; H.A. Schwartz, 1843–1921.

2°. $\sqrt{(x + y)^2 + (a + b)^2} \leqslant \sqrt{x^2 + a^2} + \sqrt{y^2 + b^2}$ (inegalitatea lui H. Minkowski, 1864–1909).

13. Să se determine toate valorile numărului natural n astfel încît:

a) $\frac{1}{n} < \frac{1}{10}$; d) $\frac{1}{2^n} < \frac{1}{10}$; g) $\frac{n^2}{n + 1} < 10$;

b) $\frac{1}{n} > \frac{1}{20}$; e) $\frac{1}{5^n} > \frac{1}{125}$; h) $\left|\frac{n^2}{n^2 + 1} - 1\right| < \frac{1}{100}$;

c) $\frac{1}{2^n} < 1$; f) $\left|\frac{2n + 1}{n} - 2\right| > \frac{1}{10}$; i) $\left|\frac{2^n + 1}{2^n + 2} - 1\right| < \frac{1}{10}$.

În care cazuri mulţimile respective de valori sînt finite?

14. Să se determine $\bigcap_{n \in \mathbf{N},\, n \geqslant 1} \left[0, \frac{1}{n}\right]$; $\bigcap_{n \in \mathbf{N},\, n \geqslant 1} \left(0, \frac{1}{n}\right)$; $\bigcup_{n \in \mathbf{Z}} [-n, n]$; $\bigcup_{n \in \mathbf{N}} \left[0, \frac{n}{n + 1}\right]$.

15. Să se arate că în orice interval mărginit din $\mathbf{R}$ se află cel mult un număr finit de numere întregi.

16. Să se arate că intersecţia a două intervale deschise este mulţimea vidă sau un interval deschis. Dar intersecţia a două intervale compacte?

17. a) Să se indice o submulţime a lui $\mathbf{R}$ care nu poate fi reprezentată ca reuniune a două intervale.

b) Să se arate că mulţimea $\mathbf{R} \setminus \mathbf{Z}$ este o reuniune de intervale deschise.

18. Fie $q \geqslant 1$ un număr întreg. Să se arate că pentru orice $x \in \mathbf{R}$ există p întreg astfel încît $\frac{p}{q} \leqslant x < \frac{p+1}{q}$. Să se deducă inegalitatea $\left| x - \frac{p}{q} \right| < \frac{1}{q}$.

19. Pentru orice $x, y \in \mathbf{R}$ se notează $d(x, y) = |x - y|$, distanţa euclidiană între x şi y. Să se arate că $\forall\, x, y, z \in \mathbf{R}$ avem $d(x, y) \geqslant 0$ şi $d(x, y) = 0 \longleftrightarrow x = y$; $d(x, y) = d(y, x)$; $d(x, y) \leqslant d(x, z) + d(y, z)$.

20. Să se figureze pe dreapta reală următoarele mulţimi de puncte: $A_1 = \{x \in \mathbf{R} \mid d(x, 1) \leqslant 1\}$, notată pe scurt $\{d(x, 1) \leqslant 1\}$; $A_2 = \{d(x, 1) > 2\}$; $A_3 = \{1 \leqslant d(x, 2) \leqslant 5\}$; $A_4 = \{d(x, 0) > -1\}$; $A_5 = \{d(x, 0) \geqslant 4\}$; $A_6 = \{d(x, 0) \leqslant 4\}$.

21. Fie $I = [a, b]$ un interval închis, respectiv $J = (a, b)$, unde $a < b$. Să se arate că pentru orice $x, y \in I$ (respectiv $\in J$), avem $d(x, y) \leqslant l(I)$, (respectiv $d(x, y) < l(J)$).

22. Să se determine valorile numărului natural n astfel încît:

a) $d\left(\frac{3n+1}{n}, 3\right) < \frac{1}{10}$; b) $d\left(\frac{3n+1}{n}, 3\right) < \frac{1}{10^4}$; c) $d\left(\frac{3n+1}{n}, 1\right) < \frac{1}{10}$.

23. Pentru cîte valori ale numărului natural n au loc relaţiile:

a) $\frac{n+1}{n+2} > \frac{11}{10}$; b) $\frac{(2n)!}{(2n+1)!} > \frac{1}{10}$; c) $\left| \frac{n+1}{2n+3} - \frac{1}{2} \right| > \frac{1}{10}$;

d) $\left| \frac{n^2+2n}{n^2+1} - 1 \right| > \frac{1}{20}$.

24. Să se arate că există N_1, N_2 naturale astfel încît:

a) $\frac{n}{n^2+n+1} < \frac{1}{10}$ pentru orice $n \geqslant N_1$; b) $2^n > n$ pentru orice $n \geqslant N_2$.

25. Să se arate că:

a) există $M > 0$ astfel încît $\frac{n^2+1}{n^4+1} < M$ pentru orice $n \in \mathbf{N}$;

b) nu există $M > 0$ astfel încît $\frac{n^4+1}{n^3+1} < M$ pentru orice $n \in \mathbf{N}$.

26. Să se indice două numere reale $a < b$ astfel încît $a < \frac{2n^2+n}{2n^2+1} < b$, pentru orice n natural.

27. Cîte zecimale exacte trebuie considerate pentru π şi pentru $\sqrt{2}$ astfel încît suma $\pi + \sqrt{2}$ să fie calculată cu o aproximare de cel mult 10^{-2}? Aceeaşi întrebare pentru $\pi\sqrt{2}$.

28. Fie $\frac{p}{q}$ ($p > 0$, $q > 0$ întregi) o aproximare a lui $\sqrt{2}$. Să se arate că numărul rațional $\frac{p+2q}{p+q}$ este o aproximare „mai bună" pentru $\sqrt{2}$.

29. Fie a, b numere reale fixate. Ce se poate spune despre a și b în ipoteza că $|a - b| < \varepsilon$ pentru orice $\varepsilon > 0$ întreg? Dar dacă $|a - b| < \varepsilon$ pentru orice număr rațional $\varepsilon > 0$?

30. Fie a, b numere reale fixate. Să se arate că dacă $a < b + \varepsilon$ pentru orice $\varepsilon > 0$, atunci $a \leqslant b$.

31. Să se arate că $\forall k \geqslant 1$, $\frac{1}{\sqrt{k}} > 2\sqrt{k+1} - 2\sqrt{k}$; deduceți că pentru orice A există N natural astfel încît $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} > A$ pentru orice $n \geqslant N$.

32. Să se verifice prin inducție că $x^n \geqslant 1 + n(x-1)$ pentru orice n natural și pentru orice $x > 0$ *(inegalitatea lui I. Bernoulli*, 1654–1705).

§ 2. Funcții reale. Operații cu funcții reale

Se poate afirma că analiza matematică elementară revine la studiul funcțiilor de o variabilă reală cu valori reale. Acest studiu este cerut atît de nevoia de a descrie evoluția unor procese fizice, tehnologice, economice, dar și de însăși dezvoltarea matematicii. În cea mai mare parte, cuprinsul acestui paragraf vă este cunoscut și am căutat aici doar o prezentare sintetică. Vom urmări totodată sistematic modul cum se reflectă structurile (algebrice și de ordine) dreptei reale asupra funcțiilor reale.

2.1. Funcții reale; grafice, exemple

Reamintim că două funcții $f: E \to F$, $g: E_1 \to F_1$ sînt *egale* dacă au loc egalitățile de mulțimi $E = E_1$, $F = F_1$ și dacă $f(x) = g(x)$ pentru orice $x \in E$. În pofida simplității acestei definiții, demonstrarea egalității a două funcții poate să nu fie ușoară. De exemplu, dacă $a \in \mathbf{R}$, atunci demonstrarea egalității funcțiilor $f, g: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ definite prin $f(x) = (x+a)^n$, $g(x) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k x^{n-k} a^k$ revine la stabilirea formulei binomului lui Newton.

Reamintim că funcțiile cu valori în $\mathbf{R}$ se numesc *funcții reale*. Să presupunem că $f: D \to \mathbf{R}$ este o funcție reală de o variabilă reală, definită pe o submulțime $D \subset \mathbf{R}$; atunci *graficul* ei G_f este submulțimea lui $\mathbf{R}^2$ formată din toate perechile $(x, y) \in \mathbf{R}^2$ astfel încît $x \in D$ și $y = f(x)$, adică

$$G_f = \{(x, f(x)) \mid x \in D\}.$$

Se mai spune că relația

(3) $$y = f(x)$$

este *ecuația graficului* lui f. Făcînd convenția de a fixa în plan un sistem ortogonal de axe xOy, de a considera D ca mulțime de puncte pe axa absciselor, iar valorile lui f ca puncte pe axa ordonatelor, graficul G_f este o submulțime de puncte din acel plan, anume submulțimea formată din punctele ale căror coordonate verifică relația (3). Graficul unei funcții reale date nu poate fi întotdeauna reprezentat cu precizie și se indică doar o schiță aproximativă cuprinzînd puncte remarcabile ale graficului. Prin grafice se redau vizual caracteristici ale funcțiilor și o imagine globală asupra valorilor funcției prin limbajul special oferit de desen. În unele cazuri, semnalele fizice, asimilate cu funcții reale, au graficele indicate pe ecranul osciloscoapelor (în fig. I.4 apar două semnale).

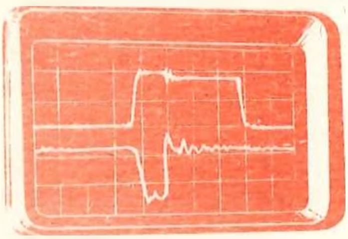


Fig. I.4

Exemple

1) Funcția $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, definită prin $f(x) = \sin x$ este diferită de funcția $g : \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \to [-1, 1]$, definită prin $g(x) = \sin x$. De exemplu, g este bijectivă, în timp ce f nu este nici injectivă nici surjectivă. Se spune, în acest caz, că f este o prelungire a lui g.

2) Multe legi fizice exprimă dependențe ale unor mărimi de alte mărimi. Modelul matematic al lor îl constituie uneori funcțiile reale. De exemplu, formula $s = v \cdot t$ (legea mișcării rectilinii uniforme cu viteza constantă v) este strîns legată de funcția reală $s : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, definită prin $s(t) = v \cdot t$. „Graficul mișcării uniforme" este de fapt graficul funcției s. De obicei studiul mișcării este limitat la un interval de timp I și atunci trebuie considerată funcția $s : I \to \mathbf{R}$, $s(t) = v \cdot t$ (am folosit aceeași notație pentru funcții care trebuie considerate distincte).

Multe teoreme din analiza matematică se referă la funcții definite pe intervale. În anumite contexte fizice, barele rectilinii pot fi asimilate prin intervale; de asemenea, se vorbește curent de intervale de timp (definiția noțiunii de interval a fost dată la pagina 9). Să considerăm o bară metalică asimilată cu un interval $I \subset \mathbf{R}$. Pentru orice punct $x \in I$ notăm cu $t(x)$ temperatura barei în punctul x. În acest mod este definită o funcție reală $t : I \to \mathbf{R}$ (fig. I.5). Proprietățile matematice posibile ale acestei funcții: mărginire, monotonie, continuitate etc. sînt strîns legate de proprietăți fizice ale barei considerate.

Fig. I.5

În cadrul rigorii matematice, ori de cîte ori este studiată o funcție, trebuie indicate explicit, domeniul (mulțimea) ei de definiție și mulțimea de valori.

3) În unele considerații fizice este utilă funcția următoare:

$$\sigma : \mathbf{R} \to \mathbf{R}, \text{ definită prin } \sigma(x) = \begin{cases} 0, & \text{dacă } x < 0 \\ 1, & \text{dacă } x \geqslant 0 \end{cases}$$

numită *treapta unitate* (a lui O. Heaviside, 1850—1925), avînd graficul indicat în figura I.6 (săgeata corespunde capătului unui interval deschis).

Acesta este un exemplu de funcție reală definită „cu acoladă". Astfel de funcții apar în mod necesar în unele descrieri. Să presupunem că tensiunea U într-o rețea electrică

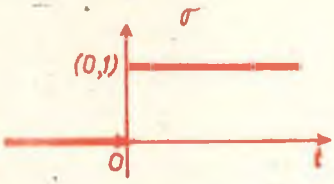


Fig. I.6

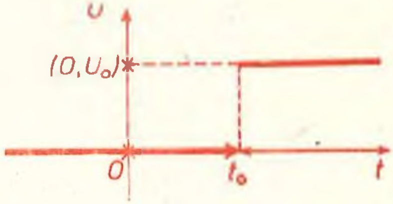


Fig. I.7

este egală cu zero pînă la un moment t_0 și are o valoare constantă U_0 începînd din acel moment. Funcția care modelează variația în timp a tensiunii din acea rețea este funcția $U : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ definită prin

$$U(t) = \begin{cases} 0 \text{ , dacă } t < t_0 \\ U_0, \text{ dacă } t \geqslant t_0 \end{cases}$$

avînd graficul indicat în figura I.7. De remarcat că funcția U este constantă pe fiecare din intervalele $(-\infty, t_0)$, $[t_0, \infty)$, dar nu este constantă pe $\mathbf{R}$. Are loc egalitatea $U(t) = U_0 \cdot \sigma(t - t_0)$ pentru orice $t \in \mathbf{R}$. Pentru $t_0 = 0$, $U_0 = 1$, avem $U = \sigma$.

4) Se pot considera funcții reale mai neobișnuite avînd însă importanță teoretică: de exemplu, funcția $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ a lui P.L. Dirichlet (1805—1859), definită prin

$$f(x) = \begin{cases} 1, \text{ dacă } x \in \mathbf{Q} \\ 0, \text{ dacă } x \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}. \end{cases}$$

2.2. Operații algebrice cu funcții reale

Fie $f : D \to \mathbf{R}$, $g : D \to \mathbf{R}$ două funcții reale definite pe aceeași mulțime D. Se pot considera atunci *funcția-sumă* $s = f + g$, $s : D \to \mathbf{R}$ definită prin $s(x) = f(x) + g(x)$, $\forall\, x \in D$ și *funcția-produs* $p = fg$, $p : D \to \mathbf{R}$ definită prin $p(x) = f(x) \cdot g(x)$, $\forall\, x \in D$. Se pot, de asemenea, defini *funcția-diferență* $f - g : D \to \mathbf{R}$ prin $(f - g)(x) = f(x) - g(x)$, $\forall\, x \in D$ și *funcția-cît* $h = \frac{f}{g}$, definită pe mulțimea $D_1 = \{x \in D \mid g(x) \neq 0\}$ prin $h(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$, $\forall\, x \in D_1$.

Se observă că aceste funcții au fost definite folosind structura algebrică a dreptei reale, care este domeniul de valori (codomeniul) al funcțiilor f și g.

Exemple

1) Pentru funcțiile $f, g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ definite prin $f(x) = (x + 2)^2$, $g(x) = (x - 2)^2$, $\forall\, x \in \mathbf{R}$, suma $s = f + g$ este funcția $s : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $s(x) = (x + 2)^2 + (x - 2)^2 = 2x^2 + 8$, iar funcția-cît $h = \frac{f}{g}$ este definită pe mulțimea $D_1 = \mathbf{R} \setminus \{2\}$, prin $h(x) = \frac{(x + 2)^2}{(x - 2)^2}$, $\forall\, x \in D_1$.

2) Pentru funcțiile $f : [0, \infty) \to \mathbf{R}$, $f(x) = \sqrt{x}$ și $g : (-\infty, 0) \to \mathbf{R}$, $g(x) = \frac{1}{\sqrt{-x}}$ nu se pot defini $f+g$, $f-g$, fg și $\frac{f}{g}$, pentru că f și g nu au aceeași mulțime de definiție.

3) Orice funcţie monom $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, definită prin $f(x) = ax^p$ (a real şi $p \geqslant 0$ întreg) este obţinută prin operaţii de produs între funcţii constante şi funcţia identică $1_{\mathbf{R}} : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $x \longmapsto x$. Orice funcţie polinomială $P : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ se obţine prin sume finite de funcţii-monom. Aceasta revine la faptul că există numere reale $a_0, a_1, \ldots, a_n$, $a_0 \neq 0$ astfel încît $P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n$, $\forall\, x \in \mathbf{R}$ (dacă P are gradul n). În cazurile $n = 1$ şi $n = 2$ regăsim funcţiile de gradul I (liniară) şi de gradul II studiate în clasele anterioare. Funcţiile raţionale sînt cîturi de funcţii polinomiale; dacă P şi Q sînt funcţii polinomiale, atunci funcţia raţională $\frac{P}{Q}$ este definită pe mulţimea $\{x \in \mathbf{R} \mid Q(x) \neq 0\}$.

Observaţie. Structura de ordine pe mulţimea $\mathbf{R}$ permite introducerea unei relaţii de ordine şi pe mulţimea funcţiilor reale definite pe o aceeaşi mulţime D. Fie $f, g : D \to \mathbf{R}$ două funcţii; scriem $f \leqslant g$ (şi citim f este mai mică sau egală cu g pe mulţimea D) dacă $f(x) \leqslant g(x)$ pentru orice $x \in D$. În mod similar, faptul că $f > 0$ înseamnă că $f(x) > 0$ pentru orice $x \in D$. Relaţia „$f \leqslant g$" este reflexivă ($f \leqslant f$), tranzitivă ($f \leqslant g$, $g \leqslant h \Rightarrow f \leqslant h$) şi antisimetrică ($f \leqslant g$, $g \leqslant f \Rightarrow f = g$), deci este o relaţie de ordine. Spre deosebire de relaţia de ordine pe mulţimea numerelor reale, în cazul funcţiilor relaţia de ordine nu este totală; anume fiind date două funcţii $f, g : D \to \mathbf{R}$ *nu* rezultă în mod necesar $f \leqslant g$ sau $g \leqslant f$, ci se poate ca ele să nu fie comparabile.

Reamintim că dacă a, b sînt numere reale, atunci notăm cu max (a, b) şi min (a, b) cel mai mare şi respectiv cel mai mic dintre numerele a, b. Aşadar

$$\max(a, b) = \begin{cases} a, & \text{dacă } a \geqslant b \\ b, & \text{dacă } a < b \end{cases}, \quad \min(a, b) = \begin{cases} a, & \text{dacă } a \leqslant b \\ b, & \text{dacă } a > b \end{cases}.$$

Evident, $\max(a, b) = \max(b, a)$, $\min(a, b) = \min(b, a)$. Aceste noţiuni se pot extinde pentru un număr finit de numere reale.

Dacă $f, g : D \to \mathbf{R}$ sînt două funcţii reale, atunci se pot defini funcţiile $h = \max(f, g) : D \to \mathbf{R}$, $h(x) = \max(f(x), g(x))$, $k = \min(f, g) : D \to \mathbf{R}$, $k(x) = \min(f(x), g(x))$. De asemenea, se defineşte funcţia-modul $|f| : D \to \mathbf{R}$, $x \longmapsto |f(x)|$. Aşadar, pentru orice $x \in D$ avem:

$$|f|(x) = \begin{cases} f(x), & \text{dacă } f(x) > 0 \\ 0, & \text{dacă } f(x) = 0 \\ -f(x), & \text{dacă } f(x) < 0. \end{cases}$$

2.3. Compunerea şi inversarea funcţiilor

Dacă $f : A \to B$, $g : B \to C$ sînt două funcţii astfel încît domeniul de valori al lui f să coincidă cu domeniul de definiţie al lui g, atunci se poate considera *funcţia-compusă* $h = g \circ f$, $h : A \to C$ definită prin $h(x) = g(f(x))$, $\forall\, x \in A$.

Dacă $f_1 : A \to B$, $f_2 : B \to C$, $f_3 : C \to D$ sînt trei funcţii, atunci se verifică imediat relaţia $f_3 \circ (f_2 \circ f_1) = (f_3 \circ f_2) \circ f_1$; se mai spune că operaţia de compunere este asociativă.

Exemple

1) Fie $f : \mathbf{R} \to [0, \infty)$, $f(x) = x^2$ şi $g : [0, \infty) \to \mathbf{R}$, $g(x) = \sqrt{x}$. Are sens $h = g \circ f$ şi se obţine funcţia $h : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $h(x) = g(f(x)) = \sqrt{f(x)} = \sqrt{x^2} = |x|$, $\forall x \in \mathbf{R}$. De asemenea, are sens şi $k = f \circ g$, $k : [0, \infty) \to [0, \infty)$, $k(x) = f(g(x)) = g(x)^2 = (\sqrt{x})^2 = x$, $\forall x \geqslant 0$.

2) Funcţia $h : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ definită prin $h(x) = \sin^2 x$ este tocmai $g \circ f$ pentru $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = \sin x$ şi $g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $g(u) = u^2$; în mod similar, funcţia $h : (0, \infty) \to \mathbf{R}$, $h(x) = \sin \frac{1}{\sqrt{x}}$ este egală cu $g \circ f$ unde $f : (0, \infty) \to \mathbf{R}$, $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ şi $g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $g(u) = \sin u$.

Fie $f : A \to B$ o funcţie bijectivă. În acest caz se poate defini *inversa* lui f, anume funcţia $f^{-1} : B \to A$, care asociază oricărui element $y \in B$ acel unic $x \in A$ astfel încît $f(x) = y$. Evident, $f^{-1} \circ f = 1_A$, $f \circ f^{-1} = 1_B$.

Dacă $f : A \to B$ este o funcţie oarecare şi $A' \subset A$ este o submulţime, atunci se poate defini submulţimea $\{f(x) \mid x \in A'\}$ a lui B, numită *imaginea* lui A' prin f şi notată $f(A')$.

Exemple

1) Funcţia $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = x^3$ este bijectivă şi inversa ei este $f^{-1} : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x}$.

2) Funcţia $f : \mathbf{R} \to [-1, 1]$, $f(x) = \sin x$ nu poate fi inversată (nefiind injectivă). Dar prin restricţie la intervalul $A = \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ se obţine o funcţie bijectivă.

$$\sin : \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \to [-1, 1]; \text{ inversa acestei funcţii este } \arcsin = \sin^{-1},$$

$$\arcsin : [-1, 1] \to \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right],$$

definită asociind oricărui număr $x \in [-1, 1]$ acel unic $y \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ astfel încît $\sin y = x$.

În mod similar, funcţiile $\cos : [0, \pi] \to [-1, 1]$, $\operatorname{tg} : \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \to \mathbf{R}$, $\operatorname{ctg} : (0, \pi) \to \mathbf{R}$, sînt bijective şi admit respectiv următoarele inverse:

$\arccos : [-1, 1] \to [0, \pi]$, $x \longmapsto y$ (unde y este definit prin $\cos y = x$);

$\operatorname{arctg} : \mathbf{R} \to \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, $x \longmapsto y$ unde $\operatorname{tg} y = x$;

$\operatorname{arcctg} : \mathbf{R} \to (0, \pi)$, $x \longmapsto y$ unde $\operatorname{ctg} y = x$.

EXERCIŢII (capitolul I, § 2)

1. Să se determine domeniul maxim de definiţie pentru funcţiile f următoare (adică mulţimea acelor $x \in \mathbf{R}$ pentru care $f(x)$ are sens şi este un număr real):

a) $f(x) = \dfrac{x+1}{x-1}$ b) $f(x) = \sqrt{x-1} + \sqrt[3]{x}$

c) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x-1}}$ d) $f(x) = \sqrt{\dfrac{x+1}{x-1}}$

e) $f(x) = \sqrt{x^2-4}$ f) $f(x) = \dfrac{x}{x^2+4}$

g) $f(x) = \dfrac{x^2}{x^2-1}$ h) $f(x) = \dfrac{x^3-4}{x^2}$

i) $f(x) = \dfrac{x}{x^3-1}$ j) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x^2+1}}{|x-1|}$

k) $f(x) = \dfrac{x-1}{|x|-1}$ l) $f(x) = 1 + \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x-1}$

m) $f(x) = \dfrac{1}{x^2+|x|}$ n) $f(x) = \dfrac{1}{x^2-4x+m}$ $(m \in \mathbf{R})$

o) $f(x) = \dfrac{1}{x^4-16}$ p) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^4-16}}$

q) $f(x) = \dfrac{1}{|x^4-16|-15}$ r) $f(x) = \sqrt{1-x} + \sqrt{1+x}$

s) $f(x) = \sqrt[3]{1-x^3} + \sqrt[3]{1+x^3}$ t) $f(x) = \dfrac{x\sqrt{x-1}}{x^2-1}$

u) $f(x) = \sqrt{1-\cos x}$ v) $f(x) = \sqrt{\sin x}$

w) $f(x) = \dfrac{1-\cos x}{\sin x}$ z) $f(x) = \operatorname{ctg} \pi x$.

2. Să se traseze graficul funcţiilor $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ definite prin:

a) $f(x) = |x| + 2$ b) $f(x) = |2-4x|$

c) $f(x) = |x^2-1|$ d) $f(x) = x + |x|$

e) $f(x) = \begin{cases} 1, & \text{dacă } x \leqslant 1 \text{ sau } x \geqslant 3 \\ 2, & \text{dacă } 1 < x < 3 \end{cases}$ f) $f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{dacă } x \leqslant 0 \\ -x^2, & \text{dacă } x > 0 \end{cases}$

g) $f(x) = |1 + x - |x||$ h) $f(x) = \sin x + |\sin x|$.

i) $f(x) = \min\limits_{t \leqslant x} t^2$ j) $f(x) = \max(x, x^2)$

k) $f(x) = \min(1, x)$ l) $f(x) = \min(1, x, x^2)$

3. Se consideră intervalul $I = [0, 2]$. Să se traseze graficul funcţiei

$f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ definită prin $f(x) = \begin{cases} 1, & \text{dacă } x \in I \\ 0, & \text{dacă } x \notin I \end{cases}$ şi al funcţiei

$g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ definită prin $g(x) = \begin{cases} 0, & \text{dacă } x \in I \\ x, & \text{dacă } x \notin I \end{cases}$

4. Să se reprezinte grafic funcţiile $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ definite prin:

a) $f(x) = -2x \cdot \operatorname{sgn} x$;
b) $f(x) = (x^2 + 1) \operatorname{sgn} x$;
c) $f(x) = 2x + \sigma(x)$;
d) $f(x) = x^2\sigma(x)$;
e) $f(x) = x\sigma(x - 2)$;
f) $f(x) = \sigma(x) - \sigma(x - 2)$;
g) $f(x) = (\sin x) \operatorname{sgn} x$;
h) $f(x) = (\sin x)\sigma(x)$.

5. Să se explicitează $f(x)$ pentru funcţiile f ale căror grafice sînt indicate în figura I.8, unde $n \geqslant 1$ este întreg.

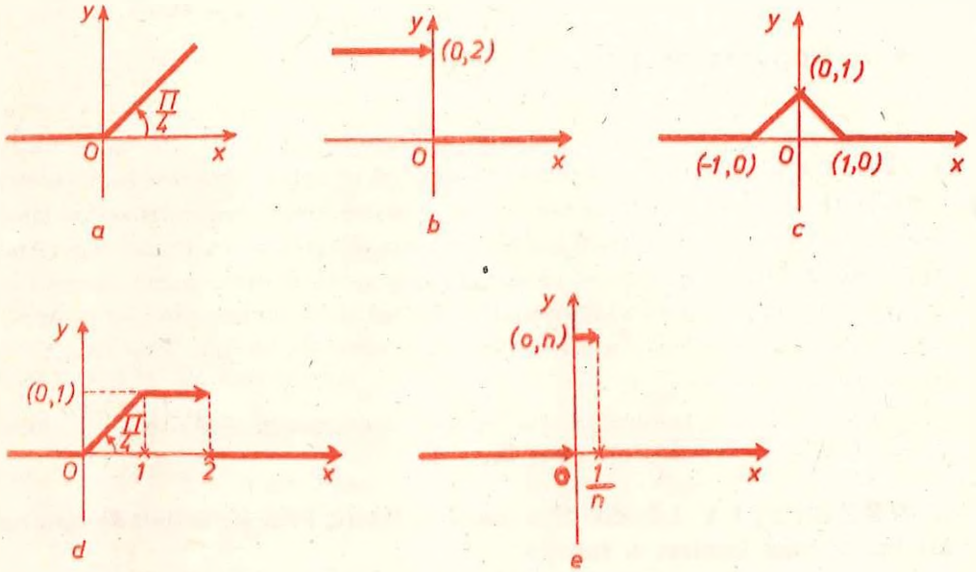


Fig. I.8

6. Să se determine funcţia reală $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ ştiind că $f(x + 1) = x^2 + 3x - 1$, $\forall\, x \in \mathbf{R}$; idem, $f(2x - \pi) = \cos^2 x$, $\forall\, x \in \mathbf{R}$ şi $f(1 - 2x) = |x|$, $\forall\, x \in \mathbf{R}$.

7. a) Dacă $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ este o funcţie reală fixată şi se consideră funcţia $g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, definită prin $g(x) = f(x - a)$ ($a \in \mathbf{R}$ constant), ce legătură există între graficele G_f, G_g?

b) Fie $f : D \to \mathbf{R}$ o funcţie reală fixată şi k o constantă reală. Se consideră funcţiile $u : D \to \mathbf{R}$, $v : D \to \mathbf{R}$ definite prin $u(x) = f(x) + k$, $v(x) = kf(x)$. Cum pot fi obţinute graficele lui u şi v din graficul lui f?

8. Presupunem construit graficul unei funcţii reale $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$. Cum se obţin graficele funcţiilor $-f$, $|f|$, $\sigma \cdot f$, $\operatorname{sgn} f$?

9. Să se calculeze $g \circ f$, $f \circ g$ pentru următoarele perechi de funcţii $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$:

a) $f(x) = x + 1$, $\quad g(x) = x^2 - x$;

b) $f(x) = \sqrt[3]{x}$, $\quad g(x) = |x|^3$;

c) $f(x) = \begin{cases} x, & \text{dacă } x \geqslant 0 \\ 0, & \text{dacă } x < 0 \end{cases}$, $\quad g(x) = \begin{cases} 0, & \text{dacă } x \geqslant 0 \\ x, & \text{dacă } x < 0 \end{cases}$;

d) $f(x) = x + |x|$, $\quad g(x) = \begin{cases} x, & \text{dacă } x \geqslant 0 \\ x^2, & \text{dacă } x < 0 \end{cases}$;

e) $f(x) = \begin{cases} 1, & \text{dacă } x \text{ este raţional} \\ 0, & \text{dacă } x \text{ este iraţional} \end{cases}$, $\quad g(x) = \begin{cases} x^2, & \text{dacă } x \text{ este raţional} \\ 0, & \text{dacă } x \text{ este iraţional} \end{cases}$.

10. Se consideră funcțiile $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = 2x + 7$ și $g : (0, 1) \to \mathbf{R}$, $g(x) = \frac{1}{2x-2}$.
Să se determine o valoare $\delta > 0$ astfel încît:

a) $|f(x) - 9| < \frac{1}{100}$, dacă $|x - 1| < \delta$.

b) $g(x) < -100$, dacă $x \in (1 - \delta, 1)$.

§ 3. Noțiunea de șir

Există multe probleme de algebră, geometrie și chiar de matematică aplicată care utilizează șiruri. Este suficient să amintim progresiile aritmetice și geometrice, șirul perimetrelor $(p_n)_{n \geq 3}$ poligoanelor regulate cu n laturi înscrise într-un cerc, șirul rezultatelor intermediare într-un proces algoritmic etc. În același timp, vom vedea că șirurile constituie un important instrument teoretic și practic al analizei matematice. Intuitiv, un șir de elemente înseamnă „un element după altul" fiecare avînd un număr de ordine. Dar aceasta nu este o definiție.

Fie k un număr natural fixat. Vom nota $\mathbf{N}_k = \{n \in \mathbf{N} \mid n \geq k\}$, adică $\mathbf{N}_k = \{k, k + 1, k + 2, ...\}$. Deci $\mathbf{N}_0 = \mathbf{N}$.

DEFINIȚIA I.1. Fie M o mulțime fixată. Prin șir infinit de elemente ale lui M vom înțelege o funcție

$$f : \mathbf{N}_k \to M,$$

unde k este un număr natural fixat.

În loc de șir infinit vom spune, pe scurt, șir.

Cel mai adesea avem $k = 0$ sau $k = 1$. Punînd $f(n) = a_n$, șirul f se mai notează $(a_n)_{n \geq k}$. Cele mai des utilizate șiruri vor fi scrise astfel: $(a_n)_{n \geq 0}$ sau $(a_n)_{n \geq k}$. Elementul a_n se numește *termenul de rangul* n al șirului; pentru $k = 1$ el este tocmai al n-lea termen al șirului.

Așadar, șirul de numere reale $(a_n)_{n \geq 0}$ este funcția $f : \mathbf{N} \to \mathbf{R}$ definită prin $f(n) = a_n$, $\forall\, n \geq 0$. Dacă $M = \mathbf{Q}$ (respectiv $\mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}$), vom spune că avem un șir de numere raționale (respectiv iraționale).

Două șiruri $(a_n)_{n \geq k}$, $(b_n)_{n \geq k}$ sînt *egale* dacă $a_n = b_n$ pentru orice $n \geq k$.

Este important de făcut distincție între un șir și mulțimea termenilor săi (ceea ce revine la distincție între o funcție și imaginea acelei funcții). Astfel, șirurile $((-1)^n)_{n \geq 1}$ și $((-1)^{n+1})_{n \geq 1}$ sînt distincte, dar au aceeași mulțime a termenilor, anume $\{-1, 1\}$.

Pentru un șir $(a_n)_{n \geq 0}$ se poate considera submulțimea $\{(n, a_n) \mid n \in \mathbf{N}\}$ a lui $\mathbf{R}^2$, adică graficul șirului.

Exemple de şiruri

1) Dacă $a \in \mathbf{R}$, atunci se poate considera şirul constant $(a_n)_{n\geqslant 0}$ definit prin $a_n = a$ pentru orice întreg $n \geqslant 0$. Dacă $b \neq a$ este un alt număr real, atunci se poate considera şirul $(c_n)_{n\geqslant 0}$ definit prin

$$c_n = \begin{cases} a, & \text{dacă } n \text{ este impar} \\ b, & \text{dacă } n \text{ este par} \end{cases}$$

care nu mai este un şir constant. Se observă că pentru orice $n \geqslant 0$ avem:

$$c_n = a \cdot \frac{1 - (-1)^n}{2} + b \cdot \frac{1 + (-1)^n}{2}.$$

2) Şirul $(n)_{n\geqslant 0}$ se numeşte şirul numerelor naturale, a cărui mulţime de termeni este $\mathbf{N}$. Se pot, de asemenea, considera şirul $(2n)_{n\geqslant 0}$ al numerelor pare şi şirul $(2n+1)_{n\geqslant 0}$ al numerelor impare.

3) Indicăm un exemplu de şir care apare în unele consideraţii economice.

Presupunem costul iniţial al unei instalaţii egal cu C. După începerea funcţionării instalaţiei, acesta se micşorează treptat, deoarece în calcule economice se face convenţia că o parte din cost este transferată produselor obţinute cu ajutorul acelei instalaţii. Să notăm cu C_n costul acelei instalaţii după n ani de funcţionare, $n \geqslant 1$. Raportul $\mu = \frac{C - C_1}{C}$ se numeşte *coeficient de amortizare* a costului iniţial; deoarece $C_1 < C$, avem $0 < \mu < 1$. Pentru calculul lui C_n în funcţie de C, n, μ se observă mai întîi că $\mu C = C - C_1$, deci $C_1 = C(1 - \mu)$; economiştii fac ipoteza că în anii următori se respectă aceeaşi regulă, adică $C_2 = C_1(1 - \mu) = C(1 - \mu)^2$, $C_3 = C_2(1 - \mu) = C(1 - \mu)^3$ etc. şi, în general, $C_n = C(1 - \mu)^n$ pentru orice $n \geqslant 1$. Aşadar, este definit în mod firesc un şir de numere reale $(C_n)_{n\geqslant 0}$ unde $C_0 = C$.

Ca o aplicaţie concretă, să presupunem costul iniţial al instalaţiei $C = 500\,000$ lei şi după 4 ani, $C_4 = 20\,000$ lei. Ne propunem să determinăm costul instalaţiei după 8 ani şi să aflăm după cîţi ani costul acelei instalaţii devine mai mic decît 100 lei. Mai întîi, din relaţia $C_4 = C(1 - \mu)^4$, rezultă $20\,000 = 500\,000\,(1 - \mu)^4$, adică $25(1 - \mu)^4 = 1$, de unde $\mu = 1 - \frac{\sqrt{5}}{5}$. Atunci $C_8 = C(1 - \mu)^8 = 500\,000\left(\frac{\sqrt{5}}{5}\right)^8 = 800$ lei. Punînd condiţia $C_n < 100$, rezultă $500\,000\left(\frac{\sqrt{5}}{5}\right)^n < 100$, deci $n \geqslant 11$. Aşadar, după 11 ani costul acelei instalaţii coboară sub 100 de lei.

4) Pentru orice număr real $x = m, x_1x_2x_3\ldots$, $x > 0$, am notat cu $x^{(0)} = m$, $x^{(1)} = m + \frac{x_1}{10}$, $x^{(2)} = m + \frac{x_1}{10} + \frac{x_2}{100}$, ... trunchierile sale succesive. În acest mod, se obţine un şir de numere raţionale $(x^{(n)})_{n\geqslant 0}$ asociat lui x. Reamintim că $0 \leqslant x - x^{(n)} < \frac{1}{10^n}$ pentru orice $n \geqslant 0$, conform teoremei I.2.

5) Considerăm un semnal într-un interval I de timp, identificat cu o funcţie $\varphi : I \to \mathbf{R}$. Pentru orice moment $t \in I$, valoarea $\varphi(t)$ se numeşte *eşantionul* semnalului φ la momentul t. Pentru orice şir de momente $(t_n)_{n\geqslant 0}$ din I se poate considera şirul $(\varphi(t_n))_{n\geqslant 0}$ al eşantioanelor semnalului φ la momentele considerate.

§ 4. Submulţimi ale lui $\mathbf{R}$

4.1. Submulţimi mărginite ale lui $\mathbf{R}$

La acest punct vom preciza cîteva noţiuni importante legate de relaţia de ordine pe $\mathbf{R}$. Pentru înţelegerea lor recomandăm folosirea reprezentării geometrice pe axă.

Fie $A \subset \mathbf{R}$ o submulţime nevidă. Reamintim că un element $b \in \mathbf{R}$ se numeşte *majorant pentru* A dacă el este mai mare decît toate elementele lui A, adică $x \leqslant b$ pentru orice $x \in A$. Dacă o mulţime admite majoranţi,ea se numeşte *mărginită superior* sau *majorată*. În mod similar se definesc minoranţii lui A (ca elemente $a \in \mathbf{R}$ astfel încît $a \leqslant x$ pentru orice $x \in A$) şi submulţimile mărginite inferior. Dacă un majorant b al lui A aparţine lui A, atunci se spune că A are un *cel mai mare element* (anume b); acest număr este unic şi este notat cu „max A". Similar, dacă mulţimea A are un minorant aparţinînd lui A, atunci acesta este *cel mai mic element* al lui A, notat „min A".

Exemple

1) Dacă $a_1 \leqslant a_2 \leqslant \ldots \leqslant a_p$ sînt numere reale şi $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_p\}$, atunci minoranţii lui A sînt numerele $\leqslant a_1$, iar majoranţii lui A sînt numerele $\geqslant a_p$. Apoi $\min A = a_1$, $\max A = a_p$.

2) Dacă $A = \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots\right\}$, atunci $\max A = 1$, iar majoranţii lui A sînt toate numerele reale mai mari sau egale cu 1. Arătăm că nu există min A; într-adevăr, dacă ar exista min A, atunci el aparţine lui A, adică $\min A = \frac{1}{k}$, $k \geqslant 1$. Dar $\frac{1}{k+1} < \frac{1}{k}$ şi se obţine o contradicţie (anume în A ar exista elemente mai mici decît min A). Minoranţii lui A sînt toate numerele $a \leqslant 0$.

DEFINIŢIA I.2. O submulţime nevidă $M \subset \mathbf{R}$ se numeşte *mărginită* dacă ea este mărginită superior şi inferior. Un şir infinit $(a_n)_{n \geqslant k}$ de numere reale se numeşte *mărginit* dacă mulţimea termenilor săi este mărginită.

Aşadar, mulţimea M este mărginită dacă şi numai dacă ea este conţinută într-un interval compact $[\alpha, \beta]$ şi este nemărginită în caz contrar. Şirul $(a_n)_{n \geqslant k}$ este mărginit dacă şi numai dacă există numere reale $\alpha < \beta$ astfel încît $\alpha \leqslant a_n \leqslant \beta$ pentru orice $n \geqslant k$.

Exemple

1) Orice interval mărginit este mulţime mărginită.

2) Dacă o submulţime $A \subset \mathbf{R}$ are un cel mai mare element, atunci max A este un majorant al lui A (chiar cel mai mic majorant al lui A), iar dacă există şi min A, atunci mulţimea A este mărginită şi $A \subset [\min A, \max A]$.

3) Mulţimea $\mathbf{N}$ nu este mărginită superior, deci nu este mărginită. De asemenea, mulţimile $\mathbf{Z}$, $\mathbf{Q}$, $\mathbf{R}$ nu sînt mărginite.

4) Şirul $\left(\frac{1}{n^2}\right)_{n\geq 1}$ este mărginit deoarece toţi termenii săi aparţin intervalului $[0,1]$, adică $0 \leqslant \frac{1}{n^2} \leqslant 1$ pentru orice $n \geqslant 1$. În mod similar, şirul $\left(\frac{1}{n-2}\right)_{n\geqslant 3}$ este mărginit deoarece $0 < \frac{1}{n-2} \leqslant 1$ pentru orice $n \geqslant 3$.

5) Şirul $\left(\frac{(-1)^n}{n^2+1}\right)_{n\geqslant 0}$ este mărginit deoarece $\left|\frac{(-1)^n}{n^2+1}\right| = \frac{1}{n^2+1} \leqslant 1$ pentru orice $n \geqslant 0$.

Mai general, un şir $(a_n)_{n\geqslant k}$ este mărginit dacă şi numai dacă există un număr $D > 0$ astfel încît $|a_n| \leqslant D$ pentru orice $n \geqslant k$.

La punctul 1.2 am enunţat axioma lui Cantor, conform căreia orice submulţime nevidă majorată $C \subset \mathbf{R}$ admite un cel mai mic majorant, notat „sup C".

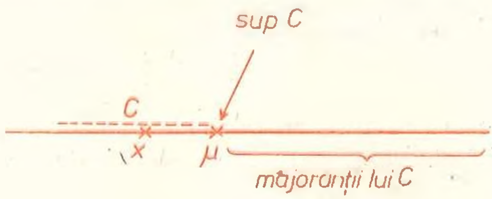


Fig. I.9

Numărul $\mu = \sup C$ este numit *marginea superioară a mulţimii C* şi el este caracterizat, aşadar, prin următoarele două condiţii:

1°. pentru orice $x \in C$ avem $x \leqslant \mu$;

2°. pentru orice $\varepsilon > 0$ există $y \in C$ astfel încît $\mu - \varepsilon < y$ (pentru că $\mu - \varepsilon$ nu este majorant al lui C).

Prin simetrie faţă de origine, rezultă că orice submulţime minorată $C \subset \mathbf{R}$ admite un cel mai mare minorant, numit *marginea inferioară* a lui C şi notat „inf C".

Fig. I.10

Aşadar, dacă o submulţime nevidă $C \subset \mathbf{R}$ este mărginită, atunci ea admite marginile $\lambda = \inf C$ şi $\mu = \sup C$ şi intervalul $[\lambda, \mu]$ este cel mai mic interval compact care conţine C (cel mai mic în sensul ordinii date de incluziune). Remarcăm, de asemenea, că dacă pentru o mulţime $A \subset \mathbf{R}$ există min A (respectiv max A), atunci A este minorată (respectiv majorată) şi $\inf A = \min A$ (respectiv $\sup A = \max A$).

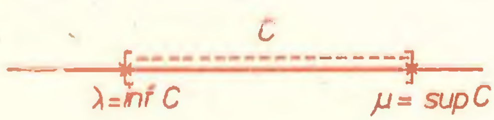


Fig. I.11

Exemple

1) Avem $\inf \mathbf{N} = \min \mathbf{N} = 0$, dar mulţimea $\mathbf{N}$ nu are margine superioară în $\mathbf{R}$ deoarece nu are majoranţi.

2) Considerăm mulţimea $C = \left\{\frac{1}{n} \mid n \geqslant 1 \text{ întreg}\right\}$; în acest caz $\sup C = \max C = 1$. Arătăm apoi că $\inf C = 0$. Avem $0 \leqslant x$ pentru orice $x \in C$ şi 0 este cel mai mare minorant; într-adevăr un număr $a > 0$ nu poate fi un minorant al lui C, deoarece există $n \geqslant 1$ întreg astfel încît $\frac{1}{n} < a$.

Pentru $C = \left\{\frac{2n+1}{n} \mid n \geqslant 1 \text{ întreg}\right\} = \left\{3,\ 2+\frac{1}{2},\ 2+\frac{1}{3},\ 2+\frac{1}{4},\ \ldots\right\}$, $\inf C = 2$, $\sup C = 3$.

3) Dacă $(a_n)_{n\geqslant k}$ este un şir mărginit de numere reale vom nota cu $\inf\limits_{n\geqslant k} a_n$ şi respectiv $\sup\limits_{n\geqslant k} a_n$ marginea inferioară (respectiv superioară) a mulţimii termenilor şirului. Astfel $\inf\limits_{n\geqslant 1} \frac{1}{n} = 0$, $\sup\limits_{n\geqslant 1} \frac{1}{n} = 1$.

Adjuncţionăm mulţimii $\mathbf{R}$ două noi elemente numite *minus infinit* (notat $-\infty$) şi *plus infinit* (notat $+\infty$ sau ∞) şi considerăm mulţimea

$$\overline{\mathbf{R}} = \mathbf{R} \cup \{-\infty, \infty\},$$

numită *dreaptă reală încheiată*. Aşadar, $\mathbf{R}$ este o submulţime a lui $\overline{\mathbf{R}}$ şi uneori elementele lui $\mathbf{R}$ se mai numesc numere *finite*. Pe mulţimea $\overline{\mathbf{R}}$ se poate introduce o relaţie de ordine, prelungind ordinea din $\mathbf{R}$, punînd

$$-\infty < \infty \text{ şi } -\infty < x,\ x < \infty \text{ pentru orice } x \in \mathbf{R}.$$

Pentru $a \in \mathbf{R}$ vom considera mulţimile: $[-\infty, a) = \{x \in \overline{\mathbf{R}} \mid -\infty \leqslant x < a\}$ şi $(a, \infty] = \{x \in \overline{\mathbf{R}} \mid a < x \leqslant \infty\}$, numite tot intervale. Dacă o submulţime nevidă $C \subset \mathbf{R}$ nu este majorată, atunci se mai scrie simbolic $\sup C = \infty$, iar dacă C nu este minorată, $\inf C = -\infty$. Aşadar, pentru orice submulţime nevidă $C \subset \mathbf{R}$, mărginită sau nu, se pot calcula $\inf C$ şi $\sup C$ în mulţimea $\overline{\mathbf{R}}$; în cazul cînd C este mărginită, aceste margini sînt finite.

Exemple: $\sup \mathbf{N} = \infty$, $\inf \mathbf{Z} = -\infty$, $\sup \mathbf{Z} = \infty$.

4.2. Noţiunea de vecinătate a unui punct

Fixăm un punct $a \in \mathbf{R}$.

DEFINIŢIA I. 3. Se numeşte *vecinătate* a punctului a orice mulţime $V \subset \mathbf{R}$ care conţine un interval deschis centrat în a.

În acest caz există $r > 0$ astfel încît $(a - r, a + r) \subset V$.

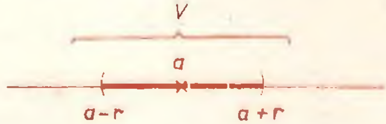


Fig. I.12

Exemple

1) Intervalele $(-4, 4)$, $[-2, 3)$, $\left(-\infty, \frac{7}{2}\right)$, $\mathbf{R}$ sînt vecinătăţi ale originii, deoarece conţin intervalul deschis $(-1, 1)$ centrat în origine. Mulţimea $\mathbf{Z}$ nu este vecinătate a originii pentru că nu conţine nici un interval $(-r, r)$, cu $r > 0$.

2) Este evident că un interval deschis (a, b), $a < b$, este vecinătate a oricărui punct al său; intervalul închis $[a, b]$ este vecinătate a oricărui punct c, astfel încît $a < c < b$, dar nu este vecinătate a capetelor a, b.

3) Dacă $a, b \in \mathbf{R}$ şi $a \neq b$, atunci există vecinătăţi disjuncte ale lor; într-adevăr, presupunem $a < b$ şi fie $r = \frac{b-a}{3}$. Atunci intervalele $(a - r, a + r)$, $(b - r, b + r)$ sînt vecinătăţi ale punctelor a, respectiv b şi sînt disjuncte (figura I.13).

Fig. I.13

De asemenea, se pot defini vecinătăţile lui $-\infty$ sau ∞. Se numeşte *vecinătate* a lui ∞ (respectiv $-\infty$) orice mulţime $V \subset \overline{\mathbf{R}}$ care conţine un interval de forma $(b, \infty]$ (respectiv de forma $[-\infty, b)$), unde b este un număr real. De exemplu orice interval (b, ∞) la care se adaugă punctul ∞ însuşi este vecinătate a lui ∞, iar intervalul $(-\infty, b)$ reunit cu $\{-\infty\}$ este vecinătate a lui $-\infty$.

Cu ajutorul noţiunii de vecinătate se poate defini noţiunea de punct de acumulare al unei submulţimi a lui $\mathbf{R}$, care va fi utilizată în elaborarea conceptului de limită a unei funcţii.

DEFINIŢIA I.4. Fie $D \subset \mathbf{R}$ o submulţime. Un punct $\alpha \in \overline{\mathbf{R}}$ se numeşte punct de acumulare pentru D dacă în orice vecinătate a lui α există cel puţin un punct din $D \setminus \{\alpha\}$.

Exemple

1) Pentru $D = (a, b)$, $a < b$, orice punct $\alpha \in [a, b]$ este un punct de acumulare.

2) Pentru $D = N$, ∞ este unicul punct de acumulare, iar mulţimea $\mathbf{Z}$ are pe $-\infty$, şi ∞ ca puncte de acumulare.

3) Pentru $D = (-\infty, 1) \cup (1, \infty)$, orice număr real α este punct de acumulare, inclusiv 1, deoarece este satisfăcută condiţia din definiţia I.4. De asemenea, $-\infty$, ∞ sînt puncte de acumulare pentru D.

4) Mulţimea $D = (-1, 2] \cup \{3\}$ are ca puncte de acumulare punctele intervalului închis $[-1, 2]$, iar punctul 3 nu este punct de acumulare pentru D.

5) Submulţimile finite ale lui $\mathbf{R}$ nu au puncte de acumulare.

Un punct $x \in D$ care nu este punct de acumulare pentru $D \subset \mathbf{R}$ se numeşte *punct izolat*. În exemplul 4 de mai sus, $x = 3$ este punct izolat pentru D.

EXERCIŢII (capitolul I, § 4)

1. Să se scrie primii 6 termeni pentru fiecare din şirurile:

a) $\left(\frac{1}{2n+1}\right)_{n\geq 0}$; b) $\left(\frac{n^2}{n-2}\right)_{n\geq 3}$; c) $\left(\frac{2n}{n!}\right)_{n\geq 1}$; d) $(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})_{n\geq 0}$.

2. Folosind inegalitatea lui Bernoulli [$x^n \geqslant 1 + n(x-1)$, pentru orice $x > 0$, $n \in \mathbf{N}$] să se arate că

a) $1{,}02^{100} \geqslant 3$; $1{,}01^{100} \geqslant 11$.

b) dacă $0 < a < 1$ este fixat, atunci există N natural astfel încît $a^n < \frac{1}{10}$ pentru orice $n \geqslant N$

c) dacă $a > 1$ este fixat, atunci există N natural astfel încît $a^n > 10$ pentru orice $n \geqslant N$ şi nu există N natural astfel încît $a^n < \frac{1}{10}$ pentru orice $n \geqslant N$.

3. a) Fie $A \subset \mathbf{R}$ o mulţime mărginită. Să se arate că orice submulţime a lui A este mărginită.

b) Dacă A_1, A_2 sînt submulţimi mărginite ale lui $\mathbf{R}$ să se arate că $A_1 \cup A_2$, $A_1 \cap A_2$, $A_1 \setminus A_2$ au aceeaşi proprietate.

4. Fie $a, b \in \mathbf{R}$. Să se arate că

1°. $\max(a, b) = \dfrac{a + b + |a - b|}{2}$, $\min(a, b) = \dfrac{a + b - |a - b|}{2}$.

2°. dacă $\max(a, b) = \min(a, b)$, atunci $a = b$.

5. Să se determine minoranţii şi majoranţii $\min A$, $\max A$ (dacă există) pentru următoarele submulţimi A ale dreptei reale:

a) $A = [-1, 1]$;

b) $A = (0,100)$;

c) $A = \{\sin 1, \sin 2, \sin 3\}$;

d) $A = [-2,2) \cup (3, 4]$;

e) $A = \left\{1 - \frac{1}{n} \mid n \geqslant 1 \text{ întreg}\right\}$;

f) $A = \left\{\frac{2^n - 1}{2^n + 1} \mid n \geqslant 1 \text{ întreg}\right\}$.

6. Pentru orice submulţime nevidă $C \subset \mathbf{R}$ notăm $-C = \{-x \mid x \in C\}$. Să se arate că dacă C este mărginită, atunci $\sup(-C) = -\inf C$ şi $\inf(-C) = -\sup C$.

7. Să se arate că mulţimile următoare sînt mărginite şi să se indice în fiecare caz marginea inferioară şi marginea superioară:

$M_1 = \{x \in \mathbf{R} \mid x^2 \leqslant 2\}$, $M_2 = \{x \in \mathbf{Q} \mid x^2 < 2\}$, $M_3 = \{x \in \mathbf{R} \mid x^4 \leqslant 16\}$.

8. Să se arate că şirurile următoare sînt mărginite şi să se determine $\inf\limits_n a_n$, $\sup\limits_n a_n$:

a) $a_n = \dfrac{\sqrt{n}}{n^2}$, $n \geqslant 1$; b) $a_n = \sqrt{n+2} - \sqrt{n}$, $n \geqslant 0$; c) $a_n = \dfrac{1}{n^2}$, $n \geqslant 1$;

d) $a_n = \dfrac{2n+1}{n+2}$, $n \geqslant 0$; e) $a_n = \min(10, n)$, $n \geqslant 0$; f) $a_n = \cos\dfrac{1}{n}$, $n \geqslant 1$.

9. Să se arate că următoarele submulţimi A ale lui $\mathbf{R}$ sînt nemărginite şi să se determine $\inf A$, $\sup A$ (calculate în $\overline{\mathbf{R}}$):

a) $A = \{x \in \mathbf{R} \mid x \geqslant 0,\ x^2 > 3\}$;

b) $A = \{x \in \mathbf{R} \mid x^3 - x \leqslant 0\}$;

c) $A = \left\{\dfrac{x^2}{x+1} \mid x > 0\right\}$;

d) $A = \{x - \sin x \mid x \in \mathbf{R}\}$.

10. Care din submulţimile $V \subset \mathbf{R}$ următoare sînt vecinătăţi ale originii:

a) $V = (-1, 2)$;

b) $V = [0, \infty)$;

c) $V = (-3, 1) \cup (3, \infty)$;

d) $V = \mathbf{Q}$?

11. Fie $a = \frac{1}{2}$. Este $\mathbf{R} \setminus \mathbf{Z}$ o vecinătate a punctului a? Dar intervalul $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$? Dar intervalul $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2} + r\right]$, $r > 0$?

12. Care din submulţimile următoare $V \subset \overline{\mathbf{R}}$ sînt vecinătăţi pentru $-\infty$ sau $+\infty$;
a) $V = (0, \infty]$; b) $V = [-\infty, 5)$; c) $V = [-\infty, -1) \cup (2, \infty)$; d) $V = \mathbf{Z}$?

13. Să se arate că originea este punct de acumulare pentru mulţimea $D=\left\{\frac{1}{n^2} \mid n \geqslant 1 \text{ întreg}\right\}$ şi că ∞ este punct de acumulare pentru $D=\{n^2 \mid n \geqslant 1 \text{ întreg}\}$.

14. Să se arate că punctul $\alpha = 8$ este punct de acumulare pentru submulţimile $D \subset \mathbf{R}$ următoare:

a) $D = (0, 8)$; b) $D = \mathbf{R} \setminus \mathbf{Z}$; c) $D = \mathbf{Q}$;
d) $D = (8, \infty)$; e) $D = \mathbf{R} \setminus \{8, 12\}$; f) $D = \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}$.

15. Să se determine punctele de acumulare şi punctele izolate ale submulţimilor $D \subset \mathbf{R}$ următoare:

a) $D = (-1, 1]$;
b) $D = (-\infty, 1) \cup (5, \infty)$;
c) $D = \mathbf{Z}$;
d) $D = \left\{\frac{1}{x} \mid x \in \mathbf{R},\ x \neq 0\right\}$;
e) $D = \left\{(-1)^n \cdot \frac{1}{n} \mid n \geqslant 1 \text{ întreg}\right\}$;
f) D = domeniul maxim de definiţie pentru $f(x) = \arcsin(x - \sqrt{1 - x^2})$.

16*. Fie $I_n = [a_n, b_n]$, $n \geqslant 0$ un şir de intervale compacte, astfel încît $\forall n \geqslant 0$, $I_n \supset I_{n+1}$. Să se arate că intersecţia $\bigcap_{n \geqslant 0} I_n$ este nevidă.

§ 5. Cîteva clase de funcţii reale

În cele ce urmează, vom trece în revistă cîteva tipuri de funcţii reale, de fapt o sinteză a unor noţiuni pe care le-aţi întîlnit şi în clasele anterioare. Se va subînţelege aici existenţa unui sistem ortogonal de axe xOy fixat în plan.

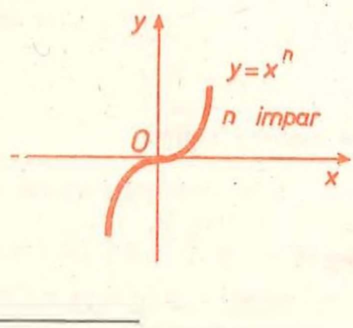
5.1. Funcţii pare, funcţii impare

Fie $D \subset \mathbf{R}$ o submulţime simetrică faţă de origine ($x \in D \Rightarrow -x \in D$) şi o funcţie $f: D \to \mathbf{R}$. Reamintim că f se numeşte *pară* dacă $f(-x) = f(x)$, $\forall x \in D$. *Graficul unei funcţii pare este simetric faţă de axa Oy.* Într-adevăr, un punct (a, b) din $\mathbf{R}^2$ aparţine lui G_f dacă şi numai dacă simetricul $(-a, b)$ al lui faţă de axa Oy aparţine lui G_f.

Funcţia f se numeşte *impară* dacă $f(-x) = -f(x)$, $\forall x \in D$; în acest caz, dacă $0 \in D$, atunci $f(0) = 0$. *Graficul unei funcţii impare este simetric faţă de origine* deoarece un punct (a, b) din $\mathbf{R}^2$ aparţine lui G_f dacă şi numai dacă simetricul lui faţă de origine $(-a, -b)$ aparţine lui G_f.

Exemple

1) Funcţia $f(x) = x^n$ (n natural) este pară dacă n este par şi impară dacă n este impar.



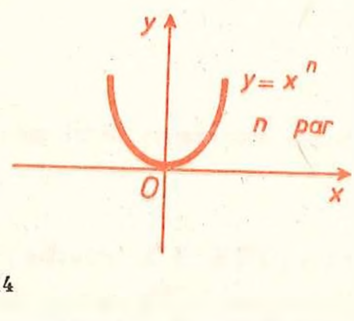


Fig. I.14

* Exerciţiile şi problemele notate cu asterisc prezintă un grad sporit de interes sau de dificultate.

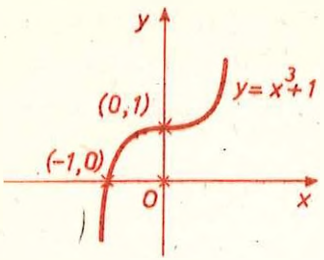


Fig. I.15

2) Suma şi produsul a două funcţii pare sînt funcţii pare. Suma a două funcţii impare este o funcţie impară, iar produsul a două funcţii impare este o funcţie pară. Produsul unei funcţii pare cu o funcţie impară este o funcţie impară.

Verificările necesare sînt imediate.

3) Funcţia $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = x^3 + 1$, nu este nici pară, nici impară (fig. I.15).

5.2. Funcţii periodice

Se întîlnesc multe fenomene fizice care se repetă periodic: mişcarea Pămîntului în jurul axei sale (într-o primă aproximare), oscilaţii periodice, mişcări circulare periodice etc. Modelul matematic al lor este descris prin funcţii reale periodice. Fie $T \neq 0$ fixat. Reamintim că o funcţie reală $f : D \to \mathbf{R}$ ($D \subset \mathbf{R}$) se numeşte *periodică* de perioadă T, dacă pentru orice $x \in D$ avem $x + T \in D$, $x - T \in D$ şi $f(x + T) = f(x)$.

În acest caz, pentru orice n întreg nenul, nT este de asemenea o perioadă pentru f, iar mulţimea D este nemărginită. Dacă există o cea mai mică perioadă strict pozitivă, aceasta se numeşte *perioada principală* a lui f. Este atunci suficient ca studiul lui f să fie făcut pe un interval de lungime cît perioada principală.

Exemple

1) Funcţiile sin, cos sînt periodice avînd perioada principală 2π; mai general, funcţia $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(t) = A \sin(\omega t + \varphi)$, $\omega \neq 0$ care se numeşte uneori semnal sinusoidal de amplitudine A, pulsaţie ω şi fază φ, este funcţie periodică avînd perioada principală $\frac{2\pi}{|\omega|}$.

2) Funcţia lui Dirichlet $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{dacă } x \text{ este raţional} \\ 0, & \text{dacă } x \text{ este iraţional} \end{cases}$$

este periodică avînd ca perioadă orice număr raţional $T \neq 0$, deoarece dacă x este raţional (respectiv iraţional), atunci $x + T$ şi $x - T$ sînt la fel, deci $f(x + T) = f(x)$. În acest caz nu există perioadă principală.

5.3. Funcţii monotone; şiruri monotone de numere reale

Fixăm o submulţime $D \subset \mathbf{R}$ şi o funcţie reală $f : D \to \mathbf{R}$.

DEFINIŢIA I.5. Funcţia f se numeşte:

a) monoton crescătoare pe D, dacă

$$\forall\, x_1, x_2 \in D,\ x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leqslant f(x_2);$$

a') **strict crescătoare** pe D, dacă

$$\forall x_1, x_2 \in D, \ x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2);$$

b) **monoton descrescătoare** pe D, dacă

$$\forall x_1, x_2 \in D, \ x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geqslant f(x_2);$$

b') **strict descrescătoare** pe D, dacă

$$\forall x_1, x_2 \in D, \ x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2);$$

c) **monotonă** pe D dacă f este sau monoton crescătoare sau monoton descrescătoare pe D;

c') **strict monotonă** pe D, dacă f este sau strict crescătoare sau strict descrescătoare pe D.

Exemple

1) Funcţia $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = x$ este strict crescătoare pe $\mathbf{R}$. Funcţia $g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $g(x) = x^2$ este strict descrescătoare pe $(-\infty, 0]$ şi strict crescătoare pe $[0, \infty)$ (considerînd de fapt restricţiile lui g) fără a fi monotonă pe $\mathbf{R}$. Funcţia g nu este monotonă pe nici un interval deschis care conţine originea.

2) Funcţia „sin" este strict crescătoare pe $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, dar nu este monotonă pe $[0, \pi]$.

În cazul cînd $D = \mathbf{N}$ se obţin definiţii corespunzătoare pentru şiruri de numere reale. Astfel, un şir $(a_n)_{n\geqslant 0}$ este **monoton crescător** dacă $a_n \leqslant a_{n+1}$ pentru orice $n \geqslant 0$ (adică $a_0 \leqslant a_1 \leqslant a_2 \leqslant \ldots$), **monoton descrescător** dacă $a_n \geqslant a_{n+1}$, $\forall n \geqslant 0$ (adică $a_0 \geqslant a_1 \geqslant a_2 \geqslant \ldots$), **strict crescător** dacă $a_n < a_{n+1}$, $\forall n \geqslant 0$ etc. Un şir se numeşte **monoton** dacă el este monoton crescător sau monoton descrescător.

Exemple

1) Orice şir constant este monoton (atît crescător cît şi descrescător), dar nu este strict monoton.

2) Şirul $(n)_{n\geqslant 0}$ este strict crescător, iar şirul $\left(\frac{1}{n}\right)_{n\geqslant 1}$ este strict descrescător.

3) Şirurile: $((-2)^n)_{n\geqslant 0}$, $\left(\frac{1+(-1)^n}{2}\right)_{n\geqslant 0}$, $\left(\sin\frac{n\pi}{3}\right)_{n\geqslant 0}$ nu sînt monotone.

5.4. Funcţii mărginite, margini ale funcţiilor

DEFINIŢIA I.6. O funcţie reală $f : D \to \mathbf{R}$ se numeşte:

a) **mărginită superior** dacă mulţimea valorilor ei $f(D)$ este majorată, adică dacă există un număr real B, astfel încît $f(x) \leqslant B$ pentru orice $x \in D$;

b) **mărginită inferior** dacă mulțimea valorilor ei este minorată, adică dacă există un număr real A, astfel încît $f(x) \geqslant A$ pentru orice $x \in D$;

c) **mărginită** dacă este mărginită inferior și superior, adică dacă există A, B reale, astfel încît $A \leqslant f(x) \leqslant B$, $\forall\, x \in D$ [sau, echivalent, dacă există $M > 0$ astfel încît $|f(x)| \leqslant M$, pentru orice $x \in D$].

Evident, dacă $D \subset \mathbf{R}$, atunci funcția f este mărginită dacă și numai dacă graficul lui f este cuprins între două paralele la axa Ox.

Exemple

1) Funcțiile polinomiale reale de gradul I și de gradul II sînt mărginite pe orice interval închis $D = [a, b]$, dar nu sînt mărginite pe întreg $\mathbf{R}$.

2) Este evident că un șir $(a_n)_{n \geqslant 0}$ de numere reale este mărginit (definiția I.2) dacă și numai dacă funcția respectivă $f : \mathbf{N} \to \mathbf{R}$, $n \longmapsto a_n$ este mărginită.

3) Funcțiile sin, cos definite pe $\mathbf{R}$ sînt mărginite. Funcția tg: $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \to \mathbf{R}$ este nemărginită, dar restricția ei la intervalul $\left[0, \frac{\pi}{3}\right]$ este mărginită.

4) Funcția $f : (0, \infty) \to \mathbf{R}$, $f(x) = \frac{1}{x}$ este nemărginită $\left(\text{deoarece pentru orice } M > 0,\ \text{luînd } x_0 = \frac{1}{2M},\ \text{rezultă } f(x_0) = 2M > M\right)$. Restricția lui f la orice interval $[a, \infty)$, $a > 0$ este funcție mărginită, deoarece $|f(x)| \leqslant \frac{1}{a}$ pentru orice $x \in [a, \infty)$ (fig. I.16).

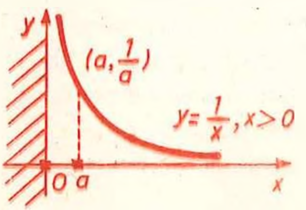


Fig. I.16

5) Este evident că suma, diferența și produsul a două funcții $f, g : D \to \mathbf{R}$ mărginite sînt funcții mărginite $\left(\text{nu același lucru este valabil pentru cît, așa cum arată exemplul funcțiilor sin și cos pe } \left(0, \frac{\pi}{2}\right)\right)$.

Încheiem acest punct cu o ultimă noțiune referitoare la funcțiile mărginite, care apelează la proprietatea lui Cantor.

Dacă $f : D \to \mathbf{R}$ este o funcție mărginită superior (respectiv inferior), atunci mulțimea tuturor valorilor sale, $f(D) = \{f(x) \mid x \in D\}$ este mărginită superior (respectiv inferior) și, ca atare, are margine superioară notată $\sup\limits_{x \in D} f(x)$, respectiv inferioară, notată $\inf\limits_{x \in D} f(x)$. Dacă f este mărginită, atunci, evident, $\inf\limits_{x \in D} f(x) \leqslant \sup\limits_{x \in D} f(x)$ și dacă are loc egalitatea, atunci f este constantă pe D.

Dacă f nu este mărginită superior se pune $\sup\limits_{x \in D} f(x) = +\infty$, iar dacă nu, f este mărginită inferior se pune $\inf\limits_{x \in D} f(x) = -\infty$.

Exemple

1) Fie funcţia $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = x^2$. Restricţiile lui f la intervalul $D = [-1, 2]$ şi la intervalul $D' = [-2, -1]$ sînt funcţii mărginite. Avem

$$\inf_{x\in D} x^2 = 0,\ \sup_{x\in D} x^2 = 4,\ \inf_{x\in D'} x^2 = 1,\ \sup_{x\in D'} x^2 = 4.$$

2) $\inf\limits_{x\in[0,2]} x^3 = 0$, $\sup\limits_{x\in[0,2]} x^3 = 0$; $\inf\limits_{x\in\mathbf{R}} \sin x = -1$, $\sup\limits_{x\in\mathbf{R}} \sin x = 1$; $\inf\limits_{x\in(0,1)} (2x+3) = 3$, $\sup\limits_{x\in(0,1)} (2x+3) = 5$.

3) Funcţia $f : (0, 1) \to \mathbf{R}$, $f(x) = \frac{1}{x}$ nu este mărginită; avem $\inf\limits_{x\in(0,1)} \frac{1}{x} = 1$, $\sup\limits_{x\in(0,1)} \frac{1}{x} = +\infty$.

5.5. Cîteva funcţii importante

Vom trece acum în revistă unele funcţii importante, în legătură cu proprietăţile de monotonie, mărginire, periodicitate.

a) Orice funcţie polinomială P este definită pe întreg $\mathbf{R}$ şi nu este mărginită şi nici periodică (în cazul cînd gr $P \geqslant 1$). Monotonia lui P trebuie studiată de la caz la caz. Dacă gr $P \leqslant 1$, atunci funcţia P este monotonă pe întreg $\mathbf{R}$, iar graficul lui P este o dreaptă. Funcţia $P : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ definită prin $P(x) = x^2$, $\forall\, x \in \mathbf{R}$ nu este monotonă pe $\mathbf{R}$ şi are numai valori pozitive. Funcţia $P : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $P(x) = x^3$ este strict crescătoare şi este nemărginită pe $\mathbf{R}$.

b) Orice funcţie raţională $f = \frac{P}{Q}$ (P, Q fiind polinomiale) are ca domeniu maxim de definiţie $D = \{x \in \mathbf{R} \mid Q(x) \neq 0\}$. Dacă Q nu are rădăcini reale, atunci $D = \mathbf{R}$. Nu se poate afirma, în general, nimic despre mărginirea sau monotonia funcţiilor raţionale. De exemplu, funcţia $f : \mathbf{R}\setminus\{0\} \to \mathbf{R}$, $f(x) = \frac{1}{x}$ este strict descrescătoare pe $(-\infty, 0)$ şi pe $(0, \infty)$ (figura I.17, *a*), dar funcţia $g : \mathbf{R}\setminus\{0\} \to \mathbf{R}$, $g(x) = \frac{1}{x^2}$ nu este monotonă pe $\mathbf{R}\setminus\{0\}$ (figura I.17, *b*).

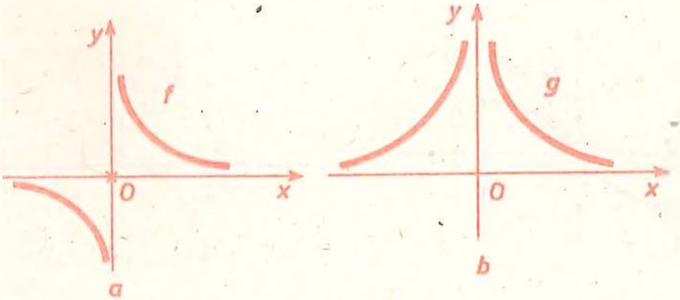


Fig. I.17

c) *Funcția exponențială* este definită pe întreg $\mathbf{R}$, $f : \mathbf{R} \mapsto (0, \infty)$, $f(x) = 10^x$, avînd valori strict pozitive. Ea este strict crescătoare pe $\mathbf{R}$, bijectivă și nu este mărginită (figura I.18, *a*). Inversa ei este funcția logaritmică $\lg : (0, \infty) \to \mathbf{R}$, $x \mapsto \lg x$ (figura I.18, *b*) care este, de asemenea, strict crescătoare pe intervalul $(0, \infty)$.

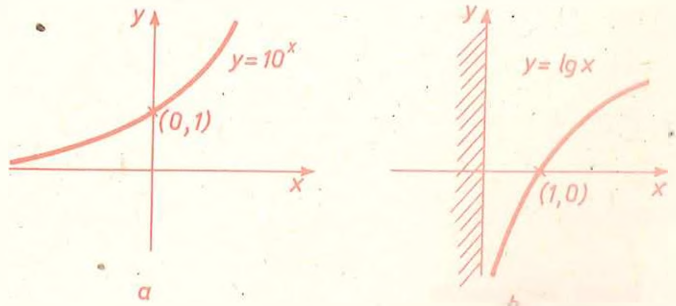


Fig. I.18

Dacă $a > 0$, $a \neq 1$, atunci pentru orice x se poate defini $a^x = 10^{x \cdot \lg a}$ și, cu aceasta, *funcția exponențială în baza a*, anume $f : \mathbf{R} \to (0, \infty)$, $f(x) = a^x$. Această funcție este bijectivă și inversa ei este *funcția logaritmică* $\log_a$ (în baza a). Dacă $a > 1$, atunci ambele funcții sînt strict crescătoare, iar dacă $0 < a < 1$, ele sînt strict descrescătoare.

Dacă $\alpha \in \mathbf{R}$ este fixat se poate, de asemenea, defini *funcția putere de exponent* α, $h : (0, \infty) \to \mathbf{R}$, $h(x) = x^\alpha = 10^{\alpha \cdot \lg x}$. Pentru valori particulare ale lui α, domeniul maxim de definiție D al funcției putere se modifică. De exemplu, pentru $\alpha = 3$ avem $D = \mathbf{R}$, pentru $\alpha = \frac{1}{2}$, $D = (0, \infty)$, iar pentru $\alpha = -\frac{1}{2}$, $D = (0, \infty)$.

d) *Funcția-sinus* $\sin : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ este mărginită și periodică de perioadă principală 2π; ea nu este monotonă pe $\mathbf{R}$ și nu este bijectivă. Restrîngînd convenabil domeniul de definiție și domeniul de valori, anume considerînd funcția $\sin : \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \to [-1, 1]$ se obține o funcție bijectivă, strict crescătoare (notată pentru comoditate la fel ca la început, fiind de fapt altă funcție). Graficul acestei funcții este indicat în figura I.19, *a*. Inversa

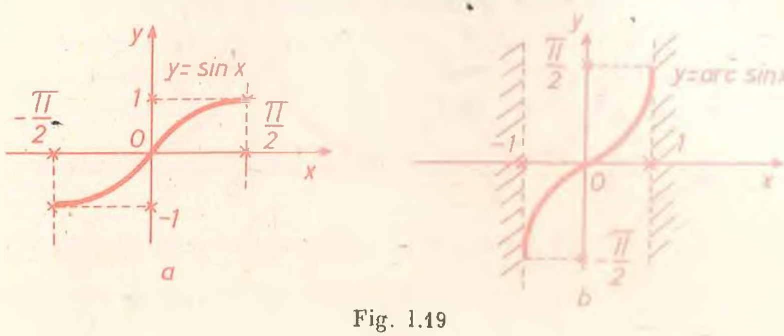


Fig. I.19

ei $\sin^{-1} = \arcsin : [-1, 1] \to \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ este, de asemenea, strict crescătoare şi are graficul indicat în figura I.19, *b*.

Funcţia $\cos : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ nu necesită un studiu aparte, deoarece $\cos x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$, $\forall\, x \in \mathbf{R}$. De asemenea, funcţia $\arccos : [-1, 1] \to [0, \pi]$ nu necesită un studiu special, deoarece $\arccos x = \frac{\pi}{2} - \arcsin x$, $\forall\, x \in [-1, 1]$.

e) *Funcţia-tangentă* este definită pe mulţimea $D = \mathbf{R} \setminus \{\cos x = 0\} = \mathbf{R} \setminus \left\{(2k+1)\frac{\pi}{2} \mid k \in \mathbf{Z}\right\}$. Această funcţie este periodică, de perioadă principală π şi este nemărginită. Funcţia $\mathrm{tg} : \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \to \mathbf{R}$ este strict crescătoare, nemărginită şi bijectivă, iar inversa ei, $\mathrm{arctg} : \mathbf{R} \to \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ este strict crescătoare şi mărginită (figura I.20).

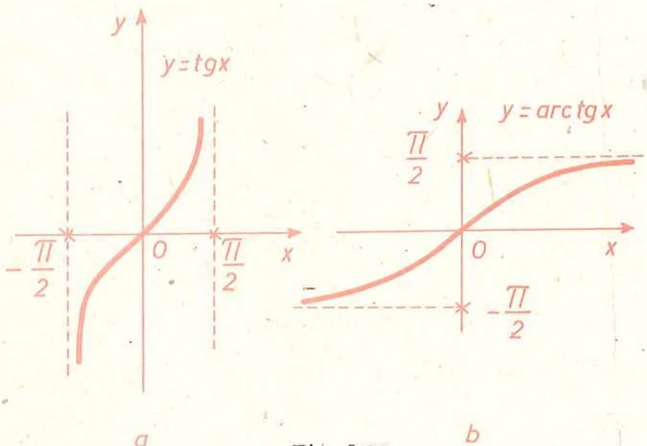


Fig. I.20

Funcţiile ctg, arcctg nu necesită un studiu special deoarece $\mathrm{ctg}\, x = \mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$, pentru orice $x \in \mathbf{R}$, $x \neq k\pi$ $(k \in \mathbf{Z})$ şi $\mathrm{arcctg}\, x = \frac{\pi}{2} - \mathrm{arctg}\, x$, $\forall\, x \in \mathbf{R}$.

Toate funcţiile considerate mai sus se mai numesc, cu un termen generic, *funcţii elementare*.

EXERCIŢII (capitolul I, § 5)

1. Să se studieze paritatea şi imparitatea funcţiilor $f : D \to \mathbf{R}$ următoare (D fiind domeniul maxim de definiţie):

a) $f(x) = x^2 + 10$;	e) $f(x) = \frac{1}{x}$;	i) $f(x) = x^2 \mid x \mid$;
b) $f(x) = x^2 + x$;	f) $f(x) = \frac{x}{x^2 - 1}$;	j) $f(x) = -\sin^2 x$;
c) $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$;	g) $f(x) = x + \sqrt{x^2 + 1}$;	k) $f(x) = \frac{x}{1 + \mid x \mid}$;
d) $f(x) = \frac{x^3 + x}{x^4 + 1}$;	h) $f(x) = \sqrt{\sin^2 x}$;	l) $f(x) = \max(x, x^3)$.

3*

2. Să se arate că funcţiile $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ următoare: $f(x) = |\sin x|$, $f(x) = \cos^2 x$, $f(x) = \sin(\omega x + \varphi)$, $\omega \neq 0$ sînt periodice şi să li se determine perioada principală.

3. a) Cum se poate exprima faptul că graficul unei funcţii $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ este simetric faţă de dreapta $x = a$? Dar faţă de punctul $(a, 0)$?

b) Să se arate că dacă graficul unei funcţii $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ este simetric faţă de două drepte distincte $x = a$, $x = b$, atunci f este periodică.

4. Să se arate că funcţia $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = x^5 + 1$ este strict crescătoare pe orice interval; idem $g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $g(x) = x^3 + 3x + 5$.

5. Să se studieze monotonia funcţiilor următoare pe intervalele pe care sînt definite:

a) $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = 1 + x^2$;

b) $f : [0, 1] \to \mathbf{R}$, $f(x) = \sqrt{x}$;

c) $f : [0, \pi] \to \mathbf{R}$, $f(x) = \cos x$;

d) $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = \dfrac{x^2}{1 + x^2}$.

6. Dacă funcţia $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ este strict crescătoare şi surjectivă, să se arate că f este bijectivă şi că f^{-1} este strict crescătoare.

7. Fie $f : I \to \mathbf{R}$ definită pe un interval I. Să se arate că f este monoton crescătoare (respectiv descrescătoare) pe I dacă şi numai dacă pentru orice $x_1, x_2 \in I$, $x_1 \neq x_2$, avem

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \geqslant 0 \text{ (respectiv } \leqslant 0).$$

8. Daţi exemplu de un şir:

a) mărginit, dar nu monton;

b) monoton, dar nemărginit.

9. Să se arate că şirurile $(a_n)_{n \geqslant 1}$ definite prin

$$a_n = n^2 + 1,\ a_n = 2^n,\ a_n = \frac{n!}{n + 1},\ a_n = \frac{2^n}{n},\ a_n = 3^{\sqrt{n}}$$

sînt monoton crescătoare.

10. Să se arate că următoarele funcţii $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ sînt mărginite:

a) $f(x) = 3 \sin 2x$;

b) $f(x) = \dfrac{x}{1 + x^2}$;

c) $f(x) = \dfrac{x^2}{x^2 + 4}$;

d) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x^2 + 1}}{3 + x^2}$;

e) $f(x) = 2 \cos\left(x + \dfrac{\pi}{3}\right)$;

$f(x) = 2^{-|x|}$.

11. Să se studieze mărginirea următoarelor funcţii:

a) $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = |x|$;

b) $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = \dfrac{|x|}{|x| + 1}$;

c) $f : \mathbf{R} \setminus \{1\} \to \mathbf{R}$, $f(x) = \dfrac{x}{x - 1}$;

d) $f : \mathbf{R} \setminus \{1\} \to \mathbf{R}$, $f(x) = \dfrac{1}{|x - 1|}$;

e) $f : \mathbf{R} \setminus \mathbf{Z} \to \mathbf{R}$, $f(x) = \dfrac{1}{\sin \pi x}$;

f) $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = \sqrt{\dfrac{x^2 + 1}{x^2 + 2}}$.

12. Să se determine $\inf_{x \in D} f(x)$, $\sup_{x \in D} f(x)$ pentru următoarele funcții $f : D \to \mathbf{R}$:

a) $f(x) = 2x - 1$, $D = [0, 1]$; c) $f(x) = x^2 - 2x + 1$, $D = [0, 1]$;

b) $f(x) = \dfrac{x}{x+1}$, $D = \mathbf{R}_+^*$; d) $f(x) = \cos 2x$, $D = \left[0, \dfrac{\pi}{4}\right]$.

EXERCIȚII ȘI PROBLEME REZOLVATE LA CAPITOLUL I

1. *Să se determine toate valorile lui* $n \in \mathbf{N}$ *astfel încît*

a) $\dfrac{n}{n^2+1} < \dfrac{1}{10}$; b) $\left|\dfrac{4n}{n+3} - 4\right| > \dfrac{1}{10}$; c) $\left|\dfrac{2^n}{2^n+3} - 1\right| > \dfrac{1}{10}$.

Soluție. a) Inegalitatea se scrie $n^2 - 10n + 1 > 0$ și rezultă $n \in (-\infty, 5 - \sqrt{24}) \cup (5 + \sqrt{24}, \infty)$. Deoarece n este natural, se rețin doar valorile întregi și pozitive, deci $n \geqslant 10$ și $n = 0$; b) Deci, $\left|-\dfrac{12}{n+3}\right| > \dfrac{1}{10}$, adică $\dfrac{12}{n+3} > \dfrac{1}{10}$, de unde $n + 3 < 120$, $n \in \{0, 1, 2, \ldots, 116\}$; c) Rezultă $\dfrac{3}{2^n+3} > \dfrac{1}{10}$, deci $2^n < 27$, adică $n \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$.

2. *Să se arate că există N natural astfel încît* $3^n > 100n$ *pentru orice* $n \geqslant N$. *Deduceți că există N natural astfel încît* $0 \leqslant \dfrac{n}{3^n} < \dfrac{1}{100}$ *pentru orice* $n \geqslant N$.

Soluție. Încercăm valorile $n = 0, 1, 2, \ldots$ și observăm că pentru $n = 6$ avem $3^6 = 729 > 600$, iar $3^7 > 700$, $3^8 > 800$ etc. Luînd $N = 6$, se verifică imediat prin inducție că $3^n > 100\,n$ pentru $n \geqslant 6$. Partea secundă a exercițiului este o consecință directă a primei părți.

3. *Să se calculeze primii 4 termeni, diferența* $a_{n+1} - a_n$ *și cîtul* $\dfrac{a_n}{a_{n+2}}$ *pentru fiecare din șirurile următoare:*

1°. $a_n = \dfrac{n^2+1}{n}$, $n \geqslant 1$;

2°. $a_n = 2^n$, $n \geqslant 0$.

Soluție. 1°. $a_1 = \dfrac{1^2+1}{1} = 2$, $a_2 = \dfrac{2^2+1}{2} = \dfrac{5}{2}$, $a_3 = \dfrac{10}{3}$, $a_4 = \dfrac{17}{4}$;

$$a_{n+1} - a_n = \frac{(n+1)^2+1}{n+1} - \frac{n^2+1}{n} = \frac{n^2+n-1}{n^2+n} \text{ și}$$

$$\frac{a_n}{a_{n+2}} = \frac{\dfrac{n^2+1}{n}}{\dfrac{(n+2)^2+1}{n+2}} = \frac{(n^2+1)(n+2)}{n(n^2+4n+5)};$$

2°. $a_0 = 2^0 = 1$; $a_1 = 2^1 = 2$; $a_2 = 4$; $a_3 = 8$; $a_{n+1} - a_n = 2^{n+1} - 2^n = 2^n$ şi $\frac{a_n}{a_{n+2}} = \frac{2^n}{2^{n+2}} = \frac{1}{4}$.

4. *Să se arate că submulţimile următoare ale dreptei reale sînt mărginite şi să se indice marginile lor inferioară şi superioară:*

$M_1 = [1, 2)$, $M_2 = [1, 2] \cup \{5\}$, $M_3 = [1, 2] \cup \{-2, 5\}$, $M_4 = [1, 2] \cup (4, 7)$, $M_5 = \{3x + 2 \mid x \in [-1, 1]\}$, $M_6 = \{x^2 \mid x \in [0, 2]\}$, $M_7 = \{x^2 \mid x \in (-2, 2)\}$, $M_8 = \{7 \sin 2x \mid x \in \mathbb{R}\}$, $M_9 = \left\{5 + \sin 2x \mid x \in \left(0, \frac{\pi}{4}\right)\right\}$.

Soluţie. Faptul că aceste mulţimi sînt mărginite este evident; de exemplu, toate sînt conţinute în intervalul $[-10, 10]$. Avem $\sup M_1 = 2$ (pentru că majoranţii lui M_1 sînt toate numerele $\geqslant 2$, iar 2 este cel mai mic); similar, $\sup M_2 = 5$, $\sup M_3 = 5$, $\sup M_4 = 7$, considerînd cel mai mic dintre majoranţii mulţimilor respective. Apoi $M_5 = [-1, 5]$, $M_6 = [0, 4]$, $M_7 = [0, 4)$, $M_8 = [-7, 7]$, deci $\sup M_5 = 5$, $\sup M_6 = 4$, $\sup M_7 = 4$, $\sup M_8 = 7$.

Folosind faptul că marginea inferioară a unei mulţimi mărginite inferior este cel mai mare dintre minoranţii acelei mulţimi, rezultă $\inf M_1 = 1$, $\inf M_2 = 1$, $\inf M_3 = -2$, $\inf M_4 = 1$, $\inf M_5 = -1$, $\inf M_6 = 0$, $\inf M_7 = 0$, $\inf M_8 = -7$. Studiem în detaliu cazul mulţimii M_9. Dacă $x \in \left(0, \frac{\pi}{4}\right)$, rezultă $2x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ şi $\sin 2x \in (0, 1)$, deci M_9 coincide cu intervalul $(5, 6)$. Majoranţii mulţimii M_9 sînt toate numerele $\geqslant 6$ şi cel mai mic dintre ei va fi $\sup M_9 = 6$; similar, minoranţii mulţimii M_9 sînt numerele $\leqslant 5$ şi, ca atare, cel mai mare minorant va fi $\inf M_9 = 5$.

5. *Să se reprezinte grafic funcţiile* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

a) $f(x) = x \operatorname{sgn} x$; b) $f(x) = (2x + 1) \cdot \sigma(x)$; c) $f(x) = 3\sigma(x + 2)$;
d) $f(x) = \sigma(x) \cdot |\sin x|$; e) $f(x) = \max(4, x^2)$; f) $f(x) = 1 - ||x| - 1|$.

Care din aceste funcţii sînt mărginite? Dar monotone? Dar pare?

Soluţie. a) Aşadar $f(x) = \begin{cases} x, & \text{dacă } x > 0 \\ 0, & \text{dacă } x = 0, \\ -x, & \text{dacă } x < 0 \end{cases}$ adică $f(x) = |x|$;

b) $f(x) = \begin{cases} 0, & \text{dacă } x < 0 \\ 2x + 1, & \text{dacă } x \geqslant 0 \end{cases}$; c) $f(x) = \begin{cases} 0, & \text{dacă } x < -2 \\ 3, & \text{dacă } x \geqslant -2 \end{cases}$;

d) $f(x) = \begin{cases} 0, & \text{dacă } x < 0 \\ |\sin x|, & \text{dacă } x \geqslant 0 \end{cases}$; e) $f(x) = \begin{cases} 4, & \text{dacă } x \in (-2, 2) \\ x^2, & \text{dacă } x \notin (-2, 2) \end{cases}$;

f) $f(x) = \begin{cases} x + 2, & \text{dacă } x \leqslant -1 \\ -x, & \text{dacă } -1 < x \leqslant 0 \\ x, & \text{dacă } 0 < x \leqslant 1 \\ 2 - x, & \text{dacă } x > 1 \end{cases}$

Graficele respective sînt indicate în figura I.21.

Funcţiile de la punctele *c*, *d* sînt mărginite; funcţiile *b*, *c* sînt monoton crescătoare; funcţiile *a*, *e*, *f* sînt pare.

6. *Să se arate că şirurile* $a_n = \frac{2^n}{n!}$, $b_n = \frac{3^n + 2^n}{5^n}$ $(n \geqslant 1)$ *sînt mărginite şi monotone.*

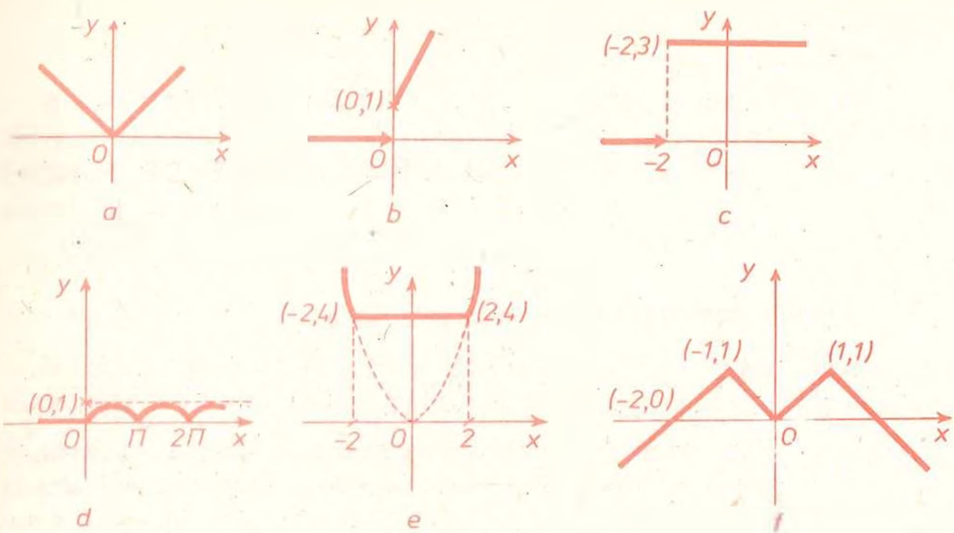


Fig. I.21

Soluție. $a_{n+1} - a_n = \dfrac{2^{n+1}}{(n+1)!} - \dfrac{2^n}{n!} = \dfrac{2^n \cdot 2}{n!(n+1)} - \dfrac{2^n}{n!} = \dfrac{2^n}{n!}\left(\dfrac{2}{n+1} - 1\right) =$ $= \dfrac{-2^n(n-1)}{(n+1)!} \leqslant 0$, deci $a_{n+1} \leqslant a_n$ și șirul este monoton descrescător. Apoi $0 \leqslant a_n =$ $= \dfrac{\overbrace{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot 2}^{n \text{ ori}}}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n} = \dfrac{2 \cdot 2}{1 \cdot 2}\left(\dfrac{2}{3} \cdot \dfrac{2}{4} \cdot \ldots \cdot \dfrac{2}{n}\right) \leqslant 2$, adică $a_n \in [0, 2]$ pentru orice $n \geqslant 1$.

Pe de altă parte, $b_n = \left(\dfrac{3}{5}\right)^n + \left(\dfrac{2}{5}\right)^n$, deci $b_{n+1} < b_n$ și este evident că $0 \leqslant b_n \leqslant 2$, pentru orice $n \geqslant 1$. Ca atare, șirul $(b_n)_{n\geqslant 1}$ este de asemenea mărginit și monoton descrescător.

7. *Să se determine marginile funcțiilor* $f : D \to \mathbf{R}$ *pe mulțimile* D *indicate*:

a) $f(x) = 3x + 2$, $D = [-1, 1]$;
b) $f(x) = -(x-1)^2$, $D = [0, 3]$;
c) $f(x) = \sqrt{x^2 + 4} - x$, $D = [0, 4]$;
d) $f(x) = a \sin x + b \cos x$ (a, b constante), $D = [0, 2\pi]$.

Soluție. a) Dacă $x \in [-1, 1]$, atunci $3x \in [-3, 3]$ și $f(x) \in [-1, 5]$; avem $\inf\limits_{x\in D} f(x) = -1$, $\sup\limits_{x\in D} f(x) = 5$.

b) $\inf\limits_{x\in D} f(x) = -4$, $\sup\limits_{x\in D} f(x) = 0$; c) Funcția f este monoton descrescătoare pe D și $\sup\limits_{x\in D} f(x) = f(0) = 2$, $\inf\limits_{x\in D} f(x) = f(4) = 2\sqrt{5} - 4$; d) Dacă $a = 0$, atunci $f(x) = b \cos x$ și $\inf\limits_{x\in D} f(x) = -|b|$, $\sup\limits_{x\in D} f(x) = |b|$. Dacă $a \neq 0$, atunci $f(x) = a\left(\sin x + \dfrac{b}{a}\cos x\right)$. Alegem $\varphi \in \left(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right)$ astfel încît $\dfrac{b}{a} = \operatorname{tg} \varphi$ și rezultă $f(x) = a(\sin x + \operatorname{tg} \varphi \cdot \cos x) =$ $= \dfrac{a}{\cos \varphi} \sin(x + \varphi)$. Deoarece $\cos \varphi = \dfrac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \varphi}} = \dfrac{|a|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$, rezultă $f(x) =$ $= \dfrac{a}{|a|}\sqrt{a^2 + b^2} \cdot \sin(x + \varphi)$. Ca atare, $\inf\limits_{x\in D} f(x) = -\sqrt{a^2 + b^2}$, $\sup\limits_{x\in D} f(x) = \sqrt{a^2 + b^2}$.
Reținem totodată că $|a \sin x + b \cos x| \leqslant \sqrt{a^2 + b^2}$, $\forall\, x \in [0, 2\pi]$.

Capitolul II

LIMITE DE ŞIRURI. LIMITE DE FUNCŢII

§ 1. Şiruri convergente de numere reale

Despre „convergenţă" avem cu toţii o anumită reprezentare intuitivă. Iată un exemplu simplu, deşi puţin forţat. Să presupunem că $t_1, t_2, t_3, \ldots, t_n, \ldots$ reprezintă temperaturi *pozitive* măsurate la momente succesive de timp. Ce sens trebuie dat afirmaţiei că aceste temperaturi converg către zero? Intuitiv, aceasta înseamnă că temperaturile respective sînt „din ce în ce mai mici", adică pentru orice prag de temperatură $\varepsilon > 0$, avem $t_n < \varepsilon$ de la un rang N încolo, adică pentru orice $n \geqslant N$ (N depinzînd de ε) (fig. II.1). Dacă t_n, $n \geqslant 0$ *nu* sînt neapărat pozitive, faptul că ele converg către zero se exprimă prin aceea că $\forall \varepsilon > 0$, avem $-\varepsilon < t_n < \varepsilon$, adică $|t_n| < \varepsilon$, de la un rang încolo.

Dăm un alt exemplu. Să considerăm o cantitate de substanţă radioactivă A, care se înjumătăţeşte la fiecare 12 ore. Măsurînd-o la fiecare 12 ore, cantităţile vor fi succesiv $A, \frac{A}{2}, \frac{A}{4}, \ldots, \frac{A}{2^n}, \ldots$ (omitem structura atomică şi presupunem materia indefinit divizibilă). Intuitiv, aceste cantităţi converg către zero (fig. II.2); de altfel, pentru orice prag $\varepsilon > 0$ avem $\frac{A}{2^n} < \varepsilon$ de la un rang încolo $\left(\text{anume, alegem } N \text{ astfel încît } 2^N > \frac{A}{\varepsilon} \text{ şi atunci pentru orice } n \geqslant N \text{ avem } \frac{A}{2^n} \leqslant \frac{A}{2^N} < \varepsilon\right)$. Aşadar, în orice vecinătate a originii se află toţi termenii şirului $\frac{A}{2^n}$, începînd de la un rang încolo.

Astfel de exemple sînt numeroase şi au impus următoarea definiţie a cărei înţelegere este esenţială.

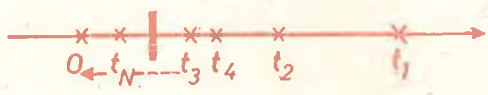


Fig. II.1

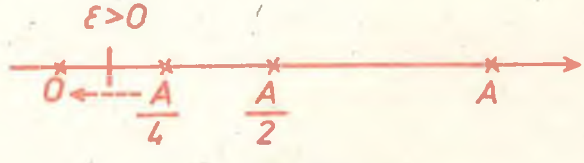


Fig. II.2

1.1. Şiruri avînd limită, şiruri convergente

DEFINIŢIA II. 1. Fie $(a_n)_{n\geqslant 0}$ un şir de numere reale şi $a \in \overline{\mathbf{R}}$. Se spune că şirul $(a_n)_{n\geqslant 0}$ are limita a dacă în orice vecinătate a punctului a se află toţi termenii şirului începînd de la un anumit rang. Se scrie atunci $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ sau $a_n \to a$ pentru $n \to \infty$.

De exemplu, faptul că $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ revine la aceea că, pentru orice vecinătate V a originii, există un rang N astfel încît $a_n \in V$, pentru orice $n \geqslant N$.

DEFINIŢIA II. 2. Orice şir de numere reale avînd o limită finită se numeşte convergent. Dacă $a \in \mathbf{R}$ şi $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, atunci se mai spune că şirul $(a_n)_{n\geqslant 0}$ este convergent către a. Şirurile care nu au limită şi cele care au limita $+\infty$ (sau $-\infty$) se numesc divergente.

Exemple

1) Fie $a_n = \dfrac{1}{n}$, $n \geqslant 1$. Arătăm că $(a_n)_{n\geqslant 1}$ este un şir convergent şi $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n} = 0$ Într-adevăr, fie V o vecinătate oarecare a punctului $a = 0$. Atunci există $\varepsilon > 0$, astfel încît $(-\varepsilon, \varepsilon) \subset V$ şi se observă că dacă $n > \dfrac{1}{\varepsilon}$, atunci $\dfrac{1}{n} \in (0, \varepsilon) \subset V$, adică toţi termenii şirului $a_n = \dfrac{1}{n}$ se află în V, începînd cu rangul $N = \left[\dfrac{1}{\varepsilon}\right] + 1$ $\left(\text{căci dacă } n \geqslant N,\right.$ atunci $\left. n > \dfrac{1}{\varepsilon}\right)$.

2) Arătăm că $\lim\limits_{n\to\infty} n^2 = +\infty$. Într-adevăr, fie V o vecinătate oarecare a lui $+\infty$, deci există $\varepsilon > 0$, astfel încît $(\varepsilon, \infty) \subset V$. Punînd condiţia $n^2 > \varepsilon$, rezultă că $n^2 \in V$. Cu alte cuvinte, luînd $N = [\sqrt{\varepsilon}] + 1$, rezultă că $\forall\, n \geqslant N$, avem $n > \sqrt{\varepsilon}$, deci $n^2 > \varepsilon$, adică $n^2 \in V$, deci toţi termenii şirului $a_n = n^2$ aparţin lui V de la un rang încolo şi, ca atare, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$.

3) Arătăm că, în general, **dacă $(a_n)_{n\geqslant k}$ este un şir monoton crescător şi nemărginit, atunci** $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{a_n} = 0$. Într-adevăr, fie V o vecinătate oarecare a originii. Alegem $\varepsilon > 0$, astfel încît $(-\varepsilon, \varepsilon) \subset V$. Deoarece şirul (a_n) este nemărginit, există N natural, astfel încît $a_N > \dfrac{1}{\varepsilon}$. Şirul fiind monoton crescător, avem $a_n \geqslant a_N$ pentru orice $n \geqslant N$. Aşadar, $0 < \dfrac{1}{a_n} \leqslant \dfrac{1}{a_N} < \varepsilon$, deci $\dfrac{1}{a_n} \in (0, \varepsilon) \subset V$, pentru orice $n \geqslant N$. În concluzie, $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{a_n} = 0$.

În particular, deoarece şirurile $(n^\alpha)_{n\geqslant 1}$, $\alpha > 0$; $(10^n)_{n\geqslant 0}$; $(\sqrt{2n+1} - \sqrt{n})_{n\geqslant 1}$; $(n!)_{n\geqslant 0}$ sînt monoton crescătoare şi nemărginite, rezultă relaţiile:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^\alpha} = 0,\ \lim_{n\to\infty} \frac{1}{10^n} = 0,\ \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{2n+1} - \sqrt{n}} = 0 \text{ şi } \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n!} = 0. \tag{1}$$

TEOREMA II. 1. *(unicitatea limitei).* **Dacă un şir de numere reale are limită, atunci aceasta este unică.**

Demonstraţie. Presupunem că $a_n \to a$ şi $a_n \to b$ (pentru $n \to \infty$) şi avem de arătat că $a = b$. Dacă, prin reducere la absurd, avem $a \neq b$, atunci alegem vecinătăţi V_1 şi V_2 ale punctelor a şi respectiv b, care să fie disjuncte (fig. II.3). Deoarece $a_n \to a$, atunci în V_1 se vor afla toţi termenii şirului de la un rang N încolo; în particular, în afara lui V_1, deci în V_2 se vor afla doar un număr finit (cel mult $N + 1$) de termeni ai şirului $(a_n)_{n \geq 0}$, deci b nu poate fi limita şirului $(a_n)_{n \geq 0}$.

TEOREMA II. 2. *(de caracterizare a limitelor de şiruri).* **Fie $(a_n)_{n \geq 0}$ un şir de numere reale.**

1°. **Şirul $(a_n)_{n \geq 0}$ este convergent către un număr $a \in \mathbb{R}$ dacă şi numai dacă este îndeplinită condiţia următoare:**

$$(2) \quad \begin{cases} \text{pentru orice } \varepsilon > 0 \text{ există un număr natural } N = N(\varepsilon), \text{ depinzînd} \\ \text{de } \varepsilon, \text{ astfel încît } |a_n - a| < \varepsilon \text{ pentru orice } n \geq N \end{cases}$$

(cu ajutorul cuantificatorilor logici, această condiţie se scrie astfel:

$$\forall\, \varepsilon > 0,\ \exists\, N = N(\varepsilon);\ \forall\, n \geq N,\ |a_n - a| < \varepsilon).$$

2°. **Şirul $(a_n)_{n \geq 0}$ are limita $+\infty$ dacă şi numai dacă:**

$$(3) \quad \begin{cases} \text{pentru orice } \varepsilon > 0 \text{ există un număr natural } N = N(\varepsilon), \text{ astfel} \\ \text{încît } a_n > \varepsilon \text{ pentru orice } n \geq N. \end{cases}$$

3°. **Şirul $(a_n)_{n \geq 0}$ are limita $-\infty$ dacă şi numai dacă**

$$(3') \quad \begin{cases} \text{pentru orice } \varepsilon > 0 \text{ există un număr natural } N = N(\varepsilon), \text{ astfel încît} \\ a_n < -\varepsilon \text{ pentru orice } n > N. \end{cases}$$

Demonstraţie. 1°. Presupunem că a este un număr real şi că $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$. Atunci, conform definiţiei II.1, pentru orice $\varepsilon > 0$, în intervalul $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ se află toţi termenii şirului $(a_n)_{n \geq 0}$ de la un rang încolo, adică există N natural depinzînd de ε, astfel ca pentru $n \geq N$ să avem $a_n \in (a - \varepsilon, a + \varepsilon)$, sau echivalent, $|a_n - a| < \varepsilon$. Aşadar, este îndeplinită condiţia (2). Reciproc, dacă condiţia (2) este îndeplinită, arătăm că $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$. Pentru aceasta, aplicăm definiţia II.1 şi fie V o vecinătate oarecare a punctului a, deci există $\varepsilon > 0$ astfel încît $(a - \varepsilon, a + \varepsilon) \subset V$. Conform (2), există $N = N(\varepsilon)$ natural

Fig. II.3

astfel încît $| a_n - a | < \varepsilon$ pentru orice $n \geqslant N$. Aceasta înseamnă că $a_n \in (a-\varepsilon, a+\varepsilon)$, adică $a_n \in V$ pentru orice $n \geqslant N$. Deci toţi termenii şirului aparţin lui V de la un rang încolo, adică $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$.

2°. Presupunem că $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$. Atunci pentru orice $\varepsilon > 0$, în intervalul $(\varepsilon, \infty]$ care este o vecinătate a punctului $+\infty$, se vor afla toţi termenii şirului $(a_n)_{n\geqslant 0}$ de la un rang $N = N(\varepsilon)$ încolo, adică $a_n > \varepsilon$ pentru orice $n \geqslant N$. Reciproc, dacă este îndeplinită condiţia (3), atunci pentru orice vecinătate V a lui ∞ alegem $\varepsilon > 0$, astfel încît $(\varepsilon, \infty] \subset V$. Conform ipotezei, există $N = N(\varepsilon)$ natural, astfel încît pentru orice $n \geqslant N$ să avem $a_n > \varepsilon$, adică $a_n \in V$, deci $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$.

Punctul 3° se demonstrează similar, folosind faptul că vecinătăţile lui $-\infty$ sînt intervale de forma $[-\infty, -\varepsilon)$ etc. De altfel, $a_n \to -\infty \Leftrightarrow -a_n \to \infty$.

Observaţie. Dacă a este un număr real, faptul că un şir $(a_n)_{n\geqslant 0}$ este convergent către a revine la aceea că şirul de numere reale pozitive $(| a_n - a |)_{n\geqslant 0}$ are limita zero, adică şirul distanţelor $(d(a_n, a))_{n\geqslant 0}$ are limita zero, ceea ce exprimă faptul că termenii a_n devin „din ce în ce mai apropiaţi de a, pe măsură ce n creşte". Reţinem totodată că $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a \Leftrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} d(a_n, a) = 0$.

Faptul că $a_n \to a$ (pentru $n \to \infty$) se mai interpretează spunînd că termenii $a_0, a_1, a_2, \ldots$ constituie aproximaţii succesive ale numărului real a; în acest caz, se poate considera formula aproximativă $a_n \simeq a$, cu eroarea absolută $| a - a_n |$ convergentă către zero.

Exemple

1) Arătăm că $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2n+1}{n+1} = 2$, folosind condiţia (2) din teorema II.2. Notînd $a_n = \dfrac{2n+1}{n+1}$, avem $| a_n - 2 | = \left| \dfrac{2n+1}{n+1} - 2 \right| = \dfrac{1}{n+1}$. Pentru orice $\varepsilon > 0$, condiţia $\dfrac{1}{n+1} < \varepsilon$, adică $n + 1 > \dfrac{1}{\varepsilon}$ sau $n > \dfrac{1}{\varepsilon} - 1$, are loc pentru orice $n \geqslant N$ unde $N = \left[\dfrac{1}{\varepsilon} - 1\right] + 1$.

2) Arătăm că $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{10^n}{10^n + 1} = 1$; notînd $c_n = \dfrac{10^n}{10^n+1}$, avem $| c_n - 1 | = \dfrac{1}{10^n + 1}$. Deoarece $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{10^n+1} = 0$, avem $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = 1$.

3) Orice şir constant $(a_n)_{n\geqslant 0}$, $a_n = a$ pentru orice $n \geqslant 0$ este convergent către a. Aceasta se verifică direct din definiţia II.1.

4) Şirurile convergente nu sînt neapărat monotone; astfel, şirul $a_n = (-1)^n \dfrac{1}{n}$, $n \geqslant 1$ este convergent către zero deoarece $| a_n - 0 | = \dfrac{1}{n}$, $\forall n \geqslant 1$ şi nu este monoton.

5) Avem $\lim\limits_{n\to\infty}(n+1)=\infty$; într-adevăr, să aplicăm definiția II.1. Orice vecinătate V a punctului ∞ conține un interval de forma $(a, \infty]$. Alegem N natural astfel încît $N+1>a$. Atunci pentru orice $n \geqslant N$ avem $n+1 \geqslant N+1>a$, adică $n+1 \in V$.

În mod similar, se arată că $\lim\limits_{n\to\infty}(2n-1)=\infty$, $\lim\limits_{n\to\infty}(-n)=-\infty$, $\lim\limits_{n\to\infty}(-2n+1)=-\infty$.

1.2. Convergență și mărginire

Demonstrăm acum cîteva rezultate importante care arată legătura dintre noțiunile de convergență și mărginire a șirurilor. Mai întîi dăm noțiunea de subșir.

DEFINIȚIA II.3. *Fie $s=(a_n)_{n\geqslant 0}$ un șir de numere reale. Dacă $k_0<k_1<k_2<\ldots k_n<\ldots$ este un șir strict crescător de numere naturale* (deci $k_n \geqslant n$ pentru orice $n \geqslant 0$), *atunci șirul $(a_{k_n})_{n\geqslant 0}$ se numește subșir al lui s.*

Exemplu

Luînd $k_n=2n$ se obține subșirul $(a_{2n})_{n\geqslant 0}$ al lui s al termenilor de rang par și pentru $k_n=2n+1$, subșirul $(a_{2n+1})_{n\geqslant 0}$ al termenilor de rang impar.

Dacă șirul $(a_n)_{n\geqslant 0}$ are limita l (în $\overline{\mathbf{R}}$), atunci orice subșir $(a_{k_n})_{n\geqslant 0}$ al său are, de asemenea, limita l; într-adevăr, în orice vecinătate V a lui l se află toți termenii a_n de la un rang N încolo (pentru $n \geqslant N$), deci în V se află și toți termenii a_{k_n} cu $n \geqslant N$, deoarece $k_n \geqslant n \geqslant N$.

Din acest fapt se deduce direct că *dacă un șir are un subșir divergent sau are două subșiruri convergente către limite distincte, atunci acel șir este divergent.* De exemplu, pentru șirul $a_n=(-1)^n$, $n \geqslant 1$, subșirul $(a_{2n})_{n\geqslant 1}$ converge către 1, iar subșirul $(a_{2n+1})_{n\geqslant 1}$ converge către -1, deci șirul $(a_n)_{n\geqslant 1}$ este divergent.

Teorema următoare arată că mărginirea unui șir este o condiție necesară de convergență.

TEOREMA II.3. Orice șir convergent de numere reale este mărginit.

Demonstrație. Fie $a \in \mathbf{R}$ și un șir $(a_n)_{n\geqslant 0}$ convergent către a. Considerăm vecinătatea $V=(a-1, a+1)$ a punctului a. Toți termenii șirului $(a_n)_{n\geqslant 0}$, începînd de la un rang N, sînt situați în V, deci *toți* termenii șirului, inclusiv $a_0, a_1, \ldots, a_{N-1}$ vor fi situați într-un interval mărginit I, care conține V (figura II.4). Putem lua $I=[c, d]$, unde $c=\min(a-1, a_0, a_1, \ldots, a_{N-1})$ și $d=\max(a+1, a_0, a_1, \ldots, a_{N-1})$.

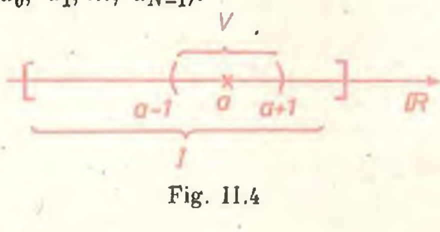


Fig. II.4

Remarcăm că dacă $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=\infty$, atunci șirul $(a_n)_{n\geqslant 0}$ este în mod necesar nemărginit. Reciproca este în general falsă; de exemplu, șirul $a_n=(-2)^n$, $n \geqslant 0$ este nemărginit, dar nu are limită în $\overline{\mathbf{R}}$, deoarece $a_{2n}\to\infty$ și $a_{2n+1}\to-\infty$.

Observație. Am văzut că orice șir convergent în $\mathbf{R}$ este mărginit. Reciproca este în general falsă; de exemplu, șirul $a_n = (-1)^n$, $n \geqslant 1$ este mărginit, dar am văzut că nu este convergent. Vom demonstra totuși că șirurile *monotone* și mărginite de numere reale sînt convergente (teorema lui Weierstrass). De asemenea, vom arăta că orice șir mărginit are cel puțin un subșir convergent (lema lui Cesaró).

1.3. Criterii suficiente de convergență a șirurilor

Dăm mai întîi un criteriu care asigură convergența unui șir prin utilizarea unor șiruri-tip care converg către zero sau către $+\infty$, $-\infty$.

TEOREMA II.4. Fie $(a_n)_{n\geqslant 0}$ un șir de numere reale.

1°. Presupunem că l este un număr real și că există un șir $(b_n)_{n\geqslant 0}$ de numere reale pozitive convergent către zero astfel încît $|a_n - l| \leqslant b_n$ pentru orice $n \geqslant k$ (k fiind un rang fixat).

Atunci șirul $(a_n)_{n\geqslant 0}$ este convergent și $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = l$.

2°. Dacă $(u_n)_{n\geqslant 0}$ este un șir astfel încît $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \infty$ și dacă $a_n \geqslant u_n$ pentru orice $n \geqslant k$ (k fixat), atunci $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$.

3°. Dacă $(v_n)_{n\geqslant 0}$ este un șir astfel încît $\lim\limits_{n\to\infty} v_n = -\infty$ și $a_n \leqslant v_n$ pentru orice $n \geqslant k$ (k fixat), atunci $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty$.

Demonstrație. 1°. Fie $\varepsilon > 0$ arbitrar fixat. Deoarece $b_n \to 0$, există un rang N depinzînd de ε astfel încît $b_n < \varepsilon$ pentru orice $n \geqslant N$. Dacă $n \geqslant \max(N, k)$, atunci $|a_n - l| \leqslant b_n < \varepsilon$ și astfel este îndeplinită condiția (2); ca atare, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = l$.

2°. Verificăm condiția (3). Deoarece $u_n \to \infty$ pentru orice $\varepsilon > 0$ există $N = N(\varepsilon)$ astfel încît $u_n > \varepsilon$ pentru orice $n \geqslant N$. Așadar, $a_n > \varepsilon$ pentru orice $n \geqslant \max(N, k)$, deci $a_n \to \infty$.

3°. Se procedează similar verificînd condiția (3′).

Luînd cazul particular $b_n = \dfrac{1}{n}$, rezultă direct

COROLARUL 1. Dacă $|a_n - l| < \dfrac{1}{n}$, $\forall n \geqslant 1$, atunci $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = l$.

În cazul particular cînd $l = 0$ și toate numerele a_n sînt pozitive, se obține

COROLARUL 2. Dacă $0 \leqslant a_n \leqslant b_n$ pentru orice $n \geqslant k$ (k fiind un rang fixat) și dacă $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$, atunci $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

Exemple

1) Pentru orice număr real x șirul $(x^{(n)})_{n\geqslant 0}$ al trunchierilor sale succesive este convergent și are limita x. Într-adevăr, știm că $|x^{(n)} - x| < \dfrac{1}{10^n}$ pentru orice $n \geqslant 0$ și aplicăm teorema II.4, observînd că $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{10^n} = 0$.

2) Fie $a_n = \frac{\sin^2 n}{n}$, $n \geqslant 1$. Avem $|a_n - 0| \leqslant \frac{1}{n}$, deci $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$. În mod similar, $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sin n}{n} = 0$, $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\cos n}{n} = 0$.

3) Notăm $a_n = \sqrt[n]{n} - 1$, $n \geqslant 1$. Evident, $a_n \geqslant 0$ și $1 + a_n = \sqrt[n]{n}$, deci $n = (1 + a_n)^n$ și, ca atare, $n = 1 + C_n^1 a_n + C_n^2 a_n^2 + \ldots + a_n^n$, deci $n \geqslant C_n^2 a_n^2$. Atunci $n \geqslant \frac{n(n-1)}{2} \cdot a_n^2$ și cum $a_n \geqslant 0$, se deduce inegalitatea $a_n \leqslant \sqrt{\frac{2}{n-1}}$ pentru orice $n \geqslant 2$. Aplicînd corolarul 2 pentru șirul $b_n = \sqrt{\frac{2}{n-1}}$, $n \geqslant 2$ care converge către zero, rezultă $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, adică $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$.

4) Orice număr real x este limita unui șir de numere raționale (respectiv iraționale). Într-adevăr, pentru orice întreg $n \geqslant 1$, în intervalul $\left(x - \frac{1}{n}, x + \frac{1}{n}\right)$ alegem un număr rațional r_n (respectiv un număr irațional z_n). Atunci $|r_n - x| < \frac{1}{n}$, $|z_n - x| < \frac{1}{n}$ și, conform corolarului 1, rezultă $r_n \to x$, $z_n \to x$.

5) Fie $C \subset \mathbf{R}$ o submulțime infinită, majorată și $\mu = \sup C$. *Arătăm că există un șir de puncte din C convergent către* μ. Într-adevăr, pentru orice întreg $n \geqslant 1$, în intervalul $\left(\mu - \frac{1}{n}, \mu\right]$ există cel puțin un punct $x_n \in C$. Așadar, $\mu - \frac{1}{n} < x_n \leqslant \mu$, deci $|x_n - \mu| < \frac{1}{n}$, deci $x_n \to \mu$. În mod similar, pentru orice mulțime infinită minorată $D \subset \mathbf{R}$ există șiruri de puncte din D care converg către $\inf D$.

6) Dacă $a_n \to a$, $a \in \mathbf{R}$, atunci $|a_n| \to |a|$; într-adevăr, conform teoremei I.1, M_5 avem $||a_n| - |a|| \leqslant |a_n - a|$ pentru orice $n \geqslant 0$ și aplicăm teorema II.4.1°.

Un alt criteriu suficient de convergență, extrem de util, este cuprins în următoarea teoremă atribuită lui K. Weierstrass.

TEOREMA II.5. a) **Orice șir monoton crescător și mărginit superior de numere reale (în R) este convergent.**

b) **Orice șir monoton descrescător și mărginit inferior în R este convergent.**

Demonstrație. a) Fie $(a_n)_{n\geqslant 0}$ un șir monoton crescător și mărginit superior. Conform proprietății lui Cantor, există numărul real $c = \sup\limits_n a_n$. Pentru

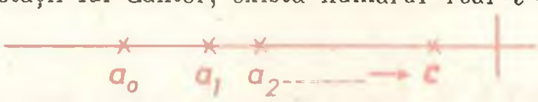


Fig. II.5

orice $\varepsilon > 0$ fixat, există un termen a_N al șirului astfel încît $a_N > c - \varepsilon$. Deoarece șirul este monoton crescător, pentru orice $n \geqslant N$ avem $a_n \geqslant a_N$, deci $c - \varepsilon < a_N \leqslant a_n \leqslant c < c + \varepsilon$, de unde $-\varepsilon < a_n - c < \varepsilon$, adică $|a_n - c| < \varepsilon$ pentru orice $n \geqslant N$. Se verifică astfel condiția (2) și, ca atare, $a_n \to c$.

b) Se demonstrează similar, arătînd că $(a_n)_{n\geqslant 0}$ converge către $d = \inf\limits_n a_n$.

Reţinem că un şir mărginit şi monoton crescător (respectiv descrescător) converge către marginea lui superioară (respectiv inferioară). Teorema II.5 se mai enunţă pe scurt astfel: *orice şir monoton şi mărginit de numere reale este convergent.*

Exemple

1) Şirul $a_n = \dfrac{2n-1}{n}$, $n \geqslant 1$ este mărginit deoarece $0 \leqslant a_n \leqslant 2$, $\forall n \geqslant 1$ şi monoton crescător, deci el este şir convergent. Se verifică imediat că $a_n \to 2$.

2) Şirul $a_n = 1 + \dfrac{1}{2^2} + \dfrac{1}{3^2} + \ldots + \dfrac{1}{n^2}$, $n \geqslant 1$ este crescător $\left[\text{deoarece } a_{n+1} - a_n = \right.$ $\left. = \dfrac{1}{(n+1)^2} > 0, \text{ deci } a_{n+1} > a_n\right]$ şi mărginit superior $\left[\text{căci } \dfrac{1}{k^2} < \dfrac{1}{k-1} - \dfrac{1}{k} \text{ pentru}\right.$ $\left.\text{orice } k \geqslant 2, \text{ deci } a_n \leqslant 1 + \left(\dfrac{1}{1} - \dfrac{1}{2}\right) + \left(\dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{3}\right) + \ldots + \left(\dfrac{1}{n-1} - \dfrac{1}{n}\right) = 2 - \dfrac{1}{n} \leqslant 2\right]$. Aşadar, el este convergent. Este dificil de calculat $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ cu metodele anterioare.

LEMĂ (*E. Cesàro*, 1859–1906). **Orice şir mărginit de numere reale are cel puţin un subşir convergent.**

Demonstraţie. Fie $s = (a_n)_{n\geqslant 0}$ un şir mărginit şi notăm cu A mulţimea termenilor săi. Deoarece A este mulţime mărginită, ea este conţinută într-un interval închis $I_0 = [a, b]$. Considerăm intervalele $\left[a, \dfrac{a+b}{2}\right]$, $\left[\dfrac{a+b}{2}, b\right]$. În cel puţin unul din ele, notat I_1, există o infinitate de termeni ai şirului s. Evident, $l(I_1) = \dfrac{b-a}{2}$ şi fie $a_{i_1} \in I_1$ un termen al lui s. Împărţim I_1 în două subintervale închise de lungime egală $\left(\text{anume } \dfrac{b-a}{2^2}\right)$ şi cel puţin unul, notat I_2, conţine o infinitate de termeni din s şi, ca atare, putem alege $a_{i_2} \in I_2$ cu $i_1 < i_2$. Repetînd procedeul, la pasul k alegem $a_{i_k} \in I_k$, astfel încît $i_{k-1} < i_k$. Notăm $I_k = [\alpha_k, \beta_k]$, $k \geqslant 0$. Atunci $a = \alpha_0 \leqslant \alpha_1 \leqslant \ldots \leqslant \beta_1 \leqslant \beta_0 = b$ şi $\beta_k - \alpha_k = \dfrac{b-a}{2^k}$. Aşadar, şirurile $(\alpha_n)_{n\geqslant 0}$, $(\beta_n)_{n\geqslant 0}$ sînt monotone şi mărginite, deci convergente, avînd aceeaşi limită c. Deoarece $\alpha_n \leqslant c \leqslant \beta_n$ şi $\alpha_n \leqslant a_{i_n} \leqslant \beta_n$, rezultă $|a_{i_n} - c| \leqslant \beta_n - \alpha_n = \dfrac{b-a}{2^n}$, $\forall n \geqslant 0$. Atunci, cf. teoremei II.4, 1°, avem $\lim\limits_{n\to\infty} a_{i_n} = c$. Lema lui Cesarò este demonstrată. Desigur, un şir mărginit poate să aibă mai multe subşiruri convergente.

Pentru fixarea noţiunilor anterioare este utilă o sinteză.

a) După proprietăţile de mărginire, monotonie şi convergenţă, şirurile se clasifică în:

şiruri mărginite $\left[\text{exemple: } \left(\dfrac{1}{n}\right)_{n\geqslant 1}, \left(\dfrac{2^n}{2^n+1}\right)_{n\geqslant 0}, (\sin n)_{n\geqslant 0}\right]$;
şiruri nemărginite $\left[\text{exemple: } (2^n)_{n\geqslant 0}, \left(\dfrac{3^n}{2^n}\right)_{n\geqslant 0}\right]$;

şiruri monotone $\left[\text{exemple: } \left(\dfrac{1}{n}\right)_{n\geqslant 1}, (n^2)_{n\geqslant 0}, (-3^{-n})_{n\geqslant 0}\right]$;
şiruri care nu sînt monotone [exemple: $((-2)^n)_{n\geqslant 0}$, $(\sin n)_{n\geqslant 0}$];

şiruri convergente sau echivalent, cu limita finită $\left[\text{exemple: } \left(\frac{1}{n}\right)_{n\geq 1}, \left(\frac{1}{10^n}\right)_{n\geq 0}\right]$;

şiruri divergente.

Şirurile divergente se împart în şiruri care nu au limită $\left[\text{exemple: } (1 + (-1)^n)_{n\geq 1}, \left(\sin\frac{n\pi}{2}\right)_{n\geq 1}\right]$ şi şiruri avînd limita infinită [exemple: $(2^n)_{n\geq 0}$, $(-2^n)_{n\geq 0}$].

b) Reţinem, de asemenea, următoarele rezultate:

şir convergent $\Rightarrow$ şir mărginit (teorema II.3);

şir monoton şi mărginit $\Rightarrow$ şir convergent (teorema II.5).

EXERCIŢII (capitolul II, § 1)

1. Să se arate că şirurile următoare sînt convergente către zero:

a) $a_n = \frac{1}{n^2}$, $n \geq 1$;

b) $a_n = \frac{n}{n^2+1}$, $n \geq 0$;

c) $a_n = \frac{3}{2^n+1}$, $n \geq 0$;

d) $a_n = \sqrt{n+2} - \sqrt{n+1}$, $n \geq 0$;

e) $a_n = \frac{1}{n^2+n+1}$, $n \geq 0$;

f) $a_n = \frac{1}{n!}$, $n \geq 0$.

2. Să se arate că $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n}\right) = 0$, $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n}+\frac{1}{n}\right) = 0$,

$$\lim_{n\to\infty}\underbrace{\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n}+\ldots+\frac{1}{n}\right)}_{p \text{ ori } (p\geq 1 \text{ fixat})} = 0, \text{ dar } \lim_{n\to\infty}\underbrace{\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n}+\ldots+\frac{1}{n}\right)}_{n \text{ ori}} = 1.$$

Ce se poate spune despre $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}+\ldots+\frac{1}{2n}\right)$?

3. Să se arate că $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{4n-1}{n} = 4$, $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n^2+1}{n^2} = 2$, folosind definiţia II.1.

4. Care din şirurile următoare sînt convergente:

a) $1, 0, \frac{1}{2}, 1, 0, \frac{1}{2}, 1, 0, \frac{1}{2}, \ldots, 1, 0, \frac{1}{2}, \ldots$;

b) $a_n = \frac{1}{n+2}$, $n \geq 3$;

c) $a_n = 2$, $n \geq 0$;

d) $a_n = 1 + (-1)^n$, $n \geq 0$;

e) $a_n = \frac{1+(-1)^n}{n}$, $n \geq 1$;

f) $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{5}, \ldots, \frac{1}{2^n}, \frac{1}{n+2}, \ldots$;

g) $a_n = \frac{2^n+(-2)^n}{3^n}$, $n \geq 0$;

h) $a_n = \frac{10^n+1}{10^n+2}$, $n \geq 0$?

5*. Fie $(a_n)_{n\geq 0}$ un şir de numere reale şi $a \in \mathbf{R}$; să se exprime cu ajutorul cuantificatorilor logici faptul că şirul $(a_n)_{n\geq 0}$ nu converge către a.

6. Să se arate că şirul $a_n = \dfrac{n^2}{n^2+4}$, $n \geq 0$ este monoton şi mărginit; care este limita lui?

7. a) Fie $a_n = \dfrac{1}{n^2} + 0{,}002$, $n \geq 1$. Calculaţi a_1, a_2, a_3, a_4, a_5; este adevărat că $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$?

b) Este convergent şirul $a_n = (-1)^n + \dfrac{n+1}{n}$, $n \geq 1$?

8. Ce se poate spune despre un şir $(a_n)_{n\geq 0}$, în fiecare din cazurile următoare:

a) există $\varepsilon > 0$ real astfel încît $|a_n| < \varepsilon$ pentru orice $n \geq 0$?

b) pentru orice $\varepsilon > 0$ şi pentru orice $n \geq 0$ avem $|a_n| < \varepsilon$?

c) pentru orice $\varepsilon > 0$ există $N(\varepsilon)$ natural astfel încît $|a_n| < \varepsilon$ pentru orice $n \geq N(\varepsilon)$?

9. Folosind teorema II.4 să se arate că

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\cos^2 n}{n} = 0$, $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2^n-1}{2^n+1} = 1$, $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{4n+1}{n+1} = 4$, $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n}\sin\dfrac{n\pi}{3} = 0$.

b) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n!}{n^n} = 0$ $\left(\text{observînd că } 0 \leq \dfrac{n!}{n^n} \leq \dfrac{1}{n},\ \forall n \geq 1\right)$.

c) $\lim\limits_{n\to\infty} (n^2+1) = \infty$.

10. Folosind teorema II.5, să se studieze convergenţa şirurilor:

$$a_n = \frac{2n+1}{n+1},\quad a_n = \frac{2^n}{n!},\quad a_n = 1 - 3^{-n},\quad a_n = \frac{1+2+\ldots+n}{n^2},\quad n \geq 1.$$

11. Să se arate că dacă $a_n \to a$ în $\mathbf{R}$, atunci

a) $\lim\limits_{n\to\infty} (a_{n+2} - a_n) = 0$;

b) $\lim\limits_{n\to\infty} a_{p(n)} = a$, pentru orice aplicaţie bijectivă $p : \mathbf{N} \to \mathbf{N}$.

12. Să se figureze graficele şirurilor $a_n = \dfrac{3n+1}{n}$, $b_n = \dfrac{3n-2}{n}$, $c_n = \dfrac{3n+(-1)^n}{n}$, $(n \geq 1)$ şi să se demonstreze că aceste şiruri converg către 3. Care dintre ele este monoton?

13. Să se arate că pentru orice număr real a există:

1°. un şir neconstant care converge către a;

2°. şiruri $b_n \to 0$, $c_n \to 0$ astfel încît $\dfrac{b_n}{c_n} \to a$.

14. Să se arate că următoarele şiruri au limita ∞: $(\sqrt{n})_{n\geq 1}$, $(2^{n-1})_{n\geq 1}$, $\left(\dfrac{n^2+4}{n}\right)_{n\geq 1}$.

15. Să se dea un exemplu de şir avînd limita $-\infty$, fără a fi monoton descrescător.

16. Să se arate că orice şir nemărginit de numere reale este divergent. Folosind acest fapt, arătaţi că şirurile $a_n = 2^n$, $b_n = (-2)^n$, $n \geq 0$ sînt divergente.

§ 2. Limita unei funcții într-un punct

2.1. Punerea problemei

În studiul unor funcții reale, inclusiv al celor care modelează procese fizice, este importantă cunoașterea comportării acelor funcții în vecinătatea anumitor puncte fixate. Mai precis, dacă $f: D \to \mathbf{R}\,(D \subset \mathbf{R})$ este o funcție reală de variabilă reală și dacă $x \in D$ este „apropiat" de o valoare α, ce se poate spune despre $f(x)$? de exemplu, dacă un șir $(x_n)_{n\geq 0}$ de puncte din D converge către α, ce se poate spune despre convergența șirului $(f(x_n))_{n\geq 0}$? La astfel de întrebări se va răspunde în continuare, căutînd să precizăm sensul afirmației: dacă x se apropie de α, atunci $f(x)$ se apropie de l.

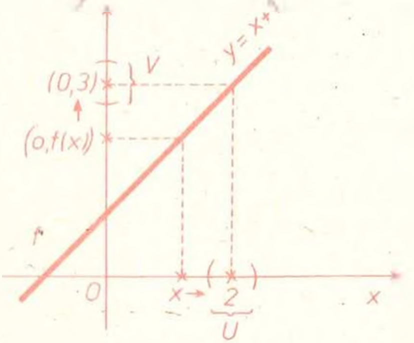


Fig. II.6

Exemple

1) Fie funcția $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = x + 1$ și punctul $\alpha = 2$. Într-un sens intuitiv, încă neprecizat, se observă că dacă x este „apropiat" de 2, atunci $f(x) = x + 1$ este „apropiat" de 3; în sens mai precis, se observă că dacă x_n este un șir convergent către $\alpha=2$, atunci șirul $f(x_n) = x_n + 1$ este convergent către 3. De asemenea, pentru orice interval $V = (3 - \varepsilon, 3 + \varepsilon)$, $\varepsilon > 0$, centrat în $y = 3$, există o vecinătate U a punctului $\alpha = 2$ astfel încît $\forall x \in U$ să rezulte $f(x) \in V$; anume, se poate lua $U = (2 - \varepsilon, 2 + \varepsilon)$ (fig. II.6).

2) Considerînd funcția $g: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, definită prin

$$g(x) = \begin{cases} 0, & \text{dacă } x \leq 2 \\ x + 1, & \text{dacă } x > 2 \end{cases} \quad \text{(fig. II.7)}$$

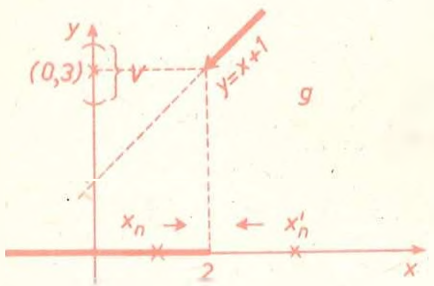


Fig. II.7

și luînd șirul $x_n = 2 - \frac{1}{n}$, $n \geq 1$, care converge către 2, șirul $g(x_n) = 0$ converge către 0; pe de altă parte, luînd șirul $x_n = 2 + \frac{1}{n}$, convergent către 2, șirul $g(x_n) = 3 + \frac{1}{n}$ converge către 3. Alegînd vecinătatea $V = (2, 4)$ a punctului 3, pentru orice vecinătate U a lui $\alpha = 2$, există puncte $x \in U$, $x < 2$, pentru care $f(x) \notin V$.

3) Considerăm funcția $f: \mathbf{R}\setminus\{0\} \to \mathbf{R}$, $f(x) = \frac{x^3 + 5x}{x}$ care nu este definită în punctul $x = 0$. Pentru orice șir $x_n \to 0$ $x_n \neq 0$, avem $f(x_n) = \frac{x_n^3 + 5x_n}{x_n} = x_n^2 + 5$, deci $f(x_n) \to 5$ (fig. II.8).

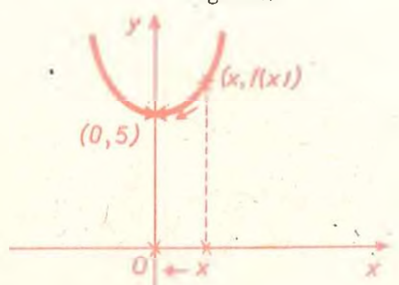


Fig. II.8

4) Pentru funcţia $f_1 : \mathbf{R}\setminus\{-2\} \to \mathbf{R}$, $f_1(x) = \dfrac{1}{x+2}$, o idee asupra comportării şi în vecinătatea punctului $x = -2$ se obţine observînd tabloul de valori

x	-3	...	$-2{,}01$	$-2{,}001$	$-2{,}0001$	...	-2	...	$-1{,}999$	$-1{,}99$	$-1{,}98$
$f_1(x)$	-1		-10^2	-10^3	-10^4	$\searrow$ $\searrow$	$\vdots$	$\nwarrow$ $\nwarrow$	10^3	10^2	50

Dacă x „se apropie" de -2 prin valori strict mai mici (respectiv mai mari) decît -2, atunci valorile lui $f_1(x)$ descresc (respectiv cresc). În mod similar, pentru funcţia $g_1 : \mathbf{R}\setminus\{-2\} \to \mathbf{R}$, $g_1(x) = \dfrac{1}{(x+2)^2}$, se poate alcătui un tablou de valori de forma:

x	-3	...	$-2{,}01$	$-2{,}001$	$-2{,}0001$	...	-2	...	$-1{,}999$	$-1{,}99$	$-1{,}98$
$g_1(x)$	1		10^4	10^6	10^8	$\nearrow$ $\nearrow$	$\vdots$	$\nwarrow$ $\nwarrow$	10^6	10^4	2500

care dă o idee asupra comportării lui g_1 în vecinătatea punctului -2.

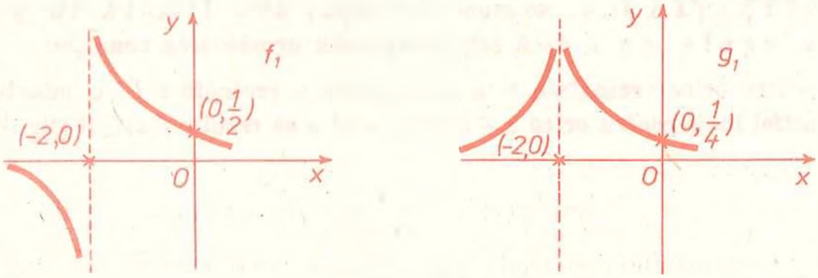


Fig. II.9

5) Considerăm punctul $x = 0$ şi funcţia $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} 0\ , & \text{dacă } x < 0 \\ 3\ , & \text{dacă } x = 0 \\ -x^2, & \text{dacă } x > 0 \end{cases}$$

al cărei grafic este indicat în figura II.10. În acest caz, pentru orice şir $x_n \to 0$, $x_n \neq 0$, rezultă că $f(x_n) \to 0$. Apoi pentru orice şir $x_n \to \infty$, avem $f(x_n) \to -\infty$.

6) Funcţia $f : \mathbf{R}\setminus\{0\} \to \mathbf{R}$, $f(x) = x \sin \dfrac{1}{x}$, $x \neq 0$ are proprietatea că pentru orice şir $x_n \to 0$, $x_n \neq 0$, avem $f(x_n) \to 0$; într-adevăr, $|f(x_n)| \leqslant |x_n|$ pentru orice n şi aplicăm teorema II.4, 1°, pentru $l = 0$, $a_n = f(x_n)$, $b_n = |x_n|$.

Se observă că în exemplele 1, 2 funcţiile au fost definite în punctul $x = 2$; în exemplul 3 funcţia f nu a fost definită în $x = 0$, iar în exemplul 4 funcţiile f_1, g_1 nu au fost definite în punctul $x = -2$, în vecinătatea căruia ne-am situat. Se mai observă că în exemplele 1, 3, 5, 6, dacă x „este apropiat" de punctul α respectiv, atunci $f(x)$ „se apropie" de un punct l bine determinat.

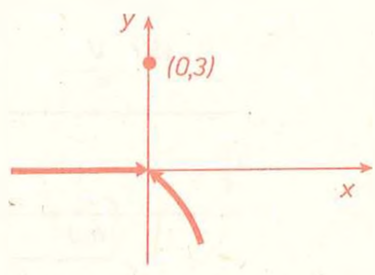


Fig. II.10

În fiecare din aceste exemple s-au considerat o funcţie $f : D \to \mathbf{R}$ $(D \subset \mathbf{R})$ şi un punct α care poate să nu aparţină lui D dar este punct de acumulare pentru D. Remarcăm că în acest caz *există şiruri de puncte din* $D\setminus\{\alpha\}$ *care converg către* α; într-adevăr, dacă $\alpha \in \mathbf{R}$, atunci pentru orice $n \geqslant 1$ natural, în vecinătatea $\left(\alpha - \frac{1}{n}, \alpha + \frac{1}{n}\right)$ a punctului α se află cel puţin un punct $x_n \in D$, $x_n \neq \alpha$, deci $|x_n - \alpha| < \frac{1}{n}$ şi, ca atare, $x_n \to \alpha$. Dacă $\alpha = \infty$, alegem $x_n \in D$, $x_n > n$ şi $x_n \to \infty$ etc.

Trecem acum la definiţia noţiunii de limită a unei funcţii într-un punct.

2.2. Limita unei funcţii într-un punct

Fixăm o funcţie $f : D \to \mathbf{R}(D \subset \mathbf{R})$, $\alpha \in \overline{\mathbf{R}}$ un punct de acumulare pentru D şi un punct $l \in \overline{\mathbf{R}}$.

DEFINIŢIA II.4. Se spune că funcţia f are limită în punctul α, egală cu l, dacă este îndeplinită următoarea condiţie:

(4) **pentru orice vecinătate V a lui l există o vecinătate U a punctului α astfel încît pentru orice $x \in D \cap U$, $x \neq \alpha$ să rezulte $f(x) \in V$** (fig. II.11).

În acest caz se scrie

$$\lim_{x\to\alpha,\ x\in D} f(x) = l \text{ sau } \lim_{x\to\alpha} f(x) = l$$

şi se citeşte: limita lui $f(x)$, cînd x tinde către α există şi este egală cu l.

Atenţie! Nu am dat un sens pentru $x \to \alpha$ sau $f(x) \to l$, luate separat, ci numai pentru sintagma $\{x \to \alpha \Rightarrow f(x) \to l\}$, echivalentă cu $\lim\limits_{x\to\alpha} f(x) = l$.

Condiţia (4) exprimă faptul că pentru orice x „suficient de apropiat" de α, $f(x)$ este „oricît de apropiat" de l. Dacă există, limita unei funcţii într-un punct este unică: dacă $\lim\limits_{x\to\alpha} f(x) = l$ şi $\lim\limits_{x\to\alpha} f(x) = l'$ şi dacă prin absurd $l \neq l'$, atunci alegem vecinătăţi disjuncte V şi V' ale punctelor l, l' respectiv şi există vecinătăţi U şi U' ale lui α satisfăcînd condiţii de tipul (4). Atunci, pentru $x \in D \cap U \cap U'$, $x \neq \alpha$, rezultă $f(x) \in V \cap V'$, ceea ce este absurd.

Stabilim acum un rezultat important care este şi un criteriu practic de studiu al existenţei limitei unei funcţii, după care vom analiza cîteva exemple.

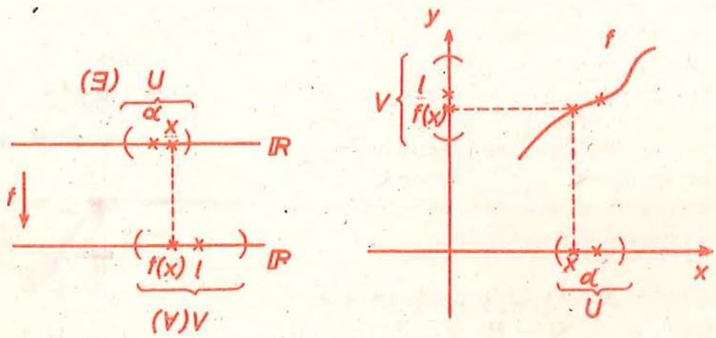


Fig. II.11

TEOREMA II. 6. **Fie $f: D \to \mathbf{R}$ $(D \subset \mathbf{R})$ o funcție, $\alpha \in \overline{\mathbf{R}}$ un punct de acumulare pentru D și $l \in \overline{\mathbf{R}}$. Sînt echivalente afirmațiile:**

(a) limita $\lim\limits_{x \to \alpha} f(x)$ există și este egală cu l („criteriul cu vecinătăți");

(b) pentru orice șir $(x_n)_{n \geq 0}$ de puncte din $D \setminus \{\alpha\}$ avînd limita α avem $f(x_n) \to l$ („criteriul cu șiruri").

Demonstrație. (a) $\Rightarrow$ (b). Presupunem că există $l = \lim\limits_{x \to \alpha} f(x)$ și fie $x_n \to \alpha$, $x_n \in D \setminus \{\alpha\}$, $\forall\, n \geq 0$. Avem de demonstrat că $f(x_n) \to l$. Pentru aceasta folosim definiția II.2 și fie V o vecinătate *oarecare* a punctului l. Conform ipotezei, există o vecinătate U a lui α astfel încît din faptul că $x \in D \cap U$, $x \neq \alpha$ să rezulte $f(x) \in V$. Deoarece $x_n \to \alpha$, rezultă că $x_n \in U$ de la un rang N încolo; atunci $x_n \in D \cap U$, $x_n \neq \alpha$, deci $f(x_n) \in V$ pentru orice $n \geq N$, deci $f(x_n) \to l$.

(b) $\Rightarrow$ (a). Facem ipoteza că este îndeplinită condiția (b) și avem de verificat condiția (4). Presupunem, prin reducere la absurd, că această condiție nu este îndeplinită, deci că ar *exista* o vecinătate V a punctului l astfel încît pentru orice vecinătate U a punctului α să existe un punct $x \in D \cap U$, $x \neq \alpha$ cu proprietatea că $f(x) \notin V$.

Presupunem mai întîi $\alpha \in \mathbf{R}$ și luăm $U = \left(\alpha - \dfrac{1}{n},\ \alpha + \dfrac{1}{n}\right)$, $n \geq 1$ fiind întreg arbitrar. Atunci pentru fiecare $n \geq 1$ există $x_n \in D \cap U$, $x_n \neq \alpha$ astfel încît $f(x_n) \notin V$. Deoarece $x_n \in U$, avem $|x_n - \alpha| < \dfrac{1}{n}$, deci $x_n \to \alpha$ și conform ipotezei (b), rezultă $f(x_n) \to l$, ceea ce contrazice faptul că $f(x_n) \notin V$ pentru orice n. Am ajuns astfel la o contradicție.

Dacă $\alpha = \infty$, atunci luăm $U = (n, \infty]$, $n \geq 1$ fiind întreg arbitrar și există $x_n \in D \cap U$ astfel încît $f(x_n) \notin V$. Cum $x_n \in U$, rezultă $x_n > n$, $\forall n \geq 1$, deci $x_n \to \infty$ și conform ipotezei (b) rezultă $f(x_n) \to l$, ceea ce contravine faptului că $f(x_n) \notin V$ pentru orice n. Dacă $\alpha = -\infty$ se raționează similar considerînd $U = [-\infty, -n)$ etc.

Observație importantă. Pentru studiul existenței limitei unei funcții într-un punct se folosește adeseori condiția (b), care ar putea fi luată ca definiție. Negația logică a condiției (b) dă un criteriu ca o funcție f să *nu* aibă limita l în punctul α, anume: să existe un șir $x_n \to \alpha$, $x_n \in D \setminus \{\alpha\}$, $n \geq 0$ astfel încît șirul $(f(x_n))_{n \geq 0}$ să nu aibă limita l. Astfel, dacă se pot construi două șiruri $x_n' \to \alpha$, $x_n'' \to \alpha$ de puncte din $D \setminus \{\alpha\}$ și dacă unul din șirurile $(f(x_n'))_{n \geq 0}$, $(f(x_n''))_{n \geq 0}$ nu are limită sau dacă ambele au limite, dar acestea sînt distincte, atunci funcția f nu are limită în punctul α.

Noțiunea introdusă mai sus generalizează noțiunea de limită a unui șir. Fie $l \in \overline{\mathbf{R}}$; direct din definiție rezultă că un șir $(a_n)_{n \geq 0}$ are limita l dacă și numai dacă funcția $f: \mathbf{N} \to \mathbf{R}$, $f(n) = a_n$ are limita l (în punctul $\alpha = \infty$, care este punct de acumulare pentru $\mathbf{N}$).

Alături de utilitatea șirurilor în procese algoritmice recurente, în legătură cu raționamentele prin inducție etc., subliniată în § 1, teorema II.6 arată că studiul limitelor de funcții se poate reduce la studiul șirurilor, acestea din urmă fiind — după cum știm — funcții definite pe o mulțime cu un singur punct de acumulare.

Exemple

1) Reluăm toate cele 6 exemple de la punctul 2.1. Este evident că $\lim_{x\to 2}(x+1)=3$, deoarece pentru orice şir $x_n\to 2$, $x_n\neq 2$ avem $x_n+1\to 3$ şi aplicăm teorema II.6. Apoi funcţia g din exemplul 2 nu are limită în punctul $x=2$, deoarece alegînd şirurile $x_n=2-\frac{1}{n}$, $x'_n=2+\frac{1}{n}$, $n\geqslant 1$, ambele convergente către 2, avem $g(x_n)\to 0$ şi $g(x'_n)=3+\frac{1}{n}\to 3$. Pentru exemplul 3 avem evident $\lim_{x\to 0}f(x)=\lim_{x\to 0}\frac{x^3+5x}{x}=5$ (aplicînd criteriul cu şiruri).

Apoi $\lim_{x\to -2}f_1(x)$ nu există $\left(\text{deoarece pentru şirurile } x'_n=-2-\frac{1}{n},\ x''_n=-2+\frac{1}{n},\ n\geqslant 1 \text{ avem } f_1(x'_n)=-n\to-\infty \text{ şi } f_1(x''_n)=n\to\infty\right)$. Dar $\lim_{x\to -2}g_1(x)=\lim_{x\to-2}\frac{1}{(x+2)^2}=$ $=\infty$ $\Big[$deoarece pentru orice vecinătate V a punctului ∞ există $b>0$ astfel încît $(b,\infty]\subset V$ şi considerăm $U=\left(-2-\frac{1}{\sqrt{b}},\ -2+\frac{1}{\sqrt{b}}\right)$; se observă că U este vecinătate a punctului $x=-2$ şi, în plus, $\forall x\in U$, $x\neq -2$ avem $|x+2|<\frac{1}{\sqrt{b}}\Rightarrow$ $\Rightarrow (x+2)^2<\frac{1}{b}$, deci $\frac{1}{(x+2)^2}>b$, adică $\frac{1}{(x+2)^2}\in V\Big]$.

În exemplul 5 avem $\lim_{x\to 0}f(x)=0$; într-adevăr, aplicăm definiţia II.4 şi fie V o vecinătate oarecare a originii. Alegem $\varepsilon>0$ astfel încît $(-\varepsilon,\varepsilon)\subset V$ şi fie $U=(-\sqrt{\varepsilon},\sqrt{\varepsilon})$. Dacă $x\in U$, $x\neq 0$, atunci $f(x)=0$, dacă $x<0$ şi $f(x)=-x^2$, dacă $x>0$, deci în orice caz $f(x)\in(-\varepsilon,\varepsilon)$, adică $f(x)\in V$. Se poate remarca aici că $f(0)=3$, deci limita $\lim_{x\to 0}f(x)$ există şi diferă de $f(0)$. În fine, în exemplul 6 am probat deja că $\lim_{x\to 0}x\sin\frac{1}{x}=0$.

La aceste exemple adăugăm alte trei exemple simple.

2) Orice funcţie constantă $f:D\to\mathbf{R}$ cu valoarea c are limită în orice punct α de acumulare pentru D şi $\lim_{x\to\alpha}f(x)=c$.

3) Este evident că $\lim_{x\to\alpha}x=\alpha$ (adică $\lim_{x\to\alpha}1_{\mathbf{R}}(x)=\alpha$). Apoi, $\lim_{x\to\alpha}x^2=\alpha^2$ (deoarece dacă $x_n\to\alpha$, atunci $x_n^2\to\alpha^2$).

4) Funcţia $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $f(x)=\sin x$ nu are limită în punctul ∞ deoarece şirurile $x'_n=n\pi$, $x''_n=\frac{\pi}{2}+2n\pi$, $n\geqslant 1$ au limita ∞ ($x'_n>n$ şi $x''_n>n$ pentru orice întreg $n\geqslant 1$), dar $f(x'_n)=\sin x'_n=\sin n\pi=0$, $f(x''_n)=\sin x''_n=\sin\left(\frac{\pi}{2}+2n\pi\right)=1$, deci $f(x'_n)\to 0$, $f(x''_n)\to 1$.

În mod similar, arătăm că funcţia $g:\mathbf{R}\setminus\{0\}\to\mathbf{R}$, $g(x)=\sin\frac{1}{x}$ nu are limită în punctul $x=0$; anume alegem şirurile $x'_n=\frac{1}{n\pi}$ şi $x''_n=\frac{1}{\frac{\pi}{2}+2n\pi}$, $n\geqslant 1$ care converg către zero şi totuşi $f(x'_n)=\sin\frac{1}{x'_n}=\sin n\pi\to 0$, $f(x''_n)=\sin\frac{1}{x''_n}\to 1$.

Subliniem un fapt important. Se poate arăta că în cazul cînd $\alpha \in \mathbf{R}$, $l \in \mathbf{R}$, afirmaţiile (a), (b) din teorema II.6 sînt echivalente cu următoarea:

(c) *pentru orice* $\varepsilon > 0$ *există* $\delta > 0$ *depinzînd de* ε *astfel încît din faptul că* $x \in D \setminus \{\alpha\}$ şi $|x - \alpha| < \delta$ *să rezulte* $|f(x) - l| < \varepsilon$ („criteriul $\varepsilon - \delta$").

2.3. Limite laterale

Indicăm acum un nou criteriu care asigură existenţa limitei unei funcţii într-un punct, adeseori utilizat.

Fie $f : D \to \mathbf{R}$ $(D \subset \mathbf{R})$, α un punct de acumulare pentru mulţimea $D_1 = D \cap (-\infty, \alpha) = \{x \in D \mid x < \alpha\}$ şi $l_s \in \mathbf{R}$. Se spune că funcţia f *are limită (sau există limita lui f) la stînga* la punctul $x = \alpha$, egală cu l_s, dacă restricţia lui f la D_1 are limită în punctul $x = \alpha$, conform definiţiei II.4. Se scrie atunci

$$\lim_{x\to\alpha,\ x<\alpha} f(x) = l_s \text{ sau simbolic } f(\alpha - 0) = l_s.$$

Aceasta revine la faptul că pentru orice vecinătate V a punctului l_s există o vecinătate U a lui α, astfel încît $x \in D \cap U$, $x < \alpha \Rightarrow f(x) \in V$.

În mod similar se defineşte *limita la dreapta* a lui f în punctul α, $l_d = \lim\limits_{x\to\alpha,\ x>\alpha} f(x)$, $(l_d \in \overline{\mathbf{R}})$, notată simbolic $f(\alpha+0)$. Uneori se notează $l_s = \lim\limits_{x \uparrow \alpha} f(x)$ şi $l_d = \lim\limits_{x \downarrow \alpha} f(x)$. Se extinde direct teorema II.6 pentru limitele laterale (adică la stînga, respectiv la dreapta), folosind şiruri $x_n \to \alpha$, $x_n < \alpha$ (respectiv $x_n \to \alpha$, $x_n > \alpha$).

TEOREMA II.7. Fie $f : D \to \mathbf{R}$ o funcţie şi $\alpha \in \mathbf{R}$ un punct de acumulare pentru D cu proprietatea că funcţia f are limite laterale în punctul $x = \alpha$ (adică există $f(\alpha - 0)$ *şi* $f(\alpha + 0)$). Atunci afirmaţiile următoare sînt echivalente:

1°. funcţia f are limită în punctul $x = \alpha$;

2°. $f(\alpha - 0) = f(\alpha + 0)$.

În aceste condiţii este adevărată următoarea dublă egalitate

$$\lim_{x\to\alpha} f(x) = f(\alpha - 0) = f(\alpha + 0).$$

Demonstraţie. 1° $\Rightarrow$ 2°. Dacă există $l = \lim\limits_{x\to\alpha} f(x)$, atunci este evident că $f(\alpha - 0) = l$ şi $f(\alpha + 0) = l$, deci $f(\alpha - 0) = f(\alpha + 0) = l$.

2° $\Rightarrow$ 1°. Presupunem că $f(\alpha - 0) = f(\alpha + 0)$ şi notăm cu l valoarea comună. Arătăm că limita $\lim\limits_{x\to\alpha} f(x)$ există şi este egală cu l. Fie V o vecinătate oarecare a lui l. Atunci există vecinătăţi U_1, U_2 ale lui α, astfel încît pentru orice $u \in U_1 \cap D$, $u < \alpha$ să avem $f(u) \in V$ şi pentru orice $v \in U_2 \cap D$, $v > \alpha$ să avem $f(v) \in V$. Considerăm vecinătatea $U = U_1 \cap U_2$ a punctului α. Pentru orice $x \in U \cap D$, $x \neq \alpha$ avem fie $x < \alpha$, $x \in U_1$, deci $f(x) \in V$, fie $x > \alpha$, $x \in U_2$ şi din nou $f(x) \in V$. Aşadar, am probat îndeplinirea condiţiei (4) şi, ca atare, $\lim\limits_{x\to\alpha} f(x) = l$.

Exemple

1) Treapta unitate are în origine limită la stînga, egală cu 0 şi limită la dreapta, egală cu 1.

2) Considerăm funcţia $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = [x]$. Ea are limită în orice punct $\alpha \notin \mathbf{Z}$, egală cu $[\alpha]$, iar în punctele $\alpha \in \mathbf{Z}$ are limite laterale neegale (fig. II.12); anume $f(\alpha - 0) = \alpha - 1$ şi $f(\alpha + 0) = \alpha$.

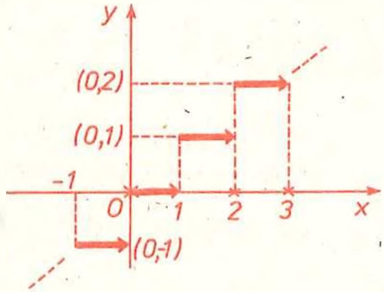


Fig. II.12

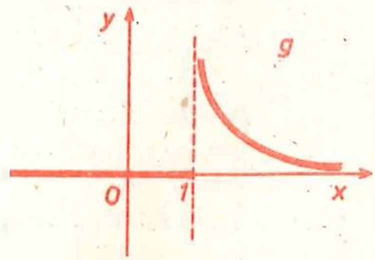


Fig. II.13

3) Funcţia $f : (0, \infty) \to \mathbf{R}$, $f(x) = \sqrt{x}$ are limită la dreapta, egală cu 0 în punctul $x = 0$ (şi nu are sens problema existenţei limitei la stînga în acel punct).

4) Funcţia $g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ definită prin

$$g(x) = \begin{cases} 0 & , \text{ dacă } x \leqslant 1 \\ \dfrac{1}{x-1}, & \text{ dacă } x > 1 \end{cases} \quad \text{(fig. II.13)}$$

are limită la stînga în punctul $x = 1$ şi anume $g(1 - 0) = 0$, dar nu are limită finită la dreapta în acest punct; anume avem $g(1 + 0) = \lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x > 1}} g(x) = \lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x > 1}} \dfrac{1}{x - 1} = \infty$.

5) Iată un exemplu din fizică. Se consideră o cantitate de apă şi se notează cu $V(t)$ volumul ei la temperatura t. Atunci limita la stînga $V(0 - 0)$ este volumul aceleiaşi cantităţi de gheaţă la 0°, iar limita la dreapta $V(0 + 0)$ este volumul cantităţii de apă lichidă la 0°. Din considerente fizice, se ştie că

$$V(0 + 0) < V(0 - 0) \text{ (fig. II.14)}$$

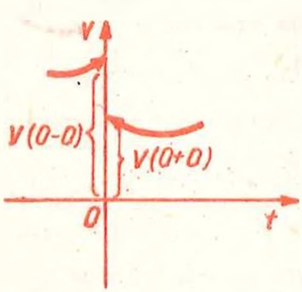


Fig. II.14

(acesta este un motiv pentru care se întîmplă accidente la îngheţarea apei în conducte!).

În general, dacă o funcţie $f : D \to \mathbf{R}$ ($D \subset \mathbf{R}$) admite limite laterale într-un punct α (care este punct de acumulare pentru D), atunci se poate defini *saltul funcţiei f în punctul α*. Acesta este numărul real

$$S_{f,\alpha} = f(\alpha + 0) - f(\alpha - 0),$$

adică diferenţa între limita la dreapta şi limita la stînga ale lui f în punctul α.

De exemplu, în cazul funcţiei $f(x) = x$ saltul este nul în orice punct din $\mathbf{R}$; saltul funcţiei $f(x) = [x]$ este egal cu zero în orice punct $\alpha \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Z}$ şi este egal cu 1 în orice punct $\alpha \in \mathbf{Z}$. Se observă că în exemplul din fizică, dat anterior, saltul lui V în origine este negativ.

EXERCIŢII (capitolul II. § 2)

1. Să se arate că funcţiile $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ următoare au limită în orice punct $\alpha\in\mathbf{R}$:
a) $f(x)=x+5$; b) $f(x)=x^2$; c) $f(x)=x^2+5$.

2. Să se determine punctele unde funcţia $f:\mathbf{R}\setminus\{1\}\to\mathbf{R}$, $f(x)=\dfrac{1}{2x-2}$ nu are limită. Aceeaşi problemă pentru $f:\mathbf{R}\setminus\{0, 2\}\to\mathbf{R}$, $f(x)=\dfrac{1}{x^2-2x}$.

3. Să se arate că limitele următoare există şi au valorile indicate:

a) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x+1}{x+2}=\dfrac{2}{3}$; b) $\lim\limits_{x\to-4}\dfrac{x+5}{x+3}=-1$,

aplicînd definiţia II.4.

4. Să se arate că funcţiile $f,\ g:\mathbf{R}\setminus\{0\}\to\mathbf{R}$, $f(x)=\dfrac{5x^2+1}{x}$, $g(x)=\dfrac{2x^2+1}{x}$ nu au limită în punctul $x=0$, dar $f-g$, $\dfrac{f}{g}$; $\dfrac{g}{f}$ au limită în acest punct.

5. Să se arate, folosind definiţia II.4, că

a) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{1}{(x-1)^2}=\infty$;

b) funcţia $f:\mathbf{R}\setminus\{1\}\to\mathbf{R}$, $f(x)=\dfrac{1}{x-1}$ nu are limită în punctul $x=1$.

6. Să se schiţeze graficele funcţiilor $f, g, h:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ definite prin

$$f(x)=2x+1,\ g(x)=3x-1,\ h(x)=\begin{cases}2x+1, & \text{dacă } x\leqslant 1\\ 3x-1, & \text{dacă } x>1\end{cases}$$

şi să se determine punctele unde aceste funcţii nu au limită.

7. Să se traseze graficele funcţiilor $f:\mathbf{R}\setminus\{1\}\to\mathbf{R}$, $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x-1}$, $g:\mathbf{R}\setminus\{0\}\to\mathbf{R}$, $g(x)=\dfrac{|x|}{x}$ şi $h:\mathbf{R}\setminus\{0, 1\}\to\mathbf{R}$, $h(x)=f(x)\cdot g(x)$. Care din aceste funcţii nu au limită în punctele $\alpha=0$ şi $\alpha=1$?

8. Să se calculeze limitele laterale ale funcţiilor $f:D\to\mathbf{R}$ următoare în punctele indicate (D fiind domeniul maxim de definiţie):

a) $f(x)=x+|x|$, $\alpha=0$, b) $f(x)=\operatorname{sgn} x$, $\alpha=0$;

c) $f(x)=\dfrac{x+|x|}{x}$, $\alpha=0$; d) $f(x)=\begin{cases}x, & \text{dacă } x<1\\ 2x, & \text{dacă } x\geqslant 1\end{cases}$, $\alpha=1$;

e) $f(x)=\begin{cases}x^2-40, & \text{dacă } x\leqslant 7\\ x+2, & \text{dacă } x>7\end{cases}$, $\alpha=7$; f) $f(x)=\left|\dfrac{x^2-4}{x-2}\right|$, $\alpha=2$.

9. Pentru ce k real funcţia $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$,

$$f(x)=\begin{cases}x^2+kx, & \text{dacă } x<1\\ x-2, & \text{dacă } x\geqslant 1\end{cases}$$

are limită în punctul $x=1$? Aceeaşi problemă pentru funcţia $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$,

$$f(x)=\begin{cases}x^2+kx, & \text{dacă } x<0\\ x-2, & \text{dacă } x\geqslant 0\end{cases},\ \text{în } \alpha=0.$$

10. Să se calculeze saltul funcţiilor: $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ următoare în punctele indicate:

a) $f(x)=x^2$, în $\alpha=1$;

b) $f(x)=\begin{cases}2x-1, & \text{dacă } x<2\\ 4x, & \text{dacă } x\geqslant 2\end{cases}$, în $\alpha=2$;

c) $f(x)=\begin{cases}-x, & \text{dacă } x<1\\ kx+2, & \text{dacă } x\geqslant 1\end{cases}$, ($k$ parametru real), în $\alpha=1$.

§ 3. Operații cu șiruri convergente

Pentru studiul operațiilor cu limite de funcții începem cu cazul particular al șirurilor. Fie $(a_n)_{n\geqslant 0}$, $(b_n)_{n\geqslant 0}$, două șiruri de numere reale. Se pot atunci considera alte șiruri definite cu ajutorul lor; de exemplu, $(a_n + b_n)_{n\geqslant 0}$, $(2a_n)_{n\geqslant 0}$, $(3a_n + 5b_n)_{n\geqslant 0}$, $(a_n b_n)_{n\geqslant 0}$ etc. Ce se poate spune despre convergența acestora dacă șirurile inițiale sînt convergente? Răspunsul la o astfel de întrebare este util, de exemplu, în reducerea studiului șirurilor la anumite șiruri-tip; astfel, pentru șirul $c_n = \frac{2n+1}{n^2}$, $n \geqslant 1$, avem $c_n = 2\cdot\frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}$, iar pentru șirul $d_n = \frac{\sqrt{n^2+4}}{n}$, $n \geqslant 1$, avem $d_n = \sqrt{1 + 4\cdot\frac{1}{n^2}}$ pentru orice $n \geqslant 1$.

Vom folosi următoarea propoziție pregătitoare.

LEMĂ. **Dacă $(u_n)_{n\geqslant 0}$, $(v_n)_{n\geqslant 0}$ sînt două șiruri convergente către zero, atunci pentru orice $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$ avem $\alpha u_n + \beta v_n \to 0$.**

Demonstrație. Putem presupune $\alpha \neq 0$ și $\beta \neq 0$, celelalte cazuri fiind imediate. Verificăm condiția (2) și fie $\varepsilon > 0$ arbitrar fixat. Conform ipotezei, există N_1, N_2 astfel încît $|u_n| < \frac{\varepsilon}{2|\alpha|}$ pentru orice $n \geqslant N_1$ și $|v_n| < \frac{\varepsilon}{2|\beta|}$ pentru orice $n \geqslant N_2$. Fie $N = \max(N_1, N_2)$. Atunci pentru orice $n \geqslant N$, avem $|\alpha u_n + \beta v_n| \leqslant |\alpha u_n| + |\beta v_n| = |\alpha|\cdot|u_n| + |\beta|\cdot|v_n| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$, deci $\lim\limits_{n\to\infty}(\alpha u_n + \beta v_n) = 0$.

TEOREMA II.8. **Presupunem că șirurile $(a_n)_{n\geqslant 0}$, $(b_n)_{n\geqslant 0}$ sînt convergente. Atunci șirurile $(a_n + b_n)_{n\geqslant 0}$, $(a_n b_n)_{n\geqslant 0}$ sînt convergente și, în plus,**

(5) $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n + b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n + \lim\limits_{n\to\infty} b_n$.

(6) $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n b_n) = (\lim\limits_{n\to\infty} a_n)(\lim\limits_{n\to\infty} b_n)$.

Demonstrație. Fie $a_n \to a$, $b_n \to b$, deci șirurile $u_n = |a_n - a|$, $v_n = |b_n - b|$, $n \geqslant 0$ converg către zero. Avem, pentru orice $n \geqslant 0$, $|(a_n + b_n) - (a + b)| = |(a_n - a) + (b_n - b)| \leqslant |a_n - a| + |b_n - b| = u_n + v_n$. Conform lemei, avem $u_n + v_n \to 0$. Aplicînd teorema II.4, 1°, rezultă că $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n + b_n) = a + b$, adică relația (5).

Șirul $(b_n)_{n\geqslant 0}$ este mărginit (fiind convergent), deci există $M > 0$ astfel încît $|b_n| \leqslant M$, $\forall n \geqslant 0$. Din relația $a_n b_n - ab = (a_n - a)b_n + a(b_n - b)$, rezultă $|a_n b_n - ab| \leqslant c_n$, unde $c_n = M\cdot|a_n - a| + |a|\cdot|b_n - b| = Mu_n + |a| v_n$, pentru orice $n \geqslant 0$. Conform lemei, avem $c_n \to 0$ și, aplicînd teorema II.4, 1°, rezultă că $\lim\limits_{n\to\infty} a_n b_n = ab$.

COROLAR. 1°. *Dacă $\lambda \in \mathbf{R}$ și $a_n \to a$, $a \in \mathbf{R}$, atunci $\lambda a_n \to \lambda a$, în particular, $\lim\limits_{n\to\infty} (-a_n) = -a$.*

2°. *Dacă șirurile $(a_n)_{n\geq 0}$, $(b_n)_{n\geq 0}$ sînt convergente, atunci șirul $(a_n - b_n)_{n\geq 0}$ este convergent și $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n - b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n - \lim\limits_{n\to\infty} b_n$.*

Demonstrație. 1°. Șirul constant $b_n = \lambda$, $n \geqslant 0$ este convergent către λ și, aplicînd relația (6), avem $\lambda a_n \to \lambda a$. Pentru $\lambda = -1$ rezultă $-a_n \to -a$.

2°. $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n - b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} [a_n + (-b_n)] = \lim\limits_{n\to\infty} a_n + \lim\limits_{n\to\infty} (-b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n - \lim\limits_{n\to\infty} b_n$.

Pe scurt, dar mai puțin riguros, teorema II.8 și corolarul precedent se exprimă spunînd că limita sumei (diferenței, produsului) de șiruri convergente este egală cu suma (respectiv diferența, produsul) limitelor, iar constantele pot fi „scoase" în afara limitei.

Trebuie observat că lema și relațiile (5), (6) din teorema II.8 au loc pentru orice număr fixat $k(k \geqslant 2)$ de șiruri convergente, considerînd în lema corespunzătoare rangul $N = \max(N_1, \ldots, N_k)$. Aceasta nu este posibilă dacă numărul șirurilor crește indefinit; de exemplu, deși $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$, totuși limita $\lim\limits_{n\to\infty} \Big(\underbrace{\frac{1}{n} + \ldots + \frac{1}{n}}_{n \text{ ori}}\Big)$ nu este nulă, ci este evident egală cu 1.

TEOREMA II.9. *Fie $(a_n)_{n\geq 0}$, $(b_n)_{n\geq 0}$ două șiruri de numere reale.*

1°. *Presupunem că $a_n \to \infty$ și $b_n \to b$, $b \in \mathbf{R}$. Atunci $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n + b_n) = \infty$ și $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n b_n) = \begin{cases} \infty, & \text{dacă } b > 0 \\ -\infty, & \text{dacă } b < 0 \end{cases}$*

2°. *Presupunem că $a_n \to -\infty$ și $b_n \to b$, $b \in \mathbf{R}$. Atunci $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n + b_n) = -\infty$ și $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n b_n) = \begin{cases} -\infty, & \text{dacă } b > 0 \\ \infty, & \text{dacă } b < 0 \end{cases}$*

3°. *Dacă $a_n \to \infty$, $b_n \to \infty$, atunci $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n + b_n) = \infty$ și $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n b_n) = \infty$.*

4°. *Dacă $a_n \to -\infty$, $b_n \to -\infty$, atunci $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n + b_n) = -\infty$ și $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n b_n) = \infty$*

5°. *Dacă $a_n \to \infty$, $b_n \to -\infty$, atunci $\lim\limits_{n\to\infty} a_n b_n = -\infty$.*

Demonstrație 1°. Presupunem $a_n \to \infty$, $b_n \to b$ și fie $\varepsilon > 0$ arbitrar fixat. Aplicăm teorema II.2. Există un rang N_1, astfel încît $a_n > 2\varepsilon - b$ pentru orice $n \geqslant N_1$ și un rang N_2, astfel încît $b - \varepsilon < b_n < b + \varepsilon$ pentru orice $n \geqslant N_2$. Atunci pentru orice $n \geqslant \max(N_1, N_2)$, avem $a_n + b_n > (2\varepsilon - b) + (b - \varepsilon) = \varepsilon$, deci $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n + b_n) = \infty$.

Presupunem acum că $b > 0$. Atunci pentru orice $\varepsilon > 0$ avem $a_n > \frac{2\varepsilon}{b}$ şi $b_n \in \left(\frac{b}{2}, \frac{3b}{2}\right)$ de la un rang încolo, deci $a_nb_n > \frac{2\varepsilon}{b} \cdot \frac{b}{2} = \varepsilon$, adică $\lim\limits_{n\to\infty} a_nb_n = \infty$; dacă $b < 0$, atunci $-b > 0$ şi $-b_n \to -b$, deci, conform cazului precedent, $\lim\limits_{n\to\infty} (-a_nb_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n(-b_n) = \infty$, de unde, $\lim\limits_{n\to\infty} (a_nb_n) = -\infty$.

Afirmaţia 2 se probează similar. Demonstrăm 3°: fie $\varepsilon > 0$ arbitrar fixat. Atunci $a_n > \frac{\varepsilon}{2}$, $b_n > \frac{\varepsilon}{2}$ de la un rang încolo, deci $a_n + b_n > \varepsilon$ de la un rang încolo, deci $a_n + b_n \to \infty$. În mod analog, $a_n > \sqrt{\varepsilon}$, $b_n > \sqrt{\varepsilon}$ de la un rang încolo, deci $a_nb_n > \varepsilon$ adică $a_nb_n \to \infty$.

Celelalte afirmaţii se demonstrează în mod similar.

Observaţie. Afirmaţiile din teorema II.9 se scriu simbolic respectiv astfel:

1°. $\infty + b = \infty$, $\quad \infty \cdot b = \begin{cases} \infty, & \text{dacă } b > 0 \\ -\infty, & \text{dacă } b < 0 \end{cases}$

2°. $-\infty + b = -\infty$, $\quad (-\infty) \cdot b = \begin{cases} -\infty, & \text{dacă } b > 0 \\ \infty, & \text{dacă } b < 0 \end{cases}$

3°. $\infty + \infty = \infty$, $\quad \infty \cdot \infty = \infty$

4°. $-\infty - \infty = -\infty$, $\quad (-\infty) \cdot (-\infty) = \infty$

5°. $\infty \cdot (-\infty) = -\infty$.

Nu se atribuie nici un sens pentru $\infty + (-\infty)$, $\infty \cdot 0$, considerate cazuri exceptate. Remarcăm, de asemenea, că $-(-\infty) = \infty$, în sensul că un şir $(a_n)_{n\geq 0}$ are limita $-\infty$ dacă şi numai dacă şirul $(-a_n)_{n\geq 0}$ are limita ∞.

TEOREMA II.10. **Fie $(b_n)_{n\geq 0}$ un şir de numere reale.**

1°. Dacă $(b_n)_{n\geq 0}$ este un şir convergent către numărul real b şi $b \neq 0$, atunci numerele b_n sînt nenule începînd de la un anumit rang k şi şirul $\left(\frac{1}{b_n}\right)_{n\geq k}$ converge către $\frac{1}{b}$, adică $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{b_n} = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} b_n}$.

2°. Dacă $b_n \to \infty$ (sau dacă $b_n \to -\infty$), atunci $\frac{1}{b_n} \to 0$.

3°. Presupunem că $b_n \to 0$. Dacă $b_n > 0$ (respectiv $b_n < 0$) de la un anumit rang, atunci $\frac{1}{b_n} \to \infty$ $\left(\text{respectiv } \frac{1}{b_n} \to -\infty\right)$.

Demonstraţie. 1°. Presupunem $b > 0$ (cazul $b < 0$ se tratează similar) şi alegem o vecinătate $V = (b - \varepsilon, b + \varepsilon)$ a lui b, care nu conţine originea. Deoarece $b_n \to b$, toţi termenii b_n vor fi situaţi în V de la un rang k încolo şi, în particular, $b_n > b - \varepsilon > 0$ pentru orice $n \geq k$. Atunci pentru orice $n \geq k$,

$$\left|\frac{1}{b_n} - \frac{1}{b}\right| = \left|\frac{b - b_n}{b_nb}\right| = \frac{|b_n - b|}{|b_n| \cdot |b|} \leq \frac{1}{(b-\varepsilon)\cdot b} \cdot |b_n - b|$$

şi, cum $b_n \to b$, va rezulta $\frac{1}{b_n} \to \frac{1}{b}$, aplicînd teorema II.4, 1°.

2° Presupunem că $b_n \to \infty$ şi fie $\varepsilon > 0$ arbitrar fixat. Atunci există un rang N astfel încît $b_n > \frac{1}{\varepsilon}$ pentru orice $n \geqslant N$. În particular, $b_n > 0$ şi $0 < \frac{1}{b_n} < \varepsilon$ pentru orice $n \geqslant N$, deci $\frac{1}{b_n} \to 0$. Apoi, dacă $b_n \to -\infty$, atunci $-b_n \to \infty$ şi $\frac{1}{-b_n} \to 0$, deci $\frac{1}{b_n} \to 0$.

3° Presupunem că $b_n \to 0$ şi $b_n > 0$ pentru orice $n \geqslant k$. Atunci pentru orice $\varepsilon > 0$ există N astfel încît $\forall\, n \geqslant \max(N, k)$ să avem $0 < b_n < \frac{1}{\varepsilon}$, deci $\frac{1}{b_n} > \varepsilon$ şi, ca atare, $\frac{1}{b_n} \to \infty$. În fine, dacă $b_n \to 0$ şi $b_n < 0$ (pentru $n \geqslant k$), atunci $-b_n \to 0$ şi $-b_n > 0$ pentru $n \geqslant k$, deci $\frac{1}{-b_n} \to \infty$, adică $\frac{1}{b_n} \to -\infty$.

COROLAR. Dacă $(a_n)_{n\geqslant 0}$ şi $(b_n)_{n\geqslant 0}$ sînt şiruri convergente şi dacă $\lim\limits_{n\to\infty} b_n \neq 0$, atunci şirul $\left(\frac{a_n}{b_n}\right)_{n\geqslant k}$ este convergent şi, în plus,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} a_n}{\lim\limits_{n\to\infty} b_n}. \tag{7}$$

Demonstraţie. Avem $\frac{a_n}{b_n} = a_n \cdot \frac{1}{b_n}$ şi aplicăm relaţia (6) din teorema II.8 şi teorema II.10, 1°.

Observaţie. Afirmaţiile 2°, 3° din teorema II.10 se scriu simbolic astfel:

$$\frac{1}{\infty} = 0, \qquad \frac{1}{-\infty} = 0,$$

$$\frac{1}{+0} = \infty, \qquad \frac{1}{-0} = -\infty,$$

dar sensul corect al acestora este cel dat în enunţul teoremei.

Nu se definesc $\frac{0}{0}$, $\infty - \infty$, $\frac{\infty}{\infty}$, şi $\infty \cdot 0$, numite cazuri exceptate (sau „nedeterminări"). Un motiv pentru care expresiei $\frac{0}{0}$ nu i se poate atribui un sens este următorul: dacă $a_n \to 0$ şi $b_n \to 0$, atunci nu se poate trage nici o concluzie privind limita raportului $\frac{a_n}{b_n}$. Astfel, pentru $a_n = \frac{1}{n}$, $b_n = \frac{2}{n}$ $(n \geqslant 1)$ avem $\frac{a_n}{b_n} \to \frac{1}{2}$; pentru $a_n = \frac{1}{n}$, $b_n = \frac{1}{n^2}$ $(n \geqslant 1)$ avem $\frac{a_n}{b_n} \to \infty$, în fine, pentru $a_n = \frac{(-1)^n}{n}$, $b_n = \frac{1}{n}$ $(n \geqslant 1)$ avem, de asemenea, $a_n \to 0$, $b_n \to 0$ şi raportul $\frac{a_n}{b_n} = (-1)^n$ nu are limită. Aceasta arată că, spre deosebire de cazurile anterioare, nu putem avea nici o concluzie generală.

Expresia $\frac{0}{0}$ simbolizează orice raport $\frac{a_n}{b_n}$ a două şiruri care converg către zero. În mod analog, $\infty - \infty$ simbolizează diferenţa $a_n - b_n$ a două şiruri $a_n \to \infty$, $b_n \to \infty$ şi se consideră caz exceptat, deoarece dacă $a_n \to \infty$ şi $b_n \to \infty$ nu putem trage nici o concluzie referitor la limita diferenţei $a_n - b_n$. De exemplu, $\lim\limits_{n\to\infty}(2n - n) = \infty$, $\lim\limits_{n\to\infty}(n - 2n) = -\infty$, $\lim\limits_{n\to\infty}[(n+2) - n] = 2$ etc. O discuţie similară are loc pentru $\frac{\infty}{\infty}$ şi pentru $\infty \cdot 0$.

Exemple

1) Calculăm limita $l = \lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{2}{n} + \frac{1}{n^2}\right)$. Notăm $a_n = \frac{2}{n}$, $b_n = \frac{1}{n^2}$, $n \geqslant 1$ şi observăm că $a_n \to 0$, $b_n \to 0$. Atunci şirul $(a_n + b_n)_{n\geqslant 1}$ este convergent şi $l = \lim\limits_{n\to\infty}(a_n + b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n + \lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0 + 0 = 0$.

2) Studiem existenţa limitei şirului $a_n = \frac{n}{\sqrt{n^2+1}}$, $n \geqslant 0$. El este evident mărginit $(0 < a_n < 1$, pentru orice $n \geqslant 0)$ şi monoton crescător, deci este convergent. Fie $l = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$. Deoarece $a_n \geqslant 0$ şi $l = \sup\limits_n a_n$, rezultă $l \geqslant 0$. Avem $a_n^2 = \frac{n^2}{n^2+1}$ şi $\lim\limits_{n\to 0} a_n^2 = 1$, deci $(\lim\limits_{n\to\infty} a_n)^2 = 1$, $l^2 = 1$, de unde $l = 1$ (deoarece $l \geqslant 0$).

3) Avem $\lim\limits_{n\to\infty}(n^2+2n) = \infty$, aplicînd teorema II.9,3°. De asemenea, $\lim\limits_{n\to\infty}(n^2 - 2n) = \infty$ dar aici justificarea este diferită: avem $n^2 - 2n = n^2\left(1 - \frac{2}{n}\right) = a_nb_n$, unde $a_n = n^2$, $b_n = 1 - \frac{2}{n}$, $n \geqslant 1$. Deoarece $a_n \to \infty$, $b_n \to 1$, atunci, aplicînd teorema II.9, 1°, rezultă $a_nb_n \to \infty$, adică $\lim\limits_{n\to\infty}(n^2 - 2n) = \infty$.

În mod similar, aplicînd teorema II.9, punctele 4° şi 2°, rezultă $\lim\limits_{n\to\infty}(-n^2 - 2n) = -\infty$ şi $\lim\limits_{n\to\infty}(-n^2 + 2n) = -\infty$. De asemenea, se poate folosi faptul că dacă un şir $(a_n)_{n\geqslant 0}$ are limită, atunci $(-a_n)_{n\geqslant 0}$ are limită şi $\lim\limits_{n\to\infty}(-a_n) = -\lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

4) Aplicînd teorema II.10, 2°, rezultă $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^2+2n} = 0$, $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^2-2n} = 0$, $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{-n^2-2n} = 0$.

Stabilim un alt rezultat important, care se enunţă, pe scurt, spunînd că „inegalităţile se păstrează prin trecere la limită".

TEOREMA II. 11. Dacă $(a_n)_{n\geqslant 0}$ şi $(b_n)_{n\geqslant 0}$ sînt şiruri de numere reale avînd limită şi dacă $a_n \leqslant b_n$ pentru orice $n \geqslant N$ (N fiind un număr natural fixat), atunci

$$\lim_{n\to\infty} a \leqslant \lim_{n\to\infty} b_n. \tag{8}$$

Demonstraţie. Fie $a_n \to a$, $b_n \to b$ (în $\overline{\mathbf{R}}$). Avem de arătat că $a \leqslant b$. Dacă, prin absurd, am avea $b < a$, atunci este uşor de văzut că există vecinătăţi disjuncte V_1, V_2 ale punctelor b şi respectiv a, astfel încît $x < y$ pentru orice $x \in V_1$, $y \in V_2$ (fig. II.15). Deoarece $b_n \to b$, termenii şirului $(b_n)_{n\geqslant 0}$ sînt situaţi în V_1 de la un rang N_1 încolo şi, similar, $a_n \in V_2$ pentru orice $n \geqslant N_2$, cu N_2 convenabil. Notăm $M = \max(N, N_1, N_2)$. Dacă $n \geqslant M$, atunci rezultă $n \geqslant N_1$, $n \geqslant N_2$, deci $a_n \in V_2$ şi $b_n \in V_1$, deci $b_n < a_n$. Pe de altă parte, deoarece $n \geqslant M$, rezultă $n \geqslant N$, deci $a_n \leqslant b_n$ şi se ajunge la o contradicţie.

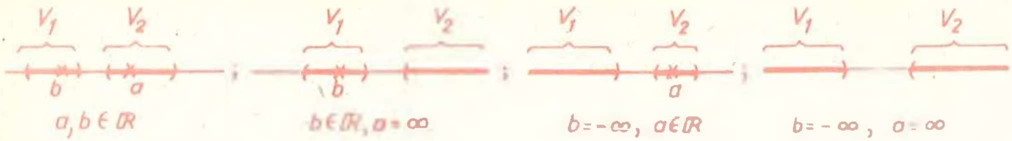


Fig. II.15

Observaţie. Dacă în enunţul teoremei II.11 se presupune $a_n < b_n$ pentru orice $n \geqslant N$, atunci la limită se obţine tot inegalitatea (8), nestrictă şi nu o inegalitate strictă $\left(\text{de exemplu, avem } \frac{1}{n} < \frac{2}{n} \text{ pentru orice } n \geqslant 1 \text{ şi totuşi } \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{2}{n}\right)$.

TEOREMA II. 12 („a cleştelui"). **Presupunem că $(a_n)_{n\geqslant 0}$, $(b_n)_{n\geqslant 0}$, $(c_n)_{n\geqslant 0}$ sînt trei şiruri de numere reale astfel încît $a_n \leqslant b_n \leqslant c_n$ pentru orice $n \geqslant N$ (N fiind un rang fixat). Dacă $a_n \to l$, $c_n \to l$, atunci şirul $(b_n)_{n\geqslant 0}$ are limită şi aceasta este egală cu l.**

Demonstraţie. Presupunem că $l \in \mathbf{R}$. Conform ipotezei $0 \leqslant b_n - a_n \leqslant$ $\leqslant c_n - a_n$. Dar şirul $(c_n - a_n)_{n\geqslant 0}$ este convergent, conform corolarului teoremei II.8, şi, în plus, $\lim\limits_{n\to\infty} (c_n - a_n) = \lim\limits_{n\to\infty} c_n - \lim\limits_{n\to\infty} a_n = l - l = 0$. Aplicînd corolarul 2 al teoremei II.4, rezultă $\lim\limits_{n\to\infty} (b_n - a_n) = 0$, deci şirul $b_n = (b_n - a_n) + a_n$ converge către $0 + l = l$.

Dacă $l = \infty$, atunci din faptul că $a_n \to \infty$, rezultă că $b_n \to \infty$ şi dacă $l = -\infty$, atunci din faptul că $c_n \to -\infty$ şi $b_n \leqslant c_n$, rezultă că $b_n \to -\infty$.

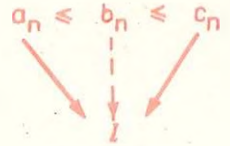


Fig. II.16

EXERCIŢII (capitolul II, § 3)

1. Să se arate că pentru $a_n \to a$, $b_n \to b$ $(a, b \in \mathbf{R})$, avem

$$\frac{a_n + b_n}{2} \to \frac{a + b}{2} \quad \text{şi} \quad a_n^2 + b_n^2 \to a^2 + b^2.$$

2. Fie $(a_n)_{n\geqslant 0}$, $(b_n)_{n\geqslant 0}$, două şiruri de numere, primul fiind convergent către zero şi al doilea fiind mărginit. Să se arate că şirul $(a_n b_n)_{n\geqslant 0}$ este convergent către zero.

3. Să se arate că dacă $(a_n)_{n\geqslant 0}$ este un şir convergent către un număr nenul, atunci $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1$. Să se dea un exemplu de şir $(a_n)_{n\geqslant 0}$ astfel încît limita $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$ să existe şi să fie diferită de 1.

4. Se consideră şirul $c_n = \dfrac{2n^2 + 7n - 10}{5n^2 + 1}$, $n \geqslant 1$. Să se determine două şiruri $a_n \to 2$, $b_n \to 5$ astfel încît $c_n = \dfrac{a_n}{b_n}$ pentru orice $n \geqslant 1$ şi apoi să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} c_n$.

5. Să se calculeze limitele de şiruri:

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^2}{2n^2+7}$; b) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2n^3+100}{2n^3+3}$; c) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^2}{n^3+4}$; d) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{(n+1)^4-(n-1)^4}{n^3}$.

6. Să se arate că $\forall p \geqslant 1$, $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{1^p + 2^p + \ldots + n^p} = 1$.

7. Să se arate că pentru orice $l \in \overline{\mathbf{R}}$ există şiruri:

1°. $a_n \to 0$, $b_n \to 0$, astfel încît $\frac{a_n}{b_n} \to l$.

2°. $a_n \to \infty$, $b_n \to \infty$, astfel încît $a_n - b_n \to l$.

3°. $a_n \to 0$, $b_n \to \infty$, astfel încît $a_n b_n \to l$.

§ 4. Calculul limitelor de şiruri

În acest paragraf vor fi studiate cîteva şiruri mai des întîlnite şi va fi dată noţiunea de serie, care este strîns legată de cea de şir. O atenţie deosebită va fi acordată introducerii numărului e, precum şi sublinierii unor aspecte algoritmice.

4.1. Cîteva şiruri-tip

a) *Şirul* $(q^n)_{n\geqslant 0}$. Fie q un număr real fixat şi $a_n = q^n$, $\forall n \in \mathbf{N}$. Dacă $q = 1$, atunci $a_n \to 1$, iar dacă $q > 1$, atunci $q = 1 + b$ $(b > 0)$ şi $q^n = (1 + b)^n \geqslant 1 + nb$, deci $a_n \to \infty$. Dacă $q \leqslant -1$, atunci şirul este divergent. În sfîrşit, dacă $-1 < q < 1$, notăm $c_n = |q|^n$, $n \geqslant 0$. Acest şir este atunci mărginit $(0 \leqslant c_n \leqslant 1)$ şi, fiind monoton descrescător, el este convergent. Notăm $l = \lim\limits_{n\to\infty} c_n$; din relaţia $c_{n+1} = |q|\, c_n$ se obţine, la limită, $l = |q|\, l$, deci $l = 0$.

În concluzie, am demonstrat următoarea

TEOREMA II. 13. **Şirul $(q^n)_{n\geqslant 0}$ este convergent dacă şi numai dacă $-1 < q \leqslant 1$. În plus,**

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} q^n = \begin{cases} 0, & \text{dacă } -1 < q < 1. \\ 1, & \text{dacă } q = 1. \end{cases}} \tag{9}$$

(Această limită este egală cu $+\infty$, dacă $q > 1$ şi nu există în cazul $q \leqslant -1$.)

Exemple

1) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^n = 0$, $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{40}{41}\right)^n = 0$, $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{41}{40}\right)^n = \infty$;

2) $\lim\limits_{n\to\infty}(-3)^n$ nu există; apoi $\lim\limits_{n\to\infty} 1{,}00001^n = \infty$ și $\lim\limits_{n\to\infty} 0{,}99999^n = 0$.

b) *Șirul* $(P(n))_{n\geqslant 0}$, *cu* P *funcție reală polinomială.*

Presupunem că $P : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ este o funcție polinomială de grad $k \geqslant 1$, cu coeficienți reali, $P(x) = a_0x^k + a_1x^{k-1} + \ldots + a_{k-1}x + a_k$, $a_0 \neq 0$.

Se poate considera atunci șirul

$$P(n) = a_0n^k + a_1n^{k-1} + \ldots + a_{k-1}n + a_k,\ n \geqslant 0.$$

Evident, pentru orice $n \geqslant 1$, avem $P(n) = n^k \cdot c_n$, unde

$$c_n = a_0 + \frac{a_1}{n} + \ldots + \frac{a_{k-1}}{n^{k-1}} + \frac{a_k}{n^k}.$$

Conform teoremelor II.8—II.10, avem $c_n \to a_0$, deci

$$\lim_{n\to\infty} P(n) = \lim_{n\to\infty} n^k \cdot c_n = \begin{cases} \infty, & \text{dacă } a_0 > 0 \\ -\infty, & \text{dacă } a_0 < 0. \end{cases}$$

Pe de altă parte, se observă că

$$\lim_{n\to\infty} a_0n^k = \begin{cases} \infty, & \text{dacă } a_0 > 0 \\ -\infty, & \text{dacă } a_0 < 0. \end{cases}$$

Așadar, *limita* $\lim\limits_{n\to\infty} P(n)$ *este egală cu limita termenului de grad maxim*, a_0n^k, *al lui* $P(n)$ și este $+\infty$ sau $-\infty$, după cum coeficientul a_0 este pozitiv sau negativ. Am presupus P de grad cel puțin 1. Dacă P este de grad 0, adică o constantă k, atunci $\lim\limits_{n\to\infty} P(n) = k$.

Exemple

1) $\lim\limits_{n\to\infty}(n^2 - 100\,000n) = \infty$, $\lim\limits_{n\to\infty}(-n^3 + 10^4 \cdot n) = \lim\limits_{n\to\infty}(-n^3) = -\infty$;

2) $\lim\limits_{n\to\infty}[(n+1)^2 - (n-1)^2] = \infty$, $\lim\limits_{n\to\infty}[(n+1)^2 - n^2 - 2n] = 1$.

c) *Șirul* $\left(\frac{P(n)}{Q(n)}\right)_{n\geqslant 0}$ *cu* P, Q *funcții reale polinomiale.* Se consideră două funcții polinomiale P, $Q : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, definite prin

$$P(x) = a_0x^k + a_1x^{k-1} + \ldots + a_{k-1}x + a_k,\ a_0 \neq 0,\ k \geqslant 1,$$

$$Q(x) = b_0x^m + b_1x^{m-1} + \ldots + b_{m-1}x + b_m,\ b_0 \neq 0,\ m \geqslant 1.$$

Fie N un număr natural mai mare decît orice rădăcină reală a lui Q. Atunci, pentru orice $n > N$, avem

$$\frac{P(n)}{Q(n)} = \frac{n^k\left(a_0 + \frac{a_1}{n} + \ldots + \frac{a_k}{n^k}\right)}{n^m\left(b_0 + \frac{b_1}{n} + \ldots + \frac{b_m}{n^m}\right)}.$$

Dacă $k = m$, atunci, deoarece cele două paranteze tind către a_0 și respectiv b_0, pentru $n \to \infty$ rezultă

$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{P(n)}{Q(n)} = \frac{a_0}{b_0}$ (raportul coeficienților termenilor de grad maxim).

Dacă $k < m$, atunci

$$\frac{P(n)}{Q(n)} = \frac{1}{n^{m-k}} \cdot \frac{a_0 + \frac{a_1}{n} + \ldots + \frac{a_k}{n^k}}{b_0 + \frac{b_1}{n} + \ldots + \frac{b_m}{n^m}} \to 0 \cdot \frac{a_0}{b_0} = 0.$$

Dacă $k > m$, atunci

$$\frac{P(n)}{Q(n)} = n^{k-m} \cdot \frac{a_0 + \frac{a_1}{n} + \ldots + \frac{a_k}{n^k}}{b_0 + \frac{b_1}{n} + \ldots + \frac{b_m}{n^m}} \to \infty \cdot \frac{a_0}{b_0}.$$

Așadar, am demonstrat următoarea

TEOREMA II. 14. **Dacă P, Q sînt funcții polinomiale ca mai sus, atunci**

$$\lim_{n\to\infty} \frac{P(n)}{Q(n)} = \begin{cases} 0, & \text{dacă } gr\,P < gr\,Q \\ \infty, & \text{dacă } gr\,P > gr\,Q \text{ și } a_0 b_0 > 0 \\ -\infty, & \text{dacă } gr\,P > gr\,Q \text{ și } a_0 b_0 < 0 \\ \frac{a_0}{b_0}, & \text{dacă } gr\,P = gr\,Q. \end{cases} \tag{10}$$

Exemple

1) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^2+1}{2n^2+5} = \frac{1}{2}$, $\quad \lim\limits_{n\to\infty} \frac{5n^3-100}{2n^3+n^2-72} = \frac{5}{2}$, $\quad \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^3-n^2}{n^3+n+10} = 1$.

2) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{n^2+1} = 0$, $\quad \lim\limits_{n\to\infty} \frac{(n+1)^3+(n-1)^3}{n^3} = \infty$, $\quad \lim\limits_{n\to\infty} \frac{(n+1)^3-(n-1)^3}{n^2} = 6$.

4.2. Șiruri definite prin recurență

Pînă acum am considerat șiruri pentru care termenul general a fost indicat explicit. Există situații în care este indicată doar posibilitatea de a calcula, pentru fiecare n, termenul de rang n, în funcție de termenii anteriori. Mai precis, presupunem că pentru un șir $(a_n)_{n\geq 0}$ se cunosc termenii $a_0, a_1, \ldots, a_{k-1}$ ($k \geq 1$ fixat) și, în plus, a_n este exprimat în funcție de termenii anteriori $a_{n-1}, a_{n-2}, \ldots, a_{n-k}$, pentru orice $n \geq k$. În acest caz, se spune că șirul $(a_n)_{n\geq 0}$ *este definit prin recurență cu k termeni* (recurrere=a se întoarce, lat.). Cazurile cele mai întîlnite sînt $k = 1$ și $k = 2$. Pentru unele calcule făcute cu ajutorul calculatorului șirurile definite prin recurență prezintă avantaje nete.

Exemple

1) O progresie aritmetică cu primul termen a_1 și rația r este un șir $(a_n)_{n\geq 1}$ definit prin recurență cu un termen prin relația $a_n = a_{n-1} + r$, $\forall\, n \geq 2$. Se știe, dar se demonstrează și direct, că $a_n = a_1 + (n-1)r$, $\forall\, n \geq 1$.

În mod similar, progresia geometrică cu primul termen a_1 și rația q este șirul $(a_n)_{n\geq 1}$ definit prin recurență cu un termen prin relația $a_n = a_{n-1} \cdot q$, $\forall\, n \geq 2$ (a_1, q fiind date); în acest caz, $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$, $n \geq 1$.

2) Dăm un exemplu foarte important de şir definit prin recurenţă cu doi termeni, anume şirul $(f_n)_{n\geqslant 0}$ al lui L. Fibonacci (1170—1240), dat prin

$$f_0 = 1,\ f_1 = 1,\ f_n = f_{n-1} + f_{n-2} \text{ pentru orice } n \geqslant 2.$$

Aşadar, $f_0 = 1$, $f_1 = 1$, $f_2 = f_1 + f_0 = 2$, $f_3 = f_2 + f_1 = 3$, $f_3 = 5$ etc. Pentru a obţine o altă exprimare a lui f_n se poate proceda astfel: se caută numere reale α, β, u, $v (u \neq v)$ astfel încît

$$f_n = \alpha u^n + \beta v^n, \text{ pentru orice întreg } n \geqslant 0$$

(adică, scriind f_n ca suma termenilor generali a două progresii geometrice). Condiţia $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$ devine $\alpha u^n + \beta v^n = \alpha u^{n-1} + \beta v^{n-1} + \alpha u^{n-2} + \beta v^{n-2}$, adică $\alpha u^{n-2}(u^2 - u - 1) + \beta v^{n-2}(v^2 - v - 1) = 0$, $\forall\, n \geqslant 2$. Se observă că această condiţie este îndeplinită dacă u, v sînt rădăcinile ecuaţiei $x^2 - x - 1 = 0$, de exemplu $u = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$, $v = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$.

Atunci $f_n = \alpha\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + \beta\left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$, $\forall\, n \geqslant 2$ şi rămîne să determinăm α, β ca această relaţie să aibă loc pentru $n = 0$, $n = 1$, folosind condiţiile $f_0 = 1$, $f_1 = 1$. Se obţin $\alpha = \dfrac{\sqrt{5}+1}{2\sqrt{5}}$, $\beta = \dfrac{\sqrt{5}-1}{2\sqrt{5}}$ şi, în final,

$$f_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}\right], \quad \forall\, n \geqslant 0.$$

Evident, $\lim\limits_{n\to\infty} f_n = +\infty$.

3) Ideea de recurenţă este legată de cea de algoritm ca procedeu efectiv de calcul pas cu pas şi este utilizată sistematic în programarea pe calculator. Dăm un exemplu de calcul al rădăcinii dintr-un număr, printr-o relaţie de recurenţă neliniară.

Fie $a > 0$ un număr real fixat şi $(x_n)_{n\geqslant 0}$ şirul definit prin relaţia de recurenţă

$$x_n = \frac{1}{2}\left(x_{n-1} + \frac{a}{x_{n-1}}\right), \ \forall\, n \geqslant 1 \ (x_0 > 0 \text{ fiind presupus cunoscut}).$$

Este evident că $x_n > 0$, pentru orice $n \geqslant 1$. Apoi, $x_n^2 - a \geqslant 0$, pentru orice $n \geqslant 1$, deoarece $x_n^2 - a = \dfrac{1}{4}\left(x_{n-1} + \dfrac{a}{x_{n-1}}\right)^2 - a = \dfrac{1}{4}\left(x_{n-1} - \dfrac{a}{x_{n-1}}\right)^2 \geqslant 0$; de aici se deduce că şirul $(x_n)_{n\geqslant 1}$ este monoton descrescător, deoarece $x_{n+1} - x_n = \dfrac{1}{2}\left(x_n + \dfrac{a}{x_n}\right) - x_n = \dfrac{1}{2x_n}(a - x_n^2) \leqslant 0$, pentru orice $n \geqslant 1$. Aşadar, şirul $(x_n)_{n\geqslant 0}$ este monoton şi mărginit şi, ca atare, există $l = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$. Deoarece $x_n > 0$ şi $x_n^2 \geqslant a$, rezultă $l > 0$. Din relaţia iniţială de recurenţă, se obţine

$$l = \frac{l}{2}\left(l + \frac{a}{l}\right), \text{ adică } l^2 = a,\ l = \sqrt{a}, \text{ deci } x_n \to \sqrt{a}.$$

De exemplu, pentru calculul aproximativ al lui $\sqrt{2}$ se poate considera algoritmul definit prin $x_0 = 1$ și $x_n = \frac{1}{2}\left(x_{n-1} + \frac{2}{x_{n-1}}\right)$, $n \geqslant 2$. În acest caz,

$x_1 = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{2}{1}\right) = \frac{3}{2} = 1{,}5$; $x_2 = \frac{1}{2}\left(\frac{3}{2} + \frac{4}{3}\right) = \frac{17}{12} \simeq 1{,}4167$; $x_3 \simeq 1{,}4142$ etc. și deja după trei pași se obține valoarea lui $\sqrt{2}$ cu trei zecimale exacte.

4.3. Serii de numere reale

Dacă q este un număr real și $q \neq 1$, atunci

$$1 + q + q^2 + \dots + q^n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}, \tag{11}$$

așa cum se verifică imediat prin inducție după n.

Dacă $(a_n)_{n\geqslant 1}$ este o progresie geometrică, avînd primul termen a_1 și rația $q \neq 1$ și dacă se notează cu s_n suma primilor n termeni ai acestei progresii, atunci

$$s_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n = a_1 + a_1q + a_1q^2 + \dots + a_1q^{n-1} =$$

$$= a_1(1 + q + q^2 + \dots + q^{n-1}) = a_1\frac{1 - q^n}{1 - q}, \text{ aplicînd (11).}$$

În cazul cînd $q = 1$, avem $s_n = n \cdot a_1$.

Dacă $-1 < q < 1$, atunci $q^n \to 0$ (cf. teoremei II.13) și, ca atare,

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \frac{a_1}{1 - q}.$$

Această relație se mai scrie sugestiv

$$a_1 + a_2 + a_3 + \dots = \frac{a_1}{1 - q} \text{ (pentru } -1 < q < 1).$$

Situația descrisă mai sus se generalizează în modul următor.

Considerăm un șir $(a_n)_{n\geqslant 0}$ de numere reale. Atunci se poate defini un nou șir $(s_n)_{n\geqslant 0}$ punînd $s_n = a_0 + a_1 + \dots + a_n$, numit *șirul sumelor parțiale asociat șirului* $(a_n)_{n\geqslant 0}$.

Așadar,

$$s_0 = a_0,\ s_1 = a_0 + a_1,\ s_2 = a_0 + a_1 + a_2 \text{ etc.}$$

De exemplu, dacă $a_n = q^n$ $(n \geqslant 0)$, atunci $s_n = 1 + q + q^2 + \dots + q^n$, adică suma (11), iar dacă $a_n = n$ $(n \geqslant 0)$, atunci

$$s_n = 0 + 1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n + 1)}{2}.$$

DEFINIŢIA II. 5. **Se numeşte** ***serie de termen general a_n*** **perechea de şiruri $(a_n)_{n\geq 0}$, $(s_n)_{n\geq 0}$, unde $s_n = a_0 + a_1 + \ldots + a_n$.**

Această serie se notează $\sum\limits_{n\geq 0} a_n$ sau $a_0 + a_1 + a_2 + \ldots$. Se defineşte, în mod similar, seria $\sum\limits_{n\geq N} a_n = a_N + a_{N+1} + a_{N+2} + \ldots$.

Exemple

1) Seria de termen general q^n, adică $\sum\limits_{n\geq 0} q^n = 1 + q + q^2 + \ldots$, se numeşte *seria geometrică* de raţie q.

2) Seria de termen general $\left(\frac{1}{n}\right)_{n\geq 1}$, adică $\sum\limits_{n\geq 1} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots$, se numeşte *seria armonică* (denumirea fiind justificată prin aceea că $a_n = \frac{1}{n}$ este media armonică a numerelor a_{n-1} şi a_{n+1}, adică $\frac{2}{a_n} = \frac{1}{a_{n-1}} + \frac{1}{a_{n+1}}$, $\forall n \geq 2$).

3) Considerăm seria $\sum\limits_{n\geq 1} \frac{1}{n^2+n}$ de termen general $a_n = \frac{1}{n^2+n}$, $n \geq 1$. Se observă că $a_n = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$ deci $s_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n = \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \ldots$
$\ldots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = 1 - \frac{1}{n+1}$, $n \geq 1$. Evident, $s_n \to 1$.

Este incorectă afirmaţia „seria este o sumă infinită", pentru că nu se pot aduna o infinitate de numere reale, de aceea este necesară noţiunea de limită. Se poate însă spune că studiul seriilor se află la confluenţa studiului sumelor finite cu cel al limitelor de şiruri.

DEFINIŢIA II. 6. **O serie $\sum\limits_{n\geq 0} a_n$ se numeşte** ***convergentă*** **dacă şirul $(s_n)_{n\geq 0}$ al sumelor ei parţiale este convergent; în acest caz, numărul $\lim\limits_{n\to\infty} s_n$ se numeşte** ***suma*** **acelei serii şi se notează cu $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$.**

Seriile care nu sînt convergente se numesc ***divergente.***

Este evident că dacă la o serie se adaugă sau se scad termeni în număr finit, atunci natura acelei serii nu este modificată. Problema principală a teoriei seriilor este studiul naturii acestora (convergenţa sau divergenţa), iar în caz de convergenţă, calculul exact sau aproximativ al sumelor.

TEOREMA II. 15. **Fie q, a $(a \neq 0)$ numere reale. Seria geometrică $\sum\limits_{n\geq 0} aq^n = a + aq + aq^2 + \ldots$ este convergentă dacă şi numai dacă $-1 < q < 1$ şi, în acest caz, suma ei este $\frac{a}{1-q}$.**

Demonstraţie. Şirul sumelor parţiale este $s_n = a + aq + \ldots + aq^n$, $n \geq 0$. Dacă $q = 1$, atunci $s_n = (n+1)a$ şi seria este evident divergentă. Dacă

$q \neq 1$, atunci $s_n = a(1 + q + ... + q^n) = a\frac{1-q^{n+1}}{1-q}$, conform (11). Aplicînd relația (9), șirul $(s_n)_{n\geqslant 0}$ este convergent dacă și numai dacă $-1 < q < 1$ și, în acest caz, $\lim\limits_{n\to\infty} q^{n+1} = 0$, deci $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = \frac{a}{1-q}$.

Exemple

1) În cazul seriei geometrice $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + ...$ rația este $q = \frac{1}{2}$ și suma seriei va fi $\frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}} = 1$.

2) Fracția zecimală periodică 2,1919... reprezintă numărul

$$2 + \frac{1}{10} + \frac{9}{100} + \frac{1}{1\,000} + \frac{9}{10\,000} + ... = 2 + \frac{\frac{1}{10}}{1-\frac{1}{100}} + \frac{\frac{9}{100}}{1-\frac{1}{100}} = 2 + \frac{19}{99}.$$

Se arată ușor că orice fracție zecimală periodică reprezintă un număr rațional (și reciproc).

4.4. Numărul e

La punctul 1.1 am indicat legea de înjumătățire a unei substanțe radioactive, în care s-a evidențiat o progresie geometrică de rație $\frac{1}{2}$. Există și alte „legi de creștere" similare. De exemplu, presupunem că populația unei colectivități este, la un moment dat, P și că în fiecare an ea crește cu $c\%$. Peste un an populația respectivă va fi $P_1 = P + P\cdot\frac{c}{100} = P\left(1 + \frac{c}{100}\right)$, peste doi ani $P_2 = P_1 + P_1\cdot\frac{c}{100} = P_1\left(1+\frac{c}{100}\right) = P\left(1+\frac{c}{100}\right)^2$, iar peste n ani, $P_n = P\cdot\left(1+\frac{c}{100}\right)^n$, așa cum se verifică prin inducție.

Notînd

$$E_c = \left(1 + \frac{c}{100}\right)^{\frac{100}{c}}, \text{ rezultă}$$

$$P_n = P\left(1+\frac{c}{100}\right)^{\frac{100}{c}\cdot\frac{cn}{100}} = P\cdot(E_c)^{\frac{cn}{100}}.$$

Dacă $c = 100$, atunci $E_c = (1+1)^1 = 2$; $c = 50$, $E_c = \left(1+\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{9}{4} = 2{,}250$; $c = 10$, $E_c \simeq 2{,}594$; $c = 2$, $E_c \simeq 2{,}692$ etc.

Vom vedea că limita $\lim\limits_{c\to 0} E_c$ există și are o valoare remarcabilă, anume numărul e. Atunci pentru c „suficient de mic" are loc formula aproximativă $E_c \simeq \mathrm{e}$ și, în consecință,

$$P_n \simeq P\cdot \mathrm{e}^{\frac{cn}{100}}$$

De exemplu, dacă $c = 2$, atunci peste 50 de ani populația va deveni $P_{50} \simeq P\cdot\mathrm{e}$. Există multe alte probleme în rezolvarea cărora se folosește numărul e.

Trecem la definiţia numărului e.

Considerăm şirul de numere raţionale

$$e_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n, \quad n \geqslant 1. \tag{12}$$

Se pot calcula diverşi termeni ai acestui şir: $e_1 = 2$, $e_2 = 2{,}250$, $e_4 \simeq 2{,}441$, $e_8 \simeq 2{,}566$, $e_{16} \simeq 2{,}638$ etc. şi aceasta sugerează că şirul $(e_n)_{n \geqslant 1}$ este crescător, cu termenii cuprinşi între 2 şi 3. Într-adevăr, are loc

TEOREMA II. 16. Şirul $(e_n)_{n\geqslant 1}$ este strict crescător şi mărginit (deci convergent).

Demonstraţie. Considerăm formula binomului lui Newton

$$(1 + x)^n = 1 + \frac{n}{1!}x + \frac{n(n-1)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{k!}x^k + \ldots$$
$$\ldots + \frac{n(n-1)\ldots 3 \cdot 2 \cdot 1}{n!}x^n, \ \forall x \in \mathbf{R}, \ n \geqslant 1.$$

Înlocuind aici $x = \frac{1}{n}$, membrul sting este egal cu e_n; observînd că

$$\frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{k!} \cdot \frac{1}{n^k} = \frac{1}{k!}\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right)\ldots\left(1 - \frac{k-1}{n}\right),$$

pentru $1 \leqslant k \leqslant n$, rezultă că

$$e_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!}\left(1 - \frac{1}{n}\right) + \ldots + \frac{1}{k!}\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right)\ldots$$
$$\ldots\left(1 - \frac{k-1}{n}\right) + \ldots + \frac{1}{n!}\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right)\ldots\left(1 - \frac{n-1}{n}\right). \tag{13}$$

Înlocuim n cu $n+1$ şi rezultă

$$e_{n+1} = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!}\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) + \ldots + \frac{1}{k!}\left(1 - \frac{1}{n+1}\right)\left(1 - \frac{2}{n+1}\right)\ldots$$
$$\ldots\left(1 - \frac{k-1}{n+1}\right) + \ldots + \frac{1}{(n+1)!}\left(1 - \frac{1}{n+1}\right)\left(1 - \frac{2}{n+1}\right)\ldots\left(1 - \frac{n}{n+1}\right);$$

observînd că $\frac{1}{k!}\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right)\ldots\left(1 - \frac{k-1}{n}\right) < \frac{1}{k!}\left(1 - \frac{1}{n+1}\right)\ldots\left(1 - \frac{k-1}{n+1}\right)$,

se obţine că $e_n < e_{n+1} \ \forall, \ n \geqslant 1$.

Din relaţia (13) rezultă direct că

$$2 \leqslant e_n \leqslant 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \ldots + \frac{1}{k!} + \ldots + \frac{1}{n!}, \quad \forall n \geqslant 1. \tag{14}$$

Ţinînd cont că, pentru orice $k \geqslant 2$ natural, avem $k! \geqslant 2^{k-1}$, deci $\frac{1}{k!} \leqslant \frac{1}{2^{k-1}}$, avem

$$1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \ldots + \frac{1}{n!} \leqslant 1 + \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{2^{n-1}}\right) < 3. \tag{15}$$

Din relațiile (14) și (15) rezultă $2 \leqslant e_n < 3$, $\forall\, n \geqslant 1$ și teorema este demonstrată.

DEFINIȚIA II. 7. Limita șirului $e_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ se notează cu e (după inițiala numelui lui L. Euler, 1707—1783).

Indicăm acum un alt șir convergent către e, anume șirul

$$E_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \ldots + \frac{1}{n!},\ n \geqslant 1.$$

Este evident că $E_n < E_{n+1}$, deoarece $E_{n+1} - E_n = \frac{1}{(n+1)!} > 0$. Apoi, aplicînd (15), avem $2 < E_n < 3$, $\forall\, n \geqslant 1$. Așadar, șirul $(E_n)_{n\geqslant 1}$ este monoton și mărginit, deci convergent. Fie $E = \lim\limits_{n\to\infty} E_n$.

Deoarece $e_n \leqslant E_n$, conform (14), rezultă $e \leqslant E$.

Pe de altă parte, pentru orice $k \geqslant 2$ fixat și pentru orice $n > k$ avem, conform (13):

$$e \geqslant e_n > 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!}\left(1 - \frac{1}{n}\right) + \ldots + \frac{1}{k!}\left(1 - \frac{1}{n}\right)\ldots\left(1 - \frac{k-1}{n}\right)$$

și în membrul drept se însumează $k + 1$ termeni. Făcînd $n \to \infty$ și observînd că parantezele $\left(1 - \frac{1}{n}\right), \ldots, \left(1 - \frac{k-1}{n}\right)$ tind către 1, rezultă că $e \geqslant E_k$, $\forall\, k \geqslant 2$ fixat, deci $e \geqslant \lim\limits_{k\to\infty} E_k = E$. În concluzie $E = e$, adică

$$e = \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \ldots + \frac{1}{n!}\right).$$

Cu alte cuvinte, am demonstrat

TEOREMA II. 17. Seria $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \ldots$ este convergentă și are suma e.

Aplicație. Calculăm e cu $\frac{1}{10^6}$ — aproximare. Deoarece $e = \lim\limits_{n\to\infty} E_n$ avem formula aproximativă $e \simeq E_n$, cu eroarea absolută: $|e - E_n| = \frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+2)!} + \frac{1}{(n+3)!} + \ldots = \frac{1}{(n+1)!}\left[1 + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{(n+2)(n+3)} + \ldots\right] \leqslant \frac{1}{(n+1)!}\left[1 + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{(n+2)^2} + \ldots\right] = \frac{1}{(n+1)!} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{n+2}} = \frac{n+2}{(n+1)!\,(n+1)} < \frac{1}{n \cdot n!}$.

Reținem astfel inegalitatea

(16) $$0 < e - E_n < \frac{1}{n \cdot n!},\ \forall\, n \geqslant 1.$$

Alegem n natural minim astfel încît $\frac{1}{n \cdot n!} > 10^{-6}$, deci $n = 9$. Atunci

$$e \simeq E_9 = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \ldots + \frac{1}{9!} = 2{,}71828.$$

EXERCIŢII (capitolul II, § 4)

1. Să se calculeze limitele următoare:

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{3^n}{4^n}$; b) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{3^n+1}{3^n+2}$; c) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{3^n+1}{4^n+1}$;

d) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{4^n+1}{4^{n-1}+2}$; e) $\lim\limits_{n\to\infty} n[2+(-1)^n]$; f) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2^n+(-2)^n}{3^n}$;

g) $\lim\limits_{n\to\infty} \sin^n \frac{\pi}{10}$; h) $\lim\limits_{n\to\infty} \cos^n \frac{\pi}{10}$; i) $\lim\limits_{n\to\infty} \operatorname{tg}^n \frac{\pi}{4}$;

j) $\lim\limits_{n\to\infty} \operatorname{tg}^n \frac{\pi}{3}$; k) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{n^2+1}$; l) $\lim\limits_{n\to\infty} (n^2-\sqrt{n})$;

m) $\lim\limits_{n\to\infty} (-n^2+n+100)$; n) $\lim\limits_{n\to\infty} (\sqrt[3]{n^6+1}-n^2)$; o) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{6n^2+5n}{3n^2+2}$;

p) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^2}{3n^2-8}$; q) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{(n+1)^4-(n-1)^4}{n^4}$;

r) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n(1+2+\ldots+n)}{1^2+2^2+\ldots+n^2}$; s) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1^2+2^2+\ldots+n^2}{n^3}$;

t) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n^2}+\frac{2}{n^2}+\ldots+\frac{n}{n^2}\right)$; u) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(10+\frac{1}{n}\right)^2$;

v) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(10+\frac{1}{n}\right)^n$; w) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n+1}{\sqrt{n^3+2}}$;

y) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a^n-1}{a^{2n}+1}$, $a \neq -1$; z) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a^{2n}-1}{a^{2n}+1}$, $a \in \mathbf{R}$ dat.

2. Să se arate că pentru orice funcţie raţională nenulă R cu coeficienţi reali, avem

$$\lim_{n\to\infty} \frac{R(n)}{R(n+1)} = 1.$$

3. Să se studieze convergenţa şirului

$$a_n = \left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\ldots\left(1-\frac{1}{n^2}\right), \ n \geqslant 2.$$

4. Să se afle $a, b, c \in \mathbf{R}$, astfel încît $\lim\limits_{n\to\infty} n\left(an-\sqrt{-2+bn+cn^2}\right)=1$.

5. Fie un şir $(x_n)_{n\geqslant 0}$, astfel încît $x_0=a$, $x_{n+1}=1+bx_n$ $(n \geqslant 0)$. Să se arate că $x_n = 1+b+\ldots+b^{n-1}+ab^n$. Pentru ce $a, b \in \mathbf{R}$ şirul $(x_n)_{n\geqslant 0}$ este convergent?

6. Să se studieze mărginirea şi monotonia şirului $(a_n)_{n\geqslant 1}$ definit prin $a_1=\sqrt{2}$, $a_{n+1}=\sqrt{2+a_n}$, $n \geqslant 1$. În caz de convergenţă, să se calculeze limita.

7. Fie a_0, a_1 date şi $a_n = \frac{1}{2}(a_{n-1}+a_{n-2})$ pentru orice $n \geqslant 2$. Să se arate că $a_n = \frac{1}{3}(2a_1+a_0)+\frac{(-1)^{n-1}}{3\cdot 2^{n-1}}(a_1-a_0)$, $\forall\, n \geqslant 0$ şi să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

8. Fie şirul $(x_n)_{n\geqslant 1}$, unde $x_1=a$ şi $x_{n+1}=x_n^2-2x_n+2$. Să se arate că dacă $a \in [1, 2]$, atunci şirul $(x_n)_{n\geqslant 1}$ este convergent şi să se calculeze limita sa.

9. Să se studieze monotonia şi convergenţa şirului $(c_n)_{n\geqslant 1}$ definit prin $c_1=10$, $c_{n+1}=$ $=\frac{2+c_n^2}{2c_n}$, $\forall n\geqslant 1$. De asemenea, studiaţi convergenţa şirului $(x_n)_{n\geqslant 0}$ definit prin $x_0=1$ şi $x_{n+1}=\frac{x_n}{\sqrt{x_n^2+1}}$, $n\geqslant 0$.

10. Să se arate că dacă $a_n>0$, $n\geqslant 0$, dacă există $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=l$ şi $l<1$, atunci $a_n\to 0$. Folosind acest fapt, să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{2^n}$, $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2^n}{n!}$, $\lim\limits_{n\to\infty} nq^n(-1<q<1$ dat).

11. Să se arate că seriile următoare sînt convergente şi să se calculeze sumele lor:

a) $\sum\limits_{n\geqslant 1}\frac{1}{4n^2-1}$; b) $\sum\limits_{n\geqslant 2}\frac{1}{n^2+n}$; c) $\sum\limits_{n\geqslant 1}\left(-\frac{1}{2}\right)^n$;

d) $\sum\limits_{n\geqslant 1}\left(\frac{2}{3}\right)^n$; e) $\sum\limits_{n\geqslant 0}\frac{2}{7^{n+2}}$; f) $\sum\limits_{n\geqslant 1}\frac{2n+1}{n!}$.

12. Să se arate că seria $\sum\limits_{n\geqslant 1}\left(\frac{1}{\sqrt[3]{n}}-\frac{1}{\sqrt[3]{n+1}}\right)$ este convergentă, iar seria $\sum\limits_{n\geqslant 1}(\sqrt[3]{n+1}-\sqrt[3]{n})$ este divergentă.

§ 5. Operaţii cu limite de funcţii

Rezultatele anterioare conduc la rezultate similare pentru limite de funcţii.

TEOREMA II. 18. Fie $f: D\to \mathbf{R}$, $g: D\to\mathbf{R}$ $(D\subset\mathbf{R})$ două funcţii şi $\alpha\in\overline{\mathbf{R}}$ un punct de acumulare pentru D. Presupunem că f şi g au limită finită în punctul α şi fie $l_1=\lim\limits_{x\to\alpha} f(x)$, $l_2=\lim\limits_{x\to\alpha} g(x)$. Atunci funcţiile $f+g$, $\lambda f(\lambda\in\mathbf{R})$ şi fg au limită finită în punctul α şi

(17) $\lim\limits_{x\to\alpha}[(f+g)(x)]=l_1+l_2$, $\lim\limits_{x\to\alpha}(\lambda f)(x)=\lambda l_1$, $\lim\limits_{x\to\alpha}(fg)(x)=l_1l_2$

(pe scurt, limita sumei este suma limitelor, limita produsului este produsul limitelor).

Dacă, în plus, $l_2 \neq 0$, atunci există o vecinătate U a lui α astfel încît funcția g să fie nenulă în $U \setminus \{\alpha\}$ și, în plus, $\lim\limits_{x \to \alpha} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{l_1}{l_2}$.

Demonstrație. Fie $x_n \to \alpha$ un șir oarecare de puncte din $D \setminus \{\alpha\}$. Atunci $f(x_n) \to l_1$, $g(x_n) \to l_2$ și aplicînd relațiile (5), (6), rezultă că $(f+g)(x_n) = f(x_n) + g(x_n) \to l_1 + l_2$, $(\lambda f)(x_n) = \lambda \cdot f(x_n) \to \lambda l_1$ și $(fg)(x_n) = f(x_n)g(x_n) \to l_1 \cdot l_2$ și se deduc relațiile (17).

Presupunem acum $l_2 \neq 0$, de exemplu $l_2 > 0$. Luînd o vecinătate $V = (l_2 - \varepsilon, l_2 + \varepsilon)$ a lui l_2, care nu conține originea, există o vecinătate U a lui α astfel încît din faptul că $x \in U$, $x \neq \alpha$ să rezulte $g(x) \in V$, adică $g(x) > 0$. Fie apoi un șir oarecare $x_n \to \alpha$, $x_n \neq \alpha$. Atunci $f(x_n) \to l_1$, $g(x_n) \to l_2$ și aplicînd corolarul teoremei II.10, rezultă $\frac{f(x_n)}{g(x_n)} \to \frac{l_1}{l_2}$, adică $\lim\limits_{x \to \alpha} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{l_1}{l_2}$.

Exemple

1) Deoarece $\lim\limits_{x \to 1} x^2 = 1$, $\lim\limits_{x \to 1} (2x + 7) = 9$, rezultă $\lim\limits_{x \to 1} (x^2 + 2x + 7) = \lim\limits_{x \to 1} x^2 + \lim\limits_{x \to 1} (2x + 7) = 1 + 9 = 10$.

2) Teorema II. 18 nu se poate aplica direct pentru a calcula limita $l = \lim\limits_{x \to 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1}$, deoarece numitorul are limita nulă în punctul $x = 1$. Totuși, pentru orice $x \neq 1$, avem $\frac{x^2 - 1}{x - 1} = x + 1$ și, ca atare, $l = \lim\limits_{x \to 1} (x + 1) = 2$.

3) Teorema II. 18 se extinde direct la cazul cînd $l_1, l_2 \in \overline{\mathbf{R}}$, cu condiția evitării cazurilor exceptate, care trebuie analizate separat. De exemplu, $\lim\limits_{x \to \infty} (x^2 + 2x) = \infty$. [Într-adevăr, fie $D = (0, \infty)$ și funcția $f : D \to \mathbf{R}$, definită prin $f(x) = x^2 + 2x$; pentru orice șir $x_n \to \infty$, avem $f(x_n) = x_n^2 + 2x_n \to \infty$].

4) Dacă o funcție $f : D \to \mathbf{R}$ are limita $+\infty$ sau $-\infty$ într-un punct $x = \alpha$ de acumulare pentru D, atunci $\lim\limits_{x \to \alpha} \frac{1}{f(x)} = 0$; într-adevăr, pentru orice șir $x_n \to \alpha$, $x_n \neq \alpha$ avem $f(x_n) \to +\infty$ (sau $-\infty$) și $\frac{1}{f(x_n)} \to 0$, conform teoremei II.10,2°.

În mod similar, dacă limita $\lim\limits_{x \to \alpha} f(x)$ există și este egală cu zero și dacă $f > 0$ (respectiv $f < 0$) într-o vecinătate a punctului α, din care excludem α, atunci $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{1}{f(x)} = \infty$ (respectiv $-\infty$); într-adevăr, pentru orice șir $x_n \to \alpha$, $x_n \neq \alpha$, avem $f(x_n) \to 0$ și aplicăm teorema II.10,3°.

TEOREMA II. 19. Fie $f, g : D \to \mathbf{R}$ $(D \subset \mathbf{R})$ două funcții și $\alpha \in \overline{\mathbf{R}}$ un punct de acumulare pentru D. Dacă există o vecinătate U a lui α astfel încît $f \leqslant g$ în $U \setminus \{\alpha\}$ și dacă funcțiile f, g au limită în punctul α, atunci

$$\lim_{x \to \alpha} f(x) \leqslant \lim_{x \to \alpha} g(x). \tag{18}$$

Demonstrație. Considerăm un șir oarecare $x_n \to \alpha$ din $D \setminus \{\alpha\}$. Avem $x_n \in U \setminus \{\alpha\}$ și $f(x_n) \leqslant g(x_n)$, începînd de la un anumit rang N și cum șirurile $(f(x_n))_{n \geqslant N}$, $(g(x_n))_{n \geqslant N}$ au limită, atunci $\lim\limits_{n \to \infty} f(x_n) \leqslant \lim\limits_{n \to \infty} g(x_n)$ conform teoremei II.11. Așadar, relația (18) este probată.

Teorema cleştelui se formulează şi pentru limite de funcţii: *dacă $f, g, h : D \to \mathbf{R}$ sînt funcţii reale astfel încît $f \leqslant g \leqslant h$ într-o vecinătate a lui α (excluzînd eventual α) şi dacă f, h au aceeaşi limită l în punctul α, atunci g are, de asemenea, limita l în punctul α.* Remarcăm, de asemenea, faptul că teorema II.4 se formulează şi pentru limite de funcţii: dacă funcţiile f, $g : D \to \mathbf{R}$ ($D \subset \mathbf{R}$), satisfac condiţia $|f(x) - l| \leqslant g(x)$, $\forall\, x \in D \setminus \{\alpha\}$, unde $l \in \mathbf{R}$ şi dacă $\lim\limits_{x\to\alpha} g(x) = 0$, atunci există $\lim\limits_{x\to\alpha} f(x) = l$. Apoi dacă $f(x) \geqslant g(x)$, $\forall\, x \in D \setminus \{\alpha\}$ şi $\lim\limits_{x\to\alpha} g(x) = \infty$, atunci $\lim\limits_{x\to\alpha} f(x) = \infty$, iar dacă $\lim\limits_{x\to\alpha} f(x) = -\infty$, atunci $\lim\limits_{x\to\alpha} g(x) = -\infty$.

EXERCIŢII (capitolul II, § 5)

1. Să se calculeze limitele laterale ale funcţiilor de mai jos în punctele indicate:

a) $f : \mathbf{R} \setminus \{-5\} \to \mathbf{R}$, $f(x) = \dfrac{4}{x+5}$, $\alpha = -5$;

b) $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{1 + 2^{\frac{1}{x-3}}}, & \text{dacă } x \neq 3 \\ 2, & \text{dacă } x = 3 \end{cases}$, $\alpha = 3$;

c) $f : \mathbf{R} \setminus \{0\} \to \mathbf{R}$, $f(x) = \dfrac{x+1}{x^2}$, $\alpha = 0$;

d) $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 3x}{(x+1)^2}, & \text{dacă } x \neq -1 \\ 7, & \text{dacă } x = -1 \end{cases}$, $\alpha = -1$.

2. Să se calculeze (în $\overline{\mathbf{R}}$) următoarele limite de funcţii:

a) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2x^2+3}{x}$;

b) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2x^2+3}{x^2}$;

c) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x}{2x^2+3}$;

d) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x}{2x^2+3}$;

e) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x^3}{2x^2+3}$;

f) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{(x+1)^3 - x}{x^2}$;

g) $\lim\limits_{x\to1} \dfrac{x^2}{|x-1|}$;

h) $\lim\limits_{x\to1} \dfrac{x^2-2}{(x-1)^2}$;

i) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{1}{2^{|x-1|} - 1}$;

j) $\lim\limits_{x\to1} \left(\dfrac{x^4-1}{x-1} + \dfrac{x^8-1}{x^2-1} \right)$.

3. Fie $f : D \to \mathbf{R}$ o funcţie definită pe complementara D a unui interval mărginit. Să se arate că dacă una din limitele $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x\to\infty} f(-x)$ există, atunci există şi cealaltă şi sînt egale. Ca aplicaţie să se calculeze:

a) $\lim\limits_{x\to-\infty} (x^2 - x)$;

b) $\lim\limits_{x\to-\infty} (x + \sqrt{x^2+1})$;

c) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{4x^2+1}{7x^2+3}$;

d) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$.

§ 6. Asimptotele funcțiilor reale

Vom da acum o primă aplicație geometrică semnificativă legată de limitele de funcții.

În limba greacă „asumptôtos" înseamnă „care nu coincid". Problema asimptotelor, adică a dreptelor care „se apropie oricît de mult" de graficele unor funcții, are sens pentru funcții avînd ramuri spre infinit (adică funcții al căror grafic nu este conținut într-un dreptunghi).

Fixăm un sistem ortogonal de axe xOy relativ la care raportăm graficele funcțiilor considerate, ca și sensul adjectivelor „orizontal", „oblic", „vertical".

6.1. Asimptote orizontale, asimptote oblice

Considerăm o funcție $f: D \to \mathbf{R}$ unde D este un interval de forma (a, ∞), $a \in \mathbf{R}$. Graficul lui f are ecuația $y = f(x)$ și evident are ramuri spre infinit. Fie $l \in \mathbf{R}$ fixat și considerăm dreapta $y = l$ (paralelă cu Ox); pentru orice $x \in D$, notăm cu M (respectiv cu N) punctul de abscisă x situat pe dreaptă (respectiv pe graficul funcției f).

Se spune că dreapta $y = l$ este *asimptota orizontală spre* $+\infty$ a lui f dacă limita lungimii segmentului MN cînd x tinde către ∞ există și este egală cu zero, adică

(19) $$\lim_{x \to \infty} |f(x) - l| = 0 \text{ (figura II.17).}$$

Aceasta este echivalentă cu faptul că limita $\lim_{x \to \infty} f(x)$ există și este egală cu l.

O discuție similară are loc pentru $-\infty$ (fig. II.18).

Considerăm acum o dreaptă de ecuație $y = mx + n$, $m \neq 0$ și fie M (respectiv N) punctul de abscisă $x \in D$ situat pe dreaptă (respectiv pe graficul funcției f), ca în figura II.19. Se spune că dreapta $y = mx + n$ este *asimptota oblică spre* $+\infty$ a lui f dacă limita lungimii segmentului MN există și este egală cu zero pentru $x \to \infty$, adică

(20) $$\lim_{x \to \infty} |f(x) - mx - n| = 0$$

Aceasta revine la $\lim_{x \to \infty} (f(x) - mx - n) = 0$, adică

$\lim_{x \to \infty} x \left(\frac{f(x)}{x} - m - \frac{n}{x}\right) = 0$ și în mod necesar, $\lim_{x \to \infty} \left(\frac{f(x)}{x} - m - \frac{n}{x}\right) = 0.$

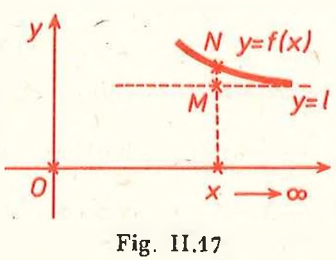


Fig. II.17

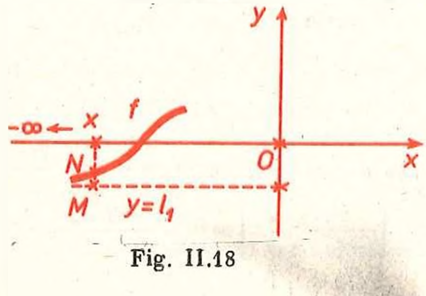


Fig. II.18

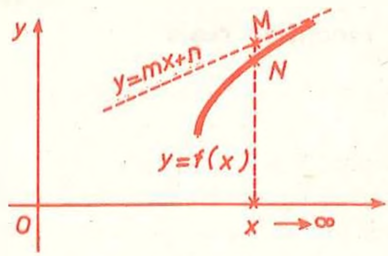


Fig. II.19

Atunci raportul $\frac{f(x)}{x} = \left(\frac{f(x)}{x} - m - \frac{n}{x}\right) + \left(m + \frac{n}{x}\right)$ va avea, conform teoremei II.18, limita egală cu $0 + m = m$ în punctul ∞. Din faptul că $\lim\limits_{x\to\infty} (f(x) - mx - n) = 0$, rezultă direct că limita $\lim\limits_{x\to\infty} (f(x) - mx)$ există şi este egală cu n.

Rezumăm discuţia anterioară în următoarea

TEOREMA II. 20. a) **Dacă limita $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$ există şi este finită, cu valoarea l, atunci dreapta $y = l$ este asimptota orizontală spre $+\infty$ a funcţiei f (şi reciproc).**

b) **Dacă există şi sînt finite limitele**

(21) $$m = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x},\quad n = \lim_{x\to\infty} (f(x) - mx),\ \text{iar } m \neq 0,$$

atunci dreapta

(22) $$y = mx + n$$

este asimptota oblică spre $+\infty$ a funcţiei f (şi reciproc).

O funcţie f nu poate admite atît asimptotă orizontală cît şi asimptotă oblică spre $+\infty$ (în caz contrar ar exista constante reale m, n, l cu $m \neq 0$ astfel încît $\lim\limits_{x\to\infty} (mx + n - l) = 0$, ceea ce este absurd).

Se tratează în mod similar cazul asimptotelor oblice spre $-\infty$. Remarcăm că pentru o funcţie fixată pot avea loc diverse situaţii: să existe asimptote orizontale atît spre $-\infty$ cît şi spre $+\infty$ (distincte sau nu), să existe asimptotă orizontală spre $+\infty$ şi oblică spre $-\infty$ etc. Asimptotele unei funcţii sînt numite uneori asimptote la graficul funcţiei.

Exemple

1) Funcţia $f : R\setminus\{0\} \to \mathbf{R}$, $f(x) = \frac{1}{x}$ are asimptotă orizontală spre $+\infty$ şi spre $-\infty$, anume dreapta $y = 0$ (axa Ox) (fig. II.20).

2) Funcţia $f : (0, \infty) \to \mathbf{R}$, $f(x) = \frac{x^2}{x+3}$ are asimptotă oblică spre $+\infty$, anume dreapta $y = mx + n$, unde $m = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{x^2}{x^2 + 3x} = 1$ şi $n = \lim\limits_{x\to\infty} [f(x) - mx] = \lim\limits_{x\to\infty} \left[\frac{x^2}{x+3} - x\right] = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{-3x}{x+3} = -3$; aşadar, $y = x - 3$ este asimptota oblică a

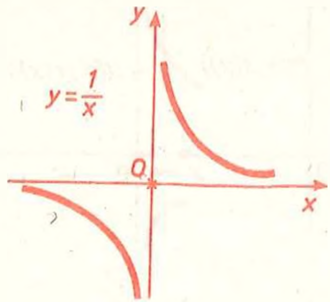


Fig. II.20

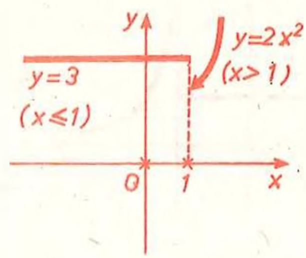


Fig. II.21

lui f spre $+\infty$. Se mai putea scrie $f(x) = x - 3 + \frac{9}{x+3}$, deci $\lim\limits_{x\to\infty}[f(x) - (x-3)] = 0$ şi conform (20) şi (22) rezultă direct $y = x - 3$ etc.

3) Funcţia $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = \begin{cases} 3, & \text{dacă } x \leqslant 1 \\ 2x^2, & \text{dacă } x > 1 \end{cases}$ (fig. II.21), are asimptotă orizontală $y = 3$ spre $-\infty$ dar nu are asimptotă orizontală spre $+\infty$.

4) Funcţia $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = 2x^2$ nu are asimptote orizontale sau oblice.

5) Considerăm funcţia $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{x+1}, & \text{dacă } x < -1 \\ 2, & \text{dacă } x \geqslant -1 \end{cases}$. Ea are asimptotă orizontală spre $+\infty$, anume $y = 2$, iar spre $-\infty$ are asimptota oblică $y = x - 1$.

6.2. Asimptote verticale

Dacă $f: D \to \mathbf{R}$ ($D \subset \mathbf{R}$) este o funcţie reală, $\alpha \in \mathbf{R}$ este un punct de acumulare pentru D şi dacă limita la stînga

(23) $\lim\limits_{\substack{x\to\alpha \\ x<\alpha}} f(x)$ există şi este egală cu $+\infty$ sau $-\infty$,

atunci se spune că dreapta $x = \alpha$ este *asimptotă verticală la stînga* a lui f. Similar, dacă limita la dreapta

(23′) $\lim\limits_{\substack{x\to\alpha \\ x>\alpha}} f(x)$ există şi este egală cu $+\infty$ sau $-\infty$,

se spune atunci că $x = \alpha$ este *asimptotă verticală la dreapta* a lui f.

Dreapta $x = \alpha$ se numeşte *asimptotă verticală* a lui f dacă ea este asimptotă verticală la stînga sau la dreapta a lui f sau de ambele părţi.

Exemple

1) Pentru funcţiile f, $g: \mathbf{R}\setminus\{1\} \to \mathbf{R}$, $f(x) = \frac{1}{x-1}$, $g(x) = \frac{1}{(x-1)^2}$, dreapta $x = 1$ este asimptotă verticală.

2) Funcţia $f: \mathbf{R}\setminus\{2\} \to \mathbf{R}$, $f(x) = \begin{cases} 1, & \text{dacă } x < 2 \\ \frac{1}{x-2}, & \text{dacă } x > 2 \end{cases}$ (fig. II.22), are $x = 2$ asimptotă verticală la dreapta, dar nu are nici o asimptotă verticală la stînga.

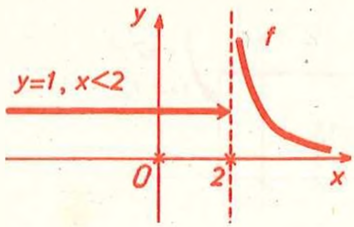


Fig. II.22

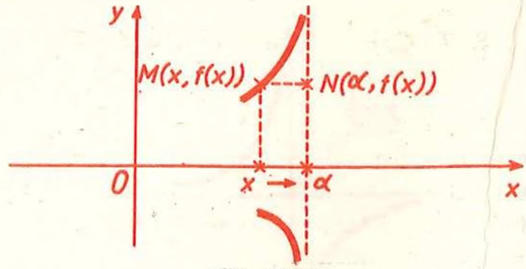


Fig. II.23

3) Fie funcţia $f : \mathbf{R}\setminus\{-1, 1\} \to \mathbf{R}$, $f(x) = \dfrac{x^2}{x^2 - 1}$. În acest caz, dreptele $x = -1$, $x = 1$ sînt asimptote verticale, iar dreapta $y = 1$ este asimptotă orizontală (spre $\pm\infty$).

4) Funcţia $f : \mathbf{R}\setminus\{0\} \to \mathbf{R}$, $f(x) = \dfrac{x^5 + 2}{x^3 + x}$ are o unică asimptotă verticală, $x = 0$.

5) Pentru orice $a \in \mathbf{R}$ funcţia $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x}, & \text{dacă } x \neq 0 \\ a, & \text{dacă } x = 0 \end{cases}$

are asimptotă verticală $x = 0$.

Adjectivul „verticală" provine de la faptul că orice dreaptă $x = \alpha$ ($\alpha \in \mathbf{R}$ fixat) este paralelă cu axa Oy. Dacă $x = \alpha$ este asimptotă verticală la stînga pentru o funcţie f, atunci lungimea segmentului MN tinde către zero cînd $x \to \alpha$, $x < \alpha$, iar ordonata lui M tinde către ∞ sau $-\infty$ (figura II.23) etc.

EXERCIŢII (capitolul II, § 6)

1. Să se determine asimptotele (orizontale, oblice şi verticale) pentru următoarele funcţii $f : D \to \mathbf{R}$ (D fiind domeniul maxim de definiţie).

a) $f(x) = \dfrac{2x^2}{x^2 + 1}$;

b) $f(x) = \dfrac{x}{x^2 - 1}$;

c) $f(x) = \dfrac{x + 1}{(x^2 + 2x)(x^2 + 9)}$;

d) $f(x) = \sqrt{\dfrac{1}{x}}$;

e) $f(x) = \dfrac{x}{|x + 1|}$;

f) $f(x) = \dfrac{|x|}{x + 2}$;

g) $f(x) = \dfrac{x}{(x - 1)(x - 5)}$;

h) $f(x) = \dfrac{x^2 + x + 1}{x}$;

i) $f(x) = \dfrac{x + |x|}{x - |x|}$;

j) $f(x) = \dfrac{(x + 1)^2}{x^2}$;

k) $f(x) = \dfrac{x^2}{|x - 1|}$;

l) $f(x) = \dfrac{(x^2 - 1)^2}{(x - 1)^2}$, $x \neq 1$; $f(1) = 5$.

2. Să se afle numerele reale a, b dacă dreapta $y = 2x + 3$ este asimptotă spre $+\infty$ pentru funcţiile $f : D \to \mathbf{R}$ (D — domeniul maxim de definiţie) următoare:

a) $f(x) = \dfrac{2x^2 + ax + b}{x + 1}$; b) $f(x) = \dfrac{x + |x^2 - 1|}{ax + b}$; c) $f(x) = \dfrac{4x^2 + ax^2 + 1}{bx + 1}$.

3. Să se indice o funcţie reală avînd ca asimptote toate dreptele $x = k$, $k \in \mathbf{Z}$.

4. Să se afle a, b, $c \in \mathbf{R}$ astfel încît $f(x) = \dfrac{ax^2 + bx + 2}{x^2 + 2x + c}$ să aibă o unică asimptotă verticală, iar graficul lui f să nu intersecteze asimptota orizontală.

§ 7. Calculul limitelor de funcţii

Acest paragraf este foarte important. În cea mai mare parte, ne vom ocupa de studiul unor funcţii importante, care apar în descrierea matematică a multor procese din natură. În capitolul I, 5.5 am dat o sinteză a acestor funcţii studiate în clasele anterioare şi acum ne ocupăm de proprietăţile acestora în legătură cu noţiunea de limită.

7.1. Limitele unor funcţii uzuale

a) *Funcţii polinomiale.* Este evident că $\forall \alpha \in \mathbf{R}$, $\lim\limits_{x\to\alpha} x = \alpha$ şi $\lim\limits_{x\to\alpha} cx^k = c\alpha^k$, $c \in \mathbf{R}$, $k \geqslant 1$ întreg (limita unui produs finit fiind produsul limitelor). Rezultă atunci că pentru orice funcţie polinomială reală P şi pentru orice $\alpha \in \mathbf{R}$ avem

$$\boxed{\lim_{x\to\alpha} P(x) = P(\alpha)}, \tag{24}$$

deoarece P este suma finită a unor funcţii monom de tipul $x \mapsto cx^k$.

Dacă $P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n$, $a_0 \neq 0$, atunci $\lim\limits_{x\to\infty} P(x) = \lim\limits_{x\to\infty} a_0x^n$ şi $\lim\limits_{x\to-\infty} P(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} a_0x^n$, aplicînd un raţionament făcut la punctul 4.1.b.

Exemple

1) $\lim\limits_{x\to2} (x^2 + 5x) = 2^2 + 5 \cdot 2 = 14$; $\lim\limits_{x\to4} (-x^3 + 5x) = -4^3 + 5 \cdot 4 = -44$.

2) $\lim\limits_{x\to\infty} (x^2 + 5x) = \lim\limits_{x\to\infty} x^2 = \infty$;

$\lim\limits_{x\to\infty} (-x^3 + 2x) = \lim\limits_{x\to-\infty} (-x^3) = -\infty$;

3) $\lim\limits_{x\to\infty} (x^2 + 5x) = \infty$; $\lim\limits_{x\to-\infty} (-x^3 + 2x) = \infty$.

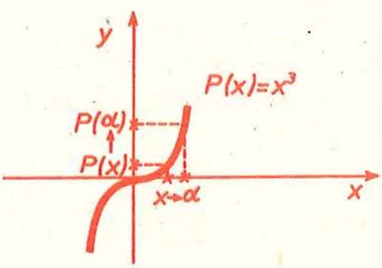


Fig. II.24

Graficele funcţiilor polinomiale de grad $n \geqslant 2$ nu au asimptote (orizontale, oblice sau verticale).

b) *Funcţii raţionale.* Dacă P şi Q sînt funcţii reale polinomiale şi $\alpha \in \mathbf{R}$ un punct astfel încît $Q(\alpha) \neq 0$, atunci

$$\boxed{\lim_{x\to\alpha} \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(\alpha)}{Q(\alpha)}}, \tag{25}$$

deoarece pentru orice şir $x_n \to \alpha$, $x_n \neq \alpha$, avem $\dfrac{P(x_n)}{Q(x_n)} \to \dfrac{P(\alpha)}{Q(\alpha)}$.

În cazul cînd $Q(\alpha) = 0$, discuția este ceva mai dificilă: dacă $P(\alpha) \neq 0$, atunci limita $\lim\limits_{\substack{x\to\alpha\\ x<\alpha}} \frac{P(x)}{Q(x)}$ este ∞ sau $-\infty$ $\left(\text{la fel } \lim\limits_{\substack{x\to\alpha\\ x>\alpha}} \frac{P(x)}{Q(x)}\right)$; dacă $P(\alpha) = 0$, atunci funcția rațională $\frac{P(x)}{Q(x)}$ poate fi simplificată cu $x - \alpha$ etc.

Exemple

1) $\lim\limits_{x\to 3} \frac{x^2+1}{x^3+1} = \frac{3^2+1}{3^3+1} = \frac{5}{14}$;

2) $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x^2-1}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1}(x+1) = 2$ și $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x^2-1}{(x-1)^3} = \lim\limits_{x\to 1} \frac{x+1}{(x-1)^2} = \infty$;

3) $\lim\limits_{x\to -3} \frac{1}{x+3}$ nu există;

4) $\lim\limits_{x\to -3} \frac{x}{(x+3)^2} = -\infty$, iar $\lim\limits_{x\to -3} \frac{x^2-9}{(x+3)^2}$ nu există.

Raționînd ca în teorema II.14, *limita* $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{P(x)}{Q(x)}$ $\left(\textit{ca și } \lim\limits_{x\to -\infty} \frac{P(x)}{Q(x)}\right)$ *este egală cu limita raportului termenilor de grad maxim ai polinoamelor* P *și* Q.

Exemple

1) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{8x^2+x+2}{7x^2-2x} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{x^2\left(8+\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}\right)}{x^2\left(7-\frac{2}{x}\right)} = \frac{\lim\limits_{x\to\infty}\left(8+\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}\right)}{\lim\limits_{x\to\infty}\left(7-\frac{2}{x}\right)} = \frac{8}{7}$; similar $\lim\limits_{x\to -\infty} \frac{8x^2+x+2}{7x^2-2x} = \frac{8}{7}$.

2) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{(x+1)^3-x^3}{2x^2+5x} = \frac{3}{2}$; $\lim\limits_{x\to -\infty} \frac{3x+8}{2x^2+5x} = \lim\limits_{x\to -\infty} \frac{3x}{2x^2} = 0$.

3) Pentru orice n natural, avem

$$\lim_{x\to\infty} \frac{3x^n+1\,987}{8x^3+211} = \lim_{x\to\infty} \frac{3x^n}{8x^3} = \begin{cases} 0, & \text{dacă } n < 3 \\ \infty, & \text{dacă } n > 3 \\ \frac{3}{8}, & \text{dacă } n = 3 \end{cases}$$

$$\text{și } \lim_{x\to -\infty} \frac{3x^n+1\,987}{8x^3+211} = \lim_{x\to -\infty} \frac{3x^n}{8x^3} = \begin{cases} 0, & \text{dacă } n < 3 \\ -\infty, & \text{dacă } n > 3 \text{ este par} \\ \infty, & \text{dacă } n > 3 \text{ este impar}. \\ \frac{3}{8}, & \text{dacă } n = 3 \end{cases}$$

Dacă polinomul Q are ca rădăcini reale $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ și $P(\alpha_i) \neq 0, 1 \leqslant i \leqslant k$, atunci graficul funcției raționale $\frac{P}{Q}$ admite asimptotele verticale $x = \alpha_i$, $1 \leqslant i \leqslant k$. Dacă polinomul Q nu are rădăcini reale, atunci graficul lui $\frac{P}{Q}$ nu are asimptote verticale $\left(\text{în acest caz, pentru orice } \alpha \in \mathbf{R}, \text{ limita } \lim\limits_{x \to \alpha} \frac{P}{Q} \text{ este}\right.$ finită, egală cu $\left.\frac{P(\alpha)}{Q(\alpha)}\right)$.

O fracție rațională $\frac{P}{Q}$ admite asimptote orizontale dacă și numai dacă gr $P \leqslant$ gr Q și admite asimptotă oblică (aceeași spre $+\infty$ și spre $-\infty$) dacă și numai dacă gr $P = 1 +$ gr Q. Demonstrațiile sînt imediate.

Exemple

1) Funcția $f : \mathbf{R} \setminus \{0, 1, -1\} \to \mathbf{R}$, $f(x) = \frac{x+4}{x^3 - x}$ are dreptele $x = 0$, $x = 1$, $x = -1$, asimptote verticale și $y = 0$ asimptotă orizontală.

2) Funcția $f : \mathbf{R} \setminus \{2\} \to \mathbf{R}$, $f(x) = \frac{x^3 - 8}{x - 2}$ nu are asimptote verticale sau orizontale, iar funcția $g : \mathbf{R} \setminus \{2\} \to \mathbf{R}$, $g(x) = \frac{x^3}{x-2}$ are dreapta $x = 2$ asimptotă verticală.

c) *Funcția radical.* Dacă $\alpha > 0$, atunci $\lim\limits_{x \to \alpha} \sqrt{x} = \sqrt{\alpha}$; într-adevăr, pentru orice șir $x_n \to \alpha$ avem $x_n > 0$ de la un rang încolo și $|\sqrt{x_n} - \sqrt{\alpha}| = \frac{|x_n - \alpha|}{\sqrt{x_n} + \sqrt{\alpha}} < \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \cdot |x_n - \alpha|$, deci $\sqrt{x_n} \to \sqrt{\alpha}$. De asemenea, $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \sqrt{x} = 0$. În mod analog, pentru orice α real avem $\lim\limits_{x \to \alpha} \sqrt[3]{x} = \sqrt[3]{\alpha}$.

În general, dacă $n \in \mathbf{N}$ este impar, atunci

(26) $$\boxed{\lim_{x \to \alpha} \sqrt[n]{x} = \sqrt[n]{\alpha}}, \text{ pentru orice } \alpha \text{ real.}$$

De asemenea, în acest caz avem

(27) $$\boxed{\lim_{x \to -\infty} \sqrt[n]{x} = -\infty; \ \lim_{x \to \infty} \sqrt[n]{x} = \infty}.$$

Dacă $n \in \mathbf{N}$ este par, atunci relația (26) are loc pentru $\alpha > 0$; de asemenea,

(28) $$\boxed{\lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \sqrt[n]{x} = 0 \text{ și } \lim_{x \to \infty} \sqrt[n]{x} = \infty}.$$

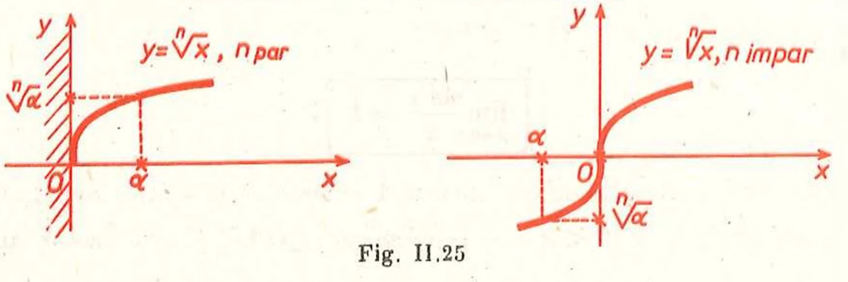


Fig. II.25

Relațiile (27), (28) se mai scriu simbolic $\sqrt[n]{\infty} = \infty$ pentru orice n natural și $\sqrt[n]{-\infty} = -\infty$ dacă n este impar.

d) *Funcții trigonometrice.* În clasele anterioare au fost definite funcțiile sin, cos, tg, arcsin etc. prin considerente geometrice, care foloseau în mod tacit proprietăți adînci ale numerelor reale. Adoptăm aceste definiții dar menționăm că o prezentare riguroasă a funcțiilor trigonometrice ca funcții reale poate fi dată prin utilizarea dezvoltărilor în serie.

Pentru orice α real avem

$$\boxed{\lim_{x\to\alpha} \sin x = \sin \alpha}. \tag{29}$$

Într-adevăr, pentru orice șir $x_n \to \alpha$ avem $|\sin x_n - \sin \alpha| = \left|2 \sin \frac{x_n - \alpha}{2} \cos \frac{x_n + \alpha}{2}\right| \leqslant 2 \left|\sin \frac{x_n - \alpha}{2}\right| \leqslant |x_n - \alpha|$, deoarece $|\sin x| \leqslant |x|$, $\forall x \in \mathbf{R}$.

În mod similar, se arată că

$$\boxed{\lim_{x\to\alpha} \cos x = \cos \alpha, \ \forall \alpha \in \mathbf{R}} \tag{30}$$

și, folosind limita unui cît, rezultă că

$$\boxed{\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to\alpha} \operatorname{tg} x = \operatorname{tg} \alpha \ \left(\alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbf{Z}\right) \text{ și} \\ \lim\limits_{x\to\alpha} \operatorname{ctg} x = \operatorname{ctg} \alpha \ \ (\alpha \neq k\pi,\ k \in \mathbf{Z}). \end{array}} \tag{31}$$

De asemenea,

$$\boxed{\lim_{\substack{x\to\frac{\pi}{2} \\ x<\frac{\pi}{2}}} \operatorname{tg} x = \infty, \ \lim_{\substack{x\to\frac{\pi}{2} \\ x>\frac{\pi}{2}}} \operatorname{tg} x = -\infty} \tag{32}$$

și, ca atare, dreapta $x = \frac{\pi}{2}$ este asimptotă verticală pentru funcția tangentă.

Indicăm acum o limită cu totul remarcabilă.

TEOREMA II. 21. Avem

$$\boxed{\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1}. \tag{33}$$

Demonstrație. Alegem un cerc de rază 1 și unghiul la centru avînd măsura în radiani egală cu x $\left(0 < x < \frac{\pi}{2}\right)$. Avem aria $\triangle OAM <$ aria sector $AOM <$

$<$ aria $\triangle OAT$. Dar aria $\triangle OAM = \frac{1}{2}\sin x$, aria sector $AOM = \frac{1}{2}x$ şi aria $\triangle OAT = \frac{1}{2}\operatorname{tg} x$, deci $\frac{1}{2}\sin x < \frac{1}{2}x < \frac{1}{2}\operatorname{tg} x$ pentru $0 < x < \frac{\pi}{2}$ şi înmulţind cu $\frac{2}{\sin x}$, rezultă $1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x}$, adică

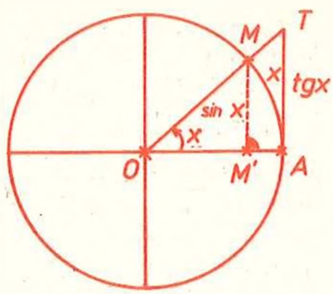


Fig. II.26

$$\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1.$$

Aceste inegalităţi au loc şi pentru $-\frac{\pi}{2} < x < 0$, deoarece funcţiile $x \longmapsto \cos x$, $x \longmapsto \frac{\sin x}{x}$ sînt pare.

Pentru orice $x_n \to 0$, $x_n \neq 0$ avem de la un rang încolo $-\frac{\pi}{2} < x_n < \frac{\pi}{2}$ şi deci

$$\cos x_n < \frac{\sin x_n}{x_n} < 1$$

şi deoarece $\cos x_n \to \cos 0 = 1$, se obţine $\frac{\sin x_n}{x_n} \to 1$ (teorema II.12).

Exemple

1) Funcţia sa: $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$ definită prin

$$\operatorname{sa}(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin x}{x}, & \text{dacă } x \neq 0 \\ 1, & \text{dacă } x = 0 \end{cases}$$

se numeşte „sinus atenuat" şi graficul ei este schiţat în figura II.27. Aşadar, $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} \operatorname{sa}(x) = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \operatorname{sa}(x) = \operatorname{sa}(0) = 1$.

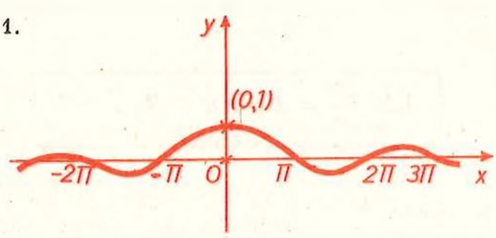


Fig. II.27

2) Avem $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin px}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin px}{px} \cdot p = p \lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin px}{px} = p$, deoarece $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin px}{px} = \lim\limits_{y\to 0} \frac{\sin y}{y} = 1$, punînd $y = px$ ($p \neq 0$ constant).

Aici este ilustrat un procedeu mai general numit „schimbare de variabilă". Anume, fie o funcţie $f: D_1 \to \mathbf{R}$, $D_1 \subset \mathbf{R}$, l un punct de acumulare pentru D_1 astfel încît să existe $\lambda = \lim\limits_{y \to l} f(y)$. Dacă $u: D \to D_1$ este o funcţie, α un punct de acumulare pentru D şi $\lim\limits_{x \to \alpha} u(x) = l$ şi, în plus, $\{x \neq \alpha$ în $D \Rightarrow u(x) \neq l\}$, atunci $\lim\limits_{x \to \alpha} f(u(x)) = \lambda$. Într-adevăr, pentru orice şir $x_n \to \alpha$, $x_n \neq \alpha$, avem $u(x_n) \to l$, $u(x_n) \neq l$, deci $f(u(x_n)) \to \lambda$. Se mai spune, pe scurt, că punînd $y = u(x)$ avem $\lim\limits_{x \to \alpha} f(u(x)) = \lim\limits_{y \to l} f(y)$.

e) *Funcţia exponenţială*. Fixăm $a > 0$, $a \neq 1$. Se cunoaşte definiţia lui a^x pentru $x \in \mathbf{Q}$; anume, dacă $x = \frac{p}{q}$ (p, q întregi, $q \geqslant 1$), atunci $a^x = \sqrt[q]{a^p}$. Dacă x este iraţional şi se alege un şir de numere raţionale $r_n \to x$, atunci se poate arăta că şirul $(a^{r_n})_{n \geqslant 1}$ este convergent şi limita lui se notează a^x [număr real independent de alegerea şirului r_n convergent către x, în sensul că dacă $r_n \to x$, $r'_n \to x$ şi $r_n, r'_n \in \mathbf{Q}$, atunci $\lim\limits_{n \to \infty} a^{r_n} = \lim\limits_{n \to \infty} a^{r'_n}$].

De exemplu, $3^{\sqrt{2}} = \lim\limits_{n \to \infty} 3^{r_n}$, unde r_n este şirul trunchierilor lui $\sqrt{2}$.

Se arată că $a^x > 0$, $a^x \cdot a^y = a^{x+y}$, $(a^x)^y = a^{xy}$, $a^x : a^y = a^{x-y}$ pentru orice $x, y \in \mathbf{R}$.

Cazul $a > 1$. În acest caz se obţine o funcţie strict crescătoare, care defineşte o aplicaţie bijectivă $\mathbf{R} \to (0, \infty)$, $x \longmapsto a^x$ şi se poate arăta că pentru orice α real avem

$$(34) \qquad \boxed{\lim_{x \to \alpha} a^x = a^\alpha},$$

adică pentru orice şir $x_n \to \alpha$, avem $a^{x_n} \to a^\alpha$ (se mai spune că limita exponenţialei este exponenţiala limitei). În plus, se arată că

$$(35) \qquad \boxed{\lim_{x \to -\infty} a^x = 0, \ \lim_{x \to \infty} a^x = \infty \ (a > 1)}$$

şi că

$$(36) \qquad \boxed{\lim_{x \to \infty} \frac{x^n}{a^x} = 0, \ \forall n \in \mathbf{Z}, a > 1}.$$

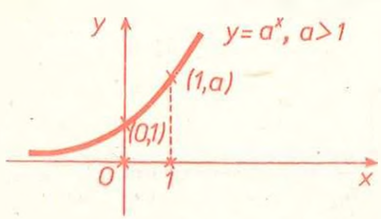


Fig. II.28

Verificarea riguroasă a acestor afirmaţii necesită unele dezvoltări mai laborioase.

Graficul funcţiei $f: \mathbf{R} \to (0, \infty)$, $f(x) = a^x$ pentru $a > 1$ are $y = 0$ asimptotă orizontală spre $-\infty$; el este de forma indicată în figura II.28.

În particular, funcţiile $x \longmapsto 2^x$, $x \longmapsto 10^x$, $x \longmapsto e^x$ au graficele de această formă.

Cazul $0 < a < 1$. În acest caz avem o funcţie strict descrescătoare şi bijectivă $f : \mathbf{R} \to (0, \infty)$, $x \longmapsto a^x$ şi, în plus,

$$\lim_{x\to\alpha} a^x = a^\alpha,\ \forall\, \alpha \in \mathbf{R};\ \lim_{x\to-\infty} a^x = \infty \text{ şi } \lim_{x\to\infty} a^x = 0.$$

Graficul funcţiei f pentru $0 < a < 1$ are $y = 0$ asimptotă orizontală spre ∞ şi este de forma indicată în fig. II.29.

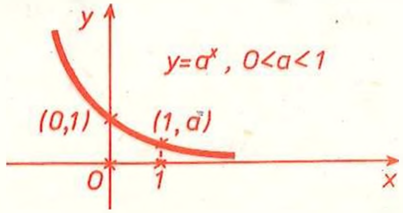


Fig. II.29

f) *Funcţii hiperbolice*. Pentru orice $x\in\mathbf{R}$ se notează $\operatorname{sh} x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$ („sinus hiperbolic"), $\operatorname{ch} x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$ („cosinus hiperbolic") şi $\operatorname{th} x = \dfrac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x} = \dfrac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1}$. Graficele funcţiilor sh, ch sînt schiţate în figura II.30. Este evidentă relaţia $\operatorname{ch}^2 t - \operatorname{sh}^2 t = 1$, $\forall\, t \in \mathbf{R}$, deci punctul (x, y) din plan de coordonate $x = \operatorname{ch} t$, $y = \operatorname{sh} t$ „parcurge" ramura de hiperbolă $x^2 - y^2 = 1$, $x > 0$ (ceea ce justifică terminologia).

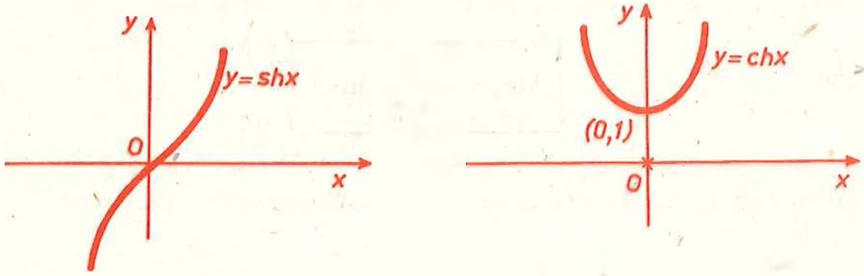
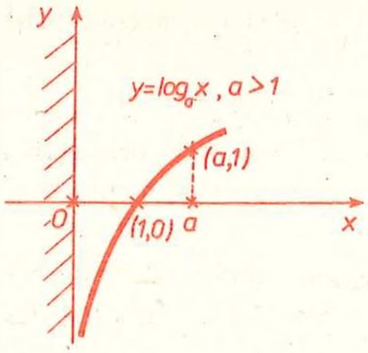


Fig. II.30

g) *Funcţia logaritmică*. Fixăm din nou $a > 0$, $a \neq 1$. Se defineşte funcţia logaritmică în baza a, $\log_a : (0, \infty) \to \mathbf{R}$ ca inversa funcţiei exponenţiale $x \longmapsto a^x$. Dacă $a > 1$ (respectiv $0 < a < 1$) funcţia este strict crescătoare (respectiv strict descrescătoare). În plus,

$$\boxed{\lim_{x\to\alpha} \log_a x = \log_a \alpha,\ \forall\, \alpha > 0} \qquad (37)$$

(limita logaritmului este egală cu logaritmul limitei).



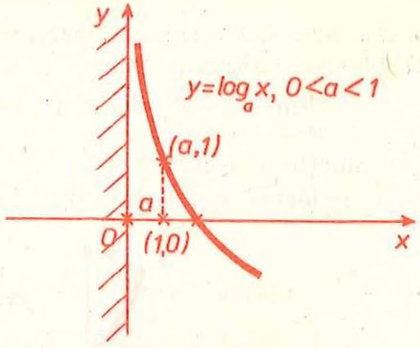


Fig. II.31

Dacă $a > 1$, avem

(38) $$\boxed{\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \log_a x = -\infty \text{ și } \lim_{x\to\infty} \log_a x = \infty},$$

iar dacă $0 < a < 1$, atunci $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \log_a x = \infty$ și $\lim\limits_{x\to\infty} \log_a x = -\infty$.

Graficele corespunzătoare sînt schițate în figura II.31.

Pentru $a = 10$ se obține logaritmul zecimal $\lg = \log_{10}$. Un caz particular, extrem de important, este cel al logaritmilor în baza e, numiți *logaritmi naturali* sau *neperieni* (după numele lui J. Neper, 1550—1617). Se notează ln în loc de $\log_e$, deci pentru orice $x > 0$, se pune $\ln x = \log_e x$. Aplicînd regula de schimbare a bazei, rezultă că $\forall\, a > 0$, $a \neq 1$, $\forall\, x > 0$

(39) $$\boxed{\log_a x = \frac{1}{\ln a}\cdot \ln x}.$$

Remarcăm, de asemenea, că $a^x = e^{x \ln a} = 10^{x \lg a}$ $(a > 0,\ x \in \mathbf{R})$.

h) *Funcția putere*. Pentru orice $x > 0$ și pentru orice r real avem

(40) $$x^r = e^{r \ln x}$$

și în acest mod, funcția putere $g : (0, \infty) \to \mathbf{R}$, $g(x) = x^r$ este tocmai compunerea funcțiilor $x \longmapsto u = r \ln x$ și $u \longmapsto e^u$.

Mai general, dacă $f, g : D \to \mathbf{R}$ $(D \subset \mathbf{R})$ sînt funcții reale și $f > 0$ (adică $f(x) > 0$, $\forall\, x \in D$), atunci se poate defini funcția $f^g : D \to \mathbf{R}$ prin $f^g = e^{g \ln f}$. De exemplu, $x^x = e^{x \ln x}$, $\forall\, x > 0$.

În încheierea acestui punct, indicăm cîteva limite remarcabile legate de exponențiale și logaritmi. Din definiția II.7 a numărului e, se poate deduce că

(41) $$\boxed{\lim_{x\to\infty}\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e}.$$

Făcînd schimbarea de variabilă $x = \frac{1}{y}$, se poate demonstra că

(42) $$\boxed{\lim_{y\to 0}(1+y)^{\frac{1}{y}} = e}.$$

De aici rezultă că

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\ln(1+x) = \lim_{x\to 0}\ln(1+x)^{\frac{1}{x}} = \ln\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} =$$
$$= \ln e = 1.$$

De asemenea, pentru $a > 0$, $a \neq 1$, notînd $a^x - 1 = u$, avem $a^x = 1 + u$. $x \ln a = \ln(1+a)$, deci

$$\lim_{x\to 0}\frac{a^x - 1}{x} = \lim_{u\to 0}\frac{u\ln a}{\ln(1+u)} = (\ln a)\cdot\lim_{u\to 0}\frac{1}{\frac{\ln(1+u)}{u}} = \ln a.$$

În fine, pentru orice număr real r, notînd $1 + x = 2^v$ avem

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^r - 1}{x} = \lim_{v\to 0}\frac{2^{rv}-1}{2^v - 1} = \lim_{v\to 0}\frac{\frac{2^{rv}-1}{rv}}{\frac{2^v-1}{v}} = r\cdot\frac{\ln 2}{\ln 2} = r.$$

Reținem așadar următoarele limite:

(43) $$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x} = 1;$$

(44) $$\lim_{x\to 0}\frac{a^x - 1}{x} = \ln a,\ a > 0;$$

(45) $$\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^r - 1}{x} = r,\ \forall\, r \text{ real}.$$

Exemple

1) $$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{2\sin\frac{x}{2}\,\sin\frac{x}{2}}{4\cdot\frac{x}{2}\cdot\frac{x}{2}} = \frac{1}{2}\left(\lim_{x\to 0}\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)\cdot$$

$$\cdot\left(\lim_{x\to 0}\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right) = \frac{1}{2}\cdot 1\cdot 1 = \frac{1}{2}.$$ De aici, $\lim_{x\to 0}\left(\frac{1-\cos x}{x^2}\right)^3 = \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}$.

2) $$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1+4x+x^2}{1+x}\right)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0}\left(1+\frac{3x+x^2}{1+x}\right)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0}\left(1+\frac{3x+x^2}{1+x}\right)^{\frac{1+x}{3x+x^2}\cdot\frac{3x+x^2}{1+x}\cdot\frac{1}{x}} =$$

$$= e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{3x+x^2}{(1+x)x}} = e^3.$$

3) $\lim\limits_{x\to0}\frac{e^{2x}-1}{x}=\lim\limits_{x\to0}\frac{(e^2)^x-1}{x}\overset{\text{cf.}(44)}{=}\ln e^2=2\ln e=2.$

4) Punînd $x=1+y$, rezultă $\lim\limits_{x\to1}\frac{\sqrt[9]{x}-1}{x-1}=\lim\limits_{y\to0}\frac{\sqrt[9]{1+y}-1}{y}=$

$$=\lim_{y\to0}\frac{(1+y)^{\frac{1}{9}}-1}{y}\overset{\text{cf.}(45)}{=}\frac{1}{9}.$$

Observație. În ultimul timp există tendința de a introduce notații noi pentru funcțiile elementare: SIN, COS, TAN ($x\mapsto \operatorname{tg} x$), COT ($x\mapsto \operatorname{ctg} x$), EXP ($x\mapsto e^x$), LOG ($x\mapsto \ln x$), SIN^{-1} ($x\mapsto \arcsin x$), TAN^{-1} ($x\mapsto \operatorname{arctg} x$) etc. Valorile acestor funcții pot fi calculate, cu aproximație, cu ajutorul minicalculatoarelor sau cu ajutorul unor tabele speciale.

7.2. Cazuri exceptate

Am văzut că pentru funcțiile elementare $f: D\to\mathbf{R}$ definite pe domeniul lor maxim de definiție D, avem

(46) $$\boxed{\lim_{x\to\alpha}f(x)=f(\alpha),\ \forall\,\alpha\in D}.$$

Cu alte cuvinte, calculul limitei lui f în punctul α revine la calculul valorii $f(\alpha)$ obținute înlocuind direct x cu α.

Aplicarea mai largă a acestei reguli poate să conducă la operații care nu au fost definite în $\overline{\mathbf{R}}$, de tipul

$$\frac{0}{0},\ 0\cdot\infty,\ \infty-\infty,\ \frac{\infty}{\infty},\ 1^\infty,\ 0^0,\ \infty^0 \text{ etc.}$$

numite *cazuri exceptate*. Sînt atunci necesare transformări ale funcției de sub limită, cu respectarea strictă a proprietăților limitelor, utilizînd limitele-tip indicate mai sus. Nu există însă reguli generale și se pot face cel mult unele recomandări.

Dacă trebuie calculată o limită de forma $\lim\limits_{x\to\alpha}\frac{g(x)}{h(x)}$ și dacă $\lim\limits_{x\to\alpha}g(x)=0$, $\lim\limits_{x\to\alpha}h(x)=0$ se spune că ne aflăm în cazul $\frac{0}{0}$. În această situație se recomandă simplificarea cu $x-\alpha$ sau translația $x-\alpha=y$, care conduce la limita $\lim\limits_{y\to0}\frac{g(\alpha+y)}{h(\alpha+y)}$ etc.

Exemple

1) $\lim\limits_{x\to1}\frac{x^2-1}{x^2+x-2}=\lim\limits_{x\to1}\frac{(x-1)(x+1)}{(x-1)(x+2)}=\lim\limits_{x\to1}\frac{x+1}{x+2}=\frac{2}{3};$

2) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{3}}\frac{2\cos x-1}{3x-\pi}=\lim\limits_{y\to0}\frac{2\cos\left(\frac{\pi}{3}+y\right)-1}{3\left(\frac{\pi}{3}+y\right)-\pi}=\lim\limits_{y\to0}\frac{2\left(\frac{1}{2}\cos y-\frac{\sqrt{3}}{2}\sin y\right)-1}{3y}=$

$$=\lim_{y\to0}\frac{\cos y-1}{3y}-\lim_{y\to0}\frac{\sqrt{3}\sin y}{3y}=-\frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Dacă avem de calculat $\lim\limits_{x\to \alpha}[g(x)-h(x)]$ şi dacă $\lim\limits_{x\to \alpha} g(x)=\infty$, $\lim\limits_{x\to\infty} h(x)=$ $=\infty$, atunci se obţine cazul $\infty-\infty$. În acest caz se recomandă transformarea funcţiei de sub limită, iar în cazul radicalilor, amplificarea eventuală cu expresia conjugată.

Exemple

1) $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}}\left(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x^3-1}\right)=\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}}\frac{x^2+x}{x^3-1}=\infty$, iar $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}}\left(\frac{1}{x-1}-\frac{3}{x^3-1}\right)=$

$$=\lim_{\substack{x\to 1\\ x>1}}\frac{x^2+x-2}{x^3-1}=\lim_{\substack{x\to 1\\ x>1}}\frac{(x-1)(x+2)}{(x-1)(x^2+x+1)}=\lim_{\substack{x\to 1\\ x>1}}\frac{x+2}{x^2+x+1}=\frac{3}{3}=1.$$

2) $\lim\limits_{x\to\infty}(x-\sqrt{x^2-1})=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{(x-\sqrt{x^2-1})(x+\sqrt{x^2-1})}{x+\sqrt{x^2-1}}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x+\sqrt{x^2-1}}=0.$

În cazul $\frac{\infty}{\infty}$ se recomandă uneori scoaterea forţată a unor factori comuni. De exemplu,

3) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x}{\sqrt{x^2\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x}{|x|\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}=$

$$=\frac{1}{\lim\limits_{x\to\infty}\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}=\frac{1}{\sqrt{1+\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x^2}}}=1,\text{ iar }\lim_{x\to-\infty}\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}=-1.$$

4) $\lim\limits_{x\to\infty}(x-\sqrt{x^2+5x})=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2-(x^2+5x)}{x+\sqrt{x^2+5x}}=-5\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x}{x+\sqrt{x^2+5x}}$

$$=-5\lim_{x\to\infty}\frac{x}{x\left(1+\sqrt{1+\frac{5}{x}}\right)}=-5\lim_{x\to\infty}\frac{1}{1+\sqrt{1+\frac{5}{x}}}=-\frac{5}{2}.$$

În cazul exceptat 1^∞ se utilizează limita-standard care defineşte numărul e, anume $\lim\limits_{u\to 0}(1+u)^{\frac{1}{u}}=e$. De exemplu,

5) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+2x+9}{x^2+5x+3}\right)^x=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{x^2+2x+9}{x^2+5x+3}-1\right)^x=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{6-3x}{x^2+5x+3}\right)^x=$

$$=\lim_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{6-3x}{x^2+5x+3}\right)^{\frac{x^2+5x+3}{6-3x}}\right]^{\frac{6x-3x^2}{x^2+5x+3}}=$$

$$=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{6x-3x^2}{x^2+5x+3}}=e^{-3}=\frac{1}{e^3}.$$

De asemenea, punînd $x - \frac{\pi}{4} = y$, rezultă

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{4}} (\operatorname{tg} x)^{\frac{1}{4x-\pi}} = \lim_{y \to 0} \left[\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + y\right)\right]^{\frac{1}{4y}} = \lim_{y \to 0} \left(\frac{1 + \operatorname{tg} y}{1 - \operatorname{tg} y}\right)^{\frac{1}{4y}} =$$

$$= \lim_{y \to 0} \left[\left(1 + \frac{2 \operatorname{tg} y}{1 - \operatorname{tg} y}\right)^{\frac{1-\operatorname{tg} y}{2 \operatorname{tg} y}}\right]^{\frac{2 \operatorname{tg} y}{1-\operatorname{tg} y} \cdot \frac{1}{4y}} =$$

$$= e^{\lim\limits_{y \to 0} \frac{\operatorname{tg} y}{2y(1-\operatorname{tg} y)}} = e^{\frac{1}{2} \lim\limits_{y \to 0} \frac{\operatorname{tg} y}{y} \cdot \lim\limits_{y \to 0} \frac{1}{1-\operatorname{tg} y}} = e^{\frac{1}{2}} = \sqrt{e}.$$

În capitolul V vom da o altă regulă utilă pentru calculul limitelor (regula lui l'Hospital).

EXERCIȚII (capitolul II, § 7)

1. Să se calculeze:

a) $\lim\limits_{x \to 1} (x^2 - 2x)$; b) $\lim\limits_{x \to 1} (x^2 + x - 2)$; c) $\lim\limits_{x \to 1} (x^4 - x)$; d) $\lim\limits_{x \to -1} (x^4 + x)$; e) $\lim\limits_{x \to 7} (2x^2 - x)$;
f) $\lim\limits_{x \to \infty} (x^3 - x^2 + x)$; g) $\lim\limits_{x \to \infty} (-x^3 + x^2)$; h) $\lim\limits_{x \to -\infty} (-x^3 + 8x^2)$; i) $\lim\limits_{x \to -\infty} (-x^4 + x - 100)$;
j) $\lim\limits_{x \to 3} \sqrt{x^3 - x}$; l) $\lim\limits_{x \to -\infty} (-\sqrt{x^2 - 1})$; m) $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x > 1}} \frac{\sqrt{x^2 - 1}}{2x}$; n) $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x > 1}} \frac{\sqrt{x^2 - 1}}{|2x - 2|}$; o) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{x^3 + x}{x^3 - x}$;
p) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{x^4 + x}{x^4 - x}$; q) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{x^4 + x^3}{x^4}$; r) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{x}{x^3}$; s) $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{x + 1}{|x - 1|}$; t) $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{x + 1}{|x - 1|}$;
u) $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{|x|}{\sqrt{x^2 + 4}}$; v) $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{x^2 + x + 1}{\sqrt{x^4 + 1}}$.

2. Să se calculeze: a) $\lim\limits_{x \to 1} \frac{x^m - 1}{x^n - 1}$ și b) $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{x^m + 1}{x^n + 1}$ (m, n întregi > 0).

3. Să se calculeze: a) $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{2x^2 + x}{3x^2 - x}$; b) $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{2x^2 + x}{3x^2 - x}$; c) $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{2x^4 - x}{3x^3 + x + 2}$;
d) $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{x - 1}{x^2 + x}$; e) $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{x^3 + x^2}{x^2 + 4}$; f) $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{2x + 1}{\sqrt{x^2 + 1}}$; g) $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{2x + 1}{\sqrt{x^2 + 1}}$.

4. Să se determine asimptotele următoarelor funcții reale:

$$f(x) = \frac{x + 1}{x^2 + 1}, \quad f(x) = \frac{x + 2}{x^2 - 1}, \quad f(x) = \frac{x^3}{x^2 - 1}, \quad f(x) = x - \sqrt{x^2 - x}, \quad f(x) = \frac{x^2}{x^2 + 1},$$

$$f(x) = \frac{x^3}{x^2 + 1}, \quad f(x) = \frac{2x^2}{x^2 + 4x - 5}.$$

5. Să se arate că dacă P, Q sînt funcții polinomiale reale și $\operatorname{gr} P - \operatorname{gr} Q = 1$, atunci funcția rațională $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ are asimptotă oblică spre $+\infty$ și spre $-\infty$ (anume dreapta $y = ax + b$ unde $ax + b$ este cîtul lui P prin Q).

6. Să se arate că funcţiile: $f : \mathbf{R}\setminus\{0\} \to \mathbf{R}$, $f(x) = \sin\dfrac{1}{x}$, $g:\mathbf{R}\setminus\{0\}\to\mathbf{R}$, $g(x) = \cos\dfrac{1}{x}$, $h : \mathbf{R}\setminus\left\{\dfrac{2}{1+2k},\ k \in \mathbf{Z}\right\} \to \mathbf{R}$, $h(x) = \operatorname{tg}\dfrac{\pi}{x}$, nu au limită în punctul $x = 0$.

7. Să se calculeze

a) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt[3]{1+x}-1}{x}$; b) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{1+x+x^2}-1}{x}$; c) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\sqrt{x-b}-\sqrt{a-b}}{x-a}$; $(0<b<a$ constante); d) $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+x}-x)$; e) $\lim\limits_{x\to-\infty}(\sqrt{x^3+x}+x)$; f) $\lim\limits_{x\to\infty}(x-\sqrt{x^2-2x})$; g) $\lim\limits_{x\to-\infty}(\sqrt{x^2-x}-2x)$; h) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin 5x}{4x}$; i) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{2\operatorname{tg}x-\sin x}{x}$; j) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin^2 x}{\operatorname{tg}^2 2x}$; k) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\cos 2x-\cos 4x}{x^2}$; l) $\lim\limits_{x\to\infty}e^{-|x|}$; m) $\lim\limits_{x\to-\infty}e^{-|x|}$; n) $\lim\limits_{x\to\infty}e^{-x^3}$; o) $\lim\limits_{x\to-\infty}e^{\frac{|x|+1}{x-1}}$.

8. Să se determine limitele laterale în punctul $x = 1$ pentru funcţiile $f : D \to \mathbf{R}$ (D — domeniul maxim de definiţie) următoare:

a) $f(x) = e^{\frac{1}{x-1}}$; b) $f(x) = e^{\frac{1}{x^2-1}}$; c) $f(x) = e^{\frac{1}{|x^2-1|}}$; d) $f(x) = e^{\frac{x^2-2}{x-1}}$; e) $f(x) = e^{1+\frac{2}{|x-1|}}$; f) $f(x) = \dfrac{1}{x-1}e^{\frac{1}{x-1}}$; g) $f(x) = \dfrac{|x|-1}{x-1}$; h) $f(x) = \dfrac{\cos\pi x+1}{(x-1)^3}$.

9. Să se calculeze: a) $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}}\log_2 x$; b) $\lim\limits_{x\to\infty}\log_2 x$; c) $\lim\limits_{x\to1}\log_2 x$; d) $\lim\limits_{\substack{x\to1\\x>1}}\log_2\dfrac{x}{x-1}$; e) $\lim\limits_{x\to\infty}xe^{-x}$; f) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2+1}{x+1}e^{2x}$; g) $\lim\limits_{x\to-\infty}xe^{x^2}$; h) $\lim\limits_{x\to-\infty}x^2e^{x}$.

10. Dacă f, g sînt funcţii reale definite pe un interval (a, ∞), $a \in \mathbf{R}$, scriem „$f(x) \ll g(x)$ pentru $x \to \infty$" dacă $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{g(x)}{f(x)} = \infty$. Să se arate că pentru orice funcţie polinomială $P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n$, $a_0 > 0$, $n \geqslant 1$ avem

$$\ln x \ll P(x) \ll e^x \text{ pentru } x \to \infty.$$

11. Să se determine asimptotele funcţiilor $f : D \to \mathbf{R}$ următoare (D fiind domeniul maxim de definiţie):

a) $f(x) = x\,e^{\frac{1}{x}}$; b) $f(x) = e^{-\frac{1}{x^2}}$; c) $f(x) = e^{-x^2}$; d) $f(x) = \dfrac{1}{e^x-1}$; e) $f(x) = \dfrac{\sin x}{1+\cos x}$; f) $f(x) = \dfrac{\sin^2 x}{1+\cos x}$; g) $f(x) = \dfrac{1}{\sin x}$; h) $f(x) = \dfrac{x}{e^x+1}$; i) $f(x) = \dfrac{1}{|e^x-1|}$; j) $f(x) = x\sqrt{\dfrac{x}{x+1}}$; k) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x^2+4}}{3x-5}$; l) $f(x) = \ln(x^2-1)$; m) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x^4-1}}{x+3}$.

12. Să se calculeze limitele următoare (de tipul 1^∞):

a) $\lim\limits_{x\to 3}(13-4x)^{\frac{1}{x-3}}$; b) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+1}{x+2}\right)^x$; c) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+1}{\sqrt{x^2+2}}\right)^x$; d) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(\sin x)^{\frac{1}{2x-\pi}}$;

e) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{x^2+x+1}{x^2-x+1}\right)^{\sqrt{-x}}$; f) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}(\operatorname{ctg} x)^{\operatorname{tg} 2x}$; g) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\cos\sqrt{\frac{1}{x}}\right)^2$.

13. Fie $a_n \to a$ un şir convergent de numere reale strict pozitive. Să se arate că $\lim\limits_{n\to\infty}(a_1a_2\ldots a_n)^{\frac{1}{n}} = a$.

14. Să se determine constanta $k \in \mathbf{R}$ astfel încît, pentru funcţia $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $f(x) = \sqrt[3]{x^2}-\sqrt[3]{(x-1)^2}+k$, dreapta $y=1$ să fie asimptotă orizontală spre $+\infty$.

EXERCIŢII ŞI PROBLEME REZOLVATE LA CAPITOLUL II

1. *Dacă a este un număr real, să se arate că şirurile* $x'_n = a-\frac{1}{n}$, $x''_n = a+\frac{1}{n}$, $n\geqslant 1$ *sînt convergente către a şi* $x'_n < a$, $x''_n > a$, $\forall\, n\geqslant 1$.

Soluţie. Fie $\varepsilon > 0$ arbitrar fixat. Se observă că

$$|x'_n - a| = \left|-\frac{1}{n}\right| = \frac{1}{n},\quad |x''_n - a| = \frac{1}{n}.$$

Dacă punem condiţia $\frac{1}{n} < \varepsilon$, atunci $n > \frac{1}{\varepsilon}$ şi, ca atare, alegînd N natural astfel încît $N > \frac{1}{\varepsilon}$, rezultă că $|x'_n - a| = \frac{1}{n} < \varepsilon$, $|x''_n - a| = \frac{1}{n} < \varepsilon$ pentru orice $n\geqslant N$. Aşadar, $x'_n \to a$, $x''_n \to a$.

2. *Să se arate că şirurile*

$$a_n = \frac{2^n}{(n!)^2} \text{ şi } b_n = 2^{-\sqrt{n^2+1}}\quad (n\geqslant 1)$$

sînt mărginite, monotone şi convergente către zero.

Soluţie. Se verifică uşor că $0\leqslant a_n\leqslant 2$ şi $0\leqslant b_n\leqslant \frac{1}{2}$ pentru orice $n\geqslant 1$. Apoi $a_{n+1}-a_n = \frac{2^{n+1}}{[(n+1)!]^2}-\frac{2^n}{(n!)^2} = \frac{2}{(n!)^2}\left[\frac{2}{(n+1)^2}-1\right]\leqslant 0$, adică $a_{n+1}\leqslant a_n$, şi similar $b_{n+1}\leqslant b_n$ pentru orice $n\geqslant 1$. Aşadar ambele şiruri sînt monoton descrescătoare. Deoarece $0\leqslant a_n < \frac{2^n}{n!} < \frac{1}{n}$ (pentru $n\geqslant 6$) şi $0\leqslant b_n\leqslant\frac{1}{2^n}$ (pentru $n\geqslant 1$), rezultă că $a_n\to 0$, $b_n\to 0$, aplicînd teorema II.4.

3. *Să se arate că pentru orice* $a > 0$ *avem* $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a} = 1$.

Soluţie. Presupunem că $a \geqslant 1$ şi notăm $\sqrt[n]{a} - 1 = x_n$. Atunci, $x_n \geqslant 0$ şi $a = (1 + x_n)^n \geqslant nx_n$, deci $0 \leqslant x_n \leqslant \frac{a}{n}$ şi, ca atare, $x_n \to 0$, adică $\sqrt[n]{a} \to 1$ pentru $n \to \infty$.

Dacă $0 < a < 1$, atunci $\frac{1}{a} > 1$ şi, ca atare, $\sqrt[n]{\frac{1}{a}} \to 1$, adică $\frac{1}{\sqrt[n]{a}} \to 1$, deci $\sqrt[n]{a} \to 1$.

4. *Să se arate că:* a) *dacă o funcţie f are limita la stînga l_s (respectiv la dreapta l_d) într-un punct $x_0 \in \mathbf{R}$, atunci*

$$l_s = \lim_{n\to\infty} f\left(x_0 - \frac{1}{n}\right), \text{ respectiv } l_d = \lim_{n\to\infty} f\left(x_0 + \frac{1}{n}\right), \; n \in \mathbf{N};$$

b) *dacă pentru $f : (0, \infty) \to \mathbf{R}$ există $l = \lim\limits_{x\to\infty} f(x)$, atunci $l = \lim\limits_{\substack{n\to\infty \\ n\in\mathbf{N}}} f(n)$, dar nu şi reciproc.*

Soluţie. a) Este suficient să alegem şirul $x'_n = x_0 - \frac{1}{n}$ $\left(\text{şi respectiv } x''_n = x_0 + \frac{1}{n}\right)$ şi atunci $f(x'_n) \to l_s$ (respectiv $f(x''_n) \to l_d$).

b) Deoarece există $l = \lim\limits_{x\to\infty} f(x)$, rezultă că pentru orice şir $x_n \to \infty$ (din domeniul de definiţie al lui f) avem $f(x_n) \to l$. Luînd $x_n = n$, rezultă $f(n) \to l$.

Pentru partea secundă, să considerăm funcţia $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, definită prin

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{dacă } x \neq 1, 2, 3, \ldots \\ \frac{1}{n}, & \text{dacă } x = n, \; n \geqslant 1 \text{ întreg.} \end{cases}$$

Avem $\lim\limits_{n\to\infty} f(n) = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$, dar limita $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$ nu există.

5. *Să se calculeze limitele laterale în punctul $x = 2$ pentru funcţiile $f, g, h : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ următoare:*

$$f(x) = \frac{|x-2|}{x^2 + x + 1}, \quad g(x) = \begin{cases} x, & \text{dacă } x \leqslant 2 \\ 2x + 7, & \text{dacă } x > 2 \end{cases}, \quad h(x) = \begin{cases} \sin \pi x, & \text{dacă } x < 2 \\ x^2, & \text{dacă } x \geqslant 2. \end{cases}$$

Soluţie. $f(2-0) = \lim\limits_{\substack{x\to 2 \\ x<2}} f(x) = 0$, $f(2+0) = \lim\limits_{\substack{x\to 2 \\ x>2}} f(x) = 0$;

$$g(2-0) = \lim_{\substack{x\to 2 \\ x<2}} x = 2 \text{ şi } g(2+0) = \lim_{\substack{x\to 2 \\ x>2}} (2x+7) = 11;$$

$h(2-0) = \lim\limits_{\substack{x\to 2 \\ x<2}} h(x) = \lim\limits_{\substack{x\to 2 \\ x<2}} \sin \pi x = \sin 2\pi = 0$ şi $h(2+0) = \lim\limits_{\substack{x\to 2 \\ x>2}} x^2 = 4$.

6. *Se consideră funcţia $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, definită prin*

$$f(x) = \begin{cases} x - q, & \text{dacă } x < 1 \\ 2x + p, & \text{dacă } x > 1 \\ q, & \text{dacă } x = 1 \end{cases}$$

unde p şi q sînt parametri reali. Pentru care valori ale lui p şi q funcţia f are limită în punctul $x = 1$? În ce caz această limită este egală cu $f(1)$?

Soluție. Avem $f(1-0)=\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}}(x-q)=1-q$, $f(1+0)=\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}} f(x)=$ $=\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}}(2x+p)=2+p$. Aplicînd teorema II.7, condiția ca f să aibă limită în punctul $x=1$ este ca $1-q=2+p$, adică $p+q=-1$. Apoi $f(1)=q$, deci răspunsul la întrebarea secundă se obține rezolvînd sistemul $1-q=2+p=q$, de unde $q=\frac{1}{2}$, $p=-\frac{3}{2}$.

7. *Să se calculeze*

$$l_1=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)^2}{x^2-1},\ l_2=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)^4}{(x^2-1)^4}\text{ și } l_3=\lim\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt[3]{x}-1}.$$

Soluție. $l_1=\lim\limits_{x\to 1}\frac{(x-1)^2}{(x+1)(x-1)}=\lim\limits_{x\to 1}\frac{x-1}{x+1}=0;$

$$l_2=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)^4}{(x-1)^4(x+1)^4}=\lim_{x\to 1}\frac{1}{(x+1)^4}=\frac{1}{16}.$$

Ținînd cont că $\sqrt{x}-1=\frac{x-1}{\sqrt{x}+1}$, $\sqrt[3]{x}-1=\frac{x-1}{\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1}$, rezultă $\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt[3]{x}-1}=\frac{\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1}{\sqrt{x}+1}$ pentru orice $x\geqslant 0$, $x\neq 1$, deci

$$l_3=\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1}{\sqrt{x}+1}=\frac{3}{2}.$$

8. *Să se determine asimptotele funcțiilor $f: D\to \mathbf{R}$ următoare (D fiind domeniul maxim de definiție):*

a) $f(x)=\frac{2x^2-1}{x^2-1}$; b) $f(x)=\frac{x^3}{|x^2-4|}$; c) $f(x)=\frac{x^2-4x+4}{x^2-3x+2}$;

d) $f(x)=\frac{\sin x}{x-1}$.

Soluție. a) Funcția f este definită pe $D=\mathbf{R}\setminus\{-1,1\}$. Dreptele $x=1$, $x=-1$ sînt asimptote verticale și dreapta $y=2$ este asimptotă orizontală spre $-\infty$ și spre $+\infty$.

b) Dreptele $x=2$, $x=-2$ sînt asimptote verticale; apoi, deoarece $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\infty$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$, funcția nu are asimptote orizontale. Studiem existența asimptotei oblice spre $+\infty$; calculăm $m=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2}{x^2-4}=1$ și $n=\lim\limits_{x\to\infty}[f(x)-mx]=$ $=\lim\limits_{x\to\infty}\left[\frac{x^3}{|x^2-4|}-x\right]=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^3}{x^2-4}-x\right)=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{4x}{x^2-4}=0$. Așadar, $y=x$ este asimptota oblică spre $+\infty$. Similar, se obține că $y=x$ este asimptotă oblică și spre $-\infty$.

c) Funcția f este definită pe mulțimea $D=\mathbf{R}\setminus\{1,2\}$ și $f(x)=\frac{x-2}{x-1}$, $\forall x\in D$. Dreapta $x=1$ este asimptotă verticală și dreapta $y=1$ este asimptotă orizontală (spre $+\infty$ și spre $-\infty$).

d) Dreapta $x=1$ este asimptotă verticală; apoi $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x-1}\cdot\sin x=0$ și $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=0$, deci axa Ox este asimptotă orizontală (spre $+\infty$ și spre $-\infty$).

9. *Se consideră funcţiile $f, g, h : [0, \infty) \to \mathbf{R}$* definite prin

$$f(x) = \sqrt{x + 10^3} - \sqrt{x}, \quad g(x) = \sqrt{x + \sqrt{x}} - \sqrt{x}, \quad h(x) = \sqrt{x + \frac{x}{10^3}} - \sqrt{x}.$$

Să se arate că dacă $x \in [1, 10^6]$, atunci $h(x) \leqslant g(x) \leqslant f(x)$ şi totuşi $\lim\limits_{x\to\infty} h(x) > \lim\limits_{x\to\infty} g(x) > \lim\limits_{x\to\infty} f(x)$.

Soluţie. Inegalitatea $h(x) \leqslant g(x)$ revine la $\sqrt{x + \frac{x}{10^3}} \leqslant \sqrt{x + \sqrt{x}}$, adică $\frac{x}{10^3} \leqslant \sqrt{x}$, adică $x \leqslant 10^6$; se probează similar faptul că $g(x) \leqslant f(x)$. Apoi, prin calcul direct, rezultă $\lim\limits_{x\to\infty} h(x) = \infty$, $\lim\limits_{x\to\infty} g(x) = \frac{1}{2}$ şi $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 0$. Nu este nici o contradicţie cu regula de păstrare a inegalităţilor prin trecere la limită, deoarece inegalităţile $h(x) \leqslant g(x) \leqslant f(x)$ au loc aici doar pe un interval mărginit.

10. *Să se calculeze limitele următoare:*

$$l_1 = \lim_{h\to 0} \frac{1 - \frac{1}{h}}{1 + \frac{1}{h}}; \qquad l_2 = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left[\frac{1}{(x+h)^2} - \frac{1}{x^2}\right], \quad x \neq 0;$$

$$l_3 = \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{x+h} - \sqrt{x}}{h}, \quad x > 0; \qquad l_4 = \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt[3]{x+h} - \sqrt[3]{x}}{h}, \quad x \neq 0;$$

$$l_5 = \lim_{h\to 0} \frac{\sin^2(x+h) - \sin^2 x}{h}; \qquad l_6 = \lim_{h\to 0} (\cos h)^{\frac{1}{h^2}}$$

Soluţie. $l_1 = \lim\limits_{h\to 0} \frac{h-1}{h+1} = -1$ $\left(\text{sub forma iniţială limita era în cazul exceptat } \frac{\infty}{\infty}\right)$; avem succesiv

$$l_2 = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \cdot \frac{x^2 - (x+h)^2}{x^2 \cdot (x+h)^2} = -\lim_{h\to 0} \frac{h + 2x}{x^2(x+h)^2} = \frac{-2}{x^3} \text{ (cazul } \infty \cdot 0);$$

$$l_3 = \lim_{h\to 0} \frac{x + h - x}{h(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{\sqrt{x+h} + \sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}} \left(\text{cazul } \frac{0}{0}\right);$$

$$l_4 = \lim_{h\to 0} \frac{x + h - x}{h\left(\sqrt[3]{(x+h)^2} + \sqrt[3]{x(x+h)} + \sqrt[3]{x^2}\right)} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{1}{\sqrt[3]{(x+h)^2} + \sqrt[3]{x(x+h)} + \sqrt[3]{x^2}} = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} \left(\text{cazul } \frac{0}{0}\right);$$

$$l_5 = \lim_{h\to 0} \frac{[\sin(x+h) - \sin x][\sin(x+h) + \sin x]}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{2 \sin \frac{h}{2} \cos\left(x + \frac{h}{2}\right) \cdot 2 \sin\left(x + \frac{h}{2}\right) \cos \frac{h}{2}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\sin h \cdot \sin(2x + h)}{h} =$$

$$= \left(\lim_{h\to 0} \frac{\sin h}{h}\right) \cdot \lim_{h\to 0} \sin(2x + h) = 1 \cdot \sin 2x = \sin 2x.$$

În sfîrşit, limita l_6 este în cazul exceptat 1^{∞}, şi este necesară prelucrarea expresiei de sub limită:

$$l_6 = \lim_{h\to 0} (1 + \cos h - 1)^{\frac{1}{h^2}} = \lim_{h\to 0}\left(1 - 2\sin^2\frac{h}{2}\right)^{\frac{1}{h^2}} = \lim_{h\to 0}\left[\left(1 - 2\sin^2\frac{h}{2}\right)^{\frac{1}{-2\sin^2\frac{h}{2}}}\right]^{\frac{-2\sin^2\frac{h}{2}}{h^2}} = e^{-\lim\limits_{h\to 0}\frac{2\sin^2\frac{h}{2}}{h^2}} = e^{-\lim\limits_{h\to 0}\frac{\sin\frac{h}{2}\cdot\sin\frac{h}{2}}{2\frac{h}{2}\cdot\frac{h}{2}}} = e^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{e}}.$$

11. *Să se studieze convergenţa şirurilor $(a_n)_{n\geqslant 0}$ definite prin $a_0=1$ şi prin următoarele relaţii de recurenţă:*

a) $a_{n+1} = 1 + a_n^2$, $n \geqslant 0$;

b) $a_{n+1} = a_n + \dfrac{1}{a_n}$, $n \geqslant 0$.

Soluţie. a) Şirul $(a_n)_{n\geqslant 0}$ este monoton crescător: $a_{n+1} - a_n = a_n^2 - a_n + 1 > 0$, deci $a_{n+1} > a_n$, $n \geqslant 0$. Şirul este deci monoton şi, ca atare, are o limită l. Dacă această limită ar fi finită, ar rezulta $l = 1 + l^2$, ceea ce este absurd. Deci $\lim a_n = \infty$.

b) Avem $a_{n+1} > a_n$, $n \geqslant 0$, aşa cum se verifică imediat prin inducţie. Raţionînd ca mai sus, rezultă $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$.

12. *Să se arate că dacă $(a_n)_{n\geqslant 0}$ este un şir convergent, atunci $\lim\limits_{n\to\infty}(a_{n+1} - a_n) = 0$, dar reciproca este falsă.*

Soluţie. Presupunem că $a_n \to a$. Atunci $|a_{n+1} - a_n| = |(a_{n+1} - a) + (a - a_n)| \leqslant \leqslant |a_{n+1} - a| + |a_n - a|$, deci $\lim\limits_{n\to\infty}(a_{n+1} - a_n) = 0$, conform corolarului 2 al teoremei II.4.

Pentru a vedea că reciproca este falsă este suficient să considerăm exemplul $s_n = 1 + \dfrac{1}{2} + \ldots + \dfrac{1}{n}$ (din exerciţiul 14, de la pag. 74).

13. *Să se determine $a \in \mathbf{R}$ astfel încît funcţia $f : \mathbf{R}\setminus\{1\} - \mathbf{R}$ definită prin*

$$f(x) = \begin{cases} a\ln(3 - x), & \text{dacă } x < 1 \\ \dfrac{2^x - 2}{x - 1}, & \text{dacă } x > 1 \end{cases}$$

să aibă limită în punctul $x = 1$.

Soluţie. $f(1 - 0) = \lim\limits_{x\to 1,\, x<1} a\ln(3 - x) = a\ln 2$, $f(1 + 0) = \lim\limits_{x\to 1,\, x>1}\dfrac{2^x - 1}{x - 1} = = \lim\limits_{y\to 0,\, y>0}\dfrac{2^{1+y} - 2}{y} = 2\lim\limits_{y\to 0,\, y>0}\dfrac{2^y - 1}{y} = 2\ln 2$. Condiţia din enunţ revine la $f(1 - 0) = = f(1 + 0)$, deci $a = 2$.

14. *Fie $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ o funcţie periodică neconstantă. Să se arate că f nu are limită în punctele ∞, $-\infty$.*

Soluţie. Conform ipotezei există $T > 0$ astfel încît $f(x + T) = f(x)$ pentru orice $x \in \mathbf{R}$. Deoarece f este neconstantă, există $a, b \in [0, T]$ astfel încît $f(a) \neq f(b)$. Considerăm şirurile $x'_n = a + nT$, $x''_n = b + nT$, $n \geqslant 0$. Evident, $x'_n \to \infty$, $x''_n \to \infty$ şi $f(x'_n) = = f(a + nT) = f(a)$, $f(x''_n) = f(b + nT) = f(b)$, deci $\lim\limits_{n\to\infty} f(x'_n) \neq \lim\limits_{n\to\infty} f(x''_n)$. Aşadar, f nu are limită în punctul ∞. Se procedează similar pentru $-\infty$.

Observaţie. În particular, funcţiile cos, sin nu au limită în punctele ∞, $-\infty$.

15. Să se arate că funcţia $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = e^x(1 + 2\sin x)$ nu are limită spre $+\infty$.

Soluţie. $x'_n = n\pi \to \infty$, $x''_n = -\dfrac{\pi}{2} + 2n\pi \to \infty$ şi $f(x'_n) = e^{n\pi} \to \infty$, $f(x''_n) \to -\infty$, deci $\lim\limits_{h\to\infty} f(x)$ nu există.

16. Fie $f, g: D \to \mathbf{R}$ *două funcţii şi* $\alpha \in \overline{\mathbf{R}}$ *un punct de acumulare pentru* D. *Presupunem că există* $\lim\limits_{x\to\alpha} f(x) = 0$ *şi că* g *este mărginită într-o vecinătate a punctului* α. *Să se arate că* $\lim\limits_{x\to\alpha} (fg)(x) = 0$. *Ca o aplicaţie să se arate că*: a) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\sin x}{x} = 0$; b) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} x^k \sin\dfrac{1}{x} = 0$ ($k > 0$, real); c) $\lim\limits_{n\to-\infty} e^x(1 + 2\sin x) = 0$.

Soluţie. Fie $x_n \to \alpha$ un şir oarecare de puncte din $D\setminus\{\alpha\}$, deci $f(x_n) \to 0$. Deoarece funcţia g este mărginită într-o vecinătate U a lui α, şi cum $x_n \in U$ pentru orice $n \geqslant N$ (N convenabil), rezultă că sirul $(g(x_n))_{n\geqslant N}$ este mărginit, deci

$$(fg)(x_n) = f(x_n)\cdot g(x_n) \to 0, \text{ adică } \lim_{x\to\alpha} (fg)(x) = 0.$$

a) Luăm $D = (0, \infty)$, $f(x) = \dfrac{1}{x}$, $g(x) = \sin x$, $\alpha = \infty$.

b) Luăm $D = (0, 1)$, $f(x) = x^k$, $g(x) = \sin\dfrac{1}{x}$, $\alpha = 0$.

c) Luăm $D = (-\infty, 0)$, $f(x) = e^x$, $g(x) = 1 + 2\sin x$, $\alpha = -\infty$.

Capitolul III
FUNCȚII CONTINUE

Ideea de continuitate a unei funcții s-a desprins din reprezentările intuitive asupra proceselor în desfășurarea cărora nu apar salturi, ruperi. Noțiunea matematică de continuitate cere o definiție precisă, care să conducă prin raționamente corecte la degajarea proprietăților funcțiilor continue, importante în aplicații și în dezvoltări teoretice ulterioare. Conceptul de funcție continuă s-a definit relativ tîrziu și este datorat în principal lui A. Cauchy (1789—1857), B. Bolzano (1781—1848) și G. Darboux (1842—1917).

§ 1. Funcții continue într-un punct; funcții continue pe o mulțime

1.1. Punerea problemei

Considerăm cîteva exemple.

1) Presupunem că pe o axă se mişcă uniform un mobil care la momentul $t = 0$ se află în origine. Dacă viteza, presupusă constantă, a mobilului este v, atunci notînd cu $s(t)$ distanța parcursă de mobil în timpul t, rezultă că $s(t) = v \cdot t$, $\forall\, t \geqslant 0$. Graficul acestei funcții $s : [0,\infty) \to \mathbf{R}$ este indicat în figura III.1.

2) Considerăm funcția $U : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ definită prin

$$U(t) = \begin{cases} 0, & \text{dacă } t < t_0 \\ U_0, & \text{dacă } t \geqslant t_0 \end{cases}, \quad t_0 \text{ fixat},$$

avînd graficul în figura III.2. ($U_0 > 0$ fiind o constantă). Reamintim că săgețile corespund intervalelor deschise sau semideschise.

În exemplul 1 funcția s nu are salturi, graficul este „neîntrerupt". În exemplul 2 funcția U are un salt, sau o discontinuitate, cum se spune, în punctul t_0.

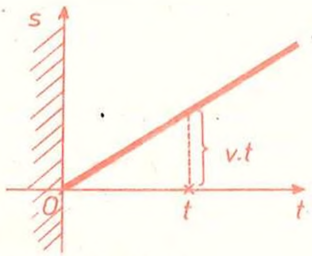


Fig. III.1

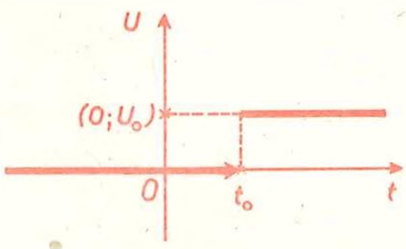


Fig. III.2

3) Funcţia $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ definită prin

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{dacă } x \neq 2 \\ 3, & \text{dacă } x = 2 \end{cases}$$

are limită în orice punct, inclusiv în punctul $x = 2$, dar intuitiv ea nu poate fi considerată continuă în punctul $x = 2$ (figura III.3).

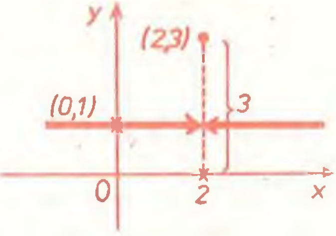


Fig. III.3

4) Dacă $f: E \to \mathbf{R}$ este o funcţie şi $a \in E(E \subset \mathbf{R})$ este un punct fixat, calculul lui $f(a)$ poate prezenta mari dificultăţi în unele cazuri. Din acest motiv este cîteodată util de a se proceda în modul următor: se consideră o aproximare $b \simeq a$, $b \in E$ şi se calculează $f(b)$. Întrebarea naturală care se pune este: aproximează oare $f(b)$ pe $f(a)$? Dacă da, putem evalua eroarea comisă? Sau putem alege o aproximare $b \simeq a$ suficient de bună astfel încît eroarea $|f(b) - f(a)|$ să fie mai mică decît un număr pozitiv arbitrar fixat dinainte?

Răspunsul la aceste întrebări este afirmativ dacă f verifică aşa-numita proprietate de a fi continuă în punctul a, proprietate ce va fi definită în cele ce urmează.

1.2. Noţiunea de funcţie continuă într-un punct

Vom fixa în cele ce urmează următoarele entităţi:

a) o funcţie reală $f: E \to \mathbf{R}$ $(E \subset \mathbf{R})$;

b) un punct a care aparţine lui E.

Ne va interesa nu numai comportarea lui f în vecinătatea punctului a, dar şi în punctul a.

DEFINIŢIA III. 1. Funcţia f se numeşte continuă în punctul a dacă pentru orice vecinătate V a punctului $f(a)$ există o vecinătate U a punctului a astfel încît din faptul că $x \in U \cap E$ să rezulte $f(x) \in V$.

Dacă funcţia f nu este continuă în punctul a ea se numeşte **discontinuă** în acel punct. Dacă a este un punct izolat al lui E (adică există o vecinătate U a lui a astfel încît $U \cap E = \{a\}$), atunci condiţia anterioară este îndeplinită automat şi f rezultă continuă în punctul a.

Să presupunem acum nu numai că $a \in E$, dar că a este şi un punct de acumulare pentru E (deci există un şir de puncte $a_n \in E \setminus \{a\}$, astfel încît $a_n \to a$). Atunci definiţia III.1 este echivalentă (folosind definiţia II.4) cu faptul că limita funcţiei f în punctul a există şi este egală cu $f(a)$, adică

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a). \tag{1}$$

În cazul cînd $E = [\alpha, \beta]$, faptul că f este continuă în punctul α revine la aceea că există limita $\lim\limits_{x \to \alpha,\, x > \alpha} f(x)$ şi aceasta este egală cu $f(\alpha)$. În mod similar, f este continuă în punctul β dacă şi numai dacă $\lim\limits_{x \to \beta,\, x < \beta} f(x)$ există şi este egală cu $f(\beta)$.

Dacă funcţia f este continuă în fiecare punct al mulţimii E, atunci ea se numeşte **continuă pe mulţimea E.**

8

Reținem că pentru a pune problema continuității sau discontinuității unei funcții într-un punct este necesar ca funcția să fie definită în acel punct.

Un rezultat important îl consituie

TEOREMA III. 1 *(de caracterizare a continuității într-un punct).* **Fie $f : E \to \mathbf{R}$ şi $a \in E$. Sînt echivalente următoarele afirmații:**

1°. Funcția f este continuă în punctul a;

2°. Pentru orice şir $x_n \to a$, $x_n \in E$, $n \geqslant 0$, şirul $(f(x_n))_{n \geqslant 0}$ este convergent şi are limita $f(a)$;

3°. Pentru orice $\varepsilon > 0$ există $\delta > 0$ depinzînd de ε astfel încît din faptul că $|x - a| < \delta$, $x \in E$ să rezulte $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$.

Dacă a este un punct izolat al mulțimii E, atunci afirmațiile teoremei sînt verificate întotdeauna. Dacă a nu este un punct izolat al mulțimii E, demonstrația repetă pe cea dată la teorema II.6, pag. 53, 55 (echivalența condițiilor a, b, c), înlocuind l cu $f(a)$, şi nu o vom relua aici.

Avantajul de a dispune de mai multe proprietăți echivalente constă în faptul că unele rezultate privind funcțiile continue se demonstrează mai simplu utilizînd una sau alta din caracterizările pe care le avem acum la îndemînă. Afirmația 3° se mai poate enunța astfel: pentru orice $\varepsilon > 0$ există $\delta > 0$, astfel încît de îndată ce x este o δ-aproximare pentru a, $f(x)$ să fie o ε-aproximare a lui $f(a)$.

Să remarcăm că proprietatea de continuitate a unei funcții într-un punct este locală, depinzînd doar de valorile ei într-o vecinătate a punctului.

O funcție poate să fie continuă într-un punct a şi discontinuă într-un punct oricît de apropiat de a.

Un alt fapt remarcabil îl constituie proprietatea unei funcții continue de „păstrare a semnului pe o vecinătate", anume: **Dacă $f : E \to \mathbf{R}$ este continuă în a şi $f(a) > 0$ (respectiv $f(a) < 0$), atunci există o vecinătate U a punctului a astfel încît $f(x) > 0$ (respectiv $f(x) < 0$) pentru orice $x \in U \cap E$.** Într-adevăr, să notăm $\lambda = f(a)$ şi să presupunem $\lambda > 0$; alegînd vecinătatea $V = \left(\frac{\lambda}{2}, \frac{3\lambda}{2}\right)$ a punctului λ, există o vecinătate U a lui a astfel încît pentru orice $x \in U \cap E$ să avem $f(x) \in V$, adică $f(x) > \frac{\lambda}{2} > 0$ (se procedează similar dacă $\lambda < 0$).

Presupunem că viteza unui mobil este funcție continuă de timp. Dacă este strict pozitivă la un moment t_0, ea rămîne strict pozitivă într-o vecinătate a lui t_0 (în particular, mobilul nu poate fi oprit instantaneu, ceea ce explică de ce proprietatea anterioară este numită proprietatea de inerție a funcțiilor continue).

Înainte de a trece la exemple, stabilim un criteriu util de continuitate, folosind limitele laterale. Fie $f : E \to \mathbf{R}$ şi $a \in E$. Dacă în punctul a există limita la stînga $f(a - 0)$ şi în plus $f(a - 0) = f(a)$, atunci se spune că f este *continuă la stînga* în punctul a. În mod similar, dacă există $f(a + 0)$ şi $f(a + 0) = f(a)$, atunci funcția f se numeşte *continuă la dreapta* în a.

Are loc un rezultat analog teoremei III.1 pentru funcţiile continue la dreapta (respectiv la stînga), pe care nu-l mai explicităm şi care se demonstrează (cu modificări evidente) asemănător teoremei III.1.

Trebuie remarcat că, dacă $E = [\alpha, \beta]$, atunci continuitatea funcţiei f în punctul α (respectiv β) este echivalentă cu continuitatea la dreapta în punctul α (respectiv la stînga în punctul β) a funcţiei f. Se poate întîmpla ca f să fie continuă la stînga în α fără a fi continuă la dreapta, sau invers. De exemplu, funcţia $f(x) = \begin{cases} x, & \text{dacă } x \leqslant 1 \\ 2, & \text{dacă } x > 1 \end{cases}$ este continuă la stînga în punctul $a = 1$, dar nu este continuă la dreapta în acel punct. Dacă însă f este continuă şi la stînga şi la dreapta în punctul a, atunci, raţionînd ca la teorema II.7, rezultă condiţia (1) îndeplinită şi deci f este continuă în a, ceea ce arată coerenţa definiţiilor date.

Aşadar, dacă pentru o funcţie $f : E \to \mathbf{R}$ şi pentru un punct $a \in E$, care este punct de acumulare pentru $E \cap (-\infty, a)$ şi pentru $E \cap (a, \infty)$, există $f(a - 0)$ şi $f(a + 0)$, atunci

f este continuă în a dacă şi numai dacă $f(a - 0) = f(a + 0) = f(a)$.

Observaţie. Se poate pune următoarea întrebare: dacă $g : E \to \mathbf{R}$ este o funcţie continuă pe E şi dacă $b \notin E$, există sau nu o funcţie $G : E \cup \{b\} \to \mathbf{R}$ astfel încît $G(x) = g(x)$, $\forall x \in E$ şi G să fie continuă în punctul b? În caz afirmativ, se spune că g este *prelungită prin continuitate în punctul b*. Remarcăm că dacă există şi este finită limita $l = \lim\limits_{x \to b} g(x)$, atunci definind $G(b) = l$, funcţia G prelungeşte funcţia g prin continuitate în punctul b.

Dacă o funcţie $f : E \to \mathbf{R}$ nu este continuă într-un punct $a \in E$, deşi limitele laterale în a există şi sînt finite, atunci se spune că a este un *punct de discontinuitate de prima speţă* pentru funcţia f; punctele de discontinuitate care nu sînt de prima speţă se numesc *de speţa a doua*. Se poate arăta că *discontinuităţile unei funcţii monotone pot fi numai de prima speţă.*

Exemple

1) Funcţiile polinomiale, raţionale, trigonometrice, exponenţiale etc. sînt continue pe orice interval pe care sînt definite. De exemplu, funcţiile f, g, h, $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = x^2 - x + 7$, $g(x) = \sin 2x$, $h(x) = e^x$ sînt continue pe $\mathbf{R}$, iar funcţia $u : (-\infty, 0] \to \mathbf{R}$, $u(x) = \sqrt{-x}$ este continuă pe intervalul $(-\infty, 0]$.

2) Funcţia-modul $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = |x|$, este continuă în punctul $a = 0$, deoarece $f(a - 0) = \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x < 0}} (-x) = 0$, $f(a + 0) = \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} x = 0$ şi $f(a) = |0| = 0$.

Ca un alt exemplu, studiem continuitatea funcţiei $f : (0, \infty) \to \mathbf{R}$, definită prin

$$f(x) = \begin{cases} x \;\;\;\;\;\;\;, & \text{dacă } 0 < x \leqslant 1 \\ 2x + 1, & \text{dacă } x > 1 \end{cases}.$$

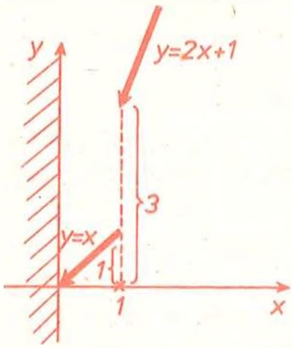


Fig. III.4

Pe intervalul deschis $(0, 1)$ avem $f(x) = x$ şi f este continuă, iar pe intervalul $(1, \infty)$, $f(x) = 2x + 1$ este, de asemenea, continuă. Rămîne de studiat continuitatea în punctul $x = 1$. Dar $f(1 - 0) = \lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}} x = 1$, $f(1 + 0) = \lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}} (2x + 1) = 3$ şi $f(1) = 1$. Deci f nu este continuă în punctul $x = 1$ (acest punct este un punct de discontinuitate de prima speţă pentru f). Graficul lui f este indicat în figura III.4.

3) Reluăm exemplele date în 1.1. În exemplul 1, $s(t) = v \cdot t$ este funcţie elementară pentru $t > 0$, deci este funcţie continuă. În punctul $t = 0$ ea este, de asemenea, continuă. În exemplul 2, funcţia U este constantă, deci continuă pe fiecare din intervalele $(-\infty, t_0)$, (t_0, ∞), iar în punctul $t = t_0$ este discontinuă (de prima speţă). În fine, funcţia f avînd graficul în figura III.3 este continuă pe mulţimea $\mathbf{R}\setminus\{2\}$, iar în punctul $a = 2$ avem $f(2 - 0) = f(2 + 0) = 1$ în timp ce $f(2) = 3$, deci f nu este continuă în acest punct (avînd o discontinuitate de prima speţă).

4) Considerăm funcţia $f : \mathbf{R}\setminus\{1\} \to \mathbf{R}$, definită prin

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{dacă } x < 1 \\ 0, & \text{dacă } x > 1 \end{cases}.$$

Deoarece $f(1 - 0) = 1$, $f(1 + 0) = 0$, ea nu poate fi prelungită prin continuitate în punctul $x = 1$. În schimb, funcţia $g : \mathbf{R}\setminus\{1\} \to \mathbf{R}$,

$$g(x) = \begin{cases} x^2, & \text{dacă } x < 1 \\ 2 - x, & \text{dacă } x > 1 \end{cases}$$

poate fi prelungită prin continuitate în punctul $x = 1$ (definind $g(1) = 1$) (figura III.5).

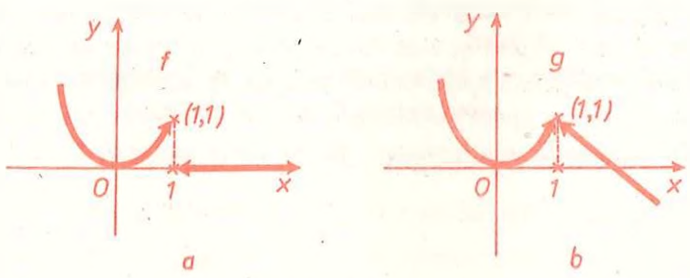


Fig. III.5

5) Dăm un exemplu de funcţie care nu este continuă în nici un punct, anume funcţia lui Dirichlet $\varphi : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$.

$$\varphi(x) = \begin{cases} 1, & \text{dacă } x \text{ este raţional} \\ 0, & \text{dacă } x \text{ este iraţional} \end{cases}$$

Graficul lui φ nu poate fi trasat.

Dacă $a \in \mathbf{Q}$, alegem $x'_n \to a$ (cu toţi $x'_n \in \mathbf{R}\setminus\mathbf{Q}$), atunci $\varphi(x'_n) = 0 \to 0$ pentru $n \to \infty$, în timp ce $\varphi(a) = 1$. Similar, dacă $a \in \mathbf{R}\setminus\mathbf{Q}$, alegem $x''_n \to a$ (cu toţi $x''_n \in \mathbf{Q}$) şi atunci $\varphi(x''_n) = 1$ şi $\lim\limits_{n\to\infty} \varphi(x''_n) = 1$, în timp ce $\varphi(a) = 0$. Aşadar, φ nu este continuă în nici un punct $a \in \mathbf{R}$. Toate punctele dreptei reale sînt discontinuităţi de speţa a doua pentru φ.

1.3. Operații cu funcții continue

TEOREMA III. 2. Fie $f, g: E \to \mathbf{R}$ ($E \subset \mathbf{R}$) funcții continue într-un punct $a \in E$, respectiv pe E. Atunci funcțiile $f+g$, $f-g$, fg sînt continue în a, respectiv pe E; dacă $g(a) \neq 0$, atunci $\frac{f}{g}$ este continuă în a [respectiv pe $E \setminus \{x \in E \mid g(x) = 0\}$].

Demonstrație. Conform observației făcute după definiția III.1, ne vom ocupa doar de cazul în care a este punct de acumulare al mulțimii E. Conform ipotezei, $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$ și $\lim\limits_{x\to a} g(x) = g(a)$. Atunci

$$\lim_{x\to a} (f \pm g)(x) = \lim_{x\to a} [f(x) \pm g(x)] = \lim_{x\to a} f(x) \pm \lim_{x\to a} g(x) = f(a) \pm g(a),$$

adică $\lim\limits_{x\to a} (f\pm g)(x) = (f\pm g)(a)$ și astfel am probat relația (1) din definiția III.1. Similar se procedează pentru fg și $\frac{f}{g}$.

Exemple

1) Funcția $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = \sin x + x^2$ este continuă pe $\mathbf{R}$ ca sumă a două funcții continue.

2) Funcția $f(x) = \operatorname{tg} x$ este continuă pe intervalul $I = \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, pentru că este cîtul $f(x) = \frac{\sin x}{\cos x}$ a două funcții continue și numitorul nu se anulează pe I.

(De altfel, în ambele cazuri funcțiile considerate sînt elementare.)

3) Dacă $f: E \to \mathbf{R}$ este continuă și $\lambda \in \mathbf{R}$, atunci λf este continuă (ca produsul dintre f și o funcție constantă). Orice funcție polinomială P, $P(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k x^k$ este continuă pentru că este o sumă finită de funcții continue, anume $P = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k \cdot (1_{\mathbf{R}})^k$.

TEOREMA III. 3. Fie $f: E_1 \to E_2$, $g: E_2 \to \mathbf{R}$ ($E_1, E_2 \subset \mathbf{R}$) două funcții reale și $h = g \circ f$ funcția lor compusă. Dacă f este continuă într-un punct $a \in E_1$ și g este continuă în punctul $b = f(a)$, atunci h este continuă în punctul a.

Dacă f este continuă pe E_1 și g continuă pe E_2, atunci h este continuă pe E_1.

Demonstrație. Fie orice șir $x_n \to a$ în E_1. Trebuie arătat că $h(x_n) \to h(a)$. Dar $f(x_n) \to b = f(a)$ în E_2, deoarece f este continuă în a și mai departe, $g(f(x_n)) \to g(b)$, deoarece g este continuă în b, adică $h(x_n) \to g(b) = g(f(a)) = h(a)$.

Ultima parte a enunțului este o consecință a primei părți.

Cu aceeași demonstrație se poate stabili o proprietate mai generală, anume: dacă a este un punct de acumulare pentru E_1 și dacă există $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$, $b \in E_2$, iar g este continuă în b, atunci există $\lim\limits_{x\to a} g(f(x)) = g(b)$. Plusul de generalitate este dat de faptul că punctul a poate să nu aparţină lui E_1. Relaţia anterioară se mai scrie

$$\lim_{x\to a} g(f(x)) = g(\lim_{x\to a} f(x))$$

şi se citeşte: *orice funcţie continuă comută cu limita.*

Considerăm, de asemenea, următorul caz: fie a punct de acumulare al mulţimii E_1 (dar a poate să nu aparţină lui E_1) şi fie $\lim_{x\to a} f(x) = b$, b fiind punct de acumulare al mulţimii E_2; dacă există o vecinătate V a lui a astfel încît pentru $x \in (V \cap E_1) \setminus \{a\}$, $f(x) \neq b$ şi dacă $\lim_{y\to b} g(y)$ există (în $\overline{\mathbf{R}}$), atunci există $\lim_{x\to a} g(f(x)) = \lim_{y\to b} g(y)$.

Demonstraţia se face exact ca mai înainte.

Exemple

1) Luînd $g(u) = e^u$, rezultă $\lim_{x\to a} e^{f(x)} = e^{\lim_{x\to a} f(x)}$ şi pentru $g = \sin f(x)$, $\lim_{x\to a} \sin f(x) = \sin \lim_{x\to a} f(x)$ etc.

2) Funcţia $h : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $h(x) = e^{-x^2}$ este continuă pe $\mathbf{R}$, deoarece este obţinută prin compunerea funcţiilor continue $x \longmapsto u = -x^2$ şi $u \longmapsto e^u$.

3) Considerăm $f : (0, \infty) \to (0, \infty)$, $f(x) = \frac{1}{x}$ şi $g : (0, \infty) \to \mathbf{R}$, $g(y) = \ln y$, $a = \infty$. Atunci $\lim_{x\to\infty} \ln \frac{1}{x} = \lim_{x\to\infty} g(f(x)) = \lim_{y\to 0} \ln y = -\infty$.

Teoremele III.2, III.3 se extind la sume, produse, compuneri ale unui număr finit oarecare de funcţii continue. De asemenea, dacă f, g sînt continue pe o mulţime E, atunci se pot considera funcţiile, definite în I.2.2:

$$|f| : E \to \mathbf{R}, \qquad x \longmapsto |f(x)|;$$
$$\max(f, g) : E \to \mathbf{R}, \qquad x \longmapsto \max(f(x), g(x));$$
$$\min(f, g) : E \to \mathbf{R}, \qquad x \longmapsto \min(f(x), g(x)).$$

Teorema care urmează arată că aceste funcţii sînt, de asemenea, continue.

TEOREMA III. 4. Dacă $f, g : E \to \mathbf{R}$ sînt funcţii continue în punctul $a \in E$ (respectiv pe mulţimea E), atunci $|f|$, $\max(f, g)$ şi $\min(f, g)$ au aceeaşi proprietate.

Demonstraţie. Funcţia $|f|$ este compunerea $g \circ f$ a funcţiilor continue $f : E \to \mathbf{R}$, $g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ unde $g(x) = |x|$ este funcţia-modul, deci $|f| = f \circ g$ este continuă; apoi, este suficient să observăm că $\max(f, g) = \frac{1}{2}(f + g + |f - g|)$ şi $\min(f, g) = \frac{1}{2}(f + g - |f - g|)$.

De remarcat că dacă $|f|$ este funcţie continuă, nu rezultă că f are această proprietate, aşa cum arată exemplul următor:

$$f(x)=\begin{cases}1, & \text{dacă } x\in\mathbf{Q}\\ -1, & \text{dacă } x\in\mathbf{R}\setminus\mathbf{Q}\end{cases}, \text{ unde } |f|=1.$$

EXERCIŢII (capitolul III, § 1)

1. a) Să se arate că funcţia $f:\mathbf{R}\setminus\{0\}\to\mathbf{R}$, $f(x)=\dfrac{1}{x}$ este continuă în punctele $x=1$ şi $x=-5$.

b) Să se arate că funcţia $f:(-\infty, 2]\to\mathbf{R}$, $f(x)=\sqrt{2-x}$ este continuă la stînga în punctul $x=2$.

2. Fie $f:[0, 3]\to\mathbf{R}$, $f(x)=x^2$. Să se arate că există $\delta>0$ astfel încît pentru orice x cu $|x-1|<\delta$ să avem $|f(x)-1|<\dfrac{1}{10}$; rezultă de aici că f este continuă în punctul $x=1$?

3. Care din funcţiile următoare $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ sînt continue pe $\mathbf{R}$:

a) $f(x)=|x-1|$;

b) $f(x)=x+|x|$;

c) $f(x)=\begin{cases}x, & \text{dacă } x<0\\ 2x+1, & \text{dacă } x\geqslant 0\end{cases}$;

d) $f(x)=x^3-\sqrt{x^2+1}$;

e) $f(x)=\begin{cases}e^{-x}, & \text{dacă } x\neq 0\\ 0, & \text{dacă } x=0\end{cases}$;

f) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin x}{x}, & \text{dacă } x\neq 0\\ 2, & \text{dacă } x=0\end{cases}$;

g) $f(x)=\operatorname{sgn}(\sin x)$;

h) $f(x)=\begin{cases}0, & \text{dacă } x<0\\ x, & \text{dacă } x\geqslant 0\end{cases}$?

4. Să se determine punctele de discontinuitate ale funcţiilor $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ definite prin

$$f(x)=\begin{cases}x, & \text{dacă } x \text{ este raţional}\\ 2x, & \text{dacă } x \text{ este iraţional}\end{cases};\qquad f(x)=\begin{cases}x^2, & \text{dacă } x\in\mathbf{Q}\\ 0, & \text{dacă } x\notin\mathbf{Q}\end{cases}.$$

5. Să se determine $a\in\mathbf{R}$ astfel încît funcţia $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $f(x)=\begin{cases}x+3, & \text{dacă } x\leqslant 3\\ ax, & \text{dacă } x>3\end{cases}$ să fie continuă în punctul $x=3$.

6. Să se determine constantele reale a şi b astfel încît funcţia $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$,

$$f(x)=\begin{cases}x^2+a, & \text{dacă } x\leqslant 2\\ ax+b, & \text{dacă } x>2\end{cases}$$

să fie continuă pe $\mathbf{R}$ şi, în plus, să existe $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{f(x)-f(2)}{x-2}$.

7. Fie $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ o funcţie astfel încît $|f(x)-x^2|\leqslant 2|x|$, $\forall x\in\mathbf{R}$. Să se arate că $f(0)=0$ şi că f este continuă în origine.

8. Să se arate că funcțiile

$$f : \mathbf{R}\setminus\{0\} \to \mathbf{R},\ f(x) = \begin{cases} 2x &, \text{ dacă } x < 0 \\ 2 - x, & \text{ dacă } x > 0 \end{cases},$$

$$g : \mathbf{R}\setminus\{0\} \to \mathbf{R},\ g(x) = \begin{cases} x &, \text{ dacă } x < 0 \\ \dfrac{1}{x} &, \text{ dacă } x > 0 \end{cases}$$

nu pot fi prelungite prin continuitate în punctul $x = 0$.

9. Se consideră funcția $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = \begin{cases} \sin \dfrac{1}{x}, & \text{dacă } x \neq 0 \\ 0 &, \text{dacă } x = 0 \end{cases}$. Să se arate că:

a) în orice vecinătate a originii există puncte unde f se anulează și puncte unde f ia valoarea 1;

b) pentru orice $A \in [-1, 1]$ există un șir de puncte $x_n \to 0$ astfel încît $f(x_n) \to A$;

c) nu există $f(0 - 0)$, $f(0 + 0)$, deci $x = 0$ este punct de discontinuitate de speța a doua pentru f. Să se schițeze graficul lui f.

10. Se consideră funcția $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = \begin{cases} x \sin \dfrac{1}{x}, & \text{dacă } x \neq 0 \\ 0 &, \text{dacă } x = 0 \end{cases}$. Să se arate că:

a) f este continuă pe întreg $\mathbf{R}$;

b) în nici o vecinătate a originii, funcția f nu este monotonă.

11. Funcția $\rho: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $\rho(x) = \left[x + \dfrac{1}{2}\right]$ poartă numele de „funcția de rotunjire".

a) Să se traseze graficul acestei funcții și să se indice punctele ei de discontinuitate.

b) Să se arate că „funcția dinte" $\varphi : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $\varphi(x) = |\rho(x) - x|$ are proprietățile următoare: $\varphi(x) = |x|$ pentru $x \in \left[-\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}\right]$, φ este periodică de perioadă 1, φ este continuă: să se traseze apoi graficul funcției φ.

12. Să se studieze continuitatea și să se traseze graficul pentru funcțiile următoare $(n \in N)$:

a) $f : (-1, 1) \to \mathbf{R}$, $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} x^n$; b) $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{e^{nx}}{1 + e^{nx}}$;

c) $f : \mathbf{R}\setminus\{-1\} \to \mathbf{R}$, $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x^n + x}{x^{2n} + 1}$; d) $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{nx}{1 + |nx|}$.

13. Să se dea exemplu de două funcții reale f, g discontinue pe un interval I astfel încît $f + g$ și fg să fie continue pe I.

14. Să se arate că funcția $\varphi(x) = \dfrac{\sin x}{x}$, $x \neq 0$ poate fi prelungită prin continuitate în punctul $x = 0$. Aceeași proprietate o are funcția $\psi(x) = x \sin \dfrac{1}{x}$, $x \neq 0$ dar nu și funcția $f(x) = \sin \dfrac{1}{x}$, $x \neq 0$.

§ 2. Proprietăți ale funcțiilor continue pe un interval

Funcțiile continue pe intervale posedă unele proprietăți generale care vor fi extrem de utile în continuare.

2.1. Proprietăți de mărginire

În general, o funcție continuă nu este mărginită. De exemplu, funcția $f : (0, \infty) \to \mathbf{R}$, $f(x) = x$ nu este mărginită superior. Ea este definită pe un interval nemărginit. Dar și funcția continuă $g : (0, 1] \to \mathbf{R}$, $g(x) = \frac{1}{x}$ nu este mărginită chiar dacă este definită pe un interval mărginit.

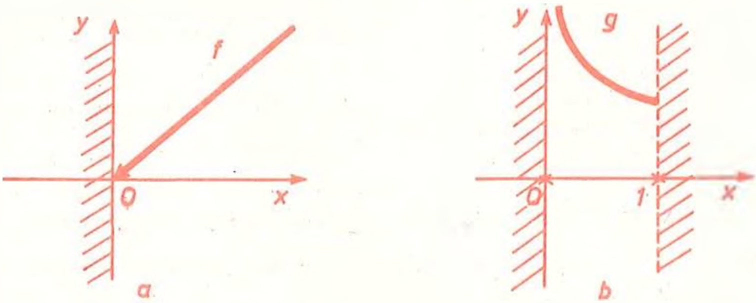


Fig. III.6

Să presupunem că $f : D \to \mathbf{R}$ este o funcție mărginită și fie m, M marginile lui f, $m = \inf\limits_{x \in D} f(x)$ și $M = \sup\limits_{x \in D} f(x)$.

Se spune că *f își atinge marginile pe D* dacă există un punct $\alpha \in D$ astfel încît $m = f(\alpha)$ și un punct $\beta \in D$ astfel încît $M = f(\beta)$. Pentru funcția continuă $f : [0, \infty) \to \mathbf{R}$, $f(x) = e^{-x}$, marginea inferioară este $m = 0$ și nu este atinsă pentru că nu există $\alpha \geqslant 0$ astfel încît $e^{-\alpha} = 0$. Similar, pentru funcția $g(x) = 1 - f(x)$, nu este atinsă marginea superioară $M = 1$.

Are loc totuși următorul rezultat fundamental, iar exemplele anterioare arată că este esențială condiția de compactcitate pusă intervalului de definiție.

TEOREMA III. 5. *(teorema lui Weierstrass de mărginire).* **Orice funcție continuă pe un interval compact este mărginită și își atinge marginile.**

Demonstrație. Fie $f : I \to \mathbf{R}$, $I = [a, b]$ o funcție continuă.

Arătăm mai întîi că f este mărginită. Presupunem, prin absurd, că f nu ar fi mărginită, și pentru a fixa ideile presupunem că f nu este mărginită superior. Atunci, rezultă că există un șir $(x_n)_{n \geqslant 0}$ de puncte din $[a, b]$, cu proprietatea că $f(x_n) = y_n \to \infty$. Șirul $(x_n)_{n \geqslant 0}$ fiind conținut în $[a, b]$ este însă mărginit, deci aplicînd lema lui Cesaró (pag. 47) deducem existența unui subșir convergent $(x_{k_n})_{n \geqslant 0}$ către un punct u care în mod necesar aparține lui $[a, b]$. Funcţia f este continuă în punctul u, deci $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_{k_n}) = f(u)$, dar şirul $(y_{k_n})_{n\geq 0} = (f(x_{k_n}))_{n\geq 0}$ ca subşir al unui şir, anume $(y_n)_{n\geq 0}$ ce tinde la infinit, va tinde el însuşi la infinit, adică $f(u) = \infty$, ceea ce este absurd căci funcţia f are valori în $\mathbf{R}$. f este mărginită superior. În mod similar se tratează cazul în care f ar fi presupusă nemărginită inferior.

Aşadar, am demonstrat că f este mărginită. Fie m, M marginile lui f pe intervalul $I = [a, b]$. Arătăm că există $\alpha \in I$ astfel încît $f(\alpha) = M$. În caz contrar, am avea $f(\alpha) \neq M$ pentru orice $\alpha \in I$ şi, ca atare, funcţia pozitivă $g : I \to \mathbf{R}$, $g(x) = \dfrac{1}{M - f(x)}$ este continuă pe I. Ea rezultă atunci mărginită, adică există $M_1 > 0$ astfel încît

$$0 < \frac{1}{M - f(x)} \leqslant M_1, \text{ pentru orice } x \in I.$$

De aici rezultă $f(x) \leqslant M - \dfrac{1}{M_1}$, $\forall\, x \in I$, ceea ce contrazice faptul că $M = \sup\limits_{x\in I} f(x)$ $\left(\text{pentru că } M - \dfrac{1}{M_1}\right.$ ar fi atunci un majorant pentru valorile lui f şi, ca atare, M nu ar fi cel mai mic majorant al acestora$\left.\right)$.

Se arată similar că marginea inferioară m este atinsă.

Exemple

1) Funcţia $f : [0, 3] \to \mathbf{R}$, $f(x) = 3x - x^2$ este continuă (fig. III.7, a); evident $m = 0 = f(0)$ şi $M = \dfrac{9}{4} = f\left(\dfrac{3}{2}\right)$ şi am verificat direct că f îşi atinge marginile. Restricţia lui f la intervalul deschis $(0, 3)$ nu îşi atinge marginea inferioară.

2) Funcţia continuă $g : (0, 1) \to \mathbf{R}$, $g(x) = x$ este mărginită, dar nu îşi atinge nici una din margini pe intervalul deschis $(0, 1)$ (fig. III.7, b).

3) Dacă $h : [a, b] \to \mathbf{R}$ este o funcţie monoton crescătoare, atunci $m = h(a)$, $M = h(b)$, adică marginile sînt atinse la capetele intervalului. Similar, dacă h este monoton descrescătoare, avem $m = h(b)$, $M = h(a)$ (fără a mai fi nevoie de ipoteza de continuitate a lui f).

4) Trebuie remarcat că punctele în care funcţia f îşi atinge marginile nu sînt neapărat unice. În exemplul 1, $m = f(0) = f(3)$, dar se pot da uşor exemple de funcţii continue neconstante avînd marginile atinse chiar într-o infinitate de puncte.

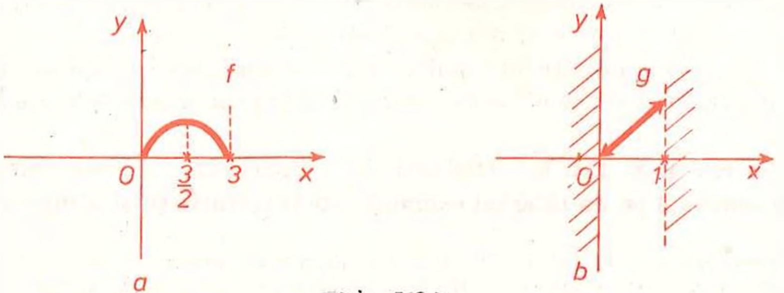


Fig. III.7

Presupunînd viteza unui automobil continuă, ca funcţie de timp, din teorema III.5 rezultă că în orice interval de timp I compact există o cea mai mare şi o cea mai mică valoare a vitezei (extremele globale ale vitezei pe I).

2.2. Proprietatea valorilor intermediare (a lui Darboux)

O proprietate a funcţiilor continue care apare evidentă din punct de vedere intuitiv şi poate părea caracteristică funcţiilor continue (ceea ce nu este adevărat) este aceea de a „nu sări valori".

DEFINIŢIA III. 2. Fie I un interval. Se spune că o funcţie $f : I \to \mathbf{R}$ are proprietatea lui Darboux pe intervalul I dacă, pentru orice puncte $x_1 < x_2$ din I şi oricare ar fi numărul c situat între $f(x_1)$ şi $f(x_2)$, există cel puţin un punct $\xi \in (x_1, x_2)$ astfel încît $f(\xi) = c$.

Cu alte cuvinte, o dată cu valorile luate în două puncte ale intervalului I, funcţia $x \longmapsto f(x)$ ia şi toate valorile intermediare, atunci cînd x parcurge intervalul dintre cele două puncte. Trebuie remarcat că această proprietate nu este legată de compactitatea intervalului de definiţie.

Intuitiv, dacă f este o funcţie continuă pe un interval $[a, b]$ şi $f(a) \neq f(b)$, atunci orice dreaptă $y = c$ situată între dreptele $y = f(a)$, $y = f(b)$ intersectează graficul neîntrerupt al lui f cel puţin o dată (figura III.8). Dar aceasta nu poate constitui o demonstraţie.

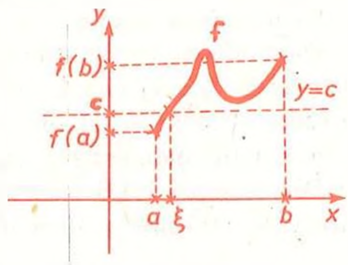


Fig. III.8

TEOREMA III. 6 *(a valorilor intermediare)*. **Orice funcţie continuă pe un interval are proprietatea lui Darboux pe acel interval.**

Demonstraţie. Stabilim în prealabil o lemă, importantă şi prin ea însăşi.

LEMĂ: Dacă $\varphi : [a, b] \to \mathbf{R}$ este o funcţie continuă şi $\varphi(a) \cdot \varphi(b) < 0$, atunci există cel puţin un punct $\xi \in (a, b)$ astfel încît $\varphi(\xi) = 0$.

Demonstraţia lemei. Pentru a fixa ideile, să presupunem că $\varphi(a) < 0$ şi $\varphi(b) > 0$. Fie $A = \{x \in [a, b] \mid \varphi(x) \leqslant 0\}$. Mulţimea A nu este vidă (căci, conform ipotezei, $\varphi(a) < 0$, deci $a \in A$) şi este mărginită (căci $A \subset [a, b]$). Atunci, în conformitate cu axioma lui Cantor, există $\xi = \sup A$. Desigur, $\xi \in [a, b]$. Afirmăm că $\varphi(\xi) = 0$. Într-adevăr, sau $\xi \in A$ sau $\xi \notin A$.

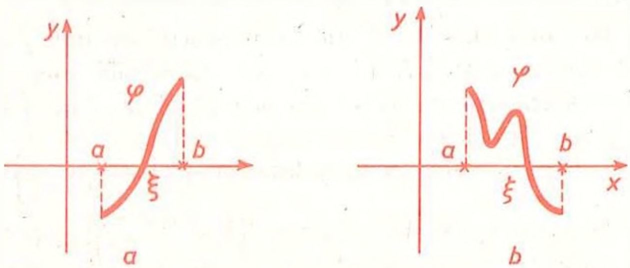


Fig. III.9

Dacă $\xi \notin A$, atunci $\varphi(\xi) > 0$ şi, conform ex. 5 pag. 46, există un şir $x_n \in A$, $x_n \to \xi$; avem $\varphi(x_n) \leqslant 0$ şi φ fiind continuă, $\lim\limits_{n\to\infty} \varphi(x_n) = \varphi(\xi)$. Rezultă că $\varphi(\xi) \leqslant 0$, contradicţie. Rămîne cazul $\xi \in A$, deci $\varphi(\xi) \leqslant 0$. Dacă $\varphi(\xi) < 0$, atunci din continuitatea lui φ în punctul ξ rezultă existenţa unei vecinătăţi U a punctului ξ astfel ca $x \in U$ să implice $\varphi(x) < 0$, deci există în particular puncte $x > \xi$ pentru care $\varphi(x) < 0$ (deci $x \in A$), ceea ce contrazice faptul că $\xi = \sup A$. Aşadar, în mod necesar, $\varphi(\xi) = 0$.

Trecem la demonstraţia propriu-zisă a teoremei.

Fie deci $f : I \to \mathbf{R}$ o funcţie continuă, $x_1 < x_2$ puncte oarecare din intervalul I şi c un număr situat între $f(x_1)$ şi $f(x_2)$. Considerînd funcţia $\varphi : I \to \mathbf{R}$, definită prin $\varphi(x) = f(x) - c$, avem $\varphi(x_1) \cdot \varphi(x_2) = (f(x_1) - c) \cdot (f(x_2) - c) \leqslant 0$, deci, conform lemei, există $\xi \in [x_1, x_2]$ astfel încît $\varphi(\xi) = 0$, adică $f(\xi) = c$, şi demonstraţia teoremei este încheiată.

Dacă viteza unui automobil este continuă ca funcţie de timp şi dacă la momentele $t_1 < t_2$ viteza automobilului are valori distincte $v_1 \neq v_2$, atunci teorema III.7 arată că orice viteză intermediară (între v_1 şi v_2) este atinsă la un anumit moment $t \in (t_1, t_2)$.

Din teorema III.6 rezultă că funcţiile continue transformă intervalele în intervale. Mai precis, demonstrăm următorul

COROLAR. Fie $I \subset \mathbf{R}$ un interval şi $f : I \to \mathbf{R}$ o funcţie continuă pe I. Mulţimea $J = f(I)$ este, de asemenea, un interval.

Demonstraţie. Avem de arătat că dacă α, β aparţin lui J şi $\alpha < c < \beta$, atunci $c \in J$. Dacă $\alpha = f(x_1)$, $\beta = f(x_2)$ cu $x_1, x_2 \in I$ şi $x_1 \neq x_2$. Dar, o dată cu valorile α, β, funcţia f ia şi valoarea intermediară c, adică există ξ între x_1 şi x_2 astfel încît $f(\xi) = c$, deci $c \in J$.

Cu ajutorul corolarului de mai sus se demonstrează riguros surjectivitatea unor funcţii elementare. De exemplu: fie $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = \sin x$; din faptul că $f\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -1$ şi $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$ şi din continuitatea funcţiei f rezultă că putem aplica teorema valorilor intermediare. Prin urmare, $f\left(\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]\right) = [-1, +1]$, adică aplicaţia $f : \mathbf{R} \to [-1, 1]$ este surjectivă.

În general, dacă marginile m, M ale unei funcţii continue $f : I \to \mathbf{R}$ pe un interval I sînt atinse, atunci $f(I) = [m, M]$; dacă nici una din marginile funcţiei nu este atinsă, atunci $f(I) = (m, M)$. [Aici $m = \inf\limits_I f$ şi $M = \sup\limits_I f$, calculate în $\overline{\mathbf{R}}$]. De exemplu, pentru funcţia $f : \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \to \mathbf{R}$, $f(x) = \operatorname{tg} x$, avem $m = -\infty$, $M = \infty$, deci $f\left(\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)\right) = (-\infty, \infty)$ şi f rezultă bijectivă.

Observații. 1) Dacă $I = [a, b]$ și f este continuă pe I, nu rezultă, în general, că m, M sînt atinse chiar în capetele intervalului I.

2) Dacă I este un interval compact și $f : I \to \mathbf{R}$ continuă, atunci intervalul $J = f(I)$ este compact, anume $J = [m, M]$. Dacă $I = (a, b)$ este un interval deschis și $f : I \to \mathbf{R}$ este continuă, nu putem afirma despre $J = f(I)$ decît că este un interval, fără a putea specifica dacă este închis, deschis, sau închis la un capăt; se poate întîmpla ca intervalul J să fie compact, sau nemărginit, cum vă puteți convinge singuri pe exemple simple.

2.3. Inversarea funcțiilor continue

Sîntem acum în măsură să ne ocupăm de problema inversării funcțiilor continue.

Fie $f : I \to \mathbf{R}$ o funcție injectivă pe un interval I. Atunci, notînd $J = f(I) = \{f(x) \mid x \in I\}$, este definită o aplicație bijectivă

$$f : I \to J \text{ (notat tot cu } f).$$

Conform corolarului precedent, dacă f este continuă, atunci J este un interval. Arătăm că *dacă o funcție $f : I \to \mathbf{R}$ este continuă și injectivă pe un interval I, atunci f este în mod necesar strict monotonă*. Într-adevăr, în caz contrar ar exista cel puțin trei puncte $x_1 < x_2 < x_3$ în I astfel încît

$$f(x_1) > f(x_2),\ f(x_2) < f(x_3) \text{ (sau } f(x_1) < f(x_2),\ f(x_2) > f(x_3)).$$

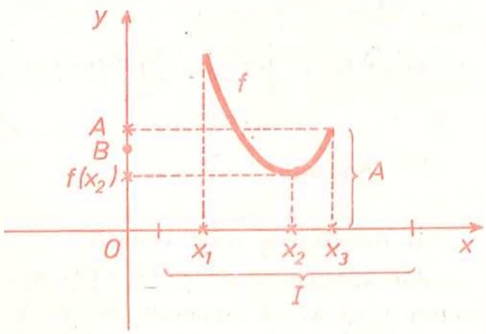


Fig. III.10

Ne situăm în primul caz, celălalt caz tratîndu-se analog (fig. III.10). Fie atunci $A = \min (f(x_1), f(x_3))$ și $B = \frac{A + f(x_2)}{2}$. Aplicînd teorema valorilor intermediare, există $\xi_1 \in (x_1, x_2)$ și $\xi_2 \in (x_2, x_3)$ astfel încît $f(\xi_1) = B$, $f(\xi_2) = B$. Așadar, $f(\xi_1) = f(\xi_2)$ și cum f este injectivă, rezultă $\xi_1 = \xi_2$, ceea ce este absurd.

Enunțăm și demonstrăm ultimul rezultat important al acestui capitol. În esență el arată că o funcție continuă pe un interval este inversabilă dacă și numai dacă este strict monotonă și atunci inversa ei este continuă și strict monotonă, adică inversarea funcțiilor continue se face pe intervale de strictă monotonie. Mai precis, are loc:

TEOREMA III. 7. Fie f o funcție continuă pe un interval I și $J = f(I)$. Funcția $f : I \to J$ este bijectivă dacă și numai dacă este strict monotonă și în acest caz, funcția $f^{-1} : J \to I$ este continuă și strict monotonă.

Demonstrație. Prima parte a teoremei a fost demonstrată anterior (pentru că este evident că o funcție strict monotonă pe I este injectivă). Pentru a fixa ideile, presupunem că f este strict crescătoare pe I. Atunci, rezultă că f^{-1} este strict crescătoare pe J (deoarece dacă $u_1 < u_2$ în J, $u_1 = f(x_1)$, $u_2 = f(x_2)$, avem neapărat $x_1 < x_2$, adică $f^{-1}(u_1) < f^{-1}(u_2)$).

Rămîne să arătăm că f^{-1} este continuă pe intervalul J; fie $y_0 \in J$ un punct oarecare, deci $y_0 = f(x_0)$ cu $x_0 \in I$. Presupunem că y_0 nu este o extremitate a lui J (celălalt caz tratîndu-se similar).

Pentru a arăta că f^{-1} este continuă în y_0, aplicăm definiţia III.1 şi fie U o vecinătate oarecare a lui $x_0 = f^{-1}(y_0)$. Alegem α, β astfel încît $(\alpha, \beta) \subset U$ şi $\alpha < x_0 < \beta$. Cum f este strict crescătoare, avem $f(\alpha) < f(x_0) < f(\beta)$. Alegem vecinătatea $V = (f(\alpha), f(\beta))$ a punctului $f(x_0)$. Avem de arătat că pentru orice $y \in V$ rezultă $f^{-1}(y) \in U$; într-adevăr, conform teoremei III.6, pentru acest y există $x \in (\alpha, \beta)$ astfel încît $y = f(x)$. Dar atunci $x = f^{-1}(y)$ aparţine intervalului (α, β), deci şi lui U. Teorema este complet demonstrată.

Observaţie. Teorema III.7 ne asigură că funcţiile inverse ale funcţiilor uzuale sînt continue. Fie, de exemplu, $n \geqslant 1$ întreg şi funcţia $f : [0, \infty) \to \mathbf{R}$, $f(x) = x^n$. Funcţia f este evident injectivă şi, conform teoremei III.6, este şi surjectivă de la $[0, \infty)$ la $[0, \infty)$, fiind continuă şi strict monotonă. Ea are deci o inversă, f^{-1} definită pe $[0, \infty)$ cu valori în $[0, \infty)$, care rezultă continuă conform teoremei III.7. Această inversă este funcţia radical definită prin $f^{-1}(y) = \sqrt[n]{y}$.

Analog, funcţia $\sin : \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \to [-1, 1]$ se poate inversa, iar funcţia inversă, $\arcsin : [-1, 1] \to \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ rezultă continuă în virtutea teoremei III.7.

2.4 Aplicaţii

a) Rezolvarea unor ecuaţii

Am văzut că dacă $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ este o funcţie continuă care ia valori de semn contrar în capetele intervalului, adică $f(a)f(b) < 0$, atunci ecuaţia $f(x) = 0$ are cel puţin o soluţie ξ pe intervalul (a, b), adică funcţia are un zerou pe acest interval. Dacă, în plus, funcţia f este strict crescătoare (sau strict descrescătoare) pe intervalul $[a, b]$, atunci soluţia ξ este unică.

Exemple

1) Funcţia $x^3 + 4x - 6 = 0$ are exact un zerou ξ situat pe intervalul $[1, 2]$. Într-adevăr, notînd $f(x) = x^3 + 4x - 6$, se obţine o funcţie continuă şi, în plus, $f(1) = -1$, $f(2) = 10$, deci $f(1)\,f(2) < 0$ şi, în plus, f este strict crescătoare pe intervalul $[1, 2]$.

2) Ecuaţia $2^x - 1 - \cos x = 0$ are cel puţin o soluţie în intervalul $[0, 1]$, deoarece punînd $f(x) = 2^x - 1 - \cos x$, avem $f(0) = -1$, $f(1) = 1 - \cos 1 > 0$.

b) Semnul unei funcţii

Dacă $f : I \to \mathbf{R}$ este o funcţie continuă pe un interval I şi dacă f nu se anulează în nici unul dintre punctele intervalului I (adică ecuaţia $f(x) = 0$ nu are soluţii pe I), atunci *funcţia f are în mod necesar un semn constant pe I.* Într-adevăr, în caz contrar ar exista puncte $x_1 < x_2$ pe I astfel încît $f(x_1) \cdot f(x_2) < 0$ şi atunci f s-ar anula într-un punct $\xi \in (x_1, x_2)$ care aparţine lui I.

În general, a studia semnul unei funcţii înseamnă a indica mulţimile de puncte în care funcţia este pozitivă sau negativă. Vom da o regulă practică importantă în stabilirea semnului unor funcţii elementare. Să presupunem că toate zerourile reale ale unei funcţii continue $f: I \to \mathbf{R}$ sînt $a_1 < a_2 < \dots$ $\dots < a_p < \dots$ (ele pot fi în număr infinit). Atunci pe fiecare din intervalele $(a_1, a_2), (a_2, a_3), \dots, (a_{p-1}, a_p)$ etc. funcţia are semn constant şi, ca atare, este suficient ca în fiecare din aceste intervale să alegem cîte un singur punct şi să determinăm semnul lui f acolo.

Exemple

1) Stabilim semnul funcţiei $f(x) = x^3 - x$ pe $\mathbf{R}$. Zerourile lui f sînt $a_1 = -1$, $a_2 = 0$, $a_3 = 1$. Pe fiecare din intervalele $I_1 = (-\infty, -1)$, $I_2 = (-1, 0)$, $I_3 = (0, 1)$, $I_4 = (1, \infty)$ funcţia f are semn constant. Alegem $\xi_1 = -2 \in I_1$, şi calculăm $f(\xi_1) = -6$; apoi luăm $\xi_2 = -\frac{1}{2} \in I_2$, $f(\xi_2) = \frac{3}{8}$; $\xi_3 = \frac{1}{2} \in I_3$, $f(\xi_3) = -\frac{3}{8}$; $\xi_4 = 3 \in I_4$, $f(\xi_4) = 24$. Aşadar, funcţia f este negativă pe I_1 şi I_3 şi pozitivă pe I_2 şi I_4.

2) Rezolvăm inecuaţia $(x^2 - 2x - 3) \cdot \lg x < 0$. Aşadar, $I = (0, \infty)$ şi zerourile funcţiei $f(x) = (x^2 - 2x - 3) \cdot \lg x$ pe I sînt $a_1 = 1$, $a_2 = 3$. Funcţia f are semn constant pe intervalele $I_1 = (0, 1)$, $I_2 = (1, 3)$, $I_3 = (3, \infty)$. Luînd $\xi_1 = \frac{1}{10} \in I_1$, $\xi_2 = 2 \in I_2$, $\xi_3 = 10 \in I_3$, avem $f(\xi_1) = \left(\frac{1}{100} - \frac{2}{10} - 3\right) \cdot \lg \frac{1}{10} = \frac{319}{100} > 0$, $f(\xi_2) < 0$, $f(\xi_3) > 0$. Ca atare, funcţia f este negativă pe I_2 şi răspunsul cerut este $x \in (1, 3)$.

EXERCIŢII (capitolul III, § 2)

1. Să se arate că funcţia $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = x^2 - x$ este mărginită pe orice interval $[1, a]$, $a > 1$, dar nu şi pe intervalul $[1, \infty)$.

2. Să se arate că funcţia $f: (1, 2) \to \mathbf{R}$, $f(x) = x^2 - 2x$ este mărginită pe intervalul deschis $(1, 2)$, dar nu îşi atinge marginile.

3. Să se arate că dacă $f: [0, \infty) \to \mathbf{R}$ este o funcţie continuă şi $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = 0$, atunci f este mărginită.

4. Să se arate că funcţiile σ şi sgn au proprietatea lui Darboux pe intervalele $(-\infty, 0)$, $(0, \infty)$, nu şi pe intervale de forma $[-a, a]$, $a > 0$.

5. Funcţia $f: \mathbf{R} \setminus \{0\} \to \mathbf{R}$, $f(x) = \frac{2}{x}$ are proprietatea că $f(-1) = -2$ şi $f(1) = 2$, deci ia valorile -2 şi 2, totuşi ea nu ia valoarea zero. Se contrazice astfel teorema III.7?

6. Să se arate că pentru orice funcţie $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ continuă şi mărginită există $\xi \in \mathbf{R}$ astfel încît $f(\xi) = \xi$.

7. Să se arate că funcţiile $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ următoare se anulează cel puţin o dată pe mulţimile indicate:

a) $f(x) = -x^3 + 6x + 20$ pe $\mathbf{R}$;

b) $f(x) = x^4 + 3x + 1$ pe $[-1, 0]$;

c) $f(x) = ax^{2n+1} + bx + c$ pe $\mathbf{R}$ (a, b, c fiind constante reale şi $n \in \mathbf{N}$);

d) $f(x) = (x - 2) \sin \pi x$ pe $\left[\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right]$.

8. Să se rezolve inecuaţiile:

a) $(x^2 - 4) \lg x > 0$; b) $(x^2 + 4x - 5)(2^x - 4) < 0$; c) $x \sin x > 0$.

9. Să se determine $a > 0$ minim, astfel încît funcţia $f: [a, \infty) \to \mathbf{R}$, $f(x) = x^4 - 10x^2 + 9$ să fie injectivă. Să se studieze apoi continuitatea aplicaţiei inverse $f^{-1}: J \to I$, unde $I = [a, \infty)$, $J = f(I)$.

10. Fie $f : [0, \infty) \to \mathbf{R}$ o funcţie continuă astfel încît să existe şi să fie finită limita $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$. Să se arate că f este mărginită.

11. Să se arate că $f(x) = \begin{cases} \sin \dfrac{1}{x}, & \text{dacă } x \neq 0 \\ a, & \text{dacă } x = 0 \end{cases}$ are proprietatea lui Darboux dacă şi numai dacă $a \in [-1, +1]$.

12. Fie $f(x) = \begin{cases} x, & \text{dacă } x \in \mathbf{Q} \cap [0, 1] \\ x^3, & \text{dacă } x \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q} \cap [0, 1] \end{cases}$. Să se arate că $f([0, 1])$ este un interval, dar că f nu are proprietatea lui Darboux.

EXERCIŢII ŞI PROBLEME REZOLVATE LA CAPITOLUL III

1. *Să se arate că o funcţie $f : (a, b) \to \mathbf{R}$ este continuă dacă şi numai dacă $\forall\, x \in (a, b)$, avem $\lim\limits_{h\to 0} [f(x + h) - f(x)] = 0$.*

Soluţie. Aceasta este numai o reformulare a definiţiei. Pentru orice $x_0 \in (a, b)$, condiţia de continuitate este $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$, adică $\lim\limits_{x\to x_0} [f(x) - f(x_0)] = 0$ şi, notînd $x - x_0 = h$, $\lim\limits_{h\to 0} [f(x_0 + h) - f(x_0)] = 0$.

Folosind variaţiile (sau „creşterile", cum se mai numesc) $\Delta f(x) = f(x) - f(x_0)$, $\Delta x = x - x_0$, condiţia de continuitate a lui f în punctul x_0 revine la faptul că $\lim\limits_{\Delta x\to 0} \Delta f(x) = 0$.

2. *Să se studieze continuitatea în punctul $x = 1$ pentru fiecare din funcţiile $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ următoare:*

a) $f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{dacă } x \leq 1 \\ 2x - 1, & \text{dacă } x > 1 \end{cases}$;

b) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{5}{x - 1}, & \text{dacă } x \neq 1 \\ 1, & \text{dacă } x = 1 \end{cases}$;

c) $f(t) = \dfrac{\sqrt[3]{t - 1} - 2t}{t}$ pentru $t \neq 0$; $f(0) = 1$;

d) $f(t) = \begin{cases} 0, & \text{dacă } 1 - \dfrac{1}{10^5} < t < 1 + \dfrac{1}{10^5} \\ 3, & \text{în rest} \end{cases}$.

Soluţie: a) Avem $f(1 - 0) = \lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}} x^2 = 1$; $f(1 + 0) = \lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}} (2x - 1) = 1$ şi $f(1) = 1^2 = 1$, deci $f(1 - 0) = f(1 + 0) = f(1)$ şi, ca atare, f este continuă.

b) $f(1 - 0) = \lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}} f(x) = -\infty$, $f(1 + 0) = \infty$, $f(1) = 1$. Funcţia f este discontinuă în punctul $x = 1$.

c) Funcţia f este definită şi continuă în $\mathbf{R} \setminus \{0\}$.

d) Funcţia f este continuă în punctul $x = 1$ deoarece restricţia ei la vecinătatea $\left(1 - \dfrac{1}{10^5}, 1 + \dfrac{1}{10^5}\right)$ a punctului $x = 1$ este constantă, deci continuă.

3. *Să se arate că dacă $f, g : E \to \mathbf{R}$ sînt funcţii continue într-un punct $x_0 \in E$ şi dacă $f(x_0) < g(x_0)$, atunci există $\delta > 0$ astfel încît $f(x) < g(x)$ pentru orice $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \cap E$.*

Soluție. Notăm $h = g - f$, deci h este continuă în x_0 și $h(x_0) > 0$. Atunci h rămîne strict pozitivă pe o vecinătate a lui x_0, adică există $\delta > 0$ astfel încît $h(x) > 0$, $\forall\, x \in (x_0 - \delta,\ x_0 + \delta) \cap E$.

4. *Fie $f, g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ două funcții continue astfel încît $f(x) = g(x)$, $\forall\, x \in \mathbf{Q}$. Să se arate că $f = g$. Rămîne concluzia adevărată dacă $f(x) = g(x)$, $\forall\, x \in \mathbf{Z}$?*

Soluție. Fie $a \in \mathbf{R}$ arbitrar fixat. Alegem un șir de numere raționale $x_n \to a$. Deoarece f, g sînt continue în a, avem $f(x_n) \to f(a)$, $g(x_n) \to g(a)$, și cum $f(x_n) = g(x_n)$, $\forall\, n \geqslant 0$, rezultă $f(a) = g(a)$. Răspunsul la ultima întrebare este negativ, așa cum arată funcțiile $f(x) = \sin \pi x$, $g(x) = 0$.

5. *Să se arate că pentru orice $x \in \mathbf{R}$ este bine definit numărul $\varphi(x) = \min\limits_{k \in \mathbf{Z}} |x - k|$ și că funcția $\varphi : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ este continuă pe $\mathbf{R}$.*

Soluție. Fixînd $x \in \mathbf{R}$, $\varphi(x)$ este cea mai mică distanță posibilă de la x la un număr întreg. Dacă $x \in [0, 1]$ se observă că

$$\varphi(x) = \begin{cases} x\ , & \text{dacă } 0 \leqslant x \leqslant \dfrac{1}{2} \\ 1 - x, & \text{dacă } \dfrac{1}{2} < x \leqslant 1 \end{cases} \qquad \text{Apoi } \varphi(x + 1) = \varphi(x),\ \forall\, x \in \mathbf{R},$$

deci φ este periodică de perioadă 1. Se verifică direct continuitatea lui φ în puncte din $\mathbf{R} \setminus \mathbf{Z}$, iar în orice punct întreg k, $\varphi(k - 0) = \varphi(k + 0) = 0$. Graficul lui φ este schițat în figura III.11.

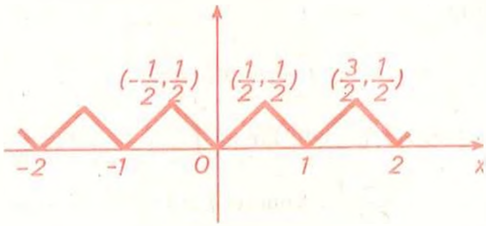


Fig. III.11

6. *Se consideră treapta unitate $\sigma : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$.*

$$\sigma(x) = \begin{cases} 0, & \text{dacă } x < 0 \\ 1, & \text{dacă } x \geqslant 0 \end{cases}$$

Să se arate că σ este discontinuă în $x = 0$ și că pentru orice $\varepsilon > 0$ există o funcție continuă $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, astfel încît $f(x) = \sigma(x)$ pentru orice $x \in (-\infty, 0) \cup [\varepsilon, \infty)$.

Soluție. Avem $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x < 0}} \sigma(x) = 0$, $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \sigma(x) = 1$, deci σ este discontinuă în $x = 0$. Considerăm apoi funcția

$$f(x) = \begin{cases} 0\ , & \text{dacă } x < 0 \\ 1\ , & \text{dacă } x \geqslant \varepsilon \\ \dfrac{1}{\varepsilon}\, x, & \text{dacă } 0 \leqslant x < \varepsilon \end{cases}$$

Este evident că f este continuă pe $\mathbf{R}$ și $f(x) = \sigma(x)$, dacă $x < 0$ și dacă $x \geqslant \varepsilon$.

7. a) *Fie $a < b$. Să se arate că ecuația $(x^2 + 1)(x - b) + (x^4 + 1)(x - a) = 0$ are cel puțin o rădăcină în intervalul (a, b).*

b) *Fie $a < b < c$ fixate. Să se arate că ecuația $\dfrac{1}{x - a} + \dfrac{2}{x - b} + \dfrac{3}{x - c} = 0$ are o soluție cuprinsă în (a, b) și o a doua în (b, c).*

Soluţie. a) Notăm $f(x) = (x^2 + 1)(x - b) + (x^4 + 1)(x - a)$. Deoarece $f(a) = (a^2 + 1)(a - b) < 0$, $f(b) = (b^4 + 1)(b - a) > 0$, atunci funcţia continuă f se anulează cel puţin o dată pe intervalul (a, b).

b) Ecuaţia este echivalentă în $\mathbf{R} \setminus \{a, b, c\}$ cu $g(x) = (x - b)(x - c) + 2(x - c)(x - a) + 3(x - a)(x - b) = 0$. Avem $g(a) = (a - b)(a - c) > 0$, $g(b) < 0$, $g(c) > 0$ etc.

8. *Să se arate că orice funcţie polinomială de grad impar are cel puţin un zero real.*

Soluţie. Fie $f(x) = a_0 x^{2n+1} + a_1 x^{2n} + \ldots + a_{2n+1}$; pentru a fixa ideile, presupunem $a_0 > 0$. Deoarece $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$, există α astfel încît $f(\alpha) < 0$. Apoi $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = \infty$, deci există $\beta > \alpha$ astfel încît $f(\beta) > 0$. Aşadar, f se anulează între α şi β, conf. lemei de la pag. 111.

9. *Să se studieze semnul următoarelor funcţii:*

a) $f(x) = x(x - a)(x - b)$, *unde* $0 < a < b$ *sînt constante;*

b) $f(x) = (x + 1) \ln(-x)$, $x < 0$;

c) $f(x) = \sin x + \cos x$, $x \in [0, 2\pi]$;

d) $(x) = \operatorname{sh} x$.

Soluţie. a) Zerourile funcţiei f sînt 0, a, b. Pe intervalele $(-\infty, 0)$, (a, b) funcţia este negativă, iar pe intervalele $(0, a)$, (b, ∞) funcţia este pozitivă.

b) Funcţia este definită pe intervalul $I = (-\infty, 0)$. Ea are un singur punct unde se anulează, $x = -1$. Pe ambele intervale $(-\infty, -1)$, $(-1, 0)$ funcţia f este negativă (are semn constant pe fiecare interval şi, de exemplu, $f(-\mathrm{e}) = (-\mathrm{e} + 1) \cdot \ln \mathrm{e} = 1 - \mathrm{e} < 0$, $f\left(-\frac{1}{\mathrm{e}}\right) = \left(1 - \frac{1}{\mathrm{e}}\right) \cdot \ln \frac{1}{\mathrm{e}} = \frac{1}{\mathrm{e}} - 1 < 0$.

c) Zerourile lui f pe intervalul $I = [0, 2\pi]$ sînt $\frac{3\pi}{4}$, $\frac{7\pi}{4}$. Pe intervalele $\left[0, \frac{3\pi}{4}\right]$, $\left[\frac{7\pi}{4}, 2\pi\right]$ funcţia este pozitivă $(f \geqslant 0)$, iar pe $\left(\frac{3\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}\right)$ funcţia este negativă $(f < 0)$.

d) $f(x) = \dfrac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{2} = \dfrac{\mathrm{e}^{2x} - 1}{2\mathrm{e}^x}$. Funcţia f este negativă pe $(-\infty, 0)$ şi pozitivă pe $(0, \infty)$.

10. *Fie I un interval şi $f : I \to \mathbf{R}$ o funcţie avînd proprietatea lui Darboux. Să se arate că:*

a) *dacă f nu se anulează pe I, atunci f are semn constant pe I;*

b) *dacă f are limite laterale în orice punct din I, atunci f este continuă pe I.*

Soluţie. a) Dacă, prin absurd, f nu ar avea semn constant pe I, atunci ar exista $a, b \in I$ astfel încît $f(a) < 0$, $f(b) > 0$. Atunci f ar lua, o dată cu valorile $f(a)$, $f(b)$, şi valoarea intermediară zero, adică ar exista c cuprins între a, b (deci $c \in I$), astfel încît $f(c) = 0$, ceea ce contravine ipotezei că f nu se anulează pe I.

b) Admitem, prin absurd, că f nu ar fi continuă într-un punct $x_0 \in I$; conform ipotezei, două din numerele $l_s = f(x_0 - 0)$, $l_d = f(x_0 + 0)$, $f(x_0)$ sînt distincte. Să presupunem, de exemplu, că $f(x_0) < l_s$ şi fie $\varepsilon = l_s - f(x_0)$. Atunci există $\delta > 0$ astfel încît dacă $x \in (x_0 - \delta, x_0)$, atunci $l_s - \frac{\varepsilon}{2} < f(x) < l_s + \frac{\varepsilon}{2}$, adică $f(x_0) + \frac{\varepsilon}{2} < f(x) < f(x_0) + \frac{3\varepsilon}{2}$. Fixăm $x_1 \in (x_0 - \delta, x_0)$, deci $f(x_1) > f(x_0) + \frac{\varepsilon}{2}$. Deoarece f are proprietatea lui Darboux pe I, o dată cu valorile $f(x_0)$, $f(x_1)$, funcţia f ia valoarea intermediară $f(x_0) + \frac{\varepsilon}{4}$, adică există $c \in (x_1, x_0)$ astfel încît $f(c) = f(x_0) + \frac{\varepsilon}{4}$. Dar $f(c) > f(x_0) + \frac{\varepsilon}{2}$, adică $f(x_0) + \frac{\varepsilon}{4} > f(x_0) + \frac{\varepsilon}{2}$, ceea ce este absurd.

11. *Fie* $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ *o funcție astfel încît* $|f(x) - f(y)| \leqslant \sqrt{|x - y|}$ *pentru orice* $x, y \in \mathbf{R}$. *Să se arate că există* $a > 0$ *astfel încît* $|x| \leqslant a$ *să implice* $|f(x)| < a$. *Deduceți că există un punct* $u \in \mathbf{R}$ astfel încît $f(u) = u$.

Soluție. Evident, f este continuă pe $\mathbf{R}$. Partea secundă rezultă astfel: se consideră funcția continuă $g : [-a, a] \to \mathbf{R}$, $g(x) = f(x) - x$ și rezultă $g(-a) \cdot g(a) = (f(-a) + +a) \cdot (f(a) - a) < 0$ pentru orice $x \in [-a, a]$, deci există $u \in [-a, a]$ astfel încît $g(u) = 0$, adică $f(u) = u$. Rămîne de demonstrat prima parte a enunțului. Pentru $y = 0$ se obține $|f(x) - f(0)| \leqslant \sqrt{|x|}$, deci $|f(x)| \leqslant |f(0)| + \sqrt{|x|}$ pentru orice $x \in \mathbf{R}$. Dacă nu ar exista a ca în enunț, atunci pentru orice $a > 0$, ar exista x, $|x| \leqslant a$ și $|f(x)| \geqslant a$; luînd $a = n$, $n \geqslant 1$ întreg, există x_n, $|x_n| \leqslant n$ astfel încît $|f(x_n)| \geqslant n$, deci $n \leqslant |f(0)| + +\sqrt{|x_n|} \leqslant |f(0)| + \sqrt{n}$ pentru orice n. Împărțind cu $\sqrt{n}$ și făcînd $n \to \infty$, se ajunge la o absurditate.

12. Fie $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ o funcție continuă (pe un interval compact). Să se arate că $\forall \varepsilon > 0$, $\exists\, \delta > 0$ astfel încît $\forall\, x, y \in [a, b]$, $|x - y| < \delta$ să avem $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$.

Soluție. Dacă nu ar fi îndeplinită condiția din enunț, ar exista $\varepsilon > 0$ astfel încît $\forall \delta > 0$ și, în particular, pentru $\delta = \frac{1}{n}$ ($n \geqslant 1$ întreg) să existe $x_n, y_n \in [a, b]$, $|x_n - y_n| < \frac{1}{n}$ și $|f(x) - f(y)| \geqslant \varepsilon$. Conform lemei lui Cesaró, șirurile $(x_n)_{n \geqslant 1}$, $(y_n)_{n \geqslant 1}$, fiind mărginite, au subșiruri convergente $x_{k_n} \to \xi$, $y_{k_n} \to \eta$. Deoarece $|x_{k_n} - y_{k_n}| < \frac{1}{k_n} \leqslant \frac{1}{n}$, rezultă $\xi = \eta$. Deoarece f este continuă, rezultă $f\left(x_{k_n}\right) \to f(\xi)$, $f\left(y_{k_n}\right) \to f(\xi)$, deci $f\left(x_{k_n}\right) - - f\left(y_{k_n}\right) \to 0$ pentru $n \to \infty$ și rezultă $0 \geqslant \varepsilon$, ceea ce este absurd.

(Condiția $\varepsilon - \delta$ din enunț se mai numește condiția de continuitate uniformă a lui f pe intervalul $[a, b]$. Atunci enunțul se poate formula astfel: *orice funcție continuă pe un interval compact este uniform continuă.)*

Capitolul IV
FUNCŢII DERIVABILE

Una din noţiunile fundamentale ale analizei matematice, şi în fond ale întregii ştiinţe, este cea de derivată, atribuită deopotrivă lui G. Leibniz (1646—1716) şi lui I. Newton (1642—1727). Această noţiune modelează ceea ce s-ar putea numi „viteza de variaţie a unei funcţii", permite adîncirea studiului local şi global al funcţiilor şi, în acelaşi timp, stă la baza formulării matematice a numeroase legi ale fizicii. De altfel, I. Newton a introdus şi a utilizat în mod sistematic conceptul de derivată tocmai în legătură cu studiul legilor mecanicii. Se întîlnesc derivate în studiul vitezei de deplasare a unui mobil, vitezei de variaţie a temperaturii unui corp sau a intensităţii curentului electric, în definiţia densităţii liniare a unei bare şi oriunde interesează rata vreunei schimbări.

§ 1. Derivata unei funcţii într-un punct

1.1. Originea noţiunii de derivată

Au existat două probleme, una fizică — modelarea matematică a noţiunii intuitive de viteză a unui mobil — şi alta geometrică — tangenta la o curbă plană —, care au condus la descoperirea noţiunii de derivată. Am folosit de mai multe ori referiri la viteza unui mobil, dar abia acum vom putea da definiţia matematică a acestui concept.

a) *Viteza instantanee a unui mobil.* Presupunem că pe o axă Δ se mişcă un mobil în sensul pozitiv al axei şi că la momentul t mobilul se află în punctul de abscisă $s(t)$. Dacă mişcarea este uniformă, atunci pentru orice două momente t_1, t_2 ($t_1 \neq t_2$) raportul $\frac{s(t_2) - s(t_1)}{t_2 - t_1}$ este constant, egal cu viteza v a mobilului; în acest caz, se ştie că $s(t) = v \cdot t$. Ce se întîmplă însă dacă mobilul nu mai are o mişcare uniformă, deşi se mişcă pe aceeaşi axă Δ? Raportul anterior nu va mai fi constant şi pentru orice momente t_1, $t_2 (t_1 \neq t_2)$ raportul $\frac{s(t_2) - s(t_1)}{t_2 - t_1}$ dintre distanţa parcursă şi timpul scurs se numeşte *viteza medie* a mobilului între momentele respective (de remarcat că nu am fixat o ordonare a momentelor t_1, t_2). Să considerăm acum un moment t_0 de referinţă. Practic nu există mişcări uniforme, dar pe intervale din ce în ce mai mici mişcarea tinde să devină uniformă. Pentru $t \to t_0$, $t \neq t_0$ se poate considera că mişcarea mobilului pe intervalul de timp dintre t_0 şi t tinde să devină uniformă, iar viteza medie respectivă tinde către o caracteristică a mişcării exact la momentul t_0. Aceasta sugerează definiţia *vitezei instantanee a mobilului la momentul* t_0 ca fiind limita

(1) $v(t_0) = \lim\limits_{t\to t_0} \dfrac{s(t) - s(t_0)}{t - t_0}$,

în ipoteza că această limită există. Aşadar, $v(t_0)$ este limita pentru $t \to t_0$ a vitezei medii a mobilului între momentul t_0 şi momentul $t \neq t_0$.

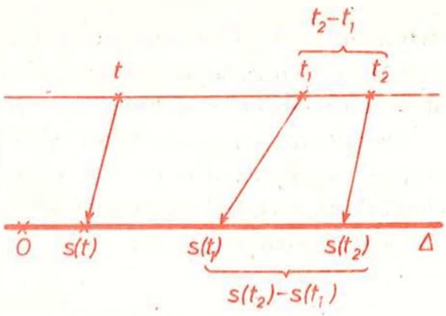


Fig. IV.1

De exemplu, în studiul căderii corpurilor în vid s-a dovedit că spaţiul parcurs în metri după t secunde este $s(t) = \frac{1}{2} gt^2$. Fixînd un moment oarecare t_0, viteza la momentul t_0 este

$$v(t_0) = \lim_{t\to t_0} \frac{\frac{1}{2} gt^2 - \frac{1}{2} gt_0^2}{t - t_0} = \frac{1}{2} \lim_{t\to t_0} g(t + t_0) = \frac{1}{2} g \cdot 2t_0 = g \cdot t_0$$

şi viteza la orice moment t va fi $v(t) = g \cdot t$ (g este acceleraţia gravitaţională g $\simeq$ 9,81 m/s²).

În mod asemănător, dacă $v(t)$ este viteza mobilului la orice moment t, atunci se defineşte *acceleraţia mobilului la momentul* t_0 ca fiind

$$a(t_0) = \lim_{t\to t_0} \frac{v(t) - v(t_0)}{t - t_0},$$

în ipoteza că această limită există. Legea fundamentală a mecanicii lui Newton arată că la fiecare moment t forţa $F(t)$ care acţionează asupra mobilului, masa m a mobilului şi acceleraţia $a(t)$ sînt legate prin relaţia $F(t) = m \cdot a(t)$.

b) O limită de tipul (1) apare şi într-o problemă pur geometrică. Fie $f : (a, b) \to \mathbf{R}$ o funcţie continuă în punctul $x_0 \in (a, b)$ şi (C) graficul lui f; aşadar, punctul M_0 de coordonate $(x_0, f(x_0))$ aparţine lui (C). Pentru grafice speciale (de exemplu pentru un semicerc $y = \sqrt{R^2 - x^2}$, $x_0 \in (-R, R)$) există o noţiune elementară de tangentă şi este interesant şi important să

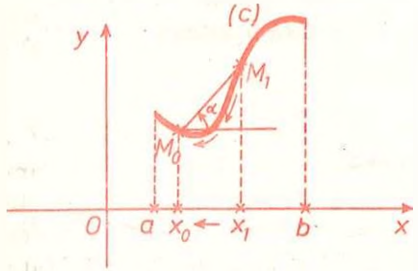


Fig. IV.2

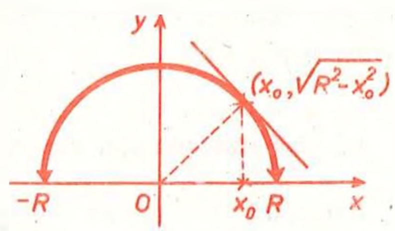


Fig. IV.3

extindem această noţiune. Corespunzător intuiţiei, tangenta în M_0 la (C) trebuie să fie o dreaptă trecînd prin M_0 şi rămîne să vedem ce legătură există între coeficientul ei unghiular şi ecuaţia $y = f(x)$ a lui (C).

Alegînd un punct oarecare $x_1 \neq x_0$ din (a, b) şi notînd cu $M_1(x_1, f(x_1))$ punctul corespunzător pe (C), intuitiv tangenta în M_0 trebuie să fie limita secantei M_0M_1 cînd M_1 tinde către M_0. În termeni precişi, secanta M_0M_1 are coeficientul unghiular

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} \quad \text{(fig. IV.2)}$$

(α fiind măsura — depinzînd de x_1 — a unghiului făcut de semidreapta M_0M_1 cu semidreapta de capăt M_0 paralelă cu Ox). Presupunînd că există limita

$$(2) \qquad m = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0},$$

aceasta este, prin definiţie, coeficientul unghiular al tangentei în M_0 la (C). (Dacă această limită este $+\infty$ sau $-\infty$, tangenta în M_0 la (C) este verticală.) Dreapta trecînd prin M_0 avînd coeficientul unghiular m este, prin definiţie, *tangenta în* M_0 *la* (C) şi are ecuaţia

$$(3) \qquad y - f(x_0) = m(x - x_0).$$

În cazul semicercului (fig. IV.3) avem $f(x) = \sqrt{R^2 - x^2}$ şi în punctul $M_0(x_0, \sqrt{R^2 - x_0^2})$ coeficientul unghiular al tangentei este

$$m = \lim_{x_1 \to x_0} \frac{\sqrt{R^2 - x_1^2} - \sqrt{R^2 - x_0^2}}{x_1 - x_0} = \lim_{x_1 \to x_0} \frac{x_0^2 - x_1^2}{(x_1 - x_0)\left(\sqrt{R^2 - x_1^2} + \sqrt{R^2 - x_0^2}\right)} =$$

$$= -\lim_{x_1 \to x_0} \frac{(x_0 + x_1)}{\sqrt{R^2 - x_1^2} + \sqrt{R^2 - x_0^2}} = -\frac{x_0}{\sqrt{R^2 - x_0^2}}.$$

Se observă că tangenta în M_0 la semicerc este perpendiculară pe raza OM_0 care are coeficientul unghiular $\dfrac{f(x_0) - 0}{x_0 - 0} = \dfrac{\sqrt{R^2 - x_0^2}}{x_0} = -\dfrac{1}{m}$. Aceasta arată că în cazul semicercului cele două definiţii ale tangentei într-un punct coincid.

Se pot da numeroase alte exemple în care apare în mod firesc limita unui raport între „creşterea funcţiei" şi „creşterea variabilei", ca în cazul limitelor (1), (2). Vom reveni la astfel de exemple după ce fixăm cîteva definiţii şi prime rezultate.

1.2. Definiţia derivatei unei funcţii într-un punct

Exemplele considerate mai sus sugerează introducerea următoarei definiţii fundamentale. Fie o funcţie $f : E \to \mathbf{R}$ $(E \subset \mathbf{R})$ şi $x_0 \in E$, x_0 fiind totodată şi punct de acumulare al mulţimii E. Reţinem că f este definită în x_0.

DEFINIȚIA IV. 1. 1) Se spune că funcția f **are derivată** în punctul x_0, dacă există limita (în $\overline{\mathbf{R}}$)

(4) $$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}, \text{ notată cu } f'(x_0);$$

2) Dacă derivata $f'(x_0)$ există și este finită se spune că funcția f **este derivabilă** în punctul x_0.

Observații. 1. Se poate întîmpla ca $f'(x_0)$ să existe și să fie $+\infty$ sau $-\infty$.

2. Trebuie remarcat că problema existenței derivatei sau a derivabilității nu se pune în punctele izolate ale mulțimii E (dacă E are astfel de puncte!).

Mai tîrziu vom introduce și alte notații ale derivatei. Trebuie remarcat că în studiul derivabilității unei funcții într-un punct intervin doar valorile acelei funcții într-o vecinătate a punctului; se mai spune că derivabilitatea este o proprietate *locală* (ca și existența limitelor de funcții sau continuitatea).

Presupunem că $f'(x_0)$ există; făcînd translația $x - x_0 = h$, atunci din (4) rezultă că

(5) $$f'(x_0) = \lim_{\substack{h \to 0 \\ x_0 + h \in E}} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$

Uneori se utilizează notațiile $\Delta x = x - x_0$, $\Delta f = f(x) - f(x_0)$, deci $f'(x_0) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x}$, adică derivata lui f într-un punct x_0 este limita dintre „creșterea funcției f" și „creșterea argumentului în punctul x_0" cînd aceasta din urmă tinde către zero. Nu vom folosi însă aceste notații.

DEFINIȚIA IV. 2. Dacă o funcție $f: E \to \mathbf{R}$ ($E \subset \mathbf{R}$) este derivabilă în orice punct al unei submulțimi $F \subset E$, atunci se spune că f **este derivabilă** pe mulțimea F. În acest caz, funcția

$$F \to \mathbf{R},\ x \mapsto f'(x)$$

se numește **derivata lui** f pe mulțimea F și se notează cu f'. Operația prin care f' se obține din f se numește **derivarea** lui f.

Dacă $y = f(x)$, f derivabilă, se mai scrie, prin abuz, $y' = f'(x)$; uneori se folosesc notațiile echivalente $y' = \frac{dy}{dx} = \frac{df}{dx} = \frac{d}{dx}(f)$, indicîndu-se în raport cu ce argument se face derivarea și reamintind că derivata într-un punct este limita raportului a două creșteri — a funcției și a argumentului.

Dacă f este derivabilă pe E, atunci conform relației (5) avem

(6) $$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x + h) - f(x)}{h}, \text{ pentru orice } x \in E.$$

Exemple

1) Fie $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}, f(x)=x$. În acest caz, f este derivabilă în orice punct din $\mathbf{R}$ deoarece limita

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)-x}{h} = 1$$

există pentru orice $x \in \mathbf{R}$. În plus, $f'(x) = 1$, pentru orice $x \in \mathbf{R}$.

2) Pentru funcția $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = x^3 - x$, și pentru orice $x \in \mathbf{R}$, există

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^3-(x+h)-(x^3-x)}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{3x^2h+3xh^2+h^3-h}{h} = \lim_{h\to 0} (3x^2+3xh+h^2-1) = 3x^2-1,$$

deci f este derivabilă pe $\mathbf{R}$.

3) Reluînd studiul mișcării pe o axă a unui mobil, relația (1) se scrie $v(t_0) = s'(t_0)$, adică viteza instantanee la momentul t_0 este derivata spațiului în acel moment (în ipoteza că funcția $t \mapsto s(t)$ este derivabilă în t_0).

4) Studiem, aplicînd definiția IV.1, derivabilitatea funcției $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = |x|$ în punctul $x = 0$. Aceasta depinde de existența limitei raportului $\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \frac{|x|}{x}$ în punctul $x = 0$.

Avem $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} \frac{|x|}{x} = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} \frac{-x}{x} = -1$ și $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{|x|}{x} = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{x}{x} = 1$, deci limita raportului $\frac{f(x)-f(0)}{x-0}$ nu există în punctul $x = 0$ și, ca atare, funcția-modul nu este derivabilă în origine (deși este continuă în origine).

Înainte de a da și alte exemple, stabilim două rezultate teoretice importante.

TEOREMA IV. 1. Orice funcție derivabilă într-un punct este continuă în acel punct.

Demonstrația este imediată: Presupunem că $f : E \to \mathbf{R}$ este derivabilă în punctul $x_0 \in E$, deci limita (4) există și este finită. Din relația $f(x) - f(x_0) = \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \cdot (x-x_0)$; $x \neq x_0$ rezultă $\lim\limits_{x\to x_0} (f(x) - f(x_0)) = \lim\limits_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \cdot \lim\limits_{x\to x_0} (x-x_0) = f'(x_0)\cdot 0 = 0$, deci $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$, adică f este continuă în x_0.

Reciproca teoremei IV.1 este în general falsă, așa cum o dovedește exemplul funcției-modul în origine.

În studiul existenței limitei unei funcții într-un punct un criteriu util l-a constituit egalitatea limitelor laterale. Adaptăm acest criteriu la studiul derivabilității unei funcții într-un punct, ținînd cont că existența derivatei înseamnă în fond existența unei anumite limite.

DEFINIȚIA IV. 3. *Fie $E \subset \mathbf{R}$ și $x_0 \in E$ un punct de acumulare pentru $E \cap (-\infty, x_0)$. Dacă limita*

$$f'_s(x_0) = \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x < x_0}} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

există (în $\overline{\mathbf{R}}$), atunci această limită se numește **derivata la stînga** *a funcției f în punctul x_0. Dacă, în plus, această limită există și este finită, atunci se spune că f este* **derivabilă la stînga** *în punctul x_0.*

În mod similar se definesc **derivata $f'_d(x_0)$ la dreapta** și noțiunea de **funcție derivabilă la dreapta în x_0**.

Direct din teorema II.7, rezultă

TEOREMA IV. 2. Dacă $f : E \to \mathbf{R}$ este derivabilă în punctul $x_0 \in E$, atunci f este derivabilă la stînga și la dreapta în x_0 și $f'_s(x_0) = f'_d(x_0) = f'(x_0)$. Reciproc, dacă f este derivabilă la stînga și la dreapta în x_0 și dacă $f'_s(x_0) = f'_d(x_0)$, atunci f este derivabilă în x_0 și $f'(x_0) = f'_s(x_0)$.

Dacă $E = [a, b]$, faptul că f este derivabilă în a (respectiv b) revine la aceea că f este derivabilă la dreapta în punctul a (respectiv la stînga în b).

Exemple

1) Pentru funcția-modul $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = |x|$, avem $f'_s(0) = \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x < 0}} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x < 0}} \frac{|x|}{x} = -1$ și similar, $f'_d(0) = 1$, regăsim faptul că f nu este derivabilă în punctul $x = 0$.

2) Se poate întîmpla ca $f'_d(x_0)$, $f'_s(x_0)$ să fie egale fără ca funcția f să fie derivabilă în x_0. Considerăm exemplul funcției $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$.

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{, dacă } x < 0 \\ \frac{1}{2} & \text{, dacă } x = 0 \\ x + 1 & \text{, dacă } x > 0 \end{cases} \quad \text{(fig. IV.4).}$$

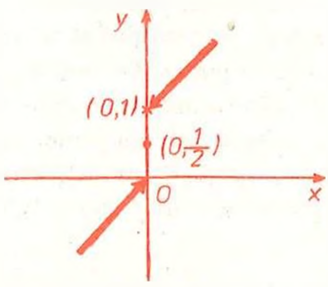


Fig. IV.4

Aici $f'_s(0) = \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x < 0}} \frac{x - \frac{1}{2}}{x} = \infty$, $f'_d(0) = \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \frac{x + 1 - \frac{1}{2}}{x} = \infty$, dar funcția nu este derivabilă în $x = 0$ (nefiind nici măcar continuă în $x = 0$).

Raționînd ca în teorema IV.1, rezultă că dacă f este derivabilă la dreapta (respectiv la stînga) într-un punct x_0, atunci f este continuă la dreapta (respectiv la stînga) în acel punct.

3) Funcția $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = \sqrt{|x|}$ nu este derivabilă în punctul $x = 0$ deoarece derivatele laterale, deși există, nu sînt finite; anume,

$$f'_d(0) = \lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \frac{\sqrt{x}}{x} = \infty \text{ și } f'_s(0) = \lim_{\substack{x \to 0 \\ x < 0}} \frac{\sqrt{-x}}{x} = -\infty.$$

În exemplele 1, 3 am întîlnit funcţii continue care sînt nederivabile într-un punct (vom vedea că în celelalte puncte acestea sînt derivabile). Exemplul care urmează arată că există funcţii care sînt derivabile într-un singur punct.

4) Fie $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{dacă } x \in \mathbf{Q} \\ 0, & \text{dacă } x \notin \mathbf{Q} \end{cases}$. Se observă uşor că această funcţie este continuă în punctul $x = 0$ şi discontinuă în orice punct $x \neq 0$. Să examinăm derivabilitatea lui f în punctul $x = 0$ şi, pentru aceasta, să considerăm raportul

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 0}{x - 0} = x, & \text{dacă } x \in \mathbf{Q},\ x \neq 0 \\[2ex] \dfrac{0 - 0}{x} = 0, & \text{dacă } x \notin \mathbf{Q} \end{cases}$$

şi este clar că acesta are limita 0 cînd x tinde către 0, adică f este derivabilă şi $f'(0) = 0$. În punctele $x \neq 0$, f nu este derivabilă (deoarece f nu este continuă în acele puncte).

5) Se poate acum explica ce se înţelege prin mişcare rectilinie, *cu viteza funcţie continuă*, a unui mobil, anume: spaţiul este funcţie de timp derivabilă şi cu derivata continuă.

1.3. Interpretarea geometrică a derivatei

Dacă $f : (a, b) \to \mathbf{R}$ este o funcţie derivabilă într-un punct $x_0 \in (a, b)$, atunci conform formulelor (2), (3), (4) graficul lui f are tangentă în x_0 (sau mai corect în punctul $(x_0, f(x_0))$, anume dreapta de ecuaţie

$$y - f(x_0) = m(x - x_0), \text{ unde } m = f'(x_0).$$

Aşadar $f'(x_0)$ este coeficientul unghiular al tangentei la graficul lui f, în punctul $(x_0, f(x_0))$. Dacă $f'(x_0) = +\infty$ sau $-\infty$ (în sensul că limita (4) este egală cu $+\infty$ sau $-\infty$), atunci tangenta în $(x_0, f(x_0))$ este paralelă cu axa Oy.

Fără nici o dificultate, se poate vorbi de semitangentă la dreapta sau la stînga într-un punct la un grafic, în legătură cu derivatele laterale respective în acel punct. Geometric, pentru o funcţie derivabilă într-un punct, direcţiile semitangentelor la dreapta şi stînga la grafic în acel punct coincid.

Dacă într-un punct x_0, f este continuă şi avem $f'_d(x_0) = +\infty$ şi $f'_s(x_0) = -\infty$ (sau invers), atunci punctul x_0 se numeşte *punct de întoarcere* al graficului lui f (fig. IV.5).

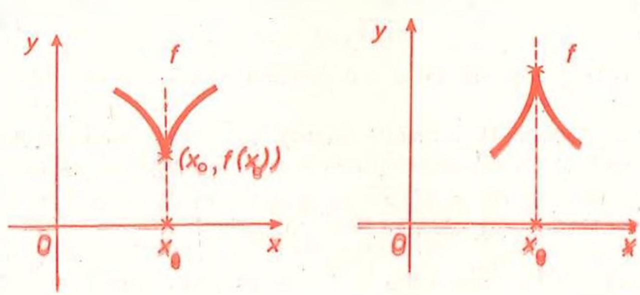


Fig. IV.5

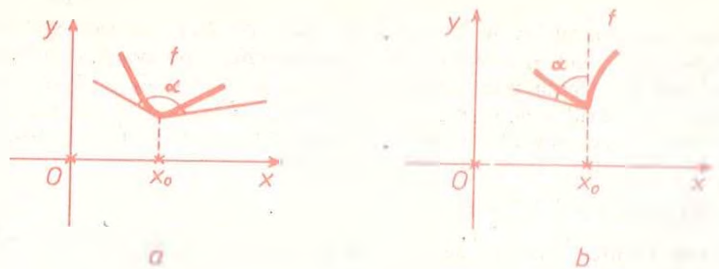


Fig. IV.6

Dacă o funcţie $f : E \to \mathbf{R}$ $(E \subset \mathbf{R})$ este continuă într-un punct $x_0 \in E$, dacă există ambele derivate laterale, cel puţin una dintre ele fiind finită, dar funcţia nu este derivabilă în x_0, atunci se spune că x_0 este *punct unghiular* al graficului lui f (fig. IV.6). Într-un punct unghiular cele două semitangente, la stînga şi la dreapta, formează un unghi $\alpha \in (0, \pi)$.

Exemple

1) Scriem ecuaţia tangentei la graficul (C) al funcţiei $f(x) = \sqrt{x}$ în punctul $x_0 = 1$. Avem $f(1) = \sqrt{1} = 1$ şi $f'(1) = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt{x} - 1}{x - 1} = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{1}{\sqrt{x} + 1} = \dfrac{1}{2}$ şi ecuaţia cerută este $y - 1 = \dfrac{1}{2}(x - 1)$, adică $y = \dfrac{1}{2}(x + 1)$ (fig. IV.7).

În punctul $x = 0$ graficul (C) are pe Oy ca semitangentă, deoarece $f'_d(0) = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \dfrac{\sqrt{x}}{x} = \infty$.

2) Pentru funcţia $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ definită prin $f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{dacă } x \leqslant 0 \\ \sin x, & \text{dacă } x > 0 \end{cases}$, avem

$$f'_s(0) = \lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}} \frac{x^2}{x} = 0 \text{ şi}$$

$$f'_d(0) = \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{\sin x - 0}{x - 0} = \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

Atunci $y = 0$ este semitangentă la stînga în origine şi $y = x$ este semitangenta la dreapta în origine la graficul lui f. Originea este punct unghiular (fig. IV.8).

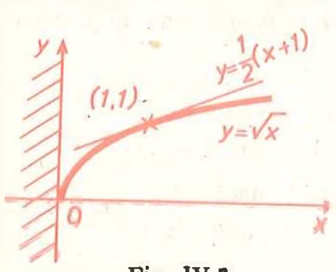


Fig. IV.7

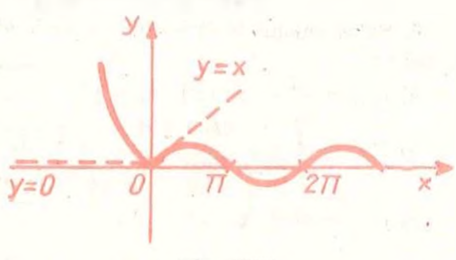


Fig. IV.8

Observație. Este bine de știut că există funcții continue pe un interval care nu sînt derivabile în nici un punct al intervalului. Primul exemplu de acest fel a fost construit de K. Weierstrass și a produs un șoc extraordinar. Ulterior s-au dat exemple mai simple, dar toate depășesc cadrul acestui manual. Existența, așadar, a unei funcții cu graficul neîntrerupt care nu are tangentă în nici un punct contravine aparent intuiției noastre, dar dovedește că intuiția necenzurată de raționament poate conduce la erori.

EXERCIȚII (capitolul IV, § 1)

1. Folosind definiția IV.1, să se studieze derivabilitatea funcțiilor $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ următoare, în punctele indicate:

a) $f(x) = 2x + 3,\ x_0 = 2;$

b) $f(x) = \dfrac{1}{x^2 + 2},\ x_0 = -1;$

c) $f(x) = \sin 5x,\ x_0 = \dfrac{\pi}{2};$

d) $f(x) = x^3 + x^2,\ x_0 = 1;$

e) $f(x) = \sqrt[3]{x^2 + 8},\ x_0 = 1;$

f) $f(x) = x - \sqrt[3]{x},\ x_0 = 1;$

g) $f(x) = \operatorname{sgn} x,\ x_0 = 0;$

h) $f(x) = x \cdot \sigma(x),\ x_0 = 0.$

2. Să se studieze continuitatea și derivabilitatea următoarelor funcții $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ în punctul $x = 0$;

a) $f(x) = x^2 + x;$

b) $f(x) = \begin{cases} x^2 + x, & \text{dacă } x \leqslant 0 \\ 2x^2 + x, & \text{dacă } x > 0; \end{cases}$;

c) $f(x) = |\sin x|;$

d) $f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{dacă } x \leqslant 0 \\ -x^2, & \text{dacă } x > 0 \end{cases}.$

3. Să se arate că funcția $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} x \sin \dfrac{1}{x}, & \text{dacă } x \neq 0 \\ 0, & \text{dacă } x = 0 \end{cases}$$

este continuă pe $\mathbf{R}$ și nu este derivabilă în origine.

4. Să se arate că dacă $\alpha > 1$ este întreg constant, atunci funcția $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} x^\alpha \sin \dfrac{1}{x}, & \text{dacă } x \neq 0 \\ 0, & \text{dacă } x = 0 \end{cases}$$

este derivabilă în origine.

5. Se consideră funcția $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = \begin{cases} 1 + \sqrt{x}, & \text{dacă } x \geqslant 0 \\ -\sqrt{-x}, & \text{dacă } x \leqslant 0 \end{cases}$. Să se arate că f este discontinuă în origine și că $f'_d(0) = f'_s(0) = \infty$. Se contravine teoremei IV.1?

6. Folosind formula (6), să se calculeze derivata f' pentru următoarele funcții $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$:

a) $f(x) = x^2 + 3x$; b) $f(x) = x^2 - 7x + 2$; c) $f(x) = x^3 + 4x$; d) $f(x) = \dfrac{1}{2} x^2 + \dfrac{1}{3} x^3$.

7. Să se calculeze derivatele laterale ale funcțiilor $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ următoare în punctele x_0 indicate:

a) $f(x) = x^2 + x \cdot |x|,\ x_0 = 0;$

b) $f(x) = \begin{cases} x, & \text{dacă } x \leqslant 0 \\ 2x^2, & \text{dacă } x > 0 \end{cases},\ x_0 = 0;$

c) $f(x) = \sigma(x),\ x_0 = 0;$

d) $f(x) = x + |x - 2|,\ x_0 = 2;$

e) $f(x) = \begin{cases} 2x - 1, & \text{dacă } x \leqslant 1 \\ x^3, & \text{dacă } x > 1 \end{cases},\ x_0 = 1;$

f) $f(x) = \begin{cases} \sqrt{|x|}, & \text{dacă } x \leqslant 1 \\ 2x - 1, & \text{dacă } x > 1 \end{cases},\ x_0 = 1.$

Să se traseze graficele acestor funcții.

8. Să se determine $a, b \in \mathbf{R}$ astfel ca funcția $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - x + 1 & , \text{ dacă } x \leq 0 \\ a \sin x + b \cos x, & \text{dacă } x > 0 \end{cases}$$ să fie derivabilă.

9. Se consideră funcția $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = \sqrt{|x^2 - 1|}$. Să se calculeze derivatele laterale ale lui f în punctele 0, 1, -1.

10. Fie $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}, f(x) = x^2$ și $x_0 = 1$. Să se calculeze coeficienții unghiulari ai secantelor definite de punctele $(x_0, f(x_0))$ și $(\alpha, f(\alpha))$ pentru $\alpha = 1{,}5$; $\alpha = 1{,}1$; $\alpha = 1{,}05$. Ce se întîmplă cu acești coeficienți dacă $\alpha \to 1$?

11. Să se scrie ecuația tangentei la graficele funcțiilor $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ indicate în punctele x_0 respective:

a) $f(x) = x^2$, $x_0 = 2$;
b) $f(x) = x^3 - x$, $x_0 = 1$;
c) $f(x) = (2x + 1)^2$, $x_0 = 4$;
d) $f(x) = \sqrt{x^2 + 5}$, $x_0 = 2$;
e) $f(x) = \sin x$, $x_0 = 0$;
f) $f(x) = x + \sin x$, $x_0 = \pi$.

12. Să se determine punctele unghiulare sau punctele de întoarcere pentru funcțiile $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$:

a) $f(x) = x\sqrt{|x - 2|}$;
b) $f(x) = \sqrt[3]{(x - 1)^2}$;
c) $f(x) = \begin{cases} 0 & , \text{ dacă } x < 1 \\ \sqrt[3]{(x - 1)^2}, & \text{dacă } x \geq 1 \end{cases}$;
d) $f(x) = \dfrac{|x - 1|}{|x| + 1}$.

13. Fie $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}, f(x) = \begin{cases} x^2 - 3x + 2, & \text{dacă } x > 0 \\ 0 & , \text{ dacă } x \leq 0 \end{cases}$. Să se studieze derivabilitatea lui f și să se determine punctele unde tangenta la grafic trece prin origine.

14. Să se determine tangentele la graficul de ecuație $y = (x + 1)^2$ care trec prin origine. Idem, pentru $y = x^3 + 1$.

§ 2. Operații cu funcții derivabile. Derivatele unor funcții uzuale

Am întîlnit deja exemple de funcții derivabile. Este utilă o sinteză a derivatelor funcțiilor uzuale și se impune stabilirea unor reguli generale de derivare a sumelor, produselor, compunerilor etc. de funcții derivabile.

2.1. Derivatele cîtorva funcții uzuale

a) *Orice funcție constantă $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}, f(x) = c$ este derivabilă pe $\mathbf{R}$, cu derivata nulă* ($f'(x) = 0$ pentru orice $x \in \mathbf{R}$).

Se mai scrie

(7) $$\boxed{c' = 0}.$$

Demonstrația este imediată: $f'(x) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x + h) - f(x)}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{c - c}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{0}{h} = 0.$

Vom vedea mai tîrziu că şi reciproc, dacă o funcţie are derivata nulă pe un interval, atunci ea este constantă pe acel interval.

b) *Funcţia-putere* $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = x^n$($n \geqslant 1$ întreg) *este derivabilă pe* $\mathbf{R}$ *şi* $f'(x) = nx^{n-1}$, $\forall\, x \in \mathbf{R}$.

Se mai scrie

$$\boxed{(x^n)' = nx^{n-1},\ \forall\, x \in \mathbf{R}}. \tag{8}$$

Într-adevăr, $f'(x) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{(x+h)^n - x^n}{h} =$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{C_n^1 x^{n-1}h + C_n^2 x^{n-2}h^2 + \ldots + h^n}{h} = \lim_{h\to 0} (C_n^1 x^{n-1} + C_n^2 x^{n-2}h + \ldots + h^{n-1}) =$$

$$= C_n^1 x^{n-1} = nx^{n-1},\ \forall\, x \in \mathbf{R}.$$

În particular, $x' = 1$, $(x^2)' = 2x$, $(x^3)' = 3x^2$, $(x^{10})' = 10x^9$.

c) Formula (8) poate fi generalizată. Anume, pentru orice constantă reală r, funcţia putere $f : (0, \infty) \to \mathbf{R}$, $f(x) = x^r$, este derivabilă şi, în plus,

$$\boxed{(x^r)' = rx^{r-1},\ \forall\, x > 0}. \tag{9}$$

Într-adevăr, $(x^r)' = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{(x+h)^r - x^r}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{x^r\left[\left(1 + \frac{h}{x}\right)^r - 1\right]}{h} =$

$= x^r \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\left(1 + \frac{h}{x}\right)^r - 1}{h}$ şi, făcînd $h = xy$, $(x^r)' = x^r \cdot \lim\limits_{y\to 0} \dfrac{(1+y)^r - 1}{xy} =$

$= x^{r-1} \cdot \lim\limits_{y\to 0} \dfrac{(1+y)^r - 1}{y} = rx^{r-1}$, ultima relaţie decurgînd din relaţia (45) din capitolul II, p. 89.

Aplicînd formula (9) rezultă

$$(\sqrt{x})' = \left(x^{\frac{1}{2}}\right)' = \frac{1}{2} x^{\frac{1}{2} - 1} = \frac{1}{2\sqrt{x}},\ \forall\, x > 0;$$

$$(\sqrt[3]{x})' = \left(x^{\frac{1}{3}}\right)' = \frac{1}{3} x^{\frac{1}{3} - 1} = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}},\ \forall\, x > 0.$$

Această ultimă relaţie are loc şi pentru $x < 0$. În punctul $x = 0$ funcţiile $f : [0, \infty) \to \mathbf{R}$, $f(x) = \sqrt{x}$ şi $g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $g(x) = \sqrt[3]{x}$ nu sînt derivabile (deoarece $f_d'(0) = \infty$; $g_s'(0) = g_d'(0) = \infty$).

De asemenea, $\left(\dfrac{1}{x}\right)' = (x^{-1})' = -1 \cdot x^{-2} = -\dfrac{1}{x^2}$, $\forall\, x \neq 0$ şi

$$\left(\frac{1}{x^2}\right)' = (x^{-2})' = -2 \cdot x^{-3} = -\frac{2}{x^3},\ \forall\, x \neq 0.$$

d) Considerăm funcţia logaritmică $f: (0, \infty) \to \mathbf{R}$, $f(x) = \ln x$ şi arătăm că ea *este derivabilă pe intervalul* $(0, \infty)$ şi, în plus,

$$\boxed{(\ln x)' = \frac{1}{x}, \ \forall x > 0}. \tag{10}$$

Într-adevăr, pentru orice $x > 0$ avem $f'(x) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{\ln(x+h) - \ln x}{h} =$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \ln \frac{x+h}{x} = \lim_{h\to 0} \ln\left(1 + \frac{h}{x}\right)^{\frac{1}{h}} = \ln \lim_{h\to 0} \left(1 + \frac{h}{x}\right)^{\frac{x}{h}\cdot\frac{1}{x}} = \ln e^{\frac{1}{x}} =$$

$$= \frac{1}{x} \ln e = \frac{1}{x}.$$

e) Funcţiile trigonometrice $f, g: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = \sin x$, $g(x) = \cos x$ *sînt derivabile pe* $\mathbf{R}$ *şi pentru orice* $x \in \mathbf{R}$, avem

$$\boxed{(\sin x)' = \cos x}; \tag{11}$$

$$\boxed{(\cos x)' = -\sin x}. \tag{12}$$

Avem, într-adevăr, $(\sin x)' = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\sin(x+h) - \sin x}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{2 \sin \frac{h}{2} \cos\left(x + \frac{h}{2}\right)}{h} =$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\sin \frac{h}{2}}{\frac{h}{2}} \lim_{h\to 0} \cos\left(x + \frac{h}{2}\right) = 1 \cdot \lim_{h\to 0} \cos\left(x + \frac{h}{2}\right) = \cos \lim_{h\to 0}\left(x + \frac{h}{2}\right) = \cos x$$

şi, similar,

$$(\cos x)' = \lim_{h\to 0} \frac{\cos(x+h) - \cos x}{h} = \lim_{h\to 0} \left[-\frac{2 \sin\left(x + \frac{h}{2}\right) \sin \frac{h}{2}}{h}\right] =$$

$$= -\lim_{h\to 0} \frac{\sin \frac{h}{2}}{\frac{h}{2}} \lim_{h\to 0} \sin\left(x + \frac{h}{2}\right) = -\lim_{h\to 0} \sin\left(x + \frac{h}{2}\right) = -\sin x.$$

Am utilizat de două ori limita binecunoscută $\lim\limits_{u\to 0} \dfrac{\sin u}{u} = 1$. Am făcut mai sus un abuz comod de notaţie, pe care îl vom mai folosi uneori. Scrierea corectă a formulelor (11), (12) este: $(\sin)'(x) = \cos x$; $(\cos)'(x) = -\sin x$.

Observaţie. Trebuie făcută distincţia între numerele $f'(x_0)$ şi $(f(x_0))'$, ultimul fiind nul ca derivată a unei funcţii constante. Dacă f' există şi este continuă pe un interval deschis care conţine x_0, atunci $f'(x_0) = \lim\limits_{x\to x_0} f'(x)$, dar, în general, această relaţie nu are loc (putîndu-se întîmpla ca limita nici să nu existe).

Pentru funcţia constantă $h : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $h(x) = \sin\frac{\pi}{4}$ avem $h'(x) = 0$ şi nu $h'(x) = \cos\frac{\pi}{4}$; dacă $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}, f(x) = \sin x$, atunci $f'\left(\frac{\pi}{4}\right) = \cos\frac{\pi}{4}$, iar $f\left(\frac{\pi}{4}\right)' = \left(\sin\frac{\pi}{4}\right)' = 0$. Similar, $(\ln 7)' = 0$ şi $(\ln)'(7) = \frac{1}{7}$ [este greşit să se scrie $(\ln 7)' = \frac{1}{7}$, reproducînd mecanic formula (10); de fapt, scrierea corectă a formulei (10) este $(\ln)'(x) = \frac{1}{x}, \forall x > 0$].

2.2. Reguli de derivare

Vom arăta că pentru funcţii $f, g : E \to \mathbf{R}$ derivabile, $E \subset \mathbf{R}$, funcţiile $f + g$, $f - g$, fg etc. au aceeaşi proprietate.

TEOREMA IV. 3. Presupunem că f, g sînt derivabile în punctul $x_0 \in E$ şi λ o constantă.

Atunci:

(a) **suma $f + g$ este derivabilă în x_0 şi**

(13) $$\boxed{(f + g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)}.$$

(b) **λf este derivabilă în x_0 şi**

(14) $$\boxed{(\lambda f)'(x_0) = \lambda f'(x_0)}.$$

(c) **produsul fg este funcţie derivabilă în x_0 şi**

(15) $$\boxed{(fg)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0)}.$$

Demonstraţie. a) Notăm $\Phi = f + g$. Trebuie calculat raportul

$$\frac{\Phi(x) - \Phi(x_0)}{x - x_0} = \frac{(f(x) + g(x)) - (f(x_0) + g(x_0))}{x - x_0} = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} + \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0}$$

pentru $x \neq x_0$. Trecînd la limită ($x \to x_0$) ambele rapoarte din membrul drept au limită finită, anume $f'(x_0)$ şi $g'(x_0)$. Atunci limita $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{\Phi(x) - \Phi(x_0)}{x - x_0}$ există şi este egală cu $f'(x_0) + g'(x_0)$, adică $\Phi'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$, deci formula (13).

Reţinem deci că suma a două funcţii derivabile $f, g : E \to \mathbf{R}$ este o funcţie derivabilă pe E şi derivata sumei este egală cu suma derivatelor; altfel scris,

(16) $$\boxed{(f + g)' = f' + g'}.$$

Relația (14) se demonstrează imediat: $(\lambda f)'(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0} \frac{(\lambda f)(x) - (\lambda f)(x_0)}{x - x_0} =$
$= \lambda \lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lambda f'(x_0)$; așadar,

(17) $$\boxed{(\lambda f)' = \lambda f'}$$

adică, *o constantă „iese afară" de sub derivată.* Pentru $\lambda = -1$ avem $(-f)' =$
$= -f'$.

Probăm acum relația (15). Notăm $\psi = fg$.

$$(fg)'(x_0) = \psi'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{\psi(x) - \psi(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)g(x) - f(x_0)g(x_0)}{x - x_0} =$$

$$= \lim_{x \to x_0} \frac{[f(x) - f(x_0)]g(x) + f(x_0)[g(x) - g(x_0)]}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \cdot \lim_{x \to x_0} g(x) +$$

$$+ f(x_0) \cdot \lim_{x \to x_0} \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0).$$

Am folosit faptul că g este continuă în x_0 (fiind derivabilă în x_0), deci $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = g(x_0)$.

Reținem totodată că dacă $f, g : E \to \mathbf{R}$ sînt funcții derivabile pe E, atunci fg este derivabilă pe E și are loc regula de derivare a produsului

(18) $$\boxed{(fg)' = f' \cdot g + f \cdot g'}$$

Teorema este demonstrată. Reținem că rezultatele obținute într-un punct $x_0 \in E$ conduc la rezultate privind derivabilitatea funcțiilor $f + g$, λf, fg pe mulțimea E.

Prin inducție după k, se demonstrează imediat următorul

COROLAR. Dacă $f_1, f_2, \ldots, f_k$ sînt funcții derivabile în punctul x_0, atunci suma $f_1 + f_2 + \ldots + f_k$, respectiv produsul $f_1 f_2 \ldots f_k$ sînt derivabile în x_0 și, în plus:

$$(f_1 + f_2 + \ldots + f_k)'(x_0) = f_1'(x_0) + f_2'(x_0) + \ldots + f_k'(x_0) \quad \text{și}$$

$$(f_1 f_2 \ldots f_k)'(x_0) = f_1'(x_0) f_2(x_0) \ldots f_k(x_0) + f_1(x_0) f_2'(x_0) \ldots f_k(x_0) +$$

$$+ \ldots + f_1(x_0) f_2(x_0) \ldots f_{k-1}(x_0) f_k'(x_0).$$

Altfel scris, dacă f_j, $1 \leqslant j \leqslant k$, sînt derivabile pe E, atunci $\left(\sum\limits_{j=1}^{k} f_j\right)' = \sum\limits_{j=1}^{k} f_j'$, $\left(\prod\limits_{j=1}^{k} f_j\right)' = \sum\limits_{j=1}^{k} (f_1 \ldots f_j' \ldots f_k)$. De exemplu, pentru $k = 3$, $(f_1 + f_2 + f_3)' =$
$= f_1' + f_2' + f_3'$ și $(f_1 f_2 f_3)' = f_1' f_2 f_3 + f_1 f_2' f_3 + f_1 f_2 f_3'$.

TEOREMA IV. 4. Presupunem că f şi g sînt derivabile în x_0 şi că $g(x_0) \neq 0$. Atunci funcţia-cît $\frac{f}{g}$ este derivabilă în x_0 şi, în plus:

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - g'(x_0)f(x_0)}{g^2(x_0)}. \tag{19}$$

Demonstraţie. Notăm $h = \frac{f}{g}$; deoarece $g(x_0) \neq 0$ şi g este continuă în x_0, rezultă că g este nenulă într-o vecinătate a punctului x_0 şi deci are sens derivabilitatea cîtului în punctul x_0.

Avem
$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = h'(x_0) = \lim_{x\to x_0} \frac{h(x) - h(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x\to x_0} \frac{\frac{f(x)}{g(x)} - \frac{f(x_0)}{g(x_0)}}{x - x_0} =$$
$$= \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)g(x_0) - f(x_0)g(x)}{(x - x_0)g(x)g(x_0)} = \lim_{x\to x_0} \frac{[f(x) - f(x_0)]g(x_0) - [g(x) - g(x_0)]f(x_0)}{(x - x_0)g(x)g(x_0)} =$$
$$= \lim_{x\to x_0} \left[\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} g(x_0) - \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} f(x_0)\right] \frac{1}{g(x)g(x_0)} =$$
$$= [f'(x_0)g(x_0) - g'(x_0)f(x_0)] \frac{1}{g^2(x_0)}.$$

Demonstraţia arată totodată că dacă f şi g sînt derivabile pe E şi g nu se anulează în nici un punct din E, atunci cîtul $\frac{f}{g}$ este derivabil pe E şi, în plus,

$$\boxed{\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f' \cdot g - f \cdot g'}{g^2}}. \tag{20}$$

În particular, luînd pentru f funcţia constantă 1, rezultă

$$\left(\frac{1}{g}\right)' = -\frac{g'}{g^2}. \tag{21}$$

în punctele unde g nu se anulează.

În acest moment ştim să derivăm funcţii reale polinomiale, funcţii raţionale, funcţii trigonometrice etc.

Exemple

1) Funcţia reală $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = x^{10} + 4x^5 - x + 9$ este o sumă finită de funcţii de forma ax^n, deci este derivabilă pe $\mathbf{R}$; în plus, $f'(x) = 10x^9 + 20x^4 - 1$, $\forall\, x \in \mathbf{R}$, aplicînd regulile (16), (17), (7) şi (8).

Similar, pentru funcţia $g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $g(x) = -2x^6 + 3x^2 - 10x$, avem $g'(x) = -12x^5 + 6x - 10$, $\forall\, x \in \mathbf{R}$.

2) Pentru $f : (0, \infty) \to \mathbf{R}$, $f(x) = (x + \sqrt{x})^2$ avem $f(x) = x^2 + 2x^{\frac{3}{2}} + x$, deci $f'(x) = 2x + 3\sqrt{x} + 1$, $\forall x > 0$.

Similar, pentru funcţia $g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $g(x) = (\sqrt[3]{x} - 1)^3$, avem $g(x) = x - 3\sqrt[3]{x^2} + 3\sqrt[3]{x} - 1 = x - 3x^{\frac{2}{3}} + 3x^{\frac{1}{3}} - 1$, deci $g'(x) = 1 - 2x^{-\frac{1}{3}} + x^{-\frac{2}{3}} = 1 - \frac{2}{\sqrt[3]{x}} + \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}$ pentru orice $x \neq 0$.

3) Pentru funcţiile $f, g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = x^2$, $g(x) = \sin x$ avem $f'(x) = 2x$, $g'(x) = \cos x$ şi, ca atare, $(x^2 \sin x)' = 2x \sin x + x^2 \cos x, \forall x \in \mathbf{R}$, aplicînd regula de derivare a produsului. Similar, $(x^3 \cos x)' = 3x^2 \cos x - x^3 \sin x$, $\forall x \in \mathbf{R}$.

4) Funcţia raţională $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}, f(x) = \dfrac{x^3}{x^2+1}$ este derivabilă în orice punct $x \in \mathbf{R}$ şi aplicînd regula (20), $f'(x) = \dfrac{3x^2(x^2+1) - x^3 \cdot 2x}{(x^2+1)^2} = \dfrac{x^4+3x^2}{(x^2+1)^2}$. Funcţia $f : \mathbf{R} \setminus \{-1, 1\} \to \mathbf{R}$, $f(x) = \dfrac{x}{x^2-1}$ este derivabilă în orice punct $x \notin \{-1, 1\}$ şi $f'(x) = \dfrac{1 \cdot (x^2-1) - x \cdot 2x}{(x^2-1)^2} = -\dfrac{x^2+1}{(x^2-1)^2}$. În punctele $x = -1$, $x = 1$ funcţia f nu este definită şi nu se pune problema derivabilităţii lui f în aceste puncte.

5) În orice punct unde $\cos x \neq 0$ avem

$$(\text{tg } x)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{(\sin x)' \cos x - \sin x (\cos x)'}{\cos^2 x} = \frac{\cos x \cdot \cos x - \sin x(-\sin x)}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x},$$

aplicînd regulile (20), (11), (12). În mod similar, în punctele unde $\sin x \neq 0$ avem

$$(\text{ctg } x)' = \left(\frac{\cos x}{\sin x}\right)' = \frac{-\sin x \cdot \sin x - \cos x \cdot \cos x}{\sin^2 x} = -\frac{1}{\sin^2 x}.$$

2.3. Derivarea funcţiei compuse şi a inversei unei funcţii

Trecem acum la stabilirea altor două teoreme generale de derivare, relativ la compunere şi inversare. Deosebit de importantă este formula de derivare a funcţiilor compuse (funcţii de funcţie). În acest sens, are loc

TEOREMA IV.5. Fie I, J intervale şi $I \xrightarrow{f} J \xrightarrow{g} \mathbf{R}$ două funcţii. Dacă f este derivabilă în punctul $x_0 \in I$ şi g este derivabilă în punctul $y_0 = f(x_0)$, atunci funcţia compusă $G = g \circ f$ este derivabilă în x_0 şi $G'(x_0) = g'(y_0) \cdot f'(x_0)$. Dacă f este derivabilă pe I, g este derivabilă pe J, atunci $g \circ f$ este derivabilă pe I şi are loc formula:

(22) $$\boxed{(g \circ f)' = (g' \circ f) \cdot f'}.$$

O scriere practică a regulii (22) este:

$$G'(x) = g'(f(x)) \cdot f'(x), \quad \forall x \in I.$$

O schiţă de demonstraţie ar fi de a calcula limita cîtului $\dfrac{\Delta g}{\Delta x}$ utilizînd relaţia $\dfrac{\Delta g}{\Delta x} = \dfrac{\Delta g}{\Delta f} \cdot \dfrac{\Delta f}{\Delta x}$ şi făcînd $\Delta x \to 0$; rezultă $\Delta f \to 0$, deci

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta g}{\Delta x} = \lim_{\Delta f \to 0} \frac{\Delta g}{\Delta f} \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = g'(f) \cdot f'.$$

Insuficienţa acestui raţionament constă în aceea că Δf se poate anula chiar de o infinitate de ori în vecinătatea unui punct.

Demonstrație. Avem de arătat că

$$\lim_{x \to x_0} \frac{g(f(x)) - g(f(x_0))}{x - x_0} = g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0).$$

Considerăm funcția ajutătoare $F : J \to \mathbf{R}$, definită prin

$$(23) \qquad F(y) = \begin{cases} \dfrac{g(y) - g(y_0)}{y - y_0}, & \text{dacă } y \neq y_0 \\ g'(y_0), & \text{dacă } y = y_0. \end{cases}$$

Funcția F este continuă în punctul y_0 deoarece

$$\lim_{y \to y_0} F(y) = \lim_{y \to y_0} \frac{g(y) - g(y_0)}{y - y_0} = g'(y_0) = F(y_0).$$

Pe de altă parte, pentru orice $x \neq x_0$ avem

$$(24) \qquad \frac{g(f(x)) - g(f(x_0))}{x - x_0} = F(f(x)) \cdot \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Într-adevăr, dacă $f(x) = f(x_0)$, atunci ambii termeni sînt nuli, iar dacă $f(x) \neq f(x_0)$, atunci $f(x) \neq y_0$ și, conform (23), $F(f(x)) = \dfrac{g(f(x)) - g(y_0)}{f(x) - y_0}$, deci relația (24) este dovedită în ambele cazuri. Trecînd la limită ($x \to x_0$) în relația (24) și observînd că $F(f(x)) \to F(f(x_0)) = F(y_0) = g'(y_0)$, rezultă că

$$G'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{g(f(x)) - g(f(x_0))}{x - x_0} = g'(y_0) \cdot \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = g'(y_0) \cdot f'(x_0).$$

Teorema IV.5 este demonstrată, formula (22) fiind o consecință directă a relației anterioare.

Formula stabilită mai sus ne permite să calculăm derivatele unor funcții mai complicate, obținute prin compunerea unor funcții ale căror derivate sînt cunoscute. Ea se extinde la compunerea unui număr finit oarecare de funcții derivabile. Astfel, dacă f, g, h sînt funcții astfel încît funcția $H = h \circ g \circ f$ să fie definită pe un interval I și dacă f este derivabilă în $x_0 \in I$, g derivabilă în $f(x_0)$ și h în punctul $g(f(x_0))$, atunci funcția compusă H este derivabilă în x_0 și, în plus,

$$(25) \qquad H'(x_0) = (h \circ g \circ f)'(x_0) = h'(g(f(x_0))) \cdot g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0).$$

Demonstrația este o simplă aplicare repetată a teoremei precedente. Anume, notînd $G = g \circ f$ avem $H = h \circ G$, deci $H'(x_0) = h'(G(x_0)) \cdot G'(x_0)$ și, ținînd cont că $G(x_0) = g(f(x_0))$, $G'(x_0) = g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0)$, rezultă formula (25).

Exemple

1) Fie $G : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $G(x) = (2x^2 + x)^3$, $x \in \mathbf{R}$: considerînd funcțiile $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = 2x^2 + x$, $g(u) = u^3$, se observă că $G = g \circ f$, deci conform (22), $G'(x) = g'(f(x)) \cdot f'(x)$ și cum $g'(u) = 3u^2$, rezultă $G'(x) = 3 \cdot f(x)^2 \cdot f'(x) = 3(2x^2 + x)^2 \cdot (4x + 1)$, $\forall\, x \in \mathbf{R}$.

2) Fie $G : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $G(x) = \sin \alpha x$ ($\alpha \in \mathbf{R}$, constant). Așadar, $G(x) = \sin u(x)$, unde $u(x) = \alpha x$, deci $G'(x) = \cos u(x) \cdot u'(x) = \alpha \cos \alpha x$, $\forall\, x \in \mathbf{R}$. Similar, pentru $G : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $G(x) = \sin^2 x$, avem $G(x) = v^2(x)$, unde $v(x) = \sin x$, deci $G'(x) = 2v(x) \cdot v'(x) = 2 \sin x \cos x$.

3) Considerăm $H : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $H(x) = \cos^2 3x$, $x \in \mathbf{R}$. În acest caz funcția H este compunerea funcțiilor $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = 3x$; $g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $g(u) = \cos u$; $h : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $h(v) = v^2$, deci $H = h \circ g \circ f$. Dar $f'(x) = 3$, $g'(u) = -\sin u$, $h'(v) = 2v$ și aplicînd formula (25) rezultă $H'(x) = 2(\cos 3x)\,(-\sin 3x) \cdot 3 = -3 \sin 6x$, $\forall\, x \in \mathbf{R}$.

Stabilim acum o ultimă teoremă importantă de derivare. Reamintim că dacă $f : I \to \mathbf{R}$ este o funcție continuă și strict monotonă pe un interval I, atunci mulțimea $J = \{f(x) \mid x \in I\}$ este, de asemenea, un interval; $f : I \to J$ este bijectivă și inversa ei $g = f^{-1} : J \to I$ este o funcție continuă (conform teoremei III.7). Ce se poate spune despre g dacă funcția f este derivabilă? În acest sens are loc

TEOREMA IV. 6. Fie $f : I \to J$ o funcție continuă și bijectivă între două intervale. Presupunem că f este derivabilă într-un punct $x_0 \in I$ și $f'(x_0) \neq 0$, atunci inversa $g = f^{-1}$ este derivabilă în punctul $y_0 = f(x_0)$ și, în plus,

$$g'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}. \tag{26}$$

Demonstrație. Bineînțeles, trebuie examinată existența limitei raportului $\frac{g(y) - g(y_0)}{y - y_0}$ cînd y tinde către y_0, $y \neq y_0$. Fie $x = f^{-1}(y)$; din faptul că $y \neq y_0$, rezultă $x \neq x_0$ și, în plus,

$$\frac{g(y) - g(y_0)}{y - y_0} = \frac{g(f(x)) - g(f(x_0))}{f(x) - f(x_0)} = \frac{x - x_0}{f(x) - f(x_0)} = \frac{1}{\dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}}. \tag{27}$$

Făcînd $y \to y_0$, rezultă $g(y) \to g(y_0)$ adică $x \to x_0$ și ultimul raport tinde către $\frac{1}{f'(x_0)}$. Atunci primul raport din relația (27) va avea limită, deci funcția g este derivabilă în punctul y_0. Totodată se deduce relația (26).

Relația (26) poate fi scrisă ca egalitate de funcții astfel: $(f^{-1})' = \frac{1}{f' \circ f^{-1}}$, dacă ipotezele teoremei IV.6 au loc în orice punct din I.

Observație. Dacă în enunț renunțăm la ipoteza $f'(x_0) \neq 0$, se observă din demonstrația anterioară că dacă $f'(x_0) = 0$, atunci $g'(y_0) = +\infty$ sau $-\infty$ (după cum f este strict crescătoare sau strict descrescătoare), adică în punctul $y_0 = f(x_0)$ graficul funcției inverse are o tangentă verticală.

Consecințe

1) Considerăm funcția $f : \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \to [-1, 1]$, definită prin $f(x) = \sin x$. În orice punct $x_0 \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ sînt verificate condițiile teoremei IV.6, deci funcția $f^{-1} = \arcsin$ este derivabilă în orice punct $y_0 \in (-1, 1)$. În plus, aplicînd formula (26) și notînd $y_0 = \sin x_0$, deci $\arcsin y_0 = x_0$, rezultă $(\arcsin)'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)} = \frac{1}{\cos x_0} = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2 x_0}} = \frac{1}{\sqrt{1 - y_0^2}}$, $\forall\, y_0 \in (-1, 1)$.

Pentru $y_0 = -1$ avem $x_0 = -\frac{\pi}{2}$ și $f'(x_0) = 0$ și conform observației anterioare, $(\arcsin)'(-1) = \infty$. În mod similar, $(\arcsin)'(+1) = \infty$.

Reţinem, aşadar, formula

(28) $$\boxed{(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}},\ \forall x \in (-1, 1)}$$

Raţionînd în mod similar sau aplicînd formula $\arccos x = \frac{\pi}{2} - \arcsin x$, $x \in [-1, 1]$, rezultă

(29) $$\boxed{(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}},\ \forall x \in (-1, 1)}$$

Fie acum funcţia $f: \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \to \mathbf{R}$, $f(x) = \operatorname{tg} x$, care satisface condiţiile teoremei IV.6 pentru $I = \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, $J = \mathbf{R}$, în orice punct $x_0 \in I$. Inversa ei, $\operatorname{arctg}: \mathbf{R} \to \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, rezultă derivabilă în orice punct $y_0 \in \mathbf{R}$, $y_0 = \operatorname{tg} x_0$ şi, în plus,

$$(\operatorname{arctg})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)} = \frac{1}{\dfrac{1}{\cos^2 x_0}} = \cos^2 x_0 = \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 x_0} = \frac{1}{1 + y_0^2}.$$

Cu notaţii schimbate, am demonstrat formula

(30) $$\boxed{(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2},\ \forall x \in \mathbf{R}}$$

În mod similar, sau aplicînd formula $\operatorname{arcctg} x = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} x$, $\forall x \in \mathbf{R}$, avem $(\operatorname{arcctg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}$, $\forall x \in \mathbf{R}$.

2) Fie $I = (0, \infty)$, $J = \mathbf{R}$ şi $f: I \to J$, $f(x) = \ln x$. Conform teoremei IV.6 ale cărei condiţii sînt verificate în orice punct $x_0 \in I$, rezultă că funcţia exponenţială $f^{-1} = \mathrm{EXP}$ este derivabilă pe $\mathbf{R}$ şi, în plus, $\forall y_0 \in \mathbf{R}$, $y_0 = \ln x_0$ avem

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)} = \frac{1}{\dfrac{1}{x_0}} = x_0 = e^{y_0}.$$

Cu alte cuvinte, am demonstrat formula

(31) $$\boxed{(e^x)' = e^x,\ \forall x \in \mathbf{R}}$$

3) Fie $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = x^n (n \geqslant 1)$ întreg. Notînd $I = [0, \infty)$, $J = [0, \infty)$, avem o aplicaţie continuă şi bijectivă $f: I \to J$, derivabilă în orice

punct $x_0 > 0$ şi $f'(x_0) = nx_0^{n-1} \neq 0$. Conform teoremei IV.6, f^{-1} este derivabilă în $y_0 = f(x_0) = x_0^n$ şi $(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{nx_0^{n-1}} = \frac{1}{n\sqrt[n]{y_0^{n-1}}}$. Aşadar, pentru orice $x > 0$ avem $(\sqrt[n]{x})' = \frac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}$.

Conform observaţiei anterioare, funcţia $g : [0,\infty) \to [0,\infty)$, $g(x) = \sqrt[n]{x}$ nu este derivabilă în punctul $x = 0$ şi avem $g_d(0) = \infty$, dacă n este par şi $g'(0) = \infty$, dacă n este impar.

2.4. Prezentarea sintetică a derivatelor funcţiilor uzuale şi a regulilor de derivare

I. ***Reguli de derivare*** (fără a mai preciza condiţiile în care au loc)

1°. $(f \pm g)' = f' \pm g'$, $(\lambda f)' = \lambda \cdot f'$;

2°. $(fg)' = f'g + fg'$;

3°. $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$;

4°. $(g(f))' = g'(f) \cdot f'$; $(f^{-1})' = \frac{1}{f'(f^{-1})}$.

II. *Tabloul de derivare al funcţiilor elementare:*

Funcţia	Derivata	Domeniul de derivabilitate
c (constantă)	0	$\mathbf{R}$
x	1	$\mathbf{R}$
x^n, $n \geqslant 1$ întreg	nx^{n-1}	$\mathbf{R}$
x^r, r real	rx^{r-1}	cel puţin $(0, \infty)$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$(0, \infty)$
$\ln x$	$\frac{1}{x}$	$(0, \infty)$
e^x	e^x	$\mathbf{R}$
a^x, $a > 0$, $a \neq 1$	$a^x \ln a$	$\mathbf{R}$
$\sin x$	$\cos x$	$\mathbf{R}$
$\cos x$	$-\sin x$	$\mathbf{R}$
$\operatorname{tg} x$	$\frac{1}{\cos^2 x}$	$\cos x \neq 0$
$\operatorname{ctg} x$	$-\frac{1}{\sin^2 x}$	$\sin x \neq 0$
$\arcsin x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$(-1, 1)$
$\arccos x$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$(-1, 1)$
$\operatorname{arctg} x$	$\frac{1}{1+x^2}$	$\mathbf{R}$
$\operatorname{arcctg} x$	$-\frac{1}{1+x^2}$	$\mathbf{R}$

Toate aceste derivate au fost calculate anterior, cu excepţia derivatei funcţiei $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $f(x) = a^x (a > 0,\ a \neq 1$ constant). În acest caz avem $\ln f(x) = x \ln a$ şi, derivînd în raport cu x, rezultă $\frac{1}{f(x)} \cdot f'(x) = \ln a$, deci $f'(x) = f(x) \cdot \ln a$, adică $(a^x)' = a^x \cdot \ln a$, $\forall x \in \mathbf{R}$. Funcţia putere poate fi definită şi astfel: $x^r = e^{r \ln x}$, $x > 0$ şi, ca atare, $(x^r)' = e^{r \ln x} \cdot r \cdot \frac{1}{x} = x^r \cdot r \cdot \frac{1}{x} = rx^{r-1}$; regăsim formula (9).

Teorema de derivare a funcţiilor compuse împreună cu tabloul anterior permite obţinerea următoarelor formule utilizate curent (unde $u = u(x)$ este o funcţie derivabilă).

Tabloul de derivare al funcţiilor compuse

Funcţia		Derivata	
u		u'	
u^n, $n \geqslant 1$ întreg		$nu^{n-1} \cdot u'$	
u^r, r real $(u > 0)$		$ru^{r-1} \cdot u'$	$(u > 0)$
$\sqrt{u}$	$(u \geqslant 0)$	$\frac{u'}{2\sqrt{u}}$	$(u > 0)$
$\ln u$	$(u > 0)$	$\frac{u'}{u}$	$(u > 0)$
e^u		$e^u \cdot u'$	
a^u, $a > 0$, $a \neq 1$		$a^u \cdot u' \cdot \ln a$	
$\sin u$		$\cos u \cdot u'$	
$\cos u$		$-\sin u \cdot u'$	
$\operatorname{tg} u$	$(\cos u \neq 0)$	$\frac{1}{\cos^2 u} \cdot u'$	$(\cos u \neq 0)$
$\operatorname{ctg} u$	$(\sin u \neq 0)$	$-\frac{1}{\sin^2 u} \cdot u'$	$(\sin u \neq 0)$
$\arcsin u$	$(u^2 \leqslant 1)$	$\frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u'$	$(u^2 < 1)$
$\arccos u$	$(u^2 \leqslant 1)$	$-\frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u'$	$(u^2 < 1)$
$\operatorname{arctg} u$		$\frac{u'}{1+u^2}$	
$\operatorname{arcctg} u$		$-\frac{u'}{1+u^2}$	

Adăugăm că dacă u, v sînt funcţii derivabile şi $u > 0$, atunci funcţia $u^v = e^{v \ln u}$ are derivata

$$(u^v)' = e^{v \ln u}\left(v' \ln u + v\frac{u'}{u}\right) = u^v\left(v' \ln u + v\frac{u'}{u}\right),$$

formulă care rezultă aplicînd teorema de derivare a funcţiilor compuse funcţiei $e^{v \ln u}$ şi ţinînd cont că $(v \ln u)' = v' \ln u + v \cdot \frac{u'}{u}$.

Începînd din acest moment ar trebui să ştiţi să calculaţi derivata oricărei funcţii elementare!

Prezentăm, pe scurt, noţiunea de *diferenţială a unei funcţii.*

Fie $f : (a, b) \to \mathbf{R}$ o funcţie derivabilă într-un punct $x_0 \in (a, b)$.

Avem

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0},$$

deci are loc formula aproximativă $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \simeq f'(x_0)$, adică

(32) $$f(x) \simeq f(x_0) + (x - x_0) \cdot f'(x_0),$$

sau, echivalent, $\Delta f \simeq f'(x_0) \cdot \Delta x$, în vecinătatea lui x_0.

Se numeşte *diferenţiala lui f în* x_0 aplicaţia $T : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $T(h) = f'(x_0) \cdot h$ şi se notează $T = \mathrm{d}f(x_0)$; aşadar, $\forall h \in \mathbf{R}$, $\mathrm{d}f(x_0)\,(h) = f'(x_0) \cdot h$.

În cazul particular cînd $f(x) = x$, avem $f'(x_0) = 1$ şi, ca atare, $\mathrm{d}x(x_0)\,(h) = h$, $\forall\, h \in \mathbf{R}$. Rezultă formula

(33) $$\mathrm{d}f(x_0) = f'(x_0) \cdot \mathrm{d}x(x_0) \text{ (egalitate de aplicaţii } \mathbf{R} \to \mathbf{R}).$$

Formula (32) se mai scrie: $\Delta f \simeq f'(x_0) \cdot \Delta x = \mathrm{d}f(x_0)\,(\Delta x)$; se spune că diferenţiala lui f aproximează creşterea lui f. Dacă f este derivabilă în orice punct din (a, b), atunci relaţia (33) se scrie:

(34) $$\mathrm{d}f = f'(x) \cdot \mathrm{d}x,$$

ceea ce explică notaţia $f'(x) = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}$, amintită la pagina 123.

Exemple. 1) Diferenţiala funcţiei $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = x^3 + 2x^2$ în punctul $x_0 = 1$ este aplicaţia $T = \mathrm{d}f(1)$ definită prin $T(h) = f'(1) \cdot h$, adică $T(h) = 7\,h$, $\forall\, h \in \mathbf{R}$.

2) Pentru $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = x^2 + \sin 3x$, avem $\mathrm{d}f = (2x + 3 \cos 3x)\mathrm{d}x$; similar, $\mathrm{d}(x^2) = 2x\,\mathrm{d}x$; $\mathrm{d}(\sin x) = \cos x\,\mathrm{d}x$; $\mathrm{d}(e^x) = e^x\,\mathrm{d}x$.

Regulilor de derivare le corespund reguli de diferenţiere. Dacă f şi g sînt funcţii derivabile pe un interval deschis, atunci:

$$\mathrm{d}(f + g) = (f + g)'\mathrm{d}x = (f' + g')\mathrm{d}x = f'\mathrm{d}x + g'\mathrm{d}x = \mathrm{d}f + \mathrm{d}g;$$

$$\mathrm{d}(f - g) = \mathrm{d}f - \mathrm{d}g; \quad \forall\, \lambda \in \mathbf{R},\ \mathrm{d}(\lambda f) = \lambda \mathrm{d}f;$$

$$\mathrm{d}(fg) = (fg)'\mathrm{d}x = (fg' + f'g)\mathrm{d}x = f\mathrm{d}g + g\mathrm{d}f;$$

în punctele unde funcţia g este nenulă, avem: $\mathrm{d}\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{g\mathrm{d}f - f\mathrm{d}g}{g^2}$.

Dacă $G = g(u)$ şi $u = f(x)$ cu f, g derivabile (ca în teorema IV.5), atunci regula derivării funcţiilor compuse se mai scrie:

$$G'(x) = g'(f(x)) \cdot f'(x) = g'(u) \cdot u'(x) = \frac{\mathrm{d}G}{\mathrm{d}u} \cdot \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}, \text{ adică } \frac{\mathrm{d}G}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}G}{\mathrm{d}u} \cdot \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}.$$

2.5. Derivate de ordin superior

Fie $f : E \to \mathbf{R}$ o funcţie derivabilă pe mulţimea $E \subset \mathbf{R}$. În acest caz este definită derivata $f' : E \to \mathbf{R}$, $x \mapsto f'(x)$ a funcţiei f. Funcţia f se numeşte *derivabilă de două ori* într-un punct $x_0 \in E$ dacă f este derivabilă într-o vecinătate a lui x_0 şi f' este derivabilă în x_0; în acest caz, derivata lui f' în punctul x_0 se numeşte *derivata a doua* (sau *de ordinul doi*) a lui f în x_0 şi se notează $f''(x_0)$. Dacă f' este derivabilă pe E, atunci derivata lui f' se numeşte *derivata a doua* a lui f şi se notează cu f''. În mod similar se definesc $f''' = (f'')'$, $f^{(4)} = (f''')'$ şi, prin inducţie, se defineşte derivata de ordin n, $f^{(n)} = (f^{(n-1)})'$, $n \geqslant 2$. Uneori se mai scrie $\frac{d^n f}{dx^n}$ în loc de $f^{(n)}(x)$. Prin convenţie se defineşte derivata de ordin zero $f^{(0)} = f$ şi derivata de ordin 1, $f^{(1)} = f'$ (se scrie uneori $f^{(2)}$ în loc de f'' şi $f^{(3)}$ în loc de f'''). Dacă pentru orice $n \in \mathbf{N}$, funcţia f este de n ori derivabilă, atunci se spune că f este *indefinit derivabilă*.

Exemple

1) Fie $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = x^3 + x^2 - 20x + 4$. Avem $f'(x) = 3x^2 + 2x - 20$, $f''(x) = 6x + 2$, $f'''(x) = 6$, $f^{(n)}(x) = 0$, $\forall\, n \geqslant 4$, $\forall\, x \in \mathbf{R}$.

Se verifică imediat că toate derivatele unor funcţii polinomiale sînt funcţii polinomiale şi derivatele de ordin strict mai mare decît gradul polinomului sînt identic nule. De asemenea, derivatele unor funcţii raţionale sînt funcţii raţionale.

2) Notînd cu D operaţia de derivare, prin care unei funcţii derivabile i se asociază derivata ei, se mai folosesc uneori notaţiile lui A. Cauchy (1789–1857): $Df = f'$, $D^2 f = D(Df) = Df' = f''$, $D^n f = f^{(n)}$, $\forall\, n \geqslant 1$. De exemplu, $Dx^3 = 3x^2$, $D(a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n) = a_0 n x^{n-1} + a_1(n-1)x^{n-2} + \ldots + a_{n-1}$, pentru orice constante reale a_k, $0 \leqslant k \leqslant n$, $D^2 x^4 = D(4x^3) = 12x^2$, $D^n e^x = e^x$, $\forall\, n \geqslant 1$.

3) Ne propunem să rezolvăm ecuaţia $f''(x) = 0$ pentru funcţia $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = e^{-x^2}$. În acest caz, $f'(x) = -2xe^{-x^2}$, $f''(x) = -2 \cdot e^{-x^2} - 2x \cdot e^{-x^2} \cdot (-2x) = (4x^2 - 2)e^{-x^2}$, $\forall\, x \in \mathbf{R}$ şi soluţiile ecuaţiei date sînt $\pm \frac{\sqrt{2}}{2}$.

4) Arătăm, prin inducţie după $n \geqslant 1$ natural, că $D^n \sin(\omega x + \varphi) = \omega^n \cdot \sin\left(\omega x + \varphi + \frac{n\pi}{2}\right)$, unde ω şi φ sînt constante. Pentru $n = 1$ avem de probat că $D \sin(\omega x + \varphi) = \omega \sin\left(\omega x + \varphi + \frac{\pi}{2}\right)$, adică $\omega \cos(\omega x + \varphi) = \omega \sin\left(\omega x + \varphi + \frac{\pi}{2}\right)$, ceea ce este evident.

Presupunem afirmaţia dovedită pentru n şi avem de arătat că $D^{n+1} \sin(\omega x + \varphi) = \omega^{n+1} \sin\left(\omega x + \varphi + \frac{(n+1)\pi}{2}\right)$. Dar $D^{n+1} \sin(\omega x + \varphi) = D(D^n \sin(\omega x + \varphi)) = D\left(\omega^n \sin\left(\omega x + \varphi + \frac{n\pi}{2}\right)\right) = \omega^{n+1} \cdot \cos\left(\omega x + \varphi + \frac{n\pi}{2}\right)$; este deci suficient să observăm că $\sin\left(\omega x + \varphi + \frac{(n-1)\pi}{2}\right) = \cos\left(\omega x + \varphi + \frac{n\pi}{2}\right)$, ceea ce rezultă din faptul că $\sin\left(a + \frac{\pi}{2}\right) = \cos a$, $\forall\, a \in \mathbf{R}$.

5) Calculăm $f^{(n)}(0)$ pentru funcţia $f : \mathbf{R} \setminus \{-1\} \to \mathbf{R}$, $f(x) = \frac{1}{x+1}$, $\forall\, n \in \mathbf{N}$.

Avem $f^{(0)} = f$, $f'(x) = -\frac{1}{(x+1)^2} = -(x+1)^{-2}$, $f''(x) = (-1)(-2)(x+1)^{-3} = \frac{2}{(x+1)^3}$

şi, prin inducţie, se verifică imediat că $f^{(n)}(x) = (-1)^n \dfrac{n!}{(x+1)^{n+1}}$, $\forall\, x \neq -1$.

În punctul $x = 0$ avem $f^{(n)}(0) = (-1)^n n!$.

Deci, funcţiile polinomiale, exponenţiale, logaritmice, trigonometrice sînt derivabile pe orice interval deschis conţinut în domeniul maxim de definiţie.

EXERCIŢII (capitolul IV, § 2)

1. Să se calculeze derivata următoarelor funcţii $f : E \to \mathbf{R}$ (indicînd domeniul maxim de definiţie E pentru funcţie şi mulţimea $F \subset E$ a punctelor unde f este derivabilă):

a) $f(x) = x^2 - x + \dfrac{1}{2}$; b) $f(x) = x^{100} + \dfrac{1}{25}x^{50} + 1$;

c) $f(x) = \sin x + \cos x$; d) $f(x) = 5x + \sin x$;

e) $f(x) = 2x^2 + \cos x$; f) $f(x) = x \cos x$;

g) $f(x) = x + \ln 2 + x \ln 2$; h) $f(x) = x^2 + \sqrt{x} - \sqrt[3]{x}$;

i) $f(x) = \left(x - \dfrac{1}{x}\right)^2$; j) $f(x) = x^2 \ln x$;

k) $f(x) = \dfrac{x+1}{x-2}$; l) $f(x) = \dfrac{x^2}{x+2} + \dfrac{7}{x-1}$;

m) $f(x) = \dfrac{\sin x}{2 + \cos x}$; n) $f(x) = \sin x \cos x + x$;

o) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x}}{x+1}$; p) $f(x) = \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x^2} + \dfrac{1}{x^3}$;

q) $f(x) = 3 \operatorname{sh} x + \operatorname{ch} x$; r) $f(x) = \dfrac{1}{x^{1987} + 1}$.

2. Să se determine rădăcinile ecuaţiei $f'(x) = 0$ pentru funcţiile următoare $f : E \to \mathbf{R}$ (E fiind mulţimea punctelor unde f este definită şi derivabilă):

a) $f(x) = \dfrac{x}{x^2+1}$; e) $f(x) = x \ln x$;

b) $f(x) = \dfrac{x}{2x^2 + 5x + 2}$; f) $f(x) = x + \cos x$;

c) $f(x) = \dfrac{7x^2 + 20x}{x^2 + 2x - 3}$; g) $f(x) = \sin x + \cos x$;

d) $f(x) = xe^x$; h) $f(x) = e^{2x} + e^{-2x}$.

3. a) Presupunem că $f, g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ şi că $f(x) = (x+2) \cdot g(x)$, $\forall\, x \in \mathbf{R}$ unde g este derivabilă în origine şi $g(0) = 2$, $g'(0) = -1$. Să se calculeze $f'(0)$.

b) Dacă $g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ şi $f(x) = x^2 g(x) + \dfrac{1}{x^2+1}$, $\forall\, x \in \mathbf{R}$ şi dacă g este derivabilă în $x = 1$, $g(1) = 1$, $g'(1) = 2$, să se calculeze $f'(1)$.

4. Să se indice domeniul maxim de definiţie pentru funcţiile f şi f' în fiecare din cazurile (vezi enunţul exerciţiului 1):

a) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}$;

b) $f(x) = \sqrt{|x|}$;

c) $f(x) = \sqrt{1 + x}$;

d) $f(x) = \left(x + \dfrac{1}{x}\right)^2$;

e) $f(x) = \dfrac{x+1}{\sqrt{x}}$;

f) $f(x) = \dfrac{1 - x^3}{x^4}$;

g) $f(x) = \dfrac{x^3 + 1}{\sqrt{x}}$;

h) $f(x) = (1 + \sqrt{x} + x)^2$.

5. Se consideră funcţiile $f, g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ definite prin $f(x) = x - |x|$, $g(x) = x + |x|$. Să se arate că $f + g$ şi fg sînt derivabile pe $\mathbf{R}$, deşi f, g nu sînt derivabile în punctul $x = 0$.

6. Să se arate că, deşi funcţia $g : [0, \infty) \to \mathbf{R}$, $g(x) = \sqrt{x}$ nu este derivabilă în $x = 0$, totuşi funcţia $f : [0, \infty) \to \mathbf{R}$, $f(x) = xg(x)$ este derivabilă în $x = 0$.

7. Se consideră funcţia $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \dfrac{1}{x}, & \text{dacă } x \neq 0 \\ 0, & \text{dacă } x = 0. \end{cases}$

Să se arate că deşi f este derivabilă în punctul $x = 0$, totuşi limita $\lim\limits_{x \to 0} f'(x)$ nu există.

8. Să se scrie ecuaţia tangentei la graficele indicate în punctele respective:

a) $y = x^2$, $x_0 = 1$;

b) $y = x + \sqrt{x}$, $x_0 = 4$;

c) $y = \dfrac{x}{x^3 + 1}$, $x_0 = -2$;

d) $y = \ln x$; $x_0 = 1$;

e) $y = e^x$, $x_0 = 0$;

f) $y = \sin 2x$, $x_0 = \dfrac{\pi}{8}$.

9. Se consideră funcţiile $f, g: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = x^2$, $g(x) = -x^2 + 4x + c$ (c constantă). Să se afle c astfel încît graficele lui f şi g să aibă o tangentă comună într-un punct comun.

Idem pentru $f, g : [-c, c] \to \mathbf{R}$, $f(x) = x^2$, $g(x) = 1 - \sqrt{c^2 - x^2}$, $c > 0$.

10. Folosind regula de derivare a funcţiilor compuse, să se calculeze derivatele funcţiilor următoare (vezi enunţul exerciţiului 1):

a) $f(x) = (x^5 - 1)^3$;

b) $f(x) = \sqrt{-4x}$;

c) $f(x) = \sin (2x + 5)$;

d) $f(x) = \sin^2 x + \sin 2x$;

e) $f(x) = \sin^3 x + \cos^6 x$;

f) $f(x) = \sqrt{x^3 - x}$;

g) $f(x) = \sqrt{4 - x^2}$;

h) $f(x) = \left(x + \dfrac{1}{x}\right)^{50}$;

i) $f(x) = \left(\dfrac{x^2 - 1}{x}\right)^{50}$;

j) $f(x) = \dfrac{1}{\sin^2 x}$;

k) $f(x) = \dfrac{1}{\cos x}$;

l) $f(x) = \operatorname{tg} 2x$;

m) $f(x) = \ln \operatorname{tg} \dfrac{x}{2}$;

n) $f(x) = \dfrac{1}{4} \operatorname{tg}^4 x + \dfrac{1}{2} \operatorname{tg}^2 x$;

o) $f(x) = \sin(\cos x)$;

p) $f(x) = x\sqrt{x^2+1} + \sqrt[3]{x^2+1}$;

q) $f(x) = \dfrac{1}{\cos^2 x} + \operatorname{tg} 2x$;

r) $f(x) = \ln(5x^2 + x)$;

s) $f(x) = \ln\dfrac{1-x}{1+x}$;

t) $f(x) = \ln(\ln x)$;

u) $f(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2+16}\right)$;

v) $f(x) = e^{x-x^2}$;

w) $f(x) = e^{\sqrt{x-1}}$;

x) $f(x) = \operatorname{sh} x + \operatorname{ch} x$;

y) $f(x) = \left(\dfrac{e^x+1}{e^{2x}+1}\right)^2$;

z) $f(x) = 3^{x^2+x+1} + 2^{\sqrt{x^2+1}}$.

11. Să se calculeze derivatele următoarelor funcţii $f: E \to \mathbf{R}$ în punctele indicate (E fiind domeniul maxim de definiţie):

a) $f(x) = \arcsin\dfrac{1}{x+1}$, $x_0 = 1$;

b) $f(x) = \operatorname{arctg} x$, $x_0 = \sqrt{3}$;

c) $f(x) = \ln\dfrac{x+1}{\sqrt{x}} + \ln\sqrt{x}$, $x_0 = 1$:

d) $f(x) = (1 + x^2)\cdot\operatorname{arctg} x$, $x_0 = 1$;

e) $f(x) = \dfrac{a\sin x + b}{b\cos x + a}$, $x_0 = \dfrac{\pi}{2}$ (unde a, b sînt constante, $a \neq 0$);

f) $f(x) = \dfrac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}$, $x_0 = 0$;

g) $f(x) = x\ln\dfrac{2x+1}{2x-1}$, $x_0 = -1$.

12. Să se arate că funcţiile $f: (1, \infty) \to (0, \infty)$, $g: (0, \infty) \to (1, \infty)$ definite prin $f(x) = \sqrt{x^2-1}$, $g(y) = \sqrt{y^2+1}$ sînt inverse ($g = f^{-1}$) şi să se verifice că $g'(f(x))\cdot f'(x) = 1$, $\forall\, x > 1$, şi $f'(g(y))\cdot g'(y) = 1$, $\forall\, y > 0$.

13. Fie $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = x^3 + 2x^2 + 4x + 4$. Să se arate că $f'(x) > 0$, $\forall\, x \in \mathbf{R}$ şi că f este bijectivă. Să se calculeze $(f^{-1})'(4)$ şi să se arate că $(f^{-1})'(y) > 0$, $\forall\, y \in \mathbf{R}$.

14. Să se calculeze: a) diferenţialele $df(x_0)$ pentru funcţiile $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ indicate: $f(x) = x^2 + 5x$, $x_0 = 1$; $f(x) = \sqrt{1+x^2} + 2x$, $x_0 = 0$; $f(x) = e^{2x} - x^2$, $x_0 = 0$;

b) diferenţialele df pentru $f(x) = x^3 - x$; $f(x) = x + \ln(x^2+1)$; $f(x) = \cos 2x - \cos^2 x$.

15. a) Să se arate că funcţia $y: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $x \longmapsto y(x) = A\cos\omega x + B\sin\omega x$ (A, B, ω fiind constante) verifică relaţia $y''(x) + \omega^2 y(x) = 0$, $\forall\, x \in \mathbf{R}$.

b) Să se afle $p, q \in \mathbf{R}$ ştiind că funcţia $y(x) = e^{-2x}\sin 3x$ verifică relaţia $y''(x) + py'(x) + qy(x) = 0$, pentru orice $x \in \mathbf{R}$.

c) Pentru ce constantă reală a funcţia $y(x) = e^{ax}$ verifică relaţia $y''(x) + 2y'(x) - 3y(x) = 0$, $\forall\, x \in \mathbf{R}$? Idem, $y(x) = xe^{ax}$ verifică relaţia $y''(x) + 4y'(x) + 4y(x) = 0$.

16. Să se rezolve (în $\mathbf{R}$) ecuațiile $f'(x) = 0$ și $f''(x) = 0$ pentru fiecare din funcțiile $f : E \to \mathbf{R}$ următoare (unde E este mulțimea punctelor unde f este de două ori derivabilă):

a) $f(x) = \dfrac{x}{x^3 + 1}$;

b) $f(x) = x \ln x$;

c) $f(x) = x^2 + \ln x$;

d) $f(x) = \sin x - \cos x$;

e) $f(x) = \ln \sin x$;

f) $f(x) = \ln(x^2 + x)$;

g) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x}}{x + 1}$;

h) $f(x) = e^{-x} \cdot \sin x$;

i) $f(x) = e^{x - \sqrt{x}}$;

j) $f(x) = 2^{x^2 - 2x}$;

k) $f(x) = \dfrac{1}{2} \sin 2x + \dfrac{1}{3} \sin 3x$;

l) $f(x) = \operatorname{arctg} \dfrac{x + 1}{x - 1}$.

17. Să se calculeze derivata de ordin $n (n \geqslant 1)$ pentru funcțiile $f : E \to \mathbf{R}$ următoare (precizînd mulțimea E a punctelor unde f este de n ori derivabilă):

a) $f(x) = x^3 - 3x + 2$;

b) $f(x) = x^n$;

c) $f(x) = \dfrac{1}{x}$;

d) $f(x) = \sin x$;

e) $f(x) = e^{ax} (a \in \mathbf{R}$ constant);

f) $f(x) = \dfrac{1}{x + a}$;

g) $f(x) = \dfrac{1}{x^2 - a^2}$;

h) $f(x) = \ln \dfrac{2x}{x^2 - 1}$.

18. Fie $a_1, a_2, \ldots, a_n$ numere reale, distincte două cîte două, $P : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $P(x) = (x - a_1)(x - a_2) \ldots (x - a_n)$ și $f : E \to \mathbf{R}$, $f(x) = \dfrac{1}{x - a_1} + \dfrac{1}{x - a_2} + \ldots + \dfrac{1}{x - a_n}$, unde $E = \mathbf{R} \setminus \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$.

a) Să se arate că funcția f este indefinit derivabilă pe E și că $f'(x) < 0$, $\forall\, x \in E$

b) Să se arate că $f(x) = \dfrac{P'(x)}{P(x)}$ și că $P(x) \cdot P''(x) < P'(x)^2$, pentru orice $x \in E$.

19. Fie $f, g : (a, b) \to \mathbf{R}$, $a < b$ două funcții de n ori derivabile pe intervalul (a, b). Să se arate, prin inducție după întregul $n \geqslant 1$, că $\forall\, x \in (a, b)$,

$$(fg)^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k f^{(n-k)}(x) \cdot g^{(k)}(x) \quad \textit{(regula lui Leibniz)}.$$

§ 3. Aplicații directe ale derivatelor

a) *Viteza și accelerația unui mobil*

Considerăm o axă Δ pe care au fost fixate o origine, un sens și o unitate de măsură. Fie un mobil (asimilabil cu un punct de pe Δ); notînd cu $s(t)$ abscisa punctului unde se află mobilul la momentul t (numită și spațiul parcurs de mobil) și presupunînd că s este o funcție derivabilă într-un punct t_0, atunci se definește *viteza instantanee* $v(t_0)$ a mobilului la momentul t_0 ca fiind derivata spațiului în t_0, adică

$$v(t_0) = s'(t_0).$$

Dacă funcția s este de două ori derivabilă în t_0, atunci $s''(t_0) = v'(t_0)$ se numește *accelerația* mobilului la momentul t_0.

Reținem că într-o mișcare rectilinie viteza este derivata de ordin întîi, iar accelerația derivata de ordinul doi, a spațiului în raport cu timpul.

Aceste definiții constituie o aplicare firească a definiției I.1 la modelul fizic considerat.

Exemplu

Presupunem că legea de mișcare a unui mobil pe o axă este exprimată prin relația $s(t) = e^{-t} \cos t$. Vrem să determinăm accelerația mobilului după 2 secunde și să calculăm limita vitezei cînd t tinde către ∞.

Avem $v(t) = s'(t) = -e^{-t} \cdot \cos t - e^{-t} \cdot \sin t = -e^{-t}(\cos t + \sin t)$ și $a(t) = v'(t) =$ $= 2e^{-t} \cdot \sin t$, deci $a(2) = \dfrac{2 \sin 2}{e^2}$ și $\lim\limits_{t \to \infty} v(t) = -\lim\limits_{t \to \infty} \dfrac{\cos t + \sin t}{e^t}$ și această limită este nulă, deoarece $\left| \dfrac{\cos t + \sin t}{e^t} \right| \leq \dfrac{2}{e^t}$, $\forall\, t$ (se mai spune că mișcarea se amortizează pentru $t \to \infty$).

b) *Intensitatea curentului electric*

Notînd cu $Q(t)$ sarcina care trece printr-o secțiune a unui conductor în intervalul de timp $[0, t]$, atunci pentru orice momente distincte t_1, t_2, diferența $Q(t_2) - Q(t_1)$ este sarcina care a trecut între momentele t_1, t_2, iar cîtul $\dfrac{Q(t_2) - Q(t_1)}{t_2 - t_1}$ este sarcina medie raportată la intervalul de timp dintre momentele t_1, t_2. În analogie cu modelul mecanic anterior, dacă fixăm un moment t_0 și presupunem că funcția Q este derivabilă în t_0, atunci derivata $Q'(t_0)$ este viteza de variație a sarcinii electrice la momentul t_0, $Q'(t_0) = \lim\limits_{t \to t_0} \dfrac{Q(t) - Q(t_0)}{t - t_0}$. Ea primește denumirea specifică de *intensitate* a curentului electric la momentul t_0, $i(t_0) - Q'(t_0)$.

Dacă se consideră un circuit electric constînd dintr-o inductanță L, o capacitate C și o rezistență R, tensiunea fiind constantă, atunci din legea a doua a lui Kirchhoff rezultă că intensitatea $i(t)$ a curentului prin acel circuit va verifica relaţia (numită ecuaţie diferenţială).

$$Li''(t) + Ri'(t) + Ci(t) = 0, \ \forall t.$$

Se pune atunci problema determinării funcţiei $i(t)$, cunoscînd L, R, C, ceea ce necesită dezvoltări ale aparatului analizei matematice.

c) *Densitatea liniară de masă*

Considerăm o masă materială presupusă repartizată pe o bară, asimilată cu un interval $[a, b]$. Pentru orice punct $x \in [a, b]$ notăm cu $m(x)$ masa porţiunii cuprinsă în intervalul $[a, x]$. Fixînd un punct $x_0 \in (a, b)$, raportul $\frac{m(x) - m(x_0)}{x - x_0}$, $x \neq x_0$ reprezintă densitatea medie de masă între punctele x, x_0.

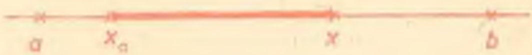


Fig. IV.9

Pe intervale „mici" putem presupune că masa este repartizată omogen şi idealizarea acestui fapt o constituie considerarea limitei

$$\rho(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{m(x) - m(x_0)}{x - x_0}$$

(în ipoteza că există). În acest caz se obţine o caracteristică importantă, numită *densitatea liniară de masă* în punctul x_0. Aşadar, $\rho(x_0) = m'(x_0)$.

Exemplu. Presupunem că pe intervalul $[0, 4]$ este repartizată o masă materială astfel încît $m(x) = x^3 + 3x$; atunci densitatea în punctul $x_0 = 2$ este $\rho(2) = m'(2) = (3x^2 + 3)|_{x=2} = 15$. (Uneori în loc de $f(a)$ se scrie $f(x)|_{x=a}$.)

În toate consideraţiile anterioare am omis unităţile de măsură.

d) ***Aplicaţii în economie.*** Deşi în economie apar de obicei funcţii cu valori discrete (costurile şi beneficiile fiind exprimate în unităţi monetare, de pildă în lei), se pot considera funcţii continue sau chiar derivabile cu valori în **R** care le prelungesc. Aceasta permite utilizarea metodelor analizei matematice.

1°. Notăm cu $\beta(x)$ beneficiul realizat pentru o cheltuială de x lei. Pentru orice cheltuială suplimentară de h lei, beneficiul suplimentar pe leu cheltuit este egal cu $\frac{\beta(x + h) - \beta(x)}{h}$. Dacă h este „suficient de mic", atunci acest raport dă o indicaţie dinamică asupra variaţiei beneficiului corespunzător sumei x. Dacă există, limita

$$\beta'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{\beta(x + h) - \beta(x)}{h}$$

se numeşte ***beneficiul marginal*** corespunzător sumei cheltuite x.

2°. Fie $\gamma(p)$ costul total pentru producerea a p unităţi dintr-un produs. Pentru a putea controla creşterea sau descreşterea producţiei, este util de ştiut cît costă producerea suplimentară a încă h unităţi din acel produs; atunci costul pe unitatea suplimentară de produs este $\frac{\gamma(p + h) - \gamma(p)}{h}$ şi limita acestuia cînd $h \to 0$ (dacă există), adică $\gamma'(p)$, este un indicator economic important, numit *costul marginal* al producţiei pentru p unităţi ale produsului considerat.

Desigur modelele prezentate sînt foarte simplificate, pentru că în realitate funcțiile $\beta(x)$, $\gamma(p)$ pot fi determinate doar empiric, tabelate prin date experimentale și în mod necesar trebuie să se țină cont de prezența în model a elementelor aleatorii.

Observații. Uneori viteza (sau, cum se mai spune, rata) de creștere a unei mărimi fizice sau economice se dovedește a fi la fel de importantă ca și măsura acelei mărimi. (De exemplu, este util de știut că ai de parcurs 200 km, dar este important de știut și cu ce viteză te deplasezi.) Multe teorii fizice sau prognoze economice sînt exprimate prin legi de creștere care utilizează derivatele unor mărimi alese convenabil.

Considerăm utilă o sinteză a exemplelor anterioare, arătînd cum noțiuni din limbajul curent se dovedesc a fi în fond derivate ale anumitor funcții: viteza este derivata spațiului, accelerația — derivata vitezei, densitatea liniară de masă — derivata masei ca funcție de lungime, intensitatea unui curent electric — derivata cantității de electricitate în raport cu timpul, coeficientul unghiular al tangentei la graficul unei funcții $y = y(x)$ este $y'(x)$, costul marginal al producției — derivata costului total în raport cu cantitatea de produse etc.

e) *Aplicații la calcule aproximative*

Dacă f este o funcție derivabilă într-un punct x_0, am văzut că are loc formula aproximativă

$$f(x) \simeq f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0), \tag{35}$$

pentru orice x „suficient de apropiat“ de x_0. În membrul drept al formulei (35) se află o funcție de gradul I în x și, de aceea, se mai spune că (35) este formula de *aproximare liniară* a lui f în jurul punctului x_0.

Exemple

1) Pentru unghiuri θ „mici“ se acceptă aproximarea $\sin\theta \simeq \theta$. Aceasta rezultă direct aplicînd formula (35) funcției $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(\theta) = \sin\theta$ în jurul originii $\theta_0 = 0$; într-adevăr $f(\theta_0) = 0$, $f'(\theta_0) = 1$ și, ca atare, $\sin\theta \simeq \theta$.

2) Indicăm aproximarea liniară a funcției $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = e^x$ în jurul punctului $x_0 = 0$. Avem $f(x_0) = e^0 = 1$ și $f'(x_0) = e^x|_{x=0} = 1$, deci $e^x \simeq 1 + (x - 0)$, adică $e^x \simeq 1 + x$ (fig. IV. 10).

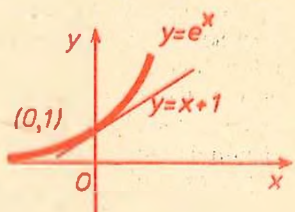


Fig. IV.10

3) Indicăm aproximarea liniară a funcției $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = 4x^2 + x + \cos x$ în jurul punctului $x_0 = \frac{\pi}{2}$. Aici $f(x_0) = \pi^2 + \frac{\pi}{2}$, $f'(x_0) = 4\pi$, deci $4x^2 + x + \cos x \simeq$ $\simeq \pi^2 + \frac{\pi}{2} + 4\pi\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = 4\pi x - \pi^2 + \frac{\pi}{2}$.

În general, dacă evoluția unui proces fizic este descrisă printr-o funcție derivabilă f, „a liniariza“ acest proces la un moment t_0, înseamnă a înlocui $f(t)$ cu aproximarea liniară $f(t_0) + f'(t_0)(t - t_0)$, pentru orice t dintr-o vecinătate a lui t_0.

4) Calculăm cu aproximație $\sqrt{9{,}14}$ și pentru aceasta considerăm funcția $f:(0, \infty) \to \mathbf{R}$, $f(x) = \sqrt{x}$ și punctul $x_0 = 9$. Avem $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$, deci $f'(x_0) = \frac{1}{6}$. Formula (35) devine în acest caz $\sqrt{x} \simeq \sqrt{9} + \frac{1}{6}(x - 9)$, adică $\sqrt{x} \simeq \frac{x + 9}{6}$, deci $\sqrt{9{,}14} \simeq \frac{9{,}14 + 9}{6} \simeq 3{,}023$.

5) Calculăm cu aproximaţie sin 47° şi pentru aceasta considerăm funcţia $f:\left(0, \frac{\pi}{2}\right) \to \mathbf{R}$, $f(x) = \sin x$ şi $x_0 = \frac{\pi}{4}$. Avem $f'(x_0) = \cos x \Big|_{x=\frac{\pi}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ şi, ca atare, $\sin x \simeq \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$; pentru $x = 47° = 45° + 2° = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{90}$, avem $\sin 47° \simeq \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\pi}{90} \simeq 0{,}7317$ (subliniem că în analiza matematică unghiurile se măsoară numai în radiani).

EXERCIŢII (capitolul IV, § 3)

1. Legea de mişcare a unui mobil pe o axă este $s(t) = t^2 - 2t + 1$, $\forall t \geqslant 0$. Să se calculeze viteza şi acceleraţia mobilului la momentul $t = 1$. Cum se explică rezultatul obţinut?

2. Legea de mişcare a unui mobil pe o axă este $s(t) = e^{kt} \cdot \cos 2t$, $\forall t \in \mathbf{R}$. Să se determine constanta k ştiind că $s''(t) + 2s'(t) + 5s(t) = 0$, $\forall t$. Apoi să se calculeze viteza şi acceleraţia mobilului la momentele $t = 0$, $t = \frac{\pi}{2}$ şi pentru $t \to \infty$.

3. Legea de mişcare a unui mobil pe o axă este $s(t) = t^3 - 12t^2 + 4$. La ce moment acceleraţia sa este nulă? Care este valoarea minimă a vitezei acelui mobil?

4. Presupunem că masa de repaus a unei particule este m_0. Dacă viteza particulei este v, atunci în teoria relativităţii se arată că masa particulei este $m = \dfrac{m_0}{\sqrt{1 - \dfrac{v^2}{c^2}}}$ (unde c este viteza luminii). Să se determine $\frac{dm}{dv}$ pentru $v = \frac{1}{3}c$ şi $\frac{dm}{dt}$, dacă $v = \frac{1}{3}c$ şi $\frac{dv}{dt} = 16\sqrt{2}\ \mathrm{m/s^2}$.

5. Presupunem că la fiecare moment t cantitatea de electricitate scursă printr-un conductor este $Q(t) = 2 \cos \pi t$. Să se determine intensitatea curentului; la ce momente de timp intensitatea este maximă? Dar minimă?

6. Să se determine aproximările liniare ale funcţiilor $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ următoare, în jurul punctelor indicate:

a) $f(x) = x^2 + 2x + 3$, $x_0 = 0$;

b) $f(x) = x^2 + 2x + 3$, $x_0 = 1$;

c) $f(x) = x^2 + 2 \sin x$, $x_0 = 0$;

d) $f(x) = e^x + 2x + \cos x$, $x_0 = 0$;

e) $f(x) = e^{3x+2} - x - 3$, $x_0 = -1$;

f) $f(x) = \ln(x^2 + x + 1)$, $x_0 = 0$.

7. Să se calculeze: a) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x}$; b) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1 + \sin x - \cos x}{x}$; c) $\lim\limits_{x\to 1} \frac{\sqrt{3+x} - 2}{x - 1}$, folosind aproximarea liniară a funcţiilor $f(x)$ de la numărător.

8. Să se calculeze cu aproximaţie: $\sqrt{4{,}17}$, $\sqrt[3]{29}$, $\ln 1{,}11$, $\sin 33°$, $\cos 56°$.

§ 4. Proprietățile funcțiilor derivabile

După cum am studiat în capitolul III proprietățile generale ale funcțiilor continue, adică proprietățile valabile pentru orice funcție continuă, tot așa vom analiza, în cele ce urmează, unele proprietăți generale ale funcțiilor derivabile. În particular, vom da metode de determinare a punctelor de maxim și minim, a intervalelor de monotonie, a intervalelor de convexitate etc. ale unei funcții, în care rolul derivatelor este esențial.

Unele din teoremele care urmează sînt intuitiv evidente (folosind de regulă interpretarea geometrică a derivatei) și demonstrațiile lor pot fi la început omise, insistînd pe înțelegerea enunțurilor.

4.1. Puncte de extrem. Teorema lui Fermat

Într-o serie de probleme tehnice sau economice, și bineînțeles în matematică, este important de știut care sînt maximele și minimele anumitor mărimi variabile. După ce problemele capătă o formulare matematică, adeseori ele se reduc la determinarea punctelor de extrem ale anumitor funcții. Sînt necesare în prealabil cîteva definiții precise.

DEFINIȚIA IV.4. Fixăm o funcție $f : A \to \mathbf{R}$ $(A \subset \mathbf{R})$. Un punct $x_0 \in A$ se numește punct de maxim relativ (respectiv de minim relativ) al lui f dacă există o vecinătate U a punctului x_0 astfel încît pentru orice $x \in U \cap A$ să avem

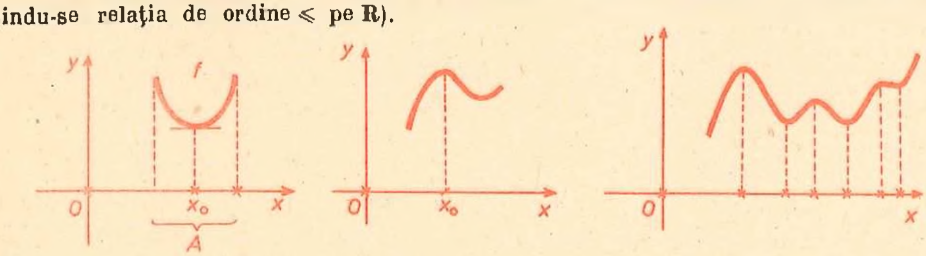
$$f(x) \leqslant f(x_0) \text{ (respectiv } f(x) \geqslant f(x_0)). \tag{36}$$

În acest caz, valoarea $f(x_0)$ se numește un *maxim* (respectiv un *minim*) relativ al lui f.

Punctele de maxim sau de minim relativ se mai numesc *puncte de extrem relativ*. Dacă inegalitățile (36) sînt stricte (pentru orice $x \in U \cap A$, $x \neq x_0$), se spune că x_0 este un punct de extrem strict.

Valorile funcției în punctele ei de extrem relativ se mai numesc *extremele* relative ale funcției.

Observații. 1) Faptul că funcția considerată este cu valori reale este esențial (folosindu-se relația de ordine $\leqslant$ pe $\mathbf{R}$).



a) minim relativ b) maxim relativ c) extreme relative

Fig. IV.11

2) Trebuie remarcat că o funcţie poate să aibă mai multe puncte de maxim şi minim relativ, iar un minim să fie mai mare decît un maxim, ceea ce justifică adjectivul „relativ" (fig. IV.11, *c*). Valorile $\sup\limits_{x \in A} f(x)$, $\inf\limits_{x \in A} f(x)$ calcuate în $\mathbf{R}$ se mai numesc *extremele globale* ale lui f pe A.

Punctele de extrem relativ se mai numesc puncte de extrem *local*, deoarece inegalităţile de tipul (36) sînt verificate nu neapărat pe întreg domeniul de definiţie al funcţiei f ci numai în jurul lui x_0.

În cele ce urmează vom renunţa la utilizarea adjectivului „relativ".

3) Dacă marginea $M = \sup\limits_{x \in A} f(x)$ este atinsă, atunci orice punct x astfel încît $f(x_0) = M$ va fi un punct de maxim (nu neapărat strict). Se poate întîmpla ca x_0 să fie un punct de maxim şi totuşi $f(x_0) < M$ (fig. IV.12, *b*). O situaţie analoagă (cu sensul inegalităţii schimbat) are loc pentru marginea inferioară şi pentru punctele de minim..

Dacă marginea superioară $\sup\limits_{x \in A} f(x)$ nu este atinsă pe mulţimea A, atunci se poate ca funcţia să nu aibă puncte de maxim (fig. IV.13). Similar pentru $\inf\limits_{x \in A} f(x)$.

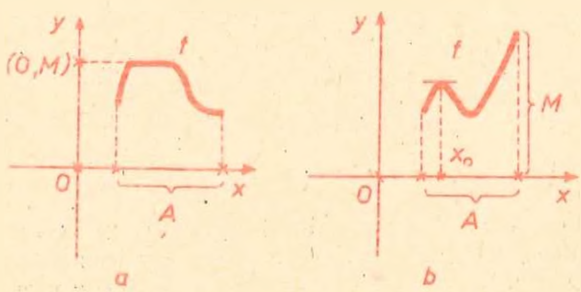


Fig. IV.12

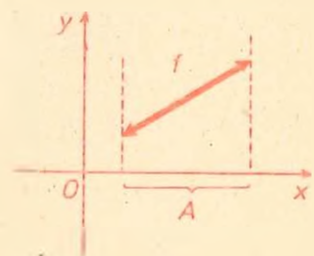


Fig. IV.13

Exemple

1) Pentru funcţia $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = |x|$, punctul $x_0 = 0$ este punct de minim, deoarece $f(x) \geqslant f(x_0)$, adică $|x| \geqslant 0$ în orice vecinătate a originii.

2) Pentru funcţia $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = \sigma(x) \cdot \sin x$, punctele $x_0 \leqslant 0$, $x_0 = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi$ $(k \in \mathbf{N})$ sînt puncte de minim, iar punctele $x_0 \leqslant 0$, $x_0 = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ $(k \in \mathbf{N})$ sînt puncte de maxim.

Utilitatea derivatelor apare în mod evident în următorul rezultat:

TEOREMA IV.7 *(teorema lui P. Fermat*, 1601—1665). **Fie I un interval deschis şi $x_0 \in I$ un punct de extrem (relativ) al unei funcţii $f: I \to \mathbf{R}$. Dacă f este derivabilă în punctul x_0, atunci $f'(x_0) = 0$.**

Demonstraţia este simplă. Pentru a fixa ideile, să presupunem că x_0 este un punct de maxim (cazul minimului se tratează similar sau se reduce la cazul precedent considerînd funcţia $-f$). Atunci există o vecinătate U a lui x_0 (şi putem presupune că $U \subset I$) astfel încît

$$f(x) \leqslant f(x_0) \text{ pentru orice } x \in U. \tag{37}$$

Cum f este derivabilă în x_0, atunci $f'(x_0) = f'_d(x_0) = \lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x > x_0}} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ și $f'(x_0) = f'_s(x_0) = \lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x < x_0}} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$. Conform inegalității (37) raportul $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ este $\leqslant 0$ (respectiv $\geqslant 0$) pentru $x \in U$, $x > x_0$ (respectiv pentru $x \in U$, $x < x_0$), deci $f'(x_0) \leqslant 0$, $f'(x_0) \geqslant 0$, de unde $f'(x_0) = 0$.

Observații. 1) Dacă I nu ar fi fost interval deschis, de exemplu $I = [a, b]$ și $x_0 = a$ (sau $x_0 = b$), atunci teorema nu ar fi fost adevărată pentru că $f(x)$ nu ar fi fost definită pentru $x < a$, respectiv pentru $x > b$ (fig. IV.14).

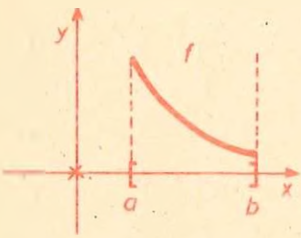


Fig. IV.14

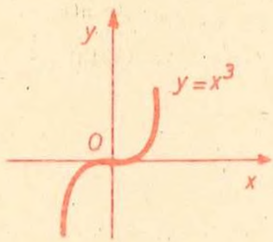


Fig. IV.15

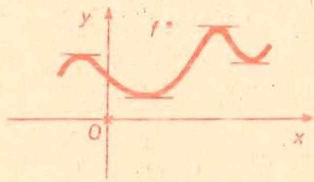


Fig. IV.16

2) Reciproca teoremei lui Fermat este în general falsă: din faptul că f este derivabilă într-un punct x_0 și $f'(x_0) = 0$ nu rezultă că x_0 este punct de extrem. De exemplu, pentru funcția $f(x) = x^3$ avem $f'(0) = 0$, dar punctul $x_0 = 0$ nu este punct de extrem local pentru că f este strict crescătoare (fig. IV.15). Se mai spune că teorema lui Fermat dă condiții necesare de extrem, dar nu și suficiente.

Teorema lui Fermat are o interpretare geometrică evidentă: în condițiile enunțului, într-un punct de extrem, tangenta la grafic este paralelă cu axa Ox (fig. IV.16).

Dacă $f : I \to \mathbf{R}$ este o funcție derivabilă pe un interval deschis I, atunci zerourile derivatei f' pe I sînt numite și *punctele critice* ale lui f pe I; teorema lui Fermat afirmă că punctele de extrem local sînt printre punctele critice. În practică, pentru determinarea punctelor de extrem ale unei funcții f derivabile pe un interval deschis sau pe o reuniune de intervale deschise, se rezolvă mai întîi ecuația $f'(x) = 0$. Vom vedea mai tîrziu cum putem decide care din soluțiile acestei ecuații sînt puncte de extrem pentru f.

4.2 Teorema lui Rolle

O funcție $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ $(a < b)$ se numește funcție Rolle dacă este continuă pe intervalul compact $[a, b]$ și derivabilă pe intervalul deschis (a, b).

Teorema care urmează este o consecință a rezultatelor privind funcțiile continue și a teoremei lui Fermat, foarte utilă în aplicații.

TEOREMA IV. 8 *(teorema lui M. Rolle*, 1652—1719). **Fie $f : [a, b] \to \mathbf{R}$, $a < b$ o funcţie Rolle astfel încît $f(a) = f(b)$, atunci există cel puţin un punct $c \in (a, b)$ astfel încît $f'(c) = 0$.**

Demonstraţie. Funcţia f fiind continuă (conform teoremei III.5) este mărginită şi îşi atinge marginile în $[a, b]$. Fie $m = \inf\limits_{x \in [a, b]} f(x)$, $M = \sup\limits_{x \in [a, b]} f(x)$. Apar trei cazuri:

I. $M > f(a)$. Există un punct $c \in [a, b]$ astfel încît $M = f(c)$ (M fiind atinsă) şi, evident, $c \neq a$, $c \neq b$ (dacă $c = a$ sau b, atunci $M = f(c)$ ar fi egal cu $f(a) = f(b)$, absurd); aşadar, $c \in (a, b)$ şi cum c este maxim local, atunci conform teoremei lui Fermat, $f'(c) = 0$.

II. $m < f(a)$. Se raţionează similar.

III. $m = M$. Atunci funcţia f este constantă pe $[a, b]$, deci $f'(c) = 0$ pentru orice $c \in (a, b)$.

COROLAR. Între două zerouri ale unei funcţii derivabile pe un interval se află cel puţin un zerou al derivatei.

Demonstraţie. Fie $f : I \to \mathbf{R}$ derivabilă pe un interval I şi $a, b \in I, a < b$, zerouri ale lui f. Atunci $f(a) = 0 = f(b)$ şi putem aplica teorema lui Rolle pe intervalul $[a, b]$.

Teorema lui Rolle admite o interpretare geometrică evidentă: dacă segmentul determinat de punctele $(a, f(a))$, $(b, f(b))$ este paralel cu axa Ox, atunci există cel puţin un punct între a şi b în care tangenta la graficul lui f este paralelă cu axa Ox (fig. IV.17).

Observaţii. Toate condiţiile din enunţul teoremei lui Rolle sînt necesare, în sensul că dacă s-ar renunţa la vreuna din ele, atunci concluzia nu ar mai fi întotdeauna adevărată:

a) Dacă f ar fi continuă numai pe intervalul deschis (a, b), exemplul funcţiei

$f(x) = \begin{cases} x, & \text{dacă } x \in (0, 1] \\ 1, & \text{dacă } x = 0 \end{cases}$ arată că f' nu se anulează pe intervalul $(0, 1)$ deşi $f(0) = f(1)$ (fig. IV.18)

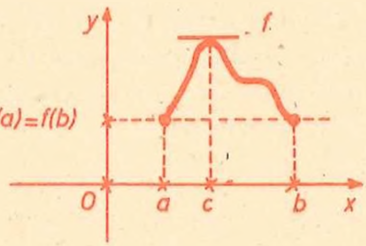


Fig. IV.17

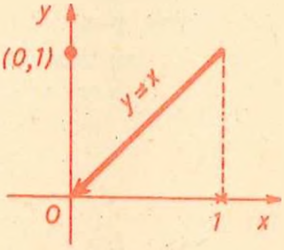


Fig. IV.18

Fig. IV.19

b) Dacă $f(a) \neq f(b)$, este suficient să considerăm funcţia $f(x) = x$ pe $[0, 1]$ (fig. IV. 19).

c) Dacă f nu ar fi derivabilă pe întreg intervalul (a, b), concluzia teoremei ar fi falsă, aşa cum arată exemplul funcţiei $f(x) = |x|$ pe intervalul $[-1, 1]$.

TEOREMA IV. 9 *(teorema lui J. Lagrange*, 1736—1813, **a creşterilor finite). Fie f o funcţie Rolle pe un interval compact $[a, b]$. Atunci există $c \in (a, b)$ astfel încît**

(38) $$f(b) - f(a) = (b - a)f'(c).$$

Demonstraţie. Vom considera funcţia auxiliară $F(x) = f(x) + kx$, $x \in [a, b]$, cu k o constantă reală, pe care o vom determina din condiţia $F(a) = F(b)$. Aşadar, $f(a) + ka = f(b) + kb$, deci $k = \frac{f(b) - f(a)}{a - b}$. Pentru acest k, funcţia F verifică condiţiile teoremei lui Rolle şi, ca atare, există un punct $c \in (a, b)$ în care $F'(c) = 0$. Pe de altă parte, $F'(x) = f'(x) + k$, $\forall\, x \in (a, b)$, deci $f'(c) + k = 0$, $f'(c) + \frac{f(b) - f(a)}{a - b} = 0$ şi se obţine relaţia (38).

Observaţii. 1) Relaţia (38) se mai numeşte formula creşterilor finite (sau formula de medie pentru derivabilitate). Notînd $\theta = \frac{c - a}{b - a}$, rezultă $0 < \theta < 1$ şi $c = a + \theta(b - a)$ şi formula (38) se mai scrie:
$f(b) - f(a) = (b - a) \cdot f'(a + \theta(b - a))$, cu $0 < \theta < 1$.

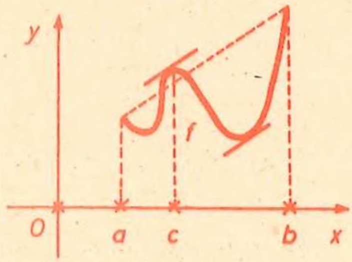


Fig. IV.20

2) Ca şi în cazul teoremei lui Rolle, punctul c nu este unic. Interpretarea geometrică a teoremei lui Lagrange rezultă din interpretarea geometrică a derivatei şi este următoarea: există cel puţin un punct $c \in (a, b)$ pentru care tangenta la graficul lui f în $(c, f(c))$ este paralelă cu „coarda" determinată de punctele $(a, f(a))$, $(b, f(b))$ (fig. IV.20).

3) Putem aplica teorema lui Lagrange restricţiei lui f la orice subinterval $[a, x] \subset [a, b]$, unde $a < x \leq b$. Atunci $f(x) - f(a) = (x - a)\, f'(c)$ cu $c \in (a, x)$ nu neapărat unic, depinzînd de x; uneori se scrie $c = c_x$ şi, ca atare, $f(x) - f(a) = (x - a) \cdot f'(c_x)$. Este important de remarcat că dacă $x \to a$, atunci $c_x \to a$.

Iată acum un corolar al teoremei lui Lagrange, care este util în a decide derivabilitatea unei funcţii într-un punct.

COROLAR. Fie f o funcţie definită într-o vecinătate V a punctului x_0, derivabilă pe $V \setminus \{x_0\}$ şi continuă în x_0. Dacă există limita $\lambda = \lim_{x \to x_0} f'(x)$, atunci $f'(x_0)$ există şi $f'(x_0) = \lambda$. Dacă limita λ este finită, atunci f este derivabilă în x_0.

Demonstraţie. Aplicînd teorema lui Lagrange funcţiei f pe un interval $[x, x_0] \subset V$, $x < x_0$, rezultă $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(c_x)$ cu $x < c_x < x_0$, deci $f'_s(x_0) = \lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x < x_0}} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x < x_0}} f'(c_x) = \lambda$ (căci $c_x \to x_0$, dacă $x \to x_0$, $x < x_0$). În mod similar, $f'_d(x_0)$ există şi este egală cu λ, deci f are derivată în x_0 şi $f'(x_0) = \lambda$.

Exemple

4) Studiem continuitatea şi derivabilitatea funcţiei $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{dacă } x \leqslant 1 \\ \ln x + x, & \text{dacă } x > 1. \end{cases}$$

Pe intervalele $(-\infty, 1)$, $(1, \infty)$ funcţia f este evident continuă, chiar derivabilă. Apoi $f(1-0) = f(1+0) = f(1)$, deci f este continuă în $x = 1$. Apoi pentru orice $x \neq 1$ avem

$$f'(x) = \begin{cases} 2x, & \text{dacă } x < 1 \\ \dfrac{1}{x} + 1, & \text{dacă } x > 1 \end{cases}, \text{ deci } \lim_{\substack{x\to 1\\ x<1}} f'(x) = \lim_{\substack{x\to 1\\ x<1}} 2x = 2 \text{ şi } \lim_{\substack{x\to 1\\ x>1}} f'(x) = \lim_{\substack{x\to 1\\ x>1}} \left(\frac{1}{x} + 1\right) = 2.$$

Aplicînd corolarul anterior, rezultă că f este derivabilă în $x = 1$ şi $f'(1) = 2$.

2) Exemplul funcţiei $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = \begin{cases} x - 1, & \text{dacă } x \leqslant 0 \\ x + 1, & \text{dacă } x > 0 \end{cases}$ arată de ce este esenţial să cerem în corolar ca f să fie continuă. În acest caz $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} f'(x) = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f'(x) = 1$ şi totuşi f nu este derivabilă (căci $f_s'(0) = 1$, $f_d'(0) = \infty$).

Observaţii

1) Demonstraţia corolarului arată ceva mai mult. Dacă f este continuă la stînga în $x = x_0$ şi $\lambda = \lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ x<x_0}} f'(x)$ există, atunci există $f_s'(x_0)$ şi este egală cu λ (şi, un rezultat similar, „la dreapta").

Iată două exemple care ilustrează această situaţie:

a) Fie $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = \sqrt{|x|}$. În acest caz,

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x}, & \text{dacă } x \geqslant 0 \\ \sqrt{-x}, & \text{dacă } x < 0 \end{cases} \text{ şi } f'(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2\sqrt{x}}, & \text{dacă } x > 0 \\ -\dfrac{1}{2\sqrt{-x}}, & \text{dacă } x < 0. \end{cases}$$

Deci
$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}} f'(x) = \lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}} \left(-\frac{1}{2\sqrt{-x}}\right) = -\infty \text{ şi } \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f'(x) = +\infty.$$

Atunci, conform celor spuse anterior, rezultă că $f_s'(0) = -\infty$, $f_d'(0) = \infty$, deci $x = 0$ este punct de întoarcere pentru graficul lui f.

b) Fie $g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $g(x) = \begin{cases} x^2 + 1, & \text{dacă } x \leqslant 0 \\ 3^{-x}, & \text{dacă } x > 0 \end{cases}$, deci $g'(x) = \begin{cases} 2x, & \text{dacă } x \leqslant 0 \\ -3^{-x} \ln 3, & \text{dacă } x > 0. \end{cases}$

Aşadar, $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} g'(x) = 0$ şi $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} g'(x) = -\ln 3$ şi, conform observaţiei anterioare, $g_s'(0) = 0$, $g_d'(0) = -\ln 3$ şi punctul $x = 0$ este punct unghiular pentru graficul lui g.

2) Corolarul ne oferă o condiţie suficientă ca f să fie derivabilă în x_0 (anume f să fie continuă în x_0 şi să existe în $\mathbf{R}$ limita $\lim\limits_{x\to x_0} f'(x)$), dar această condiţie nu este şi necesară.

Astfel, funcţia $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \dfrac{1}{x}, & \text{dacă } x \neq 0 \\ 0, & \text{dacă } x = 0 \end{cases}$ este derivabilă în origine, dar $\lim\limits_{x\to 0} f'(x)$ nu există.

Trecem acum la demonstrarea unei alte proprietăți fundamentale legate de derivabilitate. Fie două funcții $f, g : [a, b] \to \mathbf{R}$ verificînd condițiile teoremei lui Lagrange și presupunem că $g'(x) \neq 0, \forall x \in (a, b)$. Ne interesează raportul $\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}$. Aplicînd separat funcțiilor f și g teorema lui Lagrange, rezultă că există puncte c, c' din (a, b) astfel încît $\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{(b - a) f'(c)}{(b - a) g'(c')} = \frac{f'(c)}{g'(c')}$. Nu există nici un motiv să considerăm aici că avem $c = c'$; totuși se poate demonstra

TEOREMA IV. 10 *(teorema lui Cauchy)*. **Fie f, g două funcții Rolle pe intervalul compact $[a, b]$, $a < b$, astfel încît $g'(x) \neq 0, \forall x \in (a, b)$; atunci există un punct $c \in (a, b)$ astfel încît**

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}. \tag{39}$$

Demonstrație. Condiția $g'(x) \neq 0$ pentru orice $x \in (a, b)$ implică faptul că $g(a) \neq g(b)$; într-adevăr, dacă $g(a) = g(b)$, aplicînd teorema lui Rolle, ar rezulta că există $c \in (a, b)$ astfel ca $g'(c) = 0$, ceea ce contravine ipotezei.

Considerăm funcția ajutătoare $F(x) = f(x) + kg(x)$, $k \in \mathbf{R}$ și determinăm constanta k astfel ca $F(a) = F(b)$, deci $k = \frac{f(b) - f(a)}{g(a) - g(b)}$. Aplicînd teorema lui Rolle funcției F cu k astfel determinat, există $c \in (a, b)$ astfel încît $F'(c) = 0$. Dar $F'(x) = f'(x) + kg'(x)$, $\forall x \in (a, b)$, deci $f'(c) + kg'(c) = 0$, $-k = \frac{f'(c)}{g'(c)}$, de unde se obține relația (39).

Observație. Am fi putut demonstra mai întîi teorema lui Cauchy și apoi, particularizînd $g(x) = x$, să obținem teorema lui Lagrange.

Ne putem întreba cum arată funcțiile care apar ca derivate ale unor funcții derivabile (pe un interval). În clasa a XII-a se va studia în mod sistematic următoarea problemă: dîndu-se o funcție f, este ea derivata unei alte funcții? Cu alte cuvinte, există F derivabilă astfel încît $F' = f$? Dacă o astfel de funcție F există, ea se numește primitivă a lui f. De exemplu, funcția $F : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $F(x) = \frac{x^{n+1}}{n+1}$ (n întreg, $n \geqslant 0$) este o primitivă pe $\mathbf{R}$ a funcției $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = x^n$; funcția $F(x) = -\frac{\cos \omega x}{\omega}$, $\omega \neq 0$ este o primitivă pe $\mathbf{R}$ a lui $f(x) = \sin \omega x$, iar $F(x) = \frac{\sin \omega x}{\omega}$ pentru $f(x) = \cos \omega x$ etc.

În cele ce urmează, vom indica o proprietate importantă a funcțiilor care admit primitive deci care sînt derivate ale altor funcții.

TEOREMA IV.11 *(teorema lui Darboux)*. **Dacă $f : I \to \mathbf{R}$ este o funcție derivabilă pe un interval I, atunci derivata sa f' are proprietatea lui Darboux (adică nu poate trece de la o valoare la alta fără a trece prin toate valorile intermediare).**

Demonstrație. Fie $a < b$ două puncte din I astfel încît $f'(a) \neq f'(b)$. Pentru a fixa ideile, să presupunem că $f'(a) < f'(b)$. Fie $\lambda \in (f'(a), f'(b))$. Trebuie arătat că există un punct $c \in (a, b)$ astfel încît $f'(c) = \lambda$. Pentru aceasta vom considera funcția auxiliară $F(x) = f(x) - \lambda x$; evident, $F'(a) = f'(a) - \lambda < 0$ și $F'(b) = f'(b) - \lambda > 0$.

Funcția F este derivabilă, deci continuă în intervalul $[a, b]$ și, ca atare, marginea inferioară $m = \inf\limits_{x \in [a, b]} F(x)$ este atinsă într-un punct $c \in [a, b]$. Vom arăta că de fapt m nu poate fi atinsă nici în a, nici în b. Așadar, $c \in (a, b)$ și din teorema lui Fermat se obține atunci $F'(c) = 0$. Dar aceasta arată că $f'(c) - \lambda = 0$, adică $f'(c) = \lambda$, tocmai ceea ce trebuia probat.

Pentru a arăta că punctul c aparține intervalului (a, b), vom proceda astfel: alegem $\varepsilon > 0$ astfel încît $|F'(a)| > \varepsilon$ și $F'(b) > \varepsilon$. Din definiția derivabilității lui F în punctele a și b, există $\delta > 0$ depinzînd de ε astfel încît din faptul că $|x - a| < \delta$ (respectiv $|x - b| < \delta$) să rezulte că

$$F'(a) - \varepsilon < \frac{F(x) - F(a)}{x - a} < F'(a) + \varepsilon$$

$$\left[\text{respectiv } F'(b) - \varepsilon < \frac{F(x) - F(b)}{x - b} < F'(b) + \varepsilon\right].$$

Deoarece $F'(a) + \varepsilon < 0$, raportul $\dfrac{F(x) - F(a)}{x - a}$ va fi strict negativ, pentru orice $x > a$, $x - a < \delta$. Deci $F(x) - F(a) < 0$, adică $F(x) < F(a)$. În mod analog, din inegalitatea $F'(b) - \varepsilon > 0$, rezultă că $F(x) < F(b)$ pentru $x < b$, $x - b < \delta$. Aceste inegalități arată că marginea inferioară a funcției F nu este atinsă nici în a, nici în b.

COROLAR. Fie $f : I \to \mathbf{R}$ o funcție derivabilă pe un interval I. Dacă derivata f' nu se anulează pe I, atunci f' are semn constant pe I.

Într-adevăr, dacă f' nu ar avea semn constant pe I, atunci f' ar lua valori pozitive și valori negative pe I, deci, conform teoremei IV.11, ar lua și valoarea zero, ceea ce contravine ipotezei că f' nu se anulează pe I.

Exemple

1) Funcțiile σ, sgn pe $\mathbf{R}$ nu admit primitive (căci dacă ar avea primitive, ele ar fi funcții derivate și, conform teoremei IV.11, ar avea proprietatea lui Darboux).

2) Iată un exemplu de funcție derivată care nu este continuă: luăm $g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$,

$$g(x) = \begin{cases} x^2 \sin \dfrac{1}{x}, & \text{dacă } x \neq 0 \\ 0, & \text{dacă } x = 0 \end{cases}$$

Această funcție este derivabilă pe $\mathbf{R}$ și $g'(x) = 2x \sin \dfrac{1}{x} - \cos \dfrac{1}{x}$, dacă $x \neq 0$ și $g(0) = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{g(x) - g(0)}{x - 0} = \lim\limits_{x \to 0} x \sin \dfrac{1}{x} = 0$. Funcția $f = g'$, adică $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} 2x \sin \dfrac{1}{x} - \cos \dfrac{1}{x}, & \text{dacă } x \neq 0 \\ 0, & \text{dacă } x = 0 \end{cases} \tag{40}$$

este o derivată și nu este continuă (în punctul 0). În particular, funcția f are proprietatea lui Darboux pe $\mathbf{R}$, fără a fi continuă.

3) Arătăm că funcția $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = \begin{cases} 0\ , & \text{dacă } x \leqslant 0 \\ \dfrac{1}{x}\ , & \text{dacă } x > 0 \end{cases}$ nu admite primitivă. Este suficient să arătăm că f nu are proprietatea lui Darboux, dar se poate raționa și direct: dacă $F : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ ar fi o primitivă a lui f, atunci am avea $f(0) = F'(0) = F'_d(0) = = \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \dfrac{F(x) - F(0)}{x} = \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \dfrac{(x - 0) \cdot F'(c_x)}{x} = \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} f(c_x) = \infty$, ceea ce este absurd.

EXERCIȚII (capitolul IV, § 4)

1. Aplicînd definiția IV.4, să se determine extremele funcțiilor $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ următoare:

a) $f(x) = x^2 + x$;
b) $f(x) = 1 - |x|$;
c) $f(x) = A \sin 2x$ ($A \neq 0$ constant);
d) $f(x) = |x^2 - 4|$;
e) $f(x) = -x^2 + 4x + 7$;
f) $f(x) = x^2 \cdot |x - 1|$.

2. Să se determine punctele critice pentru funcțiile $f : D \to \mathbf{R}$ următoare, D fiind mulțimea punctelor $x \in \mathbf{R}$ unde f este derivabilă:

a) $f(x) = x^3 - 3x$;
b) $f(x) = 2x^2 - 8x + 7$;
c) $f(x) = x^2 - 8 \ln x$;
d) $f(x) = \operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x$;
e) $f(x) = e^{x^2 - 2x}$;
f) $f(x) = \operatorname{arctg} \dfrac{3x + 1}{\sqrt{x^2 + 1}}$.

3*. Fie $f : (0, \infty) \to \mathbf{R}$, $f(\lambda) = \dfrac{A}{\lambda_5 \left(e^{\frac{1}{\lambda}} - 1\right)}$ (funcția de radiație a lui Planck, $A > 0$ fiind o constantă reală).

a) Să se arate că $\lim\limits_{\substack{\lambda \to 0 \\ \lambda > 0}} f(\lambda) = 0$, $\lim\limits_{\substack{\lambda \to 0 \\ \lambda > 0}} f'(\lambda) = 0$, $\lim\limits_{\lambda \to \infty} f(\lambda) = 0$, $\lim\limits_{\lambda \to \infty} f'(\lambda) = 0$;

b) Să se arate că f are un singur punct critic pe intervalul $(0, \infty)$.

4. Să se arate că funcția $f : \left[-1, \dfrac{7}{3}\right] \to \mathbf{R}$, $f(x) = |3x - 2| - 5$ verifică $f(-1) = = f\left(\dfrac{7}{3}\right)$ și totuși f' nu se anulează pe intervalul $\left[-1, \dfrac{7}{3}\right]$. Care este explicația?

5. a) Să se arate că derivatele funcțiilor $f, g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = (x - 1)(x - 2)(x - 3)$; $g(x) = (x^2 - 1)(x^2 - 4)$ au numai rădăcini reale.

b) Fie $P : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ o funcție polinomială neconstantă. Să se arate că între orice două rădăcini reale consecutive ale lui P' există cel mult o rădăcină reală a lui P.

6. Fie $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ o funcție derivabilă și $a_1 < a_2 < \ldots < a_n$ zerouri ale lui f. Să se arate că f' are cel puțin $n - 1$ zerouri. Aplicînd acest rezultat, să se arate că o funcție polinomială de grad n are cel mult n zerouri distincte.

7. Fie funcția $f : [-1, 1] \setminus \{0\} \to \mathbf{R}$, $f(x) = \begin{cases} x + 1, & \text{dacă } x \in [-1, 0) \\ 1 - x, & \text{dacă } x \in (0, 1] \end{cases}$. Să se arate că f este derivabilă, $f(-1) = f(1) = 0$ și f' nu se anulează. Se contravine corolarului teoremei lui Rolle?

8. Fie $P : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ o funcție polinomială. Să se arate că:

a) dacă toate rădăcinile lui P sînt reale și distincte, atunci P' are aceeași proprietate;
b) dacă toate rădăcinile lui P sînt reale, atunci P' are toate rădăcinile reale.

9. Să se arate că există $c \in (1, 2)$ astfel încît pentru funcţia $f: [1, 2] \to \mathbf{R}$, $f(x) = x + \ln x$ să avem $f(2) - f(1) = f'(c)$ şi să se determine efectiv valoarea lui c.

10. Folosind corolarul teoremei lui Lagrange, să se calculeze derivatele laterale ale funcţiilor f următoare în punctele x_0 indicate:

a) $f:[-1, 1] \to \mathbf{R}$, $f(x) = \begin{cases} 2x + 1, & \text{dacă } x \in \left[-1, \frac{1}{2}\right] \\ 6x - 1, & \text{dacă } x \in \left(\frac{1}{2}, 1\right] \end{cases}$, $x_0 = -1$, $x_0 = \frac{1}{2}$, $x_0 = 0$;

b) $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = \begin{cases} x^2 - 1, & \text{dacă } x \leqslant 1 \\ \ln x, & \text{dacă } x > 1 \end{cases}$, $x_0 = 1$;

c) $f: [-2, \infty) \to \mathbf{R}$, $f(x) = \sqrt{x^3 + 2x^2}$, $x_0 = -2$ şi $x_0 = 0$;

d) $f: [0, \infty) \to \mathbf{R}$, $f(x) = \arcsin \frac{2\sqrt{x}}{1 + x}$, $x_0 = 1$.

11. Să se aplice teorema lui Cauchy pentru funcţiile $f, g: [1, e] \to \mathbf{R}$, $f(x) = \ln x$, $g(x) = 2x - 1$, determinînd punctul c corespunzător. Similar, pentru funcţiile f, $g: \left[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}\right] \to \mathbf{R}$, $f(x) = \sin x$, $g(x) = \cos x$.

12. Să se arate că dacă m, M sînt valorile extreme ale funcţiei $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = x^3 + ax + b$ $(a, b \in \mathbf{R}, a < 0)$, atunci $m \cdot M = b^2 + \frac{4}{27} a^3$.

EXERCIŢII ŞI PROBLEME REZOLVATE LA CAPITOLUL IV

1. *Să se calculeze derivatele laterale ale funcţiilor* $f, g, h: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ *următoare, în punctele indicate*:

a) $f(x) = x + x|x|$, $x_0 = 0$;

b) $g(x) = x\sigma(x)$, $x_0 = 0$;

c) $h(x) = \begin{cases} x^2 - 2x, & x \leqslant 1 \\ x^2 + 1, & x > 1 \end{cases}$, $x_0 = 1$.

Soluţie. a) $f'_s(0) = \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x < 0}} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x < 0}} \frac{x - x^2}{x} = \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x < 0}} (1 - x) = 1$;

$$f'_d(0) = \lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \frac{x + x^2}{x} = \lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} (1 + x) = 1.$$

b) $g(x) = \begin{cases} 0, & \text{dacă } x < 0 \\ x, & \text{dacă } x \geqslant 0 \end{cases}$; avem $g'_s(0) = \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x < 0}} \frac{g(x) - g(0)}{x} = \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x < 0}} \frac{0}{x} = 0$ şi

$$g'_d(0) = \lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \frac{g(x) - g(0)}{x} = \lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \frac{x - 0}{x} = 1.$$

c) $h_s'(1) = \lim\limits_{\substack{x\to1\\x<1}} \frac{h(x)-h(1)}{x-1} = \lim\limits_{\substack{x\to1\\x<1}} \frac{x^2-2x+1}{x-1} = 0$ și

$$h_d'(0) = \lim\limits_{\substack{x\to1\\x>1}} \frac{h(x)-h(1)}{x-1} = \lim\limits_{\substack{x\to1\\x>1}} \frac{x^2+1+1}{x-1} = \lim\limits_{\substack{x\to1\\x>1}} \frac{x^2+2}{x-1} = \infty.$$

2. *Să se calculeze, pornind de la definiție:*

a) $f'(1)$ *pentru* $f:[-3, \infty) \to \mathbf{R}$, $f(x) = x\sqrt{x+3}$;

b) $g'(-\pi)$ *pentru* $g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $g(x) = x \sin x$.

Soluție. a) $f'(1) = \lim\limits_{x\to1} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim\limits_{x\to1} \frac{x\sqrt{x+3}-2}{x-1} =$

$$= \lim_{x\to1} \frac{x^2(x+3)-4}{(x-1)(x\sqrt{x+3}+2)} = \lim_{x\to1} \frac{(x^3-1)+(3x^2-3)}{(x-1)(x\sqrt{x+3}+2)} =$$

$$= \lim_{x\to1} \frac{x^2+4x+4}{x\sqrt{x+3}+2} = \frac{9}{4}.$$

b) $g'(-\pi) = \lim\limits_{x\to-\pi} \frac{g(x)-g(-\pi)}{x+\pi} = \lim\limits_{x\to-\pi} \frac{x\sin x}{x+\pi} = \lim\limits_{x\to-\pi} \frac{-x\sin(x+\pi)}{x+\pi} =$

$$= \lim_{x\to-\pi} (-x) \cdot \lim_{y\to0} \frac{\sin y}{y} = \pi.$$

3. *Să se arate că dreapta $y = 7x - 2$ este tangentă la curba $y = x^3 + 4x$.*

Soluție. Fie $f(x) = x^3 + 4x$, $x \in \mathbf{R}$. Pentru orice punct x_0 ecuația tangentei la graficul lui f în punctul $(x_0, f(x_0))$ este $y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$, adică $y - x_0^3 - 4x_0 = (3x_0^2 + 4)(x - x_0)$, deci $y = (3x_0^2 + 4)x - 2x_0^3$. Se observă că această dreaptă coincide cu dreapta dată pentru $x_0 = 1$.

4. *Să se determine punctele critice ale funcțiilor $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ următoare:*

a) $f(x) = \ln(x^2+2)(x^2+3)$;   b) $f(x) = \sin^{50} 2x$;

c) $f(x) = e^{2x} + e^{-3x}$;   d) $f(x) = \frac{x^3}{|x|+1}$.

Soluție. a) Avem $f'(x) = \frac{4x^3+10x}{(x^2+2)(x^2+3)}$, $\forall x \in \mathbf{R}$.

Ecuația $f'(x) = 0$ are soluția $x = 0$.

b) Notăm $u = \sin 2x$, deci $f(x) = u^{50}$, $f'(x) = 50 \cdot u^{49} \cdot u' = 50 \cdot \sin^{49}2x \cdot (2\cos 2x) = 100 \cdot \sin^{49}2x \cdot \cos 2x$. Punctele critice sînt soluțiile ecuațiilor $\sin 2x = 0$, $\cos 2x = 0$, deci $\frac{k\pi}{4}$ $(k \in \mathbf{Z})$.

c) $f'(x) = 2e^{2x} - 3e^{-3x}$, $\forall x \in \mathbf{R}$. Ecuația $f'(x) = 0$ se scrie $2e^{2x} = 3e^{-3x}$, $e^{5x} = \frac{3}{2}$ și are unica soluție $x = \frac{1}{5}(\ln 3 - \ln 2)$.

d) $f(x) = \begin{cases} \frac{x^3}{-x+1}, & \text{dacă } x \leqslant 0 \\ \frac{x^3}{x+1}, & \text{dacă } x > 0 \end{cases}$

Funcţia f este derivabilă în punctul $x = 0$ căci, $f'_s(0) = f'_d(0) = 0$.

$$\text{Atunci, } f'(x) = \begin{cases} \dfrac{3x^2 - 2x^3}{(1-x)^2}, & \text{dacă } x < 0 \\ 0, & \text{dacă } x = 0. \\ \dfrac{2x^3 + 3x^2}{(x+1)^2}, & \text{dacă } x > 0 \end{cases}$$

Funcţia are un singur punct critic, anume $x = 0$.

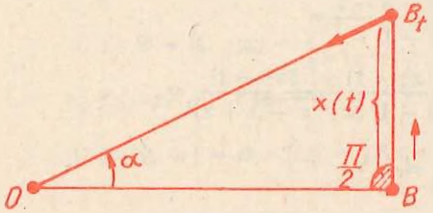


Fig. IV.21

5. *Un balon* B *(punctual) se înalţă vertical dintr-un loc aflat la* 20 m *de un observator* O *(punctual), avînd viteza* 30 m/minut. *Care este viteza de variaţie a unghiului* α *în momentul cînd balonul va fi la o înălţime de* 200 m? (fig. IV.21).

Soluţie. Notăm cu B_t poziţia balonului şi cu $x(t)$ înălţimea la care se află balonul, la momentul t. Avem $\operatorname{tg} \alpha = \dfrac{x}{20}$, deci $\alpha(t) =$

$= \operatorname{arctg} \dfrac{x(t)}{20}$, $\alpha'(t) = \dfrac{1}{1 + \dfrac{x^2(t)}{400}} \cdot \dfrac{x'(t)}{20} = \dfrac{20 \cdot x'(t)}{400 + x^2(t)}$. Viteza cerută în enunţ este

$$\frac{20 \cdot 30}{400 + 200^2} = \frac{600}{101 \cdot 400} = \frac{3}{202} \text{ radiani/minut.}$$

6. *Fie* $f : (1, \infty) \to \mathbf{R}$, $f(x) = x^3 - 3x$. *Să se determine* $J = f(I)$ *şi să se arate că* $f : I \to J$ *este bijectivă. Fie* g *inversa lui* f; *să se calculeze* $g'(2)$ *şi* $g''(2)$.

Soluţie. Funcţia f este injectivă pe I pentru că este strict crescătoare pe I. E clar că $J = (-2, \infty)$, $f : I \to J$ este bijectivă şi avem $f(2) = 2$. Atunci, aplicînd formula (26), găsim: $g'(2) = \dfrac{1}{f'(2)} = \dfrac{1}{9}$.

Relaţia $f(x) = x^3 - 3x$ arată că $g^3(y) - 3g(y) = y$, $\forall y \in J$, deci, derivînd: $3g^2(y)g'(y) - 3g'(y) = 1$, $6g(y)g'^2(y) + 3g^2(y) \cdot g''(y) - 3g''(y) = 0$ în fiecare punct y din J şi înlocuind $y = 2$, rezultă: $6 \cdot 2 \cdot \dfrac{1}{81} + 3 \cdot 4 \cdot g''(2) - 3g''(2) = 0$, de unde $g''(2) =$

$= -\dfrac{4}{243}$.

7. *Se consideră funcţia* $f : [0, 1] \to \mathbf{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} x \sin \dfrac{\pi}{x}, & \text{dacă } x \in (0, 1] \\ 0, & \text{dacă } x = 0 \end{cases}.$$

Aplicînd lui f *teorema lui Rolle pe fiecare interval* $\left[\dfrac{1}{n+1}, \dfrac{1}{n}\right]$, $n \geqslant 1$ *întreg, să se arate că ecuaţia* $\operatorname{tg} x = x$ *are soluţii pe fiecare interval* $(n\pi, (n+1)\pi)$.

Soluţie. Avem $f\left(\frac{1}{n+1}\right) = \frac{1}{n+1}\sin \pi(n+1) = 0$ şi $f\left(\frac{1}{n}\right) = 0$, deci există $\xi_n \in \left(\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}\right)$ astfel încît $f'(\xi_n) = 0$. Dar $f'(x) = \sin\frac{\pi}{x} - \frac{\pi}{x}\cos\frac{\pi}{x}$, $x \neq 0$, deci $\sin\frac{\pi}{\xi_n} - \frac{\pi}{\xi_n}\cos\frac{\pi}{\xi_n} = 0$, adică $\operatorname{tg}\frac{\pi}{\xi_n} = \frac{\pi}{\xi_n}$ şi, ca atare, $\frac{\pi}{\xi_n}$ este soluţie a ecuaţiei $\operatorname{tg} x = x$. Cum $\xi_n \in \left(\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}\right)$, avem $\frac{\pi}{\xi_n} \in (n\pi, (n+1)\pi)$, $\forall\, n \geqslant 1$.

8. *Se consideră funcţia* $f : [0, 10] \to \mathbf{R}$, *definită prin* $f(x) = x \sin x$. *Să se arate că* $|f(x) - f(y)| \leqslant 11 \cdot |x - y|$, $\forall\, x, y \in [0, 10]$. *Generalizare.*

Soluţie. Dacă $x = y$ relaţia este evidentă. Dacă $x \neq y$ aplicăm formula lui Lagrange a creşterilor finite, pe intervalul închis de capete x, y şi există ξ între x şi y astfel încît $f(x)-f(y) = f'(\xi)(x - y)$, deci $|f(x) - f(y)| = |f'(\xi)| \cdot |x - y|$. Dar $f'(\xi) = \xi\cos\xi + \sin\xi$, deci $|f'(\xi)| = |\xi\cos\xi + \sin\xi| \leqslant |\xi| + 1 \leqslant 11$.

Generalizarea este evidentă: dacă $f : [a, b] \to \mathbf{R}$, $a < b$ este o funcţie derivabilă şi dacă există $M > 0$ astfel încît $|f'(x)| \leqslant M$ pentru orice $x \in [a, b]$, atunci $|f(x) - f(y)| \leqslant M \cdot |x - y|$, $\forall\, x, y \in [a, b]$.

9. *Să se studieze continuitatea şi derivabilitatea funcţiilor următoare:*

a) $f : [1, \infty) \to \mathbf{R}$, $f(x) = \sqrt{x + 2\sqrt{x-1}} + \sqrt{x - 2\sqrt{x-1}}$;

b) $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = \arcsin\frac{2x}{1+x^2}$;

c) $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{n}, & \text{dacă } x = \frac{1}{n} \text{ şi } n \geqslant 1 \text{ este întreg} \\ 0, & \text{în rest} \end{cases}$

Soluţie. a) Dacă $x \geqslant 1$, atunci $f^2(x) = x + 2\sqrt{x-1} + x - 2\sqrt{x-1} + 2\sqrt{x^2 - 4(x-1)} = 2x + 2\sqrt{(x-2)^2}$, deci $f(x) = \sqrt{2x + 2\,|x-2|}$, adică

$$f(x) = \begin{cases} 2\sqrt{x-1}, & \text{dacă } x \geqslant 2 \\ 2, & \text{dacă } 1 \leqslant x < 2 \end{cases}$$

Pe intervalele deschise $(1, 2)$, $(2, \infty)$ funcţia f este elementară, deci este continuă şi derivabilă. În punctul $x = 1$, avem $f(1+0) = f(1)$, deci f este continuă, iar în punctul $x = 2$, avem $f(2-0) = f(2+0) = f(2) = 2$ şi, din nou, f este continuă. Apoi $\forall\, x \in (1, 2) \cup (2; \infty)$,

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{x-1}}, & \text{dacă } x > 2 \\ 0, & \text{dacă } 1 < x < 2 \end{cases}$$

şi, aplicînd corolarul teoremei IV.9, avem $f'(1) = \lim\limits_{x\to 1,\, x>1} f'(x) = 0$; apoi $f'_s(2) = \lim\limits_{x\to 2,\, x<2} f'(x) = 0$, $f'_d(2) = \lim\limits_{x\to 2,\, x>2} \frac{1}{\sqrt{x-1}} = 1$, deci funcţia f nu este derivabilă în punctul $x = 2$. Aşadar, funcţia f este continuă în $[1, \infty)$ şi derivabilă în $[1, \infty)\setminus\{2\}$.

b) Considerăm funcţia $u : \mathbf{R} \to [-1, 1]$, $u(x) = \frac{2x}{1+x^2}$ $\Big($pentru orice $x \in \mathbf{R}$ avem într-adevăr $\left(\frac{2x}{1+x^2}\right)^2 \leqslant 1\Big)$; ştim că $\arcsin [-1, 1] \to \mathbf{R}$ este continuă şi atunci funcţia compusă $f = \arcsin u$ va fi continuă pe $\mathbf{R}$. Funcţia $f = \arcsin u$ este derivabilă în punctele unde $u^2 < 1$, adică $\left(\frac{2x}{1+x^2}\right)^2 < 1$, $(1-x^2)^2 > 0$, adică $x \neq \pm 1$; în aceste puncte avem

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{2x}{1+x^2}\right)^2}} \cdot \left(\frac{2x}{1+x^2}\right)' = \frac{2(1-x^2)}{(1+x^2)|1-x^2|} = \begin{cases} \frac{2}{1+x^2}, & \text{dacă } 1-x^2 > 0 \\ -\frac{2}{1+x^2}, & \text{dacă } 1-x^2 < 0 \end{cases},$$

deci

$$f'(x) = \begin{cases} -\frac{2}{1+x^2}, & \text{dacă } x \in (-\infty, -1) \cup (1, \infty) \\ \frac{2}{1+x^2}, & \text{dacă } x \in (-1, 1) \end{cases}$$

Atunci $f'_s(-1) = \lim\limits_{x \to -1,\, x<-1} f'(x) = \lim\limits_{x \to -1,\, x<-1} \left(-\frac{2}{1+x^2}\right) = -1$; $f'_d(-1) = \lim\limits_{x \to -1,\, x>-1} f'(x) = 1$; $f'_s(1) = 1$; $f'_d(1) = -1$. Aşadar, f este continuă pe $\mathbf{R}$ şi este derivabilă în $\mathbf{R} \setminus \{-1, 1\}$. Punctele $+1$, -1 sînt puncte unghiulare.

c) Pe mulţimea $A = \mathbf{R} \setminus \left\{0, 1, \frac{1}{2}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots\right\}$, care este reuniune de intervale deschise, funcţia este nulă şi, ca atare, continuă şi derivabilă. În punctele $x = \frac{1}{n}$, $n \geqslant 1$ întreg funcţia f este discontinuă deoarece limitele laterale sînt nule, iar valoarea funcţiei este $\frac{1}{n}$. Atunci f va fi nederivabilă în aceste puncte. Rămîne să studiem continuitatea şi derivabilitatea lui f în punctul $x = 0$. Aşadar, $f(0) = 0$ şi pentru orice şir $x_n \to 0$, $x_n \neq 0$ avem $f(x_n) \to 0$, deci f este continuă în punctul $x = 0$. Apoi $f'_s(0) = \lim\limits_{x \to 0,\, x<0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim\limits_{x \to 0,\, x<0} \frac{0-0}{x} = 0$. Arătăm, în fine, că $f'_d(0)$ nu există; într-adevăr, dacă $x_n \to 0$, $x_n > 0$ este un şir de numere iraţionale, atunci $\frac{f(x_n) - f(0)}{x_n - 0} = \frac{0-0}{x_n} \to 0$ şi pentru şirul $x_n = \frac{1}{n}$ avem $\frac{f(x_n) - f(0)}{x_n - 0} = \frac{\frac{1}{n} - 0}{\frac{1}{n} - 0} = 1 \to 1$. În concluzie, funcţia f este continuă pe mulţimea $A \cup \{0\}$ şi derivabilă pe A.

10. *Se consideră un interval I. Pentru orice întreg $n \geqslant 1$ se notează cu C_I^n mulţimea funcţiilor $f : I \to \mathbf{R}$ care sînt de n ori derivabile pe I cu $f^{(n)}$ continuă pe I (numite funcţii de clasă C^n pe I). Se notează, de asemenea, cu C_I^0 mulţimea funcţiilor continue şi cu C_I^∞ mulţimea funcţiilor indefinit derivabile pe I. Să se arate că:*

a) *au loc incluziunile stricte $C_I^\infty \subset C_I^{n+1} \subset C_I^n \subset C_I^0$, pentru orice $n \geqslant 1$;*

b) *aplicaţia de derivare $D : C_I^1 \to C_I^0$, $D(f) = f'$ nu este injectivă.*

Soluţie. a) Incluziunile sînt evidente. Pentru a arăta că ele sînt, în general, stricte, fie $I = R$; pentru orice întreg $n \geqslant 1$ considerăm funcţia $h_n : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $h_n(x) = x^n \cdot \sigma(x) = \begin{cases} 0, & \text{dacă } x < 0 \\ x^n, & \text{dacă } x > 0 \end{cases}$.

Se verifică imediat că $h_n \in C_I^{n-1}$, dar $h_n \notin C_I^n$ pentru orice $n \geqslant 1$. Astfel $h_1 \in C_I^0 \setminus C_I^1$, $h_2 \in C_I^1 \setminus C_I^2$.

b) Considerăm funcția $h_2 \in C_I^1$ și funcția constantă $g : I \to \mathbf{R}$, $g(x) = 1$. Avem, evident, $(h_2 + g)' = h_2$, adică $D(h_2 + g) = D(h_2)$. Dacă aplicația D ar fi injectivă, ar rezulta $h_2 + g = h_2$, adică $g = 0$, absurd.

Notă. În clasa a XII-a se va demonstra că aplicația D este surjectivă (adică pentru orice funcție continuă $f : I \to \mathbf{R}$ există o primitivă, deci o funcție $F : I \to \mathbf{R}$ derivabilă, astfel încît $F' = f$).

11. *Fie* $a_1 > 0$, $a_2 > 0, \ldots, a_n > 0$ *și* $a_1^x + a_2^x + \ldots + a_n^x \geqslant n$ *pentru orice* $x \in \mathbf{R}$. *Să se arate că* $a_1 a_2 \ldots a_n = 1$.

Soluție. Fie $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = a_1^x + a_2^x + \ldots + a_n^x$. Evident, $f(0) = n$ și, conform ipotezei, $f(x) \geqslant f(0)$ pentru orice $x \in \mathbf{R}$. Așadar, punctul $x = 0$ este punct de minim pentru f. Conform teoremei lui Fermat, avem $f'(0) = 0$. Dar $f'(x) = a_1^x \ln a_1 + a_2^x \ln a_2 + \ldots + a_n^x \ln a_n = 0$, $\forall\, x \in \mathbf{R}$ și $f'(0) = \ln a_1 + \ln a_2 + \ldots + \ln a_n$. Relația $f'(0) = 0$ devine atunci $a_1 a_2 \ldots a_n = 1$.

12. *Se consideră* $2n$ *numere reale* $a_1, a_2, \ldots, a_n, b_1, b_2, \ldots, b_n$. *Să se arate că ecuația* $\sum_{k=1}^{n} (a_k \cos kx + b_k \sin kx) = 0$ *admite cel puțin o soluție în intervalul* $(0, 2\pi)$.

Soluție. Dacă notăm cu $g(x) = \sum_{k=1}^{n} (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$ și considerăm funcția $f : [0, 2\pi] \to \mathbf{R}$, $f(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} (a_k \sin kx - b_k \cos kx)$, constatăm că $f'(x) = g(x)$. Deoarece $f(0) = f(2\pi)$, putem aplica teorema lui Rolle și, ca atare, există $c \in (0, 2\pi)$ astfel încît $f'(c) = 0 = g(c)$ și c va fi soluție a ecuației din enunț.

13. Fie $f_n : [-1, 1] \to \mathbf{R}$, $f_n(x) = \frac{x}{1 + n^2x^2}$ $(n \geqslant 0)$. Să se calculeze $\forall\, x \in [-1, 1]$, $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$ și $g(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n'(x)$ și să se arate că $f' \neq g$.

Soluție. Evident, $\forall\, x \in [-1, 1]$, $f(x) = 0$ și $g(x) = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1 - n^2x^2}{(1 + n^2x^2)^2}$, deci $g(x) = 0$, dacă $x \neq 0$ și $g(0) = 1$. Așadar, $f'(0) \neq g(0)$. (Acest exercițiu arată că $(\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x))' \neq \lim\limits_{n\to\infty} f_n'(x)$.

14. Fie $I = [0, 1]$. Se consideră funcțiile $u, v : I \to \mathbf{R}$, $u(x) = \inf\limits_{y\in I} (x - y)^2$, $v(x) = \sup\limits_{y\in I} (x - y)^2$. Să se studieze derivabilitatea lui u, v și să se calculeze $\sup\limits_{x\in I} u(x)$, $\inf\limits_{x\in I} v(x)$.

Soluție. $\forall\, x \in I$, $u(x) = 0$ și $v(x) = \begin{cases} (1 - x)^2, & \text{dacă } 0 \leqslant x \leqslant \frac{1}{2} \\ x^2, & \text{dacă } \frac{1}{2} < x < 1 \end{cases}$. Funcția u este derivabilă și $\sup\limits_{x\in I} u(x) = 0$, iar v nu este derivabilă și $\inf\limits_{x\in I} v(x) = \frac{1}{4}$. (Acest exercițiu arată că $\sup\limits_{x\in I} \inf\limits_{y\in I} f(x, y) \neq \inf\limits_{x\in I} \sup\limits_{y\in I} f(x, y)$, adică „sup" și „inf" nu comută între ele.)

Capitolul V

APLICAŢII ALE DERIVATELOR ÎN STUDIUL VARIAŢIEI FUNCŢIILOR

Denumirea capitolului ne scuteşte de alte lămuriri asupra conţinutului său. În esenţă, vom urmări sistematic modul cum rezultatele obţinute pînă în prezent ne permit să studiem o serie de probleme a căror formulare era pe înţelesul vostru, dar a căror rezolvare nu era întotdeauna posibilă cu metode elementare.

§ 1. Rolul primei derivate în studiul funcţiilor

a) Remarcăm mai întîi un rezultat simplu, dar foarte important.

TEOREMA V.1. Fie $f : I \to \mathbf{R}$ o funcţie monoton crescătoare (respectiv descrescătoare) pe un interval I. Dacă f este derivabilă pe I, atunci $f' \geqslant 0$ pe I (respectiv $f' \leqslant 0$ pe I).

Demonstraţie. Presupunem f monoton crescătoare. Atunci, pentru orice x, $x_0 \in I$ $(x \neq x_0)$ avem $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geqslant 0$ şi, trecînd la limită, rezultă $f'(x_0) \geqslant 0$. Se raţionează similar dacă f este descrescătoare (sau se consideră funcţia crescătoare $-f$).

1.1. Consecinţe ale teoremei lui Lagrange

b) *Intervale de monotonie.* Stabilim un criteriu important pentru demonstrarea monotoniei unei funcţii derivabile pe un interval, care constituie reciproca teoremei V.1.

TEOREMA V.2. Fie $f : I \to \mathbf{R}$ o funcţie derivabilă pe un interval I. Dacă $f' \geqslant 0$ pe I (adică $f'(x) \geqslant 0$, $\forall x \in I$), atunci funcţia f este monoton crescătoare pe I, iar dacă $f' \leqslant 0$ pe I, atunci f este monoton descrescătoare pe I.

Demonstraţia este imediată, folosind teorema lui Lagrange. Să presupunem că $x_1, x_2 \in I$, $x_1 < x_2$ şi că $f' \geqslant 0$ *pe* I. Aplicînd funcţiei f teorema creşterilor finite pe intervalul $[x_1, x_2]$, rezultă $f(x_2) - f(x_1) = (x_2 - x_1) \cdot f'(c)$ cu $c \in (x_1, x_2)$; aşadar, $c \in I$, deci $f'(c) \geqslant 0$. Deoarece $x_2 - x_1 > 0$, rezultă că $f(x_2) - f(x_1) \geqslant 0$, adică $f(x_1) \leqslant f(x_2)$, deci f este monoton crescătoare pe I.

Dacă $f' \leqslant 0$ pe I, atunci, raţionînd ca mai sus, deoarece $f'(c) \leqslant 0$, rezultă $f(x_2) - f(x_1) = (x_2 - x_1) \cdot f'(c) \leqslant 0$, deci $f(x_1) \geqslant f(x_2)$.

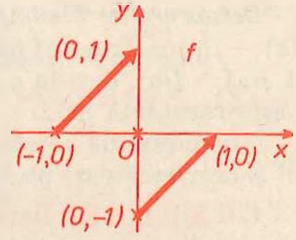


Fig. V.1

Observaţii. 1) Se poate întîmpla ca f să fie strict crescătoare şi f' să se anuleze în unele puncte (de exemplu, $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}, f(x) = x^3$). Dacă f este derivabilă pe un interval I şi f' este strict pozitivă (respectiv strict negativă) pe I, atunci f este strict crescătoare (respectiv strict descrescătoare) pe acel interval.

2) Dacă o funcţie f nu este derivabilă pe un întreg interval I (de pildă este derivabilă doar pe $I \setminus \{x_0\}$, $x_0 \in I$) şi dacă $f' > 0$ pe mulţimea pe care este definită, nu putem conchide că f este monotonă (de pildă nu rezultă neapărat monotonă în vecinătatea lui x_0). Iată un exemplu simplu:

$$f : [-1, 1] \to \mathbf{R}, \quad f(x) = \begin{cases} x + 1, & \text{dacă } x \in [-1, 0) \\ x - 1, & \text{dacă } x \in [0, 1) \end{cases} \quad \text{(fig. V.1)}$$

Exemple

1) Considerăm funcţia $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = x^3 - 12x$ şi studiem monotonia pe $\mathbf{R}$. Avem, $f'(x) = 3x^2 - 12 = 3(x - 2)(x + 2)$, $\forall x \in \mathbf{R}$. Se observă că pe intervalele $I_1 = (-\infty, -2]$, $I_2 = [2, \infty)$ avem $f' \geqslant 0$, deci f este crescătoare, iar pe intervalul $I_3 = (-2, 2)$ avem $f' < 0$, deci f este descrescătoare. Această discuţie poate fi prezentată într-un tablou, în care pe linia întîi apar domeniul de definiţie al lui f şi punctele unde f' îşi schimbă semnul:

x	$-\infty$		-2		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	16	$\searrow$	-16	$\nearrow$	$+\infty$

Pe linia a doua sînt indicate semnele lui f', pe intervalele respective, iar pe ultima linie este simbolizată creşterea ($\nearrow$) sau descreşterea ($\searrow$) lui f.

2) Studiem monotonia funcţiei $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = x \cdot e^{-x^2}$ pe $\mathbf{R}$. În acest caz, $f'(x) = e^{-x^2} + x \cdot e^{-x^2}(-2x) = (1 - 2x^2)e^{-x^2}$, $\forall x \in \mathbf{R}$. Tabloul respectiv este:

x	$-\infty$		$-\frac{\sqrt{2}}{2}$		$\frac{\sqrt{2}}{2}$		∞
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	$\searrow$	$-\frac{1}{\sqrt{2e}}$	$\nearrow$	$\frac{1}{\sqrt{2e}}$	$\searrow$	0

3) Pentru funcţia $f : (0, \infty) \to \mathbf{R}$, $f(x) = x^2 - x - \ln x$ avem $f'(x) = 2x - 1 - \frac{1}{x}$ şi tabloul corespunzător este:

x	0		1		∞
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

Deci f este descrescătoare pe intervalul $(0, 1]$ şi crescătoare pe $[1, \infty)$.

c) *Funcţii avînd aceeaşi derivată.* Ştim că derivata unei funcţii constante este funcţia nulă. Demonstrăm reciproca acestei afirmaţii.

TEOREMA V.3. Dacă o funcţie $f : I \to \mathbf{R}$ este derivabilă pe un interval şi $f' = 0$ pe I (adică $f'(x) = 0$, $\forall x \in I$), atunci f este constantă pe I.

Demonstrație. Fixăm un punct $a \in I$. Pentru orice $x \in I$, $x \neq a$, avem $f(x) - f(a) = (x - a)f'(c)$ cu c cuprins între a și x. Deoarece $f'(c) = 0$, rezultă că $f(x) = f(a)$, deci în orice punct $x \in I$, f ia valoarea $f(a)$, adică funcția f este constantă pe I.

Putem raționa și astfel: din teorema V.2 rezultă că f este atît crescătoare cît și descrescătoare pe I, deci f este neapărat constantă pe I.

C O R O L A R. Dacă f și g sînt două funcții derivabile pe un interval I și dacă $f' = g'$ pe I, atunci diferența lor $f - g$ este constantă pe I (se mai spune că funcțiile f și g diferă printr-o constantă).

Demonstrație. Notăm $\varphi = f - g$, deci $\varphi' = f' - g' = 0$ pe I și, aplicînd teorema V.3, rezultă că φ este constantă pe I.

Exemple

1) Considerăm funcția $f(x) = \sin^2 x + \frac{1}{2}\cos 2x$ pe $\mathbf{R}$. Avem $f'(x) = 2\sin x\cos x + \frac{1}{2}(-2\sin 2x) = 0$, $\forall x \in \mathbf{R}$. Așadar, f este constantă pe $\mathbf{R}$. De altfel, $f(x) = \sin^2 x + \frac{1}{2}(1 - 2\sin^2 x) = \frac{1}{2}$, $\forall x \in \mathbf{R}$.

2) Funcțiile $f(x) = \operatorname{arctg} x$, $g(x) = \operatorname{arctg}\frac{x-1}{x+1}$ $(x \neq -1)$ au derivatele egale $f'(x) = g'(x) = \frac{1}{1+x^2}$, deci ele diferă printr-o constantă pe fiecare din intervalele $I_1 = (-\infty, -1)$, $I_2 = (-1, \infty)$.

De altfel, $f(x) - g(x) = -\frac{2\pi}{4}$, $\forall x \in I_1$ și $f(x) - g(x) = \frac{\pi}{4}$, $\forall x \in I_2$ $\left(\text{pentru că limitele diferenței } f(x) - g(x) \text{ spre } -\infty \text{ și spre } +\infty \text{ sînt egale, respectiv, cu } -\frac{3\pi}{4} \text{ și } \frac{\pi}{4}\right)$.

Observație. Dacă f ar fi definită pe reuniunea a două intervale disjuncte I, J și $f = 0$ pe $I \cup J$, nu am putea conchide că f este constantă pe $I \cup J$. Teorema V.3 afirmă doar că f este constantă pe I și pe J (dar cu valori eventual distincte). De exemplu, funcția $f : (-1, 1)\setminus\{0\} \to \mathbf{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} -1, & \text{dacă } x \in (-1, 0) \\ 2, & \text{dacă } x \in (0, 1) \end{cases}$$

are derivata nulă în fiecare punct din $A = (-1, 0) \cup (0, 1)$, dar funcția f nu este constantă pe A. (A se vedea și exemplul 2) de mai sus.)

1.2. Regula lui l'Hospital

În capitolul II am dat definiția, proprietățile de bază ale limitelor de funcții și cîteva procedee de calcul efectiv al unor limite de funcții. Aceste procedee necesită o anumită îndemînare și mult exercițiu pentru a fi stăpînite. Folosind derivatele se poate stabili o metodă generală care acoperă multe din situațiile întîlnite și face calculul limitelor mai simplu.

a) Începem cu examinarea cazului $\frac{0}{0}$, mai precis al limitelor de forma $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$ unde $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = 0$, $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = 0$, $x_0 \in \mathbf{R}$. În capitolul II am indicat cîteva situaţii simple în care, prelucrînd convenabil raportul $\frac{f(x)}{g(x)}$ şi aplicînd teoreme asupra limitelor, putem calcula limita acestuia. Dăm acum

TEOREMA V. 4 (regula lui l'Hospital, 1661—1704). Fixăm două funcţii reale f, g definite pe un interval $[a, b]$ şi un punct $x_0 \in [a, b]$. Presupunem satisfăcute următoarele condiţii:

1°. f şi g sînt derivabile pe $[a, b] \setminus \{x_0\}$ şi continue în x_0,

2°. $f(x_0) = 0$, $g(x_0) = 0$;

3°. $g'(x)$ nu se anulează într-o vecinătate V a lui x_0 ($\forall x \in V \setminus \{x_0\}$);

4°. există limita $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lambda$ (în $\overline{\mathbf{R}}$).

În aceste condiţii, există $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lambda$.

Demonstraţie. Aplicînd teorema lui Cauchy rezultă că pentru orice $x \in [a, b] \cap V$, $\frac{f(x)}{g(x)} \overset{\text{cf. } 2°}{=} \frac{f(x) - f(x_0)}{g(x) - g(x_0)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$, cu $c = c_x$ situat între x_0 şi x. Dacă $x \to x_0$, atunci $c_x \to x_0$ şi, folosind ipoteza 4°, rezultă că $\frac{f(x)}{g(x)} \to \lambda$ pentru $x \to x_0$.

Trebuie observat că nu este nevoie ca f şi g să fie derivabile şi în punctul x_0; subliniem, de asemenea, includerea cazului cînd $\lambda = +\infty$ sau $\lambda = -\infty$.

Exemple

1) Calculăm $\lambda = \lim\limits_{x \to 0} \frac{2 \sin x + \cos x - 1}{x}$. Luînd $f(x) = 2 \sin x + \cos x - 1$, $g(x) = x$ într-un interval $[-a, a]$, $a > 0$ şi $x_0 = 0$, în acest caz, $f'(x) = 2 \cos x - \sin x$, $g'(x) = 1$ şi $\lim\limits_{x \to 0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim\limits_{x \to 0} \frac{2 \cos x - \sin x}{1} = 2$; deci, conform regulii lui l'Hospital, avem $\lambda = 2$.

2) Regula poate fi scrisă succint astfel: $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ (cîtul derivatelor şi nu derivata cîtului!), în condiţiile teoremei V.4. Astfel,

$$\lim_{x \to 1} \frac{\sin \pi x}{2x - 2} = \lim_{x \to 1} \frac{(\sin \pi x)'}{(2x - 2)'} = \lim_{x \to 1} \frac{\pi \cos \pi x}{2} = -\frac{\pi}{2}.$$

Observaţii. 1) Se poate întîmpla ca raportul $\frac{f'(x)}{g'(x)}$ să nu aibă limită şi totuşi $\frac{f(x)}{g(x)}$ să aibă limită. Iată un exemplu: luăm funcţiile f, g definite prin

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}, \quad g(x) = \sin x$$

într-o vecinătate a originii. În acest caz, $\lim\limits_{x \to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x \to 0} \left(\frac{x}{\sin x} \right) \left(x \cdot \sin \frac{1}{x} \right) = \left(\lim\limits_{x \to 0} \frac{x}{\sin x} \right) \left(\lim\limits_{x \to 0} x \sin \frac{1}{x} \right) = 0$ şi, pe de altă parte, $f'(x) = 2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x}$ $\left(\text{pentru } x \neq 0, \ g'(x) = \cos x \text{ şi } \frac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x}}{\cos x} \text{ nu are limită în punctul } x = 0 \right)$.

2) În cazul cînd f' şi g' sînt continue în punctul x_0, avem $\lim\limits_{x \to x_0} f'(x) = f'(x_0)$, $\lim\limits_{x \to x_0} g'(x) = g'(x_0)$ şi dacă $g'(x_0) \neq 0$, atunci $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}$. În acest caz, $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}$. Dacă însă $f'(x_0) = g'(x_0) = 0$, atunci ne găsim într-o situaţie analoagă celei iniţiale, uneori mai favorabilă. Dacă f şi g au derivate de ordin superior şi derivatele lui g îndeplinesc condiţiile teoremei V.4, atunci se poate aplica repetat regula lui l'Hospital cîturilor $\frac{f'}{g'}$, $\frac{f''}{g''}$ etc. Iată un exemplu: fie $f, g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = \text{sh } x - x$, $g(x) = x^3$ şi presupunem că vrem să calculăm $\lambda = \lim\limits_{x \to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x \to 0} \frac{\text{sh } x - x}{x^3}$. Avem $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\text{sh } x - x}{x^3} = \lim\limits_{x \to 0} \frac{\text{ch } x - 1}{3x^2} = \lim\limits_{x \to 0} \frac{\text{sh } x}{6x} = \lim\limits_{x \to 0} \frac{\text{ch } x}{6} = \frac{1}{6} \text{ ch } 0 = \frac{1}{6}$.

3) Fie $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x}{x}$. Aici $f(x) = \sin x$, $g(x) = x$. Aplicînd mecanic regula lui l'Hospital găsim $f'(x) = \cos x$, $g'(x) = 1$, deci $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = \frac{f'(0)}{g'(0)} = \frac{\cos 0}{1} = 1$. Deşi rezultatul este corect, aplicarea regulii este incorectă, pentru că pentru a putea demonstra că $(\sin)'(x) = \cos x$ a fost necesară tocmai limita de mai sus.

4) Aplicarea mecanică (fără a verifica dacă sînt îndeplinite ipotezele necesare) poate conduce la rezultate eronate; nu putem aplica regula lui l'Hospital, de pildă, dacă $f(x) \to 0$ şi $g(x) \to 1$, cînd $x \to x_0$. De exemplu, luînd $f(x) = x - 1$, $g(x) = (x + 1)(x + 2)$, $\frac{f(x)}{g(x)} \to \frac{0}{6} = 0$ cînd $x \to 1$. Aplicarea (incorectă) a regulii lui l'Hospital ar da: $\frac{1}{2x + 3} \to \frac{1}{5}$.

O situaţie des întîlnită este următoarea. Se cere $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$, ştiind că $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = 0 = \lim\limits_{x \to x_0} g(x)$, fără ca funcţiile f şi g să fie ambele definite în punctul x_0.

Are loc analogul teoremei V.4 (pentru limite la stînga) şi anume

TEOREMA V.4'. Fie $f, g : [a, x_0] \to \mathbf{R}$. Presupunem satisfăcute următoarele condiţii:

1°. f **şi** g **derivabile pe** (a, x_0);

2°. $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0} g(x) = 0$;

3°. $g(x)$ **şi** $g'(x)$ **nu se anulează într-o vecinătate** V **a lui** x_0, $(\forall x \in V \cap (a, x_0))$;

4°. **Există** $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lambda$ **(în** $\overline{\mathbf{R}}$**).**

În aceste condiţii, $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$ **există şi este egală cu** λ.

Demonstraţia este imediată, de îndată ce remarcăm că funcţiile $f_1, g_1 : [a, x_0] \to \mathbf{R}$, $f_1(x) = f(x)$, dacă $x \in [a, x_0]$, $f_1(x_0) = 0$; $g_1(x) = g(x)$, dacă $x \in [a, x_0)$ şi $g_1(x_0) = 0$ sînt continue pe $[a, x_0]$ (ele sînt prelungirile prin continuitate în punctul $x = x_0$ ale lui f, respectiv g) şi că se verifică condiţiile teoremei V.4.

Desigur are loc şi o teoremă similară, înlocuind intervalul $[a, x_0]$ cu intervalul $(x_0, b]$, pentru limite la dreapta.

b) Regula lui l'Hospital ne permite să tratăm şi alte cazuri exceptate, de pildă cazul $\frac{\infty}{\infty}$. Dacă ne interesează $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}$ şi dacă $f(x)\to\infty$, $g(x)\to\infty$, atunci putem scrie $\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\frac{1}{g(x)}}{\frac{1}{f(x)}}$ şi atunci $\frac{1}{g(x)}\to 0$, $\frac{1}{f(x)}\to 0$, reducîndu-ne astfel la cazul $\frac{0}{0}$, studiat anterior.

c) Este interesant că regula lui l'Hospital se aplică nu numai pentru x_0 finit, dar şi în cazul cînd x_0 este „aruncat la infinit". Are loc atunci:

TEOREMA V.4″. Fie f şi g funcţii reale definite pe un interval $[a, \infty)$, $a > 0$. Presupunem că

1°. f şi g sînt derivabile pe $[a, \infty)$;

2°. $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\infty} g(x) = l$, unde $l = 0$, ∞ sau $-\infty$;

3°. $g'(x) \neq 0$ pentru orice x suficient de mare ($x \geqslant A$, $A \geqslant a$);

4°. există $\lambda = \lim\limits_{x\to\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ în $\overline{\mathbf{R}}$.

Atunci există limita $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}$, egală cu λ.

(Un enunţ similar are loc pentru $x \to -\infty$.)

Demonstraţie. Presupunem $l = 0$. Facem schimbarea de variabilă $x = \frac{1}{u}$. Intervalul $[a, \infty)$ se transformă în $\left(0, \frac{1}{a}\right]$ în sensul că, dacă $x \in [a, \infty)$, atunci $u \in \left(0, \frac{1}{a}\right]$ şi reciproc. Notăm $\varphi(u) = f\left(\frac{1}{u}\right)$, $\psi(u) = g\left(\frac{1}{u}\right)$; deoarece $l = 0$, avem $\lim\limits_{\substack{u\to 0\\ u>0}}\varphi(u) = \lim\limits_{\substack{u\to 0\\ u>0}}\psi(u) = 0$. Derivatele lor vor fi $\varphi'(u) = -\frac{1}{u^2}f'\left(\frac{1}{u}\right)$, $\psi'(u) = -\frac{1}{u^2}g'\left(\frac{1}{u}\right)$. Putem aplica funcţiilor φ, ψ teorema V.4′ şi rezultă

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{\substack{u\to 0\\ u>0}}\frac{f\left(\frac{1}{u}\right)}{g\left(\frac{1}{u}\right)} = \lim_{\substack{u\to 0\\ u>0}}\frac{\varphi(u)}{\psi(u)} \overset{\text{V.4}'}{=} \lim_{\substack{u\to 0\\ u>0}}\frac{\varphi'(u)}{\psi'(u)} = \lim_{\substack{u\to 0\\ u>0}}\frac{-\frac{1}{u^2}f'\left(\frac{1}{u}\right)}{-\frac{1}{u^2}g'\left(\frac{1}{u}\right)} =$$

$$= \lim_{\substack{u\to 0\\ u>0}}\frac{f'\left(\frac{1}{u}\right)}{g'\left(\frac{1}{u}\right)} = \lim_{x\to\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)} = \lambda.$$

Cazul $l = \infty$ sau $-\infty$ rezultă din b) etc.

Trebuie remarcat că în demonstrație am utilizat esențial faptul că în teorema lui Cauchy nu cerem derivabilitatea în capetele intervalului considerat, ci numai continuitatea.

Exemple

1) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{7x^3 + x^2}{2x^3 - 100} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{21x^2 + 2x}{6x^2} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{42x + 2}{12x} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{42}{12} = \dfrac{7}{2}$.

2) Nu întotdeauna posibilitatea aplicării corecte a regulii lui l'Hospital ne conduce la situații mai favorabile. De exemplu, calculul limitei $l = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$ conduce la o „buclă infinită":

$$l = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}} = \lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x^2+1}}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}}{1} = \lim_{x\to\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} \text{ etc.}$$

Cu metode elementare, se obține direct

$$l = \lim_{x\to\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}} = \lim_{x\to\infty} \frac{x}{|x|\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}} = 1.$$

În calculul limitelor de funcții se recomandă combinarea metodelor elementare cu regula lui l'Hospital.

Cazurile considerate anterior acoperă multe din situațiile care pot fi întîlnite. Reținem că în condițiile teoremelor V.4, V.4', V.4", existența limitei cîtului derivatelor asigură existența limitei cîtului inițial, limitele respective fiind egale.

Pînă acum am considerat numai cazurile exceptate $\frac{0}{0}$ și $\frac{\infty}{\infty}$. În cazurile exceptate $0 \cdot \infty$, $\infty - \infty$, 0^0, ∞^0, 1^∞, nu există reguli de tip l'Hospital care să fie direct aplicate și sînt necesare unele prelucrări ale funcției de sub limită. De exemplu, dacă $f \cdot g$ corespunde cazului $0 \cdot \infty$, atunci scriind $f \cdot g = \dfrac{f}{\frac{1}{g}}$ se obține cazul $\frac{0}{0}$. Similar, în cazurile 0^0, ∞^0, 1^∞, putem scrie $f^g = e^{g \ln f}$ etc.

Exemplu

Calculăm $l = \lim\limits_{x\to\infty} x^n e^{-x}$ $(n \in \mathbf{N},\ n \geqslant 1)$. Sîntem în cazul $\infty \cdot 0$. Scriind $l = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^n}{e^x}$ ne reducem la $\frac{\infty}{\infty}$ și atunci putem aplica regula lui l'Hospital: $l = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{nx^{n-1}}{e^x} =$

$= \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{n(n-1)x^{n-2}}{e^x} = \ldots = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{n!}{e^x} = 0.$

Trebuie remarcat că regula lui l'Hospital se poate folosi și pentru calculul unor limite de șiruri, dar nu direct. Dacă avem o funcție $f: [k, \infty) \to \mathbf{R}$ $(k \in \mathbf{N})$

și dacă $\lim\limits_{n\to\infty} f(x) = \lambda\,(\lambda \in \overline{\mathbf{R}})$, atunci $\lim\limits_{\substack{n\to\infty \\ n\in \mathbf{N}}} f(n) = \lambda$, adică șirul $(f(n))_{n\geqslant k}$ converge către λ. De exemplu, pentru șirul $a_n = \dfrac{3n^2+n}{n^2+2}$ avem $a_n = f(n)$, $n \in \mathbf{N}$, unde $f(x) = \dfrac{3x^2+x}{x^2+2}$, $\forall\, x \in \mathbf{R}$. Deoarece $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 3$, rezultă că $\lim\limits_{x\to\infty} a_n = 3$.

EXERCIȚII (capitolul V, § 1).

1. Să se determine intervalele de monotonie pentru funcțiile următoare $f : D \to \mathbf{R}$ (D fiind domeniul maxim de definiție):

a) $f(x) = x^3 + 6x^2$;
b) $f(x) = x^3 - \dfrac{1}{3}x$;
c) $f(x) = \dfrac{1}{x+1}$;
d) $f(x) = \dfrac{x+2}{x+1}$;
e) $f(x) = \dfrac{2-x}{2+x}$;
f) $f(x) = \dfrac{x^2}{x^2+1}$;
g) $f(x) = x\sqrt{\dfrac{2+x}{x}}$;
h) $f(x) = x^3 \ln x$;
i) $f(x) = x\ln(-x)$;
j) $f(x) = \dfrac{\ln|x|}{x}$;
k) $f(x) = (x+2)e^{-x}$;
l) $f(x) = (x^2+x+1)e^{2x}$;
m) $f(x) = \dfrac{1}{x} + \ln x$;
n) $f(x) = |x+2| - |2x+1|$.

2. Să se arate că funcția $f : (0, \infty) \to \mathbf{R}$, $f(x) = (2^x+1)^{\frac{1}{x}}$ este monotonă.

3. Fie $f : (a, b) \to \mathbf{R}$ o funcție și $x_0 \in (a, b)$ fixat. Să se arate că pentru orice număr real α există cel mult o funcție F derivabilă pe (a, b) astfel încît $F'(x) = f(x)$, $\forall\, x \in (a, b)$ și $F(x_0) = \alpha$.

4. Să se afle extremele locale ale funcțiilor elementare următoare pe domeniul lor maxim de definiție:

a) $f(x) = x^4 - 10x^2$;
b) $f(x) = x - \arcsin x$;
c) $f(x) = 2x + \cos 2x$;
d) $f(x) = \dfrac{1}{x^3-3x}$;
e) $f(x) = x^5 \ln x$;
f) $f(x) = x^3 e^{-x-1}$;
g) $f(x) = \dfrac{x}{\ln x}$;
h) $f(x) = 2\,\mathrm{sh}\,x - \mathrm{ch}\,x$.

5. Să se calculeze, folosind regula lui l'Hospital, următoarele limite:

a) $\lim\limits_{x\to1} \dfrac{x^2-1}{2x-2}$;
b) $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{\sqrt[5]{1+x}-1}{2x}$;
c) $\lim\limits_{x\to2} \dfrac{x^2-4}{\sin(x-2)}$;
d) $\lim\limits_{x\to1} \dfrac{\ln x}{2x-2}$;
e) $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{\mathrm{sh}\,x}{\sin x}$;
f) $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{2x-\sin 2x}{x^3}$;
g) $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{\mathrm{tg}\,x - x}{x^3}$;
h) $\lim\limits_{x\to1} \dfrac{1-x}{\mathrm{ctg}\,\dfrac{\pi x}{2}}$;

i) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{x^2}-\operatorname{ctg}^2 x\right)$;

j) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(x-x^2\ln\frac{1+x}{x}\right)$;

k) $\lim\limits_{x\to\infty} x(\pi-2\operatorname{arctg} x)$;

l) $\lim\limits_{x\to 1} x^{\frac{1}{1-x}}$;

m) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\operatorname{tg}\frac{\pi x}{4}\right)^{\operatorname{tg}\frac{\pi x}{2}}$;

n) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} (\sin x)^{\operatorname{tg} x}$;

o) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{x e^{-\frac{1}{x}}}{\operatorname{tg}^2 x}$;

p) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+x+1}{x^2-x+1}\right)^{3x+2}$;

q) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+\sqrt{x}}{x-\sqrt{x}}\right)^{x}$;

r) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} x^x$;

s) $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}} (\sin\pi x)^{x-1}$;

t) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+1}{x}\right)^{\frac{1}{2x}}$

6. Pentru două funcții f, g definite și derivabile într-o vecinătate a originii, scriem $f(x)\simeq g(x)$, dacă $f(0)=g(0)$ și $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{g(x)}=1$. Să se arate că

a) $\sin x\simeq x$;

b) $\cos x\simeq 1-\frac{x^2}{2}$;

c) $x-\operatorname{arctg} x\simeq\frac{1}{3}x^3$;

d) $x-\sin x\simeq\frac{1}{6}x^3$;

e) $\sqrt{1+x}-1-\frac{1}{2}x\simeq-\frac{1}{8}x^2$;

f) $\sqrt[3]{1+x}-1-\frac{1}{3}x\simeq-\frac{1}{9}x^2$;

g) $2x-\ln(1+2x)\simeq 2x^2$;

h) $a^x-b^x\simeq x\ln\frac{a}{b}$ $(a>0,\ b>0)$.

7. Să se arate că, deși limita $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x-\sin x}{x+\cos x}$ există, regula lui l'Hospital nu poate fi aplicată aici direct.

8. Cum poate fi utilizată regula lui l'Hospital pentru a calcula $\lim\limits_{\substack{n\to\infty\\ n\in\mathbf{N}}}\frac{n}{e^n}$? Dar $\lim\limits_{\substack{n\to\infty\\ n\in\mathbf{N}}}(e^n+n)^{\frac{1}{n}}$?

9. Să se determine asimptotele următoarelor funcții $f: D\to\mathbf{R}$ (D fiind domeniul maxim de definiție):

a) $f(x)=\frac{x^2}{x^3+8}$;

b) $f(x)=\frac{x^3+8}{x^2}$;

c) $f(x)=x\sqrt{\frac{x}{x+1}}$;

d) $f(x)=x+\frac{4}{x-1}$;

e) $f(x)=x-1+\frac{4}{x}$;

f) $f(x)=x e^{\frac{1}{x^2}}$;

g) $f(x)=\ln(1+x-2x^2)$;

h) $f(x)=\ln\frac{1-x}{2+x}$.

§ 2. Rolul derivatei a doua în studiul funcțiilor

Am văzut ce informații se pot obține asupra comportării unei funcții derivabile cunoscînd derivata ei, mai precis zerourile și semnul derivatei. Vom vedea acum că derivata a doua (desigur în ipoteza că există) ne furnizează informații suplimentare asupra funcției, precizînd alura graficului.

2.1. Convexitate, concavitate

DEFINIȚIA V. 1. **O funcție $f : I \to R$, definită pe un interval I se numește *convexă* pe I dacă, pentru orice două puncte $x_1, x_2 \in I$ și pentru orice $t \in [0, 1]$, avem**

(1) $$f((1-t)x_1 + tx_2) \leq (1-t)f(x_1) + tf(x_2).$$

Această condiție admite o interpretare geometrică sugestivă. Anume, să considerăm punctele $A(x_1, f(x_1))$, $B(x_2, f(x_2))$, $x_1 \neq x_2$ de pe graficul lui f. Atunci punctul $\alpha = (1-t)x_1 + tx_2$, $t \in [0, 1]$ aparține segmentului de capete x_1, x_2. Coarda AB are ecuația $y = f(x_2) + \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}(x - x_2)$ și ordonata punctului de abscisă α de pe această coardă va fi $\beta = f(x_2) + \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}[(1-t)x_1 + tx_2 - x_2] = f(x_2) + (1-t)[f(x_1) - f(x_2)] = (1-t)f(x_1) + tf(x_2)$. Condiția (1) se mai scrie $f(\alpha) \leq \beta$ și se exprimă spunînd că graficul lui f este situat sub orice coardă dacă unim două puncte situate pe graficul funcției, cu abscisele aparținînd lui I (fig. V.2).

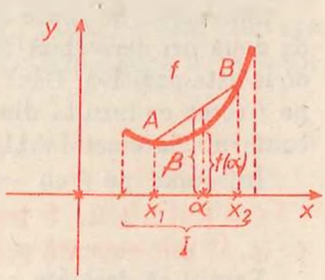


Fig. V.2

Funcția f se numește **concavă** pe I dacă funcția $-f$ este convexă pe I, adică în (1) are loc inegalitatea inversă. Geometric, aceasta revine la faptul că graficul funcției va fi situat deasupra coardei determinate de punctele $(x_1, f(x_1))$ și $(x_2, f(x_2))$ pe segmentul de capete x_1, x_2; $x_1, x_2 \in I$.

Dacă inegalitatea (1) este strictă, se spune că funcția f este *strict convexă* pe I (similar se definesc funcțiile strict concave). Uneori se mai spune că funcțiile convexe au „concavitatea în sus" (graficul lor „ține apa"), iar funcțiile concave au „concavitatea în jos" (sau, în limbaj familiar, graficul lor „nu ține apa" fig. V.3).

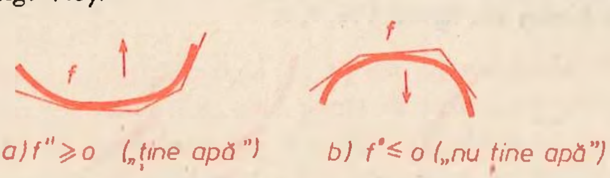


Fig. V.3

Pentru funcţii de două ori derivabile pe un interval, putem demonstra un criteriu util de convexitate. Anume, are loc

TEOREMA V.5. Fie $a < b$ două numere reale şi $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ o funcţie continuă. Presupunem că f', f'' există pe intervalul deschis (a, b) şi că $f''(x) \geqslant 0$ pentru orice $x \in (a, b)$, atunci funcţia f este convexă pe intervalul $[a, b]$.

Demonstraţie. Fie $a \leqslant x_1 < x_2 \leqslant b$. Pentru orice punct $\alpha \in (x_1, x_2)$, aplicînd teorema lui Lagrange pe intervalele $[x_1, \alpha]$ şi $[\alpha, x_2]$ există $\xi_1 \in (x_1, \alpha)$, $\xi_2 \in (\alpha, x_2)$ astfel încît

$$\frac{f(\alpha) - f(x_1)}{\alpha - x_1} = f'(\xi_1), \quad \frac{f(x_2) - f(\alpha)}{x_2 - \alpha} = f'(\xi_2).$$

Deoarece $\xi_1 < \xi_2$, rezultă $f'(\xi_1) \leqslant f'(\xi_2)$ [deoarece funcţia f' este monoton crescătoare pe (a, b); aici intervine ipoteza că $f'' \geqslant 0$ pe (a, b)].

Aşadar, $\dfrac{f(\alpha) - f(x_1)}{\alpha - x_1} \leqslant \dfrac{f(x_2) - f(\alpha)}{x_2 - \alpha}$; înlocuind aici $\alpha = (1 - t)x_1 + tx_2$, $t \in (0, 1)$, se obţine $\dfrac{f(\alpha) - f(x_1)}{t(x_2 - x_1)} \leqslant \dfrac{f(x_2) - f(\alpha)}{(1 - t)(x_2 - x_1)}$, adică $f(\alpha) \leqslant (1 - t)f(x_1) + tf(x_2)$, adică tocmai (1).

Observaţie. Se poate demonstra şi afirmaţia reciprocă, anume dacă f este de două ori derivabilă pe un interval I şi este convexă, atunci derivata a doua este pozitivă. Dacă f'' nu se anulează pe I, atunci f'' are semn constant pe I (ceea ce rezultă din faptul că $f'' = (f')'$ are proprietatea lui Darboux, conform teoremei IV.11).

Înlocuind pe f cu $-f$ rezultă următorul

COROLAR. O funcţie continuă $f : [a, b] \to \mathbf{R}$, de două ori derivabilă pe (a, b) este concavă pe $[a, b]$ dacă $f'' \leqslant 0$ pe (a, b).

Faptul că derivata a doua a unei funcţii este pozitivă (respectiv negativă) pe un interval arată că, de fapt, coeficientul unghiular al tangentei la grafic este crescător (respectiv descrescător), deci că graficul are forma din figura V.3.

2.2. Intervale de convexitate, puncte de inflexiune

Fie $f : I \to \mathbf{R}$ o funcţie de două ori derivabilă pe un interval I. Dacă $f'' \geqslant 0$ (respectiv $f'' \leqslant 0$) pe I, atunci am văzut că I este un interval de convexitate (respectiv de concavitate) al lui f. Reţinem deci că semnul derivatei a doua a unei funcţii permite determinarea intervalelor pe care funcţia respectivă este convexă sau concavă. De exemplu, dacă ştim că o funcţie este monoton descrescătoare şi concavă, atunci graficul ei este de forma din figura V.4, a şi nu de forma din figura V.4, b, c.

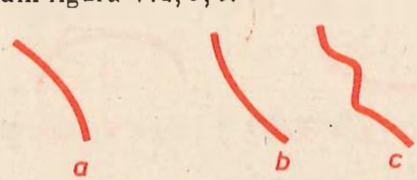


Fig. V.4

Semnul derivatei f'' într-un punct critic ne furnizează un criteriu suficient, de extrem. Are loc

TEOREMA V. 6. Dacă $x_0 \in (a, b)$ este un punct critic pentru o funcţie $f : (a, b) \to \mathbf{R}$, de două ori derivabilă şi dacă $f''(x_0) > 0$ (respectiv $f''(x_0) < 0$), atunci x_0 este punct de minim local (respectiv de maxim local) pentru funcţia f.

Demonstraţie. Din faptul că $f''(x_0) > 0$, rezultă că există o vecinătate $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ a punctului x_0, pe care f' este crescătoare.

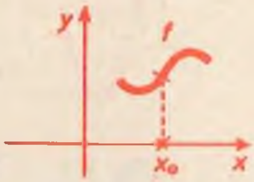


Fig. V.5

Dar $f'(x_0) = 0$ prin ipoteză. Atunci $\forall\ x \in (x_0 - \delta, x_0)$ avem $f'(x) \leqslant f'(x_0) = 0$, deci (în virtutea teoremei V.2) f este descrescătoare pe acest interval. Analog, pentru $x \in (x_0, x_0 + \delta)$ avem $0 = f'(x_0) \leqslant f'(x)$, deci f este crescătoare pe intervalul $(x_0, x_0 + \delta)$; în concluzie, x_0 este un punct de minim pentru f. Demonstraţia este similară în cazul $f''(x_0) < 0$.

Dacă funcţia f este de două ori derivabilă în vecinătatea unui punct x_0, astfel încît $f''(x_0) = 0$ şi dacă f'' îşi schimbă semnul de o parte şi alta a lui x_0, atunci funcţia îşi schimbă concavitatea în acel punct. De exemplu, dacă $f''(x) > 0$ pentru $x < x_0$ şi $f''(x) < 0$ pentru $x > x_0$, atunci f este convexă la stînga lui x_0 şi concavă la dreapta lui (fig. V.5). Dăm acum o definiţie precisă.

DEFINIŢIA V. 2. Fie $f : I \to \mathbf{R}$ o funcţie continuă definită pe un interval $I \subset \mathbf{R}$. Un punct $x_0 \in I$ distinct de capetele lui I se numeşte *punct de inflexiune* pentru f dacă există puncte $\alpha < x_0 < \beta$ în I astfel încît f să fie convexă pe $(\alpha, x_0]$ şi concavă pe $[x_0, \beta)$ sau invers (fig. V.6).

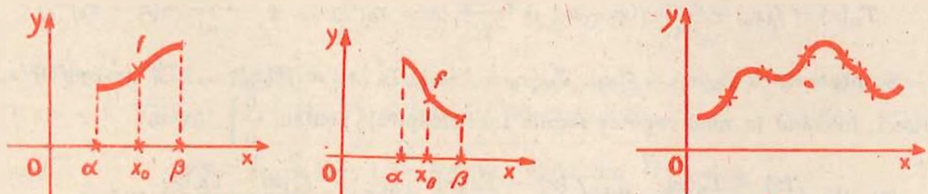


Fig. V.6

TEOREMA V. 7. Fie x_0 un punct şi f o funcţie de două ori derivabilă într-o vecinătate V a lui x_0. Dacă există $\alpha, \beta \in V$ astfel încît

1) $\alpha < x_0 < \beta$;

2) $f''(x_0) = 0$;

3) $f'' < 0$ pe (α, x_0) şi $f'' > 0$ pe (x_0, β) sau invers (adică $f'' > 0$ pe (α, x_0) şi $f'' < 0$ pe (x_0, β)), atunci x_0 este punct de inflexiune pentru f.

Demonstraţia este evidentă din definiţia V.2, folosind teorema V.5.

Trebuie remarcat că relaţia $f''(x_0) = 0$ singură nu implică faptul că x_0 este punct de inflexiune.

Exemple

1) Considerăm funcţia $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $f(x)=x^3-6x^2+4$. Avem $f'(x)=3x^2-12x$ $f''(x)=6x-12$, $\forall\, x\in\mathbf{R}$. Semnul derivatei f'' este indicat în tabloul următor

x	$-\infty$	2	∞
$f''(x)$	$-$	0	$+$

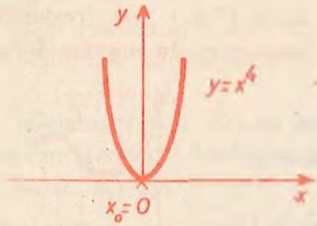


Fig. V.7

Aşadar, f este concavă pe intervalul $(-\infty, 2)$ şi convexă pe $(2, \infty)$, iar punctul $x=2$ este punct de inflexiune.

2) Pentru funcţia $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $f(x)=x^4$ avem $f''(x)=12x^2$ deci $f''(0)=0$; totuşi $x=0$ nu este punct de inflexiune, deoarece f este convexă şi la stînga şi la dreapta punctului $x=0$ (fig. V.7).

Aici punctul $x=0$ este punct de minim pentru f.

3) Pentru funcţia $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $f(x)=(x^2-4x+6)e^x$ avem $f'(x)=(x^2-2x+2)e^x$ şi $f''(x)=x^2e^x$, $\forall\, x\in\mathbf{R}$; ecuaţia $f''(x)=0$ are soluţia $x=0$. Punctul $x=0$ nu este nici punct de extrem pentru f şi nici punct de inflexiune (deoarece $f'(0)\neq 0$ şi $f''(x)>0$ de o parte şi alta a originii).

2.3. Formula lui Taylor

Am văzut că în jurul unui punct o funcţie derivabilă poate fi aproximată printr-o funcţie de gradul întîi (adică graficul funcţiei este aproximat cu o linie dreaptă) şi se pune problema aproximării „mai bune" (cu eroare mai mică) prin polinoame de grad superior. Astfel, aproximarea pătratică va permite aproximarea graficului printr-o parabolă, în vecinătatea unui punct fixat.

Fie $x_0\in\mathbf{R}$ un punct fixat şi $f:V\to\mathbf{R}$ o funcţie de n ori derivabilă pe o vecinătate V a punctului x_0 astfel încît $f^{(n)}$ să fie continuă în x_0. În acest caz se poate considera *polinomul Taylor* asociat funcţiei şi punctului x_0

$$T_n(x)=f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n.$$

Se observă că $T_n(x_0)=f(x_0)$, $T_n'(x_0)=f'(x_0)$, $T_n''(x_0)=f''(x_0)$, ..., $T_n^{(n)}(x_0)=f^{(n)}(x_0)$. Atunci, folosind în mod repetat regula lui l'Hospital $\left(\text{pentru } \frac{0}{0}\right)$, avem:

$$(2)\quad \lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-T_n(x)}{(x-x_0)^n}=\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)-T_n'(x)}{n(x-x_0)^{n-1}}=\lim_{x\to x_0}\frac{f''(x)-T_n''(x)}{n(n-1)(x-x_0)^{n-2}}=\ldots$$

$$\ldots=\lim_{x\to x_0}\frac{f^{(n)}(x)-T_n^{(n)}(x)}{n!}=0.$$

Notăm $\theta(x)=f(x)-T_n(x)$, $\forall\, x\in V$, deci $f(x)=T_n(x)+\theta(x)$, $\forall\, x\in V$.

TEOREMA V.8 *(formula lui B. Taylor, 1685–1731).* **Dacă f este o funcţie de n ori derivabilă într-o vecinătate a punctului x_0 şi $f^{(n)}$ este continuă în x_0, atunci are loc formula aproximativă**

$$(3)\qquad f(x)\simeq f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$$

pentru orice $x\in V$, în care eroarea absolută $|\theta(x)|$ satisface condiţia $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{|\theta(x)|}{(x-x_0)^n}=0.$

Demonstrație. Formula (3) revine la $f(x) \simeq T_n(x)$, $\forall\, x \in V$. Eroarea absolută este $|\theta(x)| = |f(x) - T_n(x)|$. Aplicînd (2) rezultă

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - T_n(x)}{(x - x_0)^n} = 0, \text{ deci } \lim_{x \to x_0} \frac{\theta(x)}{(x - x_0)^n} = 0.$$

C O R O L A R U L 1 (formula de aproximare pătratică). Fie f o funcție de două ori derivabilă într-o vecinătate V a unui punct x_0 cu f'' continuă în x_0. Atunci

$$f(x) \simeq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x - x_0)^2, \tag{4}$$

unde eroarea $|\theta(x)|$ satisface condiția $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{\theta(x)}{(x - x_0)^2} = 0$.

În cazul funcțiilor polinomiale formula (3) este o formulă precisă. Anume, are loc următorul

C O R O L A R U L 2. Dacă $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ este o funcție polinomială de gradul n și $x_0 \in \mathbf{R}$, atunci

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n,$$

pentru orice $x \in \mathbf{R}$.

Demonstrație. Cu alte cuvinte, avem de arătat că $f(x) = T_n(x)$, $\forall\, x \in \mathbf{R}$. Dar f, T_n sînt funcții polinomiale de gradul n și, conform teoremei V.14, avem: $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{\theta(x)}{(x - x_0)^n} = 0$; cum θ este funcție polinomială de grad $\leqslant n$, rezultă $\theta(x)$, $\forall\, x \in \mathbf{R}$.

Exemple

1) Fie $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = e^x$ și $x_0 = 0$. În acest caz $f(0) = 1$, $f'(0) = 1, \ldots, f^{(n)}(0) = 1$. Formula (3) devine

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \theta(x), \text{ unde } \lim_{x \to 0} \frac{\theta(x)}{x^n} = 0. \tag{5}$$

2) Pentru $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = \sin x$, $x_0 = 1$ și $n = 5$, avem $f(0) = 0$, $f'(0) = 1$, $f''(0) = 0$, $f'''(0) = -1$, $f^{(4)}(0) = 0$, $f^{(5)}(0) = 1$ și formula (3) devine

$$\sin x = \frac{x}{1!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \theta_1(x), \text{ unde } \lim_{x \to 0} \frac{\theta_1(x)}{x^5} = 0. \tag{6}$$

Similar,

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \theta_2(x), \text{ unde } \lim_{x \to 0} \frac{\theta_2(x)}{x^5} = 0. \tag{7}$$

3) Calculăm limita $l = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^{-x} - \cos x + x}{x^2}$. Folosind (5), (7) avem:

$$l = \lim_{x \to 0} \frac{\left[1 - \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \theta_1(x)\right] - \left[1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \theta_2(x)\right] + x}{x^2} =$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{x^2 - \frac{x^3}{6} - \frac{x^4}{4} + \theta_1(x) - \theta_2(x)}{x^2}, \text{ deci } l = 1, \text{ deoarece } \lim_{x \to 0} \frac{\theta_1(x)}{x^2} = \lim_{x \to 0} \frac{\theta_2(x)}{x^2} = 0.$$

4) Aplicăm formula lui Taylor funcţiei polinomiale $P(x) = x^3 - 2x^2 + x + 1$ în jurul punctului $x_0 = 2$. Avem $P'(x) = 3x^2 - 4x + 1$, $P''(x) = 6x - 4$, $P'''(x) = 6$, ceea ce dă $P(2) = 3$, $P'(2) = 5$, $P''(2) = 8$, $P'''(2) = 6$.

Vom avea deci $P(x) = P(2) + \frac{P'(2)}{1!}(x-2) + \frac{P''(2)}{2!}(x-2)^2 + \frac{P'''(2)}{3!}(x-2)^3 =$
$= 3 + 5(x-2) + 4(x-2)^2 + (x-2)^3$.

Reciproc, formula lui Taylor ne permite să constituim un polinom dacă se cunosc derivatele sale succesive într-un punct dat.

EXERCIŢII (capitolul V, § 2)

1. Să se determine intervalele de convexitate şi concavitate pentru funcţiile $f: D \to \mathbf{R}$ următoare (D fiind domeniul maxim de definiţie):

a) $f(x) = x^3 + 3x^2$;
b) $f(x) = \sin x$;
c) $f(x) = \frac{2x}{x^2+1}$;
d) $f(x) = x + \sqrt[3]{x}$;
e) $f(x) = x^2 \ln x$;
f) $f(x) = \frac{x^2}{x^2+1}$;
g) $f(x) = \frac{2x}{x^2-1}$;
h) $f(x) = e^x - \frac{x^2}{2}$.

2. Să se determine punctele de inflexiune pentru funcţiile $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ următoare:

a) $f(x) = 4x - \frac{1}{3}x^2$;
b) $f(x) = x^3 - 3x^2$;
c) $f(x) = \frac{3x}{x^2+1}$;
d) $f(x) = \frac{x-9}{|x|+1}$;
e) $f(x) = \sqrt{x^2+1}$;
f) $f(x) = \sqrt[3]{x-1} + \sqrt[3]{x+1}$;
g) $f(x) = x + 2\cos\frac{x}{2}$;
h) $f(x) = \cos x - \cos^3 x$;
i) $f(x) = \sin x - \sin^3 x$;
j) $f(x) = x^4 - 4x^3 + 5x^2 - 2x$.

3. Presupunem că funcţia $f: [a, b] \to \mathbf{R}$ este continuă pe $[a, b]$, de două ori derivabilă pe (a, b) şi astfel încît $f'' > 0$ pe (a, b). Să se arate că pentru orice $\alpha \in (a, b)$ tangenta la graficul lui f în punctul $(\alpha, f(\alpha))$ este dedesubtul graficului lui f.

4. Să se arate că dacă o funcţie $f: I \to \mathbf{R}$ pe un interval I este o funcţie convexă şi $a, b \in I$, atunci $f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leqslant \frac{f(a)+f(b)}{2}$.

5. Fie $a, b \in \mathbf{R}$ constante, $ab > 0$. Se consideră funcţia $f: \mathbf{R}\setminus\{0\} \to \mathbf{R}$, $f(x) = \frac{(x-a)(x-b)}{x} + \lambda x$, $\lambda \in \mathbf{R}$. Să se studieze monotonia şi convexitatea lui f pe intervalele $(-\infty, 0)$, $(0, \infty)$; discuţie.

6. Să se determine o funcţie polinomială $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ de gradul III astfel încît:

a) $f(0) = 1$, $f'(0) = 1$, $f''(0) = 2$, $f'''(0) = -3$;
b) $f(0) = 1$, $f'(0) = 0$, $f''(0) = 0$, $f'''(0) = -1$;
c) $f(1) = 0$, $f'(1) = 0$, $f''(1) = 0$, $f'''(1) = k$, $k \neq 0$, real dat.

§ 3. Reprezentarea grafică a funcțiilor

În cele ce urmează, vom subînțelege fixat un sistem ortogonal de axe xOy. Am adus, în capitolele anterioare, mai multe motivații asupra utilității graficelor de funcții. Subliniem din nou faptul că scopul nostru este studiul funcțiilor, trasarea graficului unei funcții fiind un mijloc extrem de util pentru a ilustra proprietățile ei locale și globale. Acum ne ocupăm de trasarea graficelor de funcții reale, extinzînd cazul funcțiilor elementare. Ca aplicație a rezultatelor teoretice stabilite pînă acum, utilizînd în mod esențial noțiunea de derivată, știm să indicăm deja anumite puncte importante ale graficelor (puncte de extrem, intersecții cu axele etc.), intervalele de monotonie, anumite drepte remarcabile (asimptote, semitangente etc.). Odată determinate aceste elemente, ele pot să fie figurate pe sistemul fixat de axe și permit redarea aproximativă a graficului funcției considerate.

Pentru a prezenta mai sistematic modul de lucru în trasarea graficului unei funcții (notată cu f), recomandăm parcurgerea următoarelor etape de determinare succesivă a unor elemente caracteristice ale funcției.

I. *Domeniul D de definiție al funcției.* Acesta este fie indicat în mod explicit de enunț, fie este subînțeles ca fiind domeniul maxim de definiție (în cazul funcțiilor elementare).

De pildă, pentru o funcție de tipul $\sqrt{g(x)}$ se pune condiția $g(x) \geqslant 0$, pentru $\ln g(x)$ trebuie ca $g(x) > 0$, pentru un cît $\frac{g(x)}{h(x)}$ este necesar ca $h(x) \neq 0$, iar pentru arcsin $\varphi(x)$ este necesar ca $-1 \leqslant \varphi(x) \leqslant 1$ etc. Dacă funcția este periodică, atunci este suficient ca funcția să fie studiată pe un interval de lungime cît perioada principală; trebuie atunci făcută distincția între domeniul de studiu și cel de definiție. De asemenea, în probleme cu conținut fizic, se poate întîmpla să apară restricții suplimentare pentru domeniul de studiu.

De îndată ce este indicat D se determină intersecțiile graficului funcției f cu axele de coordonate. Dacă $0 \in D$, atunci graficul intersectează axa Oy în punctul $(0, f(0))$, iar eventualele intersecții cu axa Ox sînt punctele $(a, 0)$, $a \in D$ unde $f(a) = 0$ și se obțin deci prin rezolvarea ecuației $f(x) = 0$.

II. *Semnul funcției și eventualele simetrii ale graficului.*

Dacă $f \geqslant 0$ (respectiv $f \leqslant 0$), atunci graficul lui f este situat deasupra (respectiv dedesubtul) axei Ox. Este util de a determina mulțimile de puncte unde graficul este situat deasupra, respectiv dedesubtul axei Ox. Dacă f este pară, atunci graficul lui f este simetric față de axa Oy, iar dacă f este impară, atunci graficul lui f este simetric față de origine. (Pentru o funcție pară sau impară, domeniul de studiu D poate fi restrîns, făcîndu-se studiul restricției funcției f la mulțimea $D \cap [0, \infty)$.)

III. *Limite la capete, continuitatea funcției, asimptote.*

Dacă mulțimea D este nemărginită, atunci este necesar studiul limitei lui f spre $+\infty$ (sau spre $-\infty$), determinîndu-se totodată asimptotele orizontale (eventuale) ale lui f. Dacă D este o reuniune de intervale, atunci se calculează valorile sau limitele lui f la capetele fiecărui interval.

Se determină asimptotele verticale (eventuale), adică dreptele $x = x_0$, unde în punctul x_0 cel puțin una din limitele laterale $f(x_0 - 0)$ sau $f(x_0 + 0)$ este infinită.

În cazul cînd nu există asimptotă orizontală, de exemplu spre $+\infty$, se poate studia existența asimptotei oblice $y = mx + n$, dacă limitele $m = \lim\limits_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x}$, $n = \lim\limits_{x \to \infty} [f(x) - mx]$ există și sînt finite (similar pentru $-\infty$).

Deja din parcurgerea acestor trei etape ne putem da seama într-o oarecare măsură de alura generală a graficului. De asemenea, trebuie determinată mulțimea punctelor din domeniul de definiție în care f este continuă. Pasul următor este esențial.

IV. *Derivata întîi.* La acest punct se stabilește mai întîi mulțimea punctelor în care funcția f este derivabilă; se calculează derivata f'. Se rezolvă ecuația $f'(x) = 0$ și astfel se determină punctele critice ale lui f și intervalele pe care f' are semn constant. Din studiul punctelor critice, combinat cu cel al intervalelor de monotonie, putem decide care din acestea sînt puncte de maxim sau minim local pentru f. Mai precis, dacă x_0 este un punct critic și dacă într-o vecinătate a lui x_0 avem $f'(x) \geqslant 0$, pentru $x < x_0$ și $f'(x) \leqslant 0$ pentru $x > x_0$, atunci este evident că x_0 este un punct de maxim local pentru f (deoarece f crește pînă în x_0 și descrește după x_0); similar, dacă într-o vecinătate a lui x_0, $f'(x) \leqslant 0$ pentru $x < x_0$ și $f'(x) \geqslant 0$ pentru $x > x_0$, atunci x_0 va fi un punct de minim local pentru f. Nu trebuie uitat că dacă f este definită pe un interval închis, se poate ca funcția să aibă extreme la capetele intervalului, fără ca f' să se anuleze, după cum se poate întîmpla ca f să admită extrem în punctele unde f' nu există (de exemplu, $f(x) = |x|$ are un minim în punctul $x = 0$, deși f nu este derivabilă în $x = 0$). În general, trebuie studiată funcția și pe mulțimea punctelor în care nu este derivabilă (puncte unghiulare, puncte de întoarcere, semitangente etc.).

Dacă funcția f este de două ori derivabilă, atunci, pentru trasarea ceva mai precisă a graficului lui f se adaugă etapa:

IV'. *Studiul derivatei a doua.* Calculul rădăcinilor reale ale ecuației $f''(x) = 0$ și semnul lui f'' permit determinarea intervalelor de convexitate și a punctelor eventuale de inflexiune. În particular, semnul derivatei a doua în punctele critice permite a se decide care dintre acestea sînt puncte de extrem, cf. teoremei V.6.

V. *Tabloul de variație.*

Rezultatele obținute pot fi sintetizate într-un tablou avînd trei rubrici orizontale sau patru (dacă funcția este de două ori derivabilă și forma derivatei secunde permite determinarea semnului, respectiv a rădăcinilor sale): prima este pentru valorile remarcabile ale lui x, în a doua se trec valorile corespunzătoare ale lui f' și semnul lui f', iar în rubrica a treia se trec valorile lui f, limitele la capete și semnele indicînd creșterea sau descreșterea funcției f.

Asimptotele verticale se marchează prin linii verticale punctate în acest tablou, trecîndu-se în linia a treia limitele laterale corespunzătoare. În a patra rubrică se trece semnul lui f''. Menționăm că în practică la această rubrică pot apărea mari dificultăți de calcul și, în acest caz, ea se poate omite.

Trebuie remarcat că apariția unor contradicții în tabloul de variație (de exemplu creștere spre $-\infty$, descreștere spre $+\infty$, creștere de la $+\infty$ încolo etc.) indică greșeli de calcul la determinarea limitelor funcției sau în expresia derivatei f', în rezolvarea ecuației $f'(x) = 0$, la intersecțiile cu axele, asimptote etc.

VI. *Trasarea graficului.*

Pe sistemul ortogonal de axe xOy fixat se figurează elementele determinate la etapele anterioare. Graficul funcției va fi o submulțime a mulțimii $D \times \mathbf{R}$ (hașurîndu-se complementara mulțimii $D \times \mathbf{R}$ din $\mathbf{R}^2$). Punctele remarcabile ale graficului se unesc printr-o linie curbă, ținîndu-se cont de monotonia funcției, de asimptote și în general de rezultatele sintetizate în tabloul de variație. Pentru a trasa cît mai corect graficul funcției se recomandă a cunoaște mai multe valori ale funcției și ale derivatei. În fapt, ceea ce facem este o „interpolare“ ținînd seama de valorile remarcabile găsite.

În continuare vom da mai multe exemple de reprezentări grafice, cu parcurgerea sistematică a etapelor I — VI menționate.

EXEMPLE

1) $\boxed{f(x) = x^3 + x^2}$.

I. Domeniul maxim de definiție este $D = \mathbf{R}$. Intersecțiile cu axele sînt $(0,0)$, $(-1,0)$.

II. Funcția nu este pară, nici impară. Ea este pozitivă ($f(x) \geqslant 0$) pentru $x^3 + x^2 \geqslant 0$, adică pentru $x \geqslant -1$.

III. Limitele la capete sînt $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} (x^3 + x^2) = -\infty$ și $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\infty} (x^3 + x^2) = \infty$. Nu există asimptote. Funcția f este continuă pe $\mathbf{R}$.

IV. Derivata întîi este $f'(x) = 3x^2 + 2x$, $\forall\, x \in \mathbf{R}$. Ecuația $f'(x) = 0$ are soluțiile $x_1 = -\frac{2}{3}$, $x_2 = 0$ (punctele critice ale lui f). Evident $f\left(-\frac{2}{3}\right) = \frac{4}{27}$ și $f(0) = 0$.

V. Tabloul de variație este

x	$-\infty$		$-\frac{2}{3}$		0		∞
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$\frac{4}{27}$	$\searrow$	0	$\nearrow$	∞

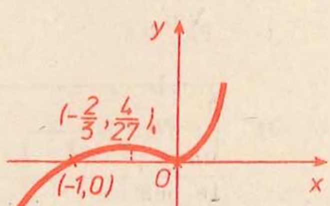


Fig. V.8

VI. Graficul (fig. V.8).

(Se observă că pentru $x \geqslant -1$ graficul este situat deasupra axei Ox.)

2) $\boxed{f(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}}$.

I. Domeniul maxim de definiție este $D = \mathbf{R} \setminus \{0\} = (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$. Graficul nu taie axa Oy (pentru că $0 \notin D$). Intersecțiile cu axa Ox se determină rezolvînd ecuația $f(x) = 0$, adică $x + 1 = 0$; există o singură intersecție cu axa Ox, anume punctul $A(-1, 0)$.

II. Funcția nu este pară și nici impară: avem $f(x) \geqslant 0$, dacă și numai dacă $\frac{x+1}{x^2} \geqslant 0$, adică $x \geqslant -1$, $x \neq 0$.

III. Limitele la capete: $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}\right) = 0$, $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x<0}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x<0}} \frac{x+1}{x^2} = \infty$; $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} \frac{x+1}{x^2} = \infty$ și $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = \lim\limits_{x \to \infty} \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}\right) = 0$.

Așadar, dreapta $y = 0$ este asimptotă orizontală (spre $-\infty$ și spre $+\infty$); apoi $x = 0$ este asimptotă verticală. Funcția f este continuă pe $\mathbf{R} \setminus \{0\}$.

IV. Avem $f'(x) = -\frac{1}{x^2} - \frac{2}{x^3} = \frac{-x-2}{x^3}$, $\forall\, x \in D$; de obicei se recomandă ca numitorul să fie pozitiv, pentru a determina mai ușor semnul derivatei, deci $f'(x) = -\frac{x(x+2)}{x^4}$, $\forall\, x \neq 0$. Ecuația $f'(x) = 0$ are o singură soluție, anume $x = -2$, dar derivata f' își schimbă semnul în punctele $x = -2$, $x = 0$ (chiar dacă în punctul $x = 0$ ea nu este definită).

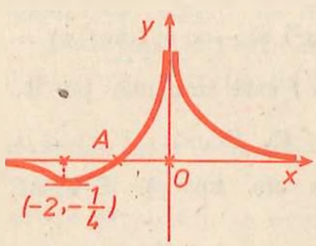


Fig. V.9

V. Tabloul de variație:

x	$-\infty$		-2		-1		0		∞
$f'(x)$		$-$	0	$+$	1	$+$	|	$-$	
$f(x)$	0	$\searrow$	$-\frac{1}{4}$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	∞ | ∞	$\searrow$	0

VI. Graficul (fig. V.9).

3) $\boxed{f(x) = \frac{|x|}{x^2+1}}$.

I. Domeniul maxim de definiție este $D = \mathbf{R}$; graficul are o singură intersecție cu axele, anume originea.

II. Funcţia este pozitivă pe întreg $\mathbf{R}$, deci graficul este situat deasupra axei Ox. Apoi funcţia este pară, deoarece $f(-x) = f(x)$, $\forall\, x \in \mathbf{R}$. Este suficient să facem studiul restricţiei lui f la mulţimea $D_1 = [0, \infty)$.

III. Avem $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \dfrac{x}{x^2+1} = 0$ şi $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x}{x^2+1} = 0$ (gradul numărătorului fiind mai mic decît gradul numitorului). Aşadar, $y = 0$ este asimptotă spre $+\infty$. Graficul nu admite asimptote verticale sau oblice. De asemenea, funcţia f este continuă pe întreg domeniul de definiţie.

IV. Pentru $x \geqslant 0$ avem $f(x) = \dfrac{x}{x^2+1}$, deci $f'(x) = \dfrac{1-x^2}{(x^2+1)^2}$, $\forall\, x > 0$ şi ecuaţia $f'(x) = 0$ are rădăcinile $x = \pm 1$ (pentru $x > 0$ se consideră numai $x=1$). Apoi $f_d'(0) = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f'(x) = 1$, conform obs. 1, pag. 156, şi semitangenta la grafic în origine face unghiul $\frac{\pi}{4}$ cu axa Ox.

V. Tabloul de variaţie:

x	0				1				∞
$f'(x)$		$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	
$f(x)$	0		$\nearrow$		$\frac{1}{2}$		$\searrow$		0

VI. Graficul pe intervalul $[0, \infty)$ este indicat în figura V.10, *a*. Deoarece funcţia f este pară, ea are pe $\mathbf{R}$ graficul din figura V.10, *b*. Punctul $x = 0$ este punct unghiular.

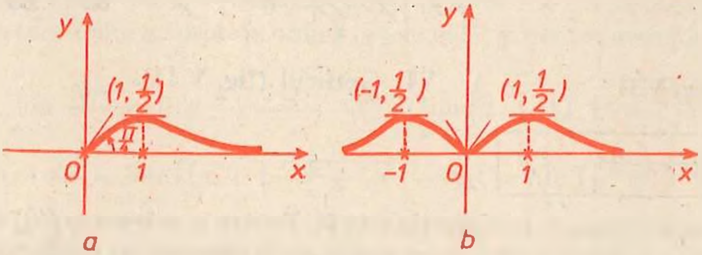


Fig. V.10

4) $\boxed{f(x) = \dfrac{\sqrt{x}}{(x-1)^2}}$.

I. Domeniul maxim de definiţie este $D = [0, \infty)\setminus\{1\} = [0, 1) \cup (1, \infty)$. Graficul are o singură intersecţie cu axele, anume originea.

II. Avem $f(x) \geqslant 0$, $\forall\, x \in D$. Graficul nu admite simetrii (faţă de Oy sau faţă de origine).

III. Limitele la capete: $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \dfrac{\sqrt{x}}{(x-1)^2} = 0$, $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}} f(x) = \infty$,

$$\lim_{\substack{x\to 1\\ x>1}} f(x) = \infty,\ \lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x}}{x^2-2x+1} = \lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x}}{x^2\left(1-\dfrac{2}{x}+\dfrac{1}{x^2}\right)} =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x\sqrt{x}} \cdot \lim_{x\to\infty} \frac{1}{\left(1-\dfrac{2}{x}+\dfrac{1}{x^2}\right)} = 0 \cdot 1 = 0.$$

Axa Ox este asimptotă orizontală (spre $+\infty$), iar $x = 1$ este asimptotă verticală.

$$\text{IV. } f'(x) = \frac{\dfrac{1}{2\sqrt{x}}(x-1)^2 - \sqrt{x}\cdot 2(x-1)}{(x-1)^4} = \frac{(x-1)^2 - 4x(x-1)}{2\sqrt{x}(x-1)^4} =$$

$$= \frac{-(x-1)\cdot(3x+1)}{2\sqrt{x}(x-1)^4},\ \forall\, x \in (0, 1) \cup (1, \infty).$$

Funcția f nu este derivabilă în punctul $x = 0$ și $f'_d(0) = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \dfrac{f(x)-f(0)}{x} =$

$= \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \dfrac{1}{\sqrt{x}(x-1)^2} = \infty$; de altfel $f'_d(0) = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f'(x) = \infty$. Atunci graficul are ca semitangentă în origine semiaxa pozitivă Oy.

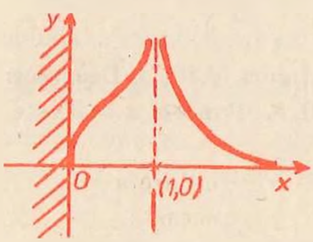


Fig. V.11

V. Tabloul de variație:

x	0		1			∞
$f'(x)$	∞	$+$			$-$	
$f(x)$	0	↗	∞	∞	↘	0

VI. Graficul (fig. V.11).

5) $\boxed{f(x) = 3^x - 3^{-x}}$

I. Domeniul maxim de definiție este $\mathbf{R}$. Pentru $x = 0$ avem $f(0) = 3^0 - 3^0 = 1 - 1 = 0$ și originea este unicul punct de intersecție al graficului cu axele.

II. Avem $f(x) \geqslant 0$, dacă și numai dacă $3^x \geqslant 3^{-x}$, adică $x \geqslant 0$. Funcția este impară, deoarece $f(-x) = 3^{-x} - 3^x = -f(x)$, $\forall\, x \in \mathbf{R}$, deci graficul este simetric față de origine și ar fi suficient studiul pentru $x \geqslant 0$.

III. Avem $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} 3^x - \lim\limits_{x\to-\infty} 3^{-x} = 0 - \infty = -\infty$ și $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty - 0 = \infty$. Graficul nu are asimptote și funcția este continuă pe $\mathbf{R}$.

IV. $f'(x) = 3^x \cdot \ln 3 + 3^{-x} \cdot \ln 3 = (3^x + 3^{-x}) \cdot \ln 3$.

Deoarece ecuația $f'(x) = 0$ nu are soluții, derivata f' are semn constant; de altfel $f'(x) > 0$, $\forall\, x \in \mathbf{R}$, deci f este strict crescătoare pe întreg $\mathbf{R}$. Se observă că $f'(0) = 2 \ln 3$.

V. Tabloul de variație:

x	$-\infty$		0		∞
$f'(x)$		$+$	$2\ln 3$	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	∞

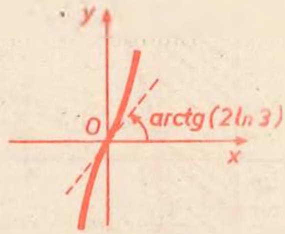


Fig. V.12

VI. Graficul (fig. V.12).

6) $\boxed{f(x) = x + \sqrt{x^2 + 2x}}$

I. Domeniul maxim de definiție D este definit prin $x^2 + 2x \geqslant 0$, deci $D = (-\infty, -2] \cup [0, \infty)$. Pentru $x = 0$ avem $f(0) = 0$; apoi ecuația $f(x) = 0$ $x + \sqrt{x^2 + 2x} = 0$ are unica soluție $x = 0$. Așadar, graficul lui f are o singură intersecție cu axele, anume originea.

II. Dacă $x \geqslant 0$, este evident că $f(x) \geqslant 0$, iar dacă $x \leqslant -2$, atunci $f(x) < 0$. Graficul nu admite simetrii.

III. Avem $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) \overset{x=-z}{=} \lim\limits_{z\to\infty} (-z + \sqrt{z^2 - 2z}) = \lim\limits_{z\to\infty} \dfrac{z^2 - 2z - z^2}{\sqrt{z^2 - 2z} + z} =$

$$= \lim_{z\to\infty} \frac{-2z}{z\left(\sqrt{1 - \frac{2}{z}} + 1\right)} = \lim_{z\to\infty} \frac{-2}{\sqrt{1 - \frac{2}{z}} + 1} = -1.$$

Apoi $\lim\limits_{\substack{x\to-2\\x<-2}} f(x) = -2$, $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}} f(x) = 0$ și $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty + \infty = \infty$.

Graficul admite asimptota orizontală $y = -1$ spre $-\infty$ și nu are asimptote verticale. Determinăm asimptota oblică (eventuală) și pentru aceasta, calculăm

$$m = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x + \sqrt{x^2 + 2x}}{x} = \lim_{x\to\infty} \left(1 + \sqrt{1 + \frac{2}{x}}\right) = 2,$$

$$n = \lim_{x\to\infty} [f(x) - mx] = \lim_{x\to\infty} [(x + \sqrt{x^2 + 2x}) - 2x] = \lim_{x\to\infty} (\sqrt{x^2 + 2x} - x) =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{x^2 + 2x - x^2}{\sqrt{x^2 + 2x} + x} = \lim_{x\to\infty} \frac{2x}{\sqrt{x^2 + 2x} + x} = \lim_{x\to\infty} \frac{2x}{x\left(\sqrt{1 + \frac{2}{x}} + 1\right)} =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{2}{\sqrt{1 + \frac{2}{x}} + 1} = \frac{2}{2} = 1.$$

Așadar, dreapta $y = 2x + 1$ este asimptotă oblică spre $+\infty$.

IV. Derivata este $f'(x) = 1 + \dfrac{x + 1}{\sqrt{x^2 + 2x}} = \dfrac{x + 1 + \sqrt{x^2 + 2x}}{\sqrt{x^2 + 2x}}$

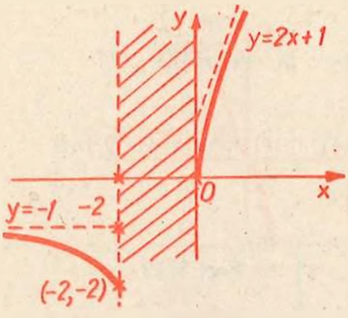


Fig. V.13

Ecuaţia $f'(x) = 0$ devine $\sqrt{x^2 + 2x} = -x - 1$ şi nu admite soluţii.

Aşadar derivata f' are semn constant pe fiecare din intervalele $(-\infty, -2)$ şi $(0, \infty)$. Se observă că $f'_s(-2) = \lim\limits_{\substack{x \to -2 \\ x < -2}} f'(x) = -\infty$ şi $f'_d(0) = \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} f'(x) = \infty$.

Punctele $x = -2$, $x = 0$ sînt puncte de minim pentru f.

V. Tabloul de variaţie este:

x	$-\infty$		-2		0		∞
$f'(x)$	$-$	$-$	$-\infty$		∞	$+$	$+$
$f(x)$	-1	↘	-2		0	↗	∞

VI. Graficul este indicat în figura V.13.

7) $\boxed{f(x) = 1 - \sqrt{|x^2 - 1|}}$.

I. Domeniul maxim de definiţie este $D = \mathbf{R}$.

II. Avem $f(x) \geqslant 0 \Leftrightarrow 1 \geqslant |x^2 - 1| \Leftrightarrow -1 \leqslant x^2 - 1 \leqslant 1 \Leftrightarrow x \in [-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$. Funcţia f fiind pară, este suficient de studiat comportarea ei pe intervalul $[0, \infty)$.

III. $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} f(x) = 0$, $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = \lim\limits_{x \to \infty} (1 - \sqrt{x^2 - 1}) = -\infty$.

Funcţia nu admite asimptote verticale şi nici asimptotă orizontală spre $+\infty$.

Apoi, $m = \lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x \to \infty} \left(\dfrac{1}{x} - \sqrt{1 - \dfrac{1}{x^2}}\right) = -1$,

$$n = \lim_{x \to \infty} [f(x) + x] = \lim_{x \to \infty} [1 + x - \sqrt{x^2 - 1}] = \lim_{x \to \infty} \frac{(1 + x)^2 - (x^2 - 1)}{1 + x + \sqrt{x^2 - 1}} =$$

$$= \lim_{x \to \infty} \frac{2x + 2}{1 + x + \sqrt{x^2 - 1}} = \lim_{x \to \infty} \frac{x\left(2 + \dfrac{2}{x}\right)}{x\left(\dfrac{1}{x} + 1 + \sqrt{1 - \dfrac{1}{x^3}}\right)} = 1,$$

deci $y = -x + 1$ este asimptotă oblică spre $+\infty$. Funcţia f este continuă pe $\mathbf{R}$.

IV. Pentru orice $x \in \mathbf{R}$, $f(x) = \begin{cases} 1 - \sqrt{1 - x^2}, & \text{dacă } x \in [-1, 1] \\ 1 - \sqrt{x^2 - 1}, & \text{dacă } x \in (-\infty, -1) \cup (1, \infty) \end{cases}$

$$\text{Deci, } f'(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{\sqrt{1 - x^2}}, & \text{dacă } x \in (-1, 1) \\ -\dfrac{x}{\sqrt{x^2 - 1}}, & \text{dacă } x \in (-\infty, -1) \cup (1, \infty) \end{cases}$$

(în punctele $x = \pm 1$ funcția f nu este derivabilă; aplicînd corolarul teoremei IV.10, este important de observat că $f'_s(-1) = \infty$, $f'_d(-1) = -\infty$, $f'_s(1) = \infty$, $f'_d(1) = -\infty$, deci punctele -1, 1 sînt puncte de întoarcere și simultan puncte de maxim).

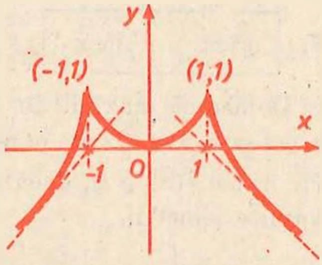


Fig. V.14

V. Tabloul de variație pe intervalul $[0, \infty)$ este:

x	0		1			∞
$f'(x)$	0	$+$	$\infty \mid -\infty$		$-$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	1		$\searrow$	$-\infty$

VI. Graficul (fig. V.14).

8) $\boxed{f(x) = x \cdot e^{-x} \cdot \sigma(x)}$.

I. Așadar $f(x) = \begin{cases} xe^{-x}, & \text{dacă } x \geqslant 0 \\ 0, & \text{dacă } x < 0 \end{cases}$.

Domeniul maxim de definiție este $D = \mathbf{R}$. Domeniul de studiu efectiv este $D_1 = [0, \infty)$, deoarece pentru $x < 0$ avem $f(x) = 0$.

II. Dacă $x \geqslant 0$ este evident că $f(x) = xe^{-x} \geqslant 0$, deci graficul este situat deasupra axei Ox.

III. $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} f(x) = 0$, $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = \lim\limits_{x \to \infty} \frac{x}{e^x} = \lim\limits_{x \to \infty} \frac{1}{e^x} = 0$ (aplicînd regula lui l'Hospital). Funcția nu admite asimptote verticale și are $y = 0$ asimptotă orizontală spre $+\infty$ (și spre $-\infty$). De asemenea, funcția f este continuă pe întreg $\mathbf{R}$ (căci este continuă pentru $x < 0$, pentru $x > 0$, iar în origine $f(0-0) = f(0+0) = f(0) = 0$).

IV. Pentru $x < 0$ avem $f'(x) = 0$ și pentru $x > 0$ avem $f'(x) = e^{-x} - xe^{-x} = (1 - x) \cdot e^{-x}$. Funcția f nu este derivabilă în $x = 0$ (căci $f'_s(0) = 0$, $f'_d(0) = 1$). Apoi f' se anulează pentru $x = 1$. Evident, $f(1) = \frac{1}{e}$.

V. Tabloul de variație:

x	$-\infty$	0		1		∞
$f'(x)$	0	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	0	$\nearrow$	$\frac{1}{e}$	$\searrow$	0

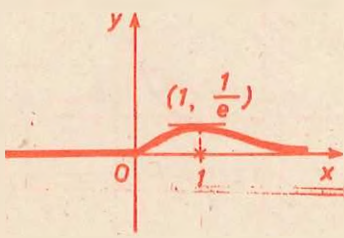


Fig. V.15

VI. Graficul (fig. V.15).

9) $\boxed{f(x) = x^2 \ln x}$.

I. Domeniul maxim de definiţie este $D = \{x \in \mathbf{R} \mid x > 0\}$. Graficul intersectează axa Ox în punctul $A(1, 0)$.

II. Avem $f(x) \geqslant 0$, dacă şi numai dacă $\ln x \geqslant 0$, adică $x \geqslant 1$. Graficul nu admite simetrii.

III. Limitele la capete: $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \dfrac{\ln x}{\frac{1}{x^2}} = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \dfrac{\frac{1}{x}}{-\frac{2}{x^3}} = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \left(-\dfrac{x^2}{2}\right) = 0$

(folosind regula lui l'Hospital); apoi $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\infty} x^2 \ln x = \infty \cdot \infty = \infty$.
Funcţia nu admite asimptote.

IV. $f'(x) = 2x \ln x + x^2 \cdot \dfrac{1}{x} = x\,(2 \ln x + 1)$, $\forall\, x > 0$.

Ecuaţia $f'(x) = 0$ devine $2 \ln x + 1 = 0$, deci $x = \dfrac{1}{\sqrt{e}}$.

V. Tabloul de variaţie:

x	0		$\frac{1}{\sqrt{e}}$		∞
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	0	$\searrow$	$-\frac{1}{2e}$	$\nearrow$	∞

$\Bigg[$ se observă că $f\left(\dfrac{1}{\sqrt{e}}\right) = -\dfrac{1}{2e}$ şi că $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f'(x) = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} x(2 \ln x + 1) =$

$$= \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{2 \ln x + 1}{\frac{1}{x}} = \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{\frac{2}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} (-2x) = 0 \Bigg].$$

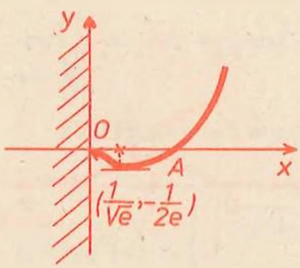


Fig. V.16

VI. Graficul (fig. V.16).
(Săgeata semnifică faptul că funcţia f nu este definită în $x = 0$, dar are limită la dreapta în punctul $x = 0$.)

Observaţie. Pentru studiul şi reprezentarea grafică a funcţiilor exponenţiale şi logaritmice se utilizează următoarele fapte. Pentru orice $n \geqslant 1$ întreg, avem

$$\lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{x^n} = \infty, \quad \lim_{x\to\infty} \frac{x^n}{\ln x} = \infty.$$

(se mai spune că exponențiala „crește mai repede" spre infinit decît orice putere x^n, care la rîndul ei crește mai repede decît logaritmul lui x).

Din faptul că $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{e^x}{x} = \infty$, prin logaritmare rezultă $\lim\limits_{x\to\infty} (x - \ln x) = \infty$.

De asemenea, $\lim\limits_{x\to-\infty} x\,e^x \overset{x=-z}{=} \lim\limits_{z\to\infty} (-z\,e^{-z}) = -\lim\limits_{z\to\infty} \frac{z}{e^z} = 0$ și analog,

$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} \frac{1}{x}\, e^{\frac{1}{x}} \overset{x=-\frac{1}{z}}{=} \lim\limits_{z\to\infty} (-z\,e^{-z}) = 0$. Apoi $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{1}{x}\, e^{\frac{1}{x}} \overset{x=\frac{1}{z}}{=} \lim\limits_{z\to\infty} z\,e^z = \infty$;

de asemenea, $\lim\limits_{x\to\infty} (5x - \ln x) = \lim\limits_{x\to\infty} \ln \frac{e^{5x}}{x} = \ln \lim\limits_{x\to\infty} \frac{e^{5x}}{x} = \infty$.

10) $\boxed{f(x) = \sin x + \frac{1}{2}\sin 2x}$.

I. Domeniul maxim de definiție este $D = \mathbf{R}$. Deoarece funcția f este periodică de perioadă principală 2π, este suficient de studiat comportarea funcției pe intervalul $I = [-\pi, \pi]$. Avem $f(0) = 0$ și dacă $f(x) = 0$, atunci $\sin x + \sin x \cos x = 0$, de unde $x \in \{-\pi, 0, \pi\}$ (zerourile situate în I). Așadar, intersecțiile graficului cu axele sînt $A_1(-\pi, 0)$, $A_2(0, 0)$, $A_3(\pi, 0)$.

II. Graficul este simetric față de origine (deoarece funcția f este impară). Am fi putut reduce studiul funcției la intervalul $[0, \pi]$.

III. Deoarece $\lim\limits_{\substack{x\to-\pi\\ x>-\pi}} f(x) = f(-\pi) = 0$, $\lim\limits_{\substack{x\to\pi\\ x<\pi}} f(x) = f(\pi) = 0$, rezultă că funcția f este continuă în punctele $x = -\pi$, $x = \pi$, deci în I (și chiar pe întreg $\mathbf{R}$). Funcția nu admite asimptote (de altfel orice funcție periodică neconstantă nu admite asimptote orizontale sau oblice).

IV. Avem $f'(x) = \cos x + \cos 2x = 2\cos\frac{3x}{2}\cos\frac{x}{2}$, $\forall\, x \in \mathbf{R}$. Soluțiile din I ale ecuației $f'(x) = 0$ sînt $-\pi, -\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}, \pi$.

V. Tabloul de variație:

x	$-\pi$		$-\frac{\pi}{3}$		0		$\frac{\pi}{3}$		π
$f'(x)$	0	$-$	0	$+$	2	$+$	0	$-$	0
$f(x)$	0	$\searrow$	$-\frac{3\sqrt{3}}{4}$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$\frac{3\sqrt{3}}{4}$	$\searrow$	0

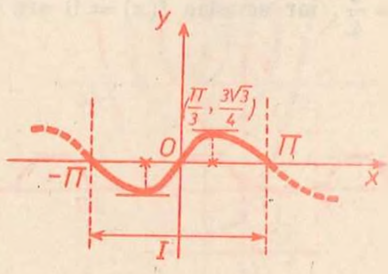


Fig. V.17

VI. Graficul (fig. V.17).

11) $\boxed{f(x) = \ln(1 + \sin x + |\sin x|)}$.

I. Aşadar, $f(x) = \begin{cases} \ln(1 + 2\sin x), & \text{dacă } \sin x > 0 \\ 0 & \text{, dacă } \sin x \leqslant 0 \end{cases}$.

Domeniul maxim de definiţie este $D = \mathbf{R}$. Avem $f(0) = 0$, iar ecuaţia $f(x) = 0$ are ca soluţii toate punctele unde $\sin x \leqslant 0$.

II. Funcţia este periodică de perioadă principală 2π şi este suficient să fie studiată pe intervalul $I = [-\pi, \pi]$. Avem

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{, dacă } x \in [-\pi, 0] \\ \ln(1 + 2\sin x), & \text{dacă } x \in (0, \pi], \end{cases} \forall\, x \in I.$$

III. $\lim\limits_{\substack{x \to -\pi \\ x > -\pi}} f(x) = \ln 1 = 0$, $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x < 0}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} f(x) = 0$, $\lim\limits_{\substack{x \to \pi \\ x < \pi}} f(x) = \ln 1 = 0$.

Graficul nu admite asimptote.

IV. Avem $f'(x) = \begin{cases} 0 & \text{, dacă } x \in [-\pi, 0) \\ \dfrac{2\cos x}{1 + 2\sin x}, & \text{dacă } x \in (0, \pi] \end{cases}$.

În punctul $x = 0$, $f'_s(0) = 0$ şi $f'_d(0) = 2$, deci $x = 0$ este punct unghiular.

V. Tabloul de variaţie:

x	$-\pi$	0			$\frac{\pi}{2}$		π
$f'(x)$	0	0	2	+	0	−	−2
$f(x)$	0	0	0	↗	ln 3	↘	0

VI. Graficul (fig. V.18).

12) $\boxed{f(x) = \operatorname{arctg} \dfrac{1 + x}{\sqrt{1 - x}}}$.

I. Domeniul maxim de definiţie este $D = (-\infty, 1)$. Apoi $f(0) = \operatorname{arctg} 1 = \dfrac{\pi}{4}$, iar ecuaţia $f(x) = 0$ are unica soluţie $x = -1$.

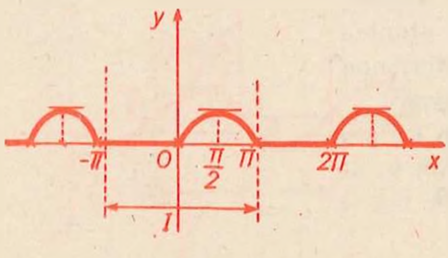


Fig. V.18

Deci intersecţiile cu axele sînt $A\left(0, \dfrac{\pi}{4}\right)$, $B(-1, 0)$.

II. Graficul nu admite simetrii. Apoi el este situat deasupra axei Ox, dacă şi numai dacă $f(x) \geqslant 0$, adică $\dfrac{1 + x}{\sqrt{1 - x}} \geqslant 0$, $-1 \leqslant x < 1$.

III. $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \operatorname{arctg}\dfrac{1+x}{\sqrt{1-x}} = \operatorname{arctg} \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{1+x}{\sqrt{1-x}} = \operatorname{arctg}(-\infty) = -\dfrac{\pi}{2}$, $\lim\limits_{\substack{x\to1\\x<1}} f(x) = \operatorname{arctg}\infty = \dfrac{\pi}{2}$. Dreapta $x = 1$ nu este asimptotă verticală, iar dreapta $y = -\dfrac{\pi}{2}$ este asimptotă orizontală spre $-\infty$.

IV. $$f'(x) = \frac{1}{1+\left(\dfrac{1+x}{\sqrt{1-x}}\right)^2}\cdot\frac{\sqrt{1-x}+\dfrac{1+x}{2\sqrt{1-x}}}{1-x} = \frac{3-x}{2(x^2+x+2)\sqrt{1-x}},$$
pentru orice $x < 1$. Ecuația $f'(x) = 0$ nu are soluții (deoarece punctul $x = 3$ nu aparține lui D). Așadar, f' are semn constant pe D, anume $f' > 0$. Se observă, de asemenea, că $f_s'(1) = \lim\limits_{\substack{x\to1\\x<1}} f'(x) = \infty$.

V. Tabloul de variație:

x	$-\infty$		-1		0		1
$f'(x)$		$+$		$+$		$+$	∞
$f(x)$	$-\frac{\pi}{2}$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$\frac{\pi}{4}$	$\nearrow$	$\frac{\pi}{2}$

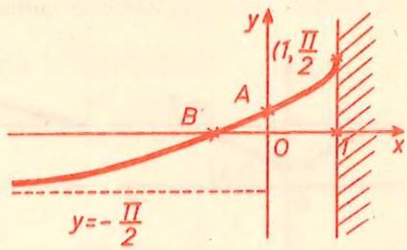


Fig. V.19

VI. Graficul este cel din figura V.19.

Ne oprim aici cu prezentarea exemplelor de reprezentări grafice. Vă recomandăm fiecăruia dintre voi nu numai înțelegerea acestor exemple, ci și rezolvarea a cît mai multor exerciții cu reprezentări grafice, pînă la obținerea unei experiențe suficiente care să vă permită să folosiți graficele ca un mijloc curent de ilustrare a variației unor mărimi sau a evoluției unor procese.

În unele aplicații se utilizează așa-numitele „grafice cu parametri". Fie $f : D \times P \to \mathbf{R}$ o funcție reală de două variabile reale; așadar, pentru orice $x \in D$, $k \in P$ este definit numărul real $f(x, k)$. Pentru fiecare k fixat, $k \in P$ este definită cîte o funcție $D \to \mathbf{R}$, $x \mapsto f(x, k)$, al cărei grafic are ecuația $y = f(x, k)$. Se mai spune că avem o familie de funcții pe D, cu parametrul k.

Exemple

1) Fie $D = \mathbf{R}$, $P = [0, \infty)$ și $f : D \times P \to \mathbf{R}$, $f(x, k) = x^2 - k^2$. Aceasta reprezintă o familie de parabole (pentru fiecare k cîte o parabolă, fig. V.20).

2) Trasăm graficul familiei de funcții $D = \mathbf{R}$, $P = \mathbf{R}$, $f : D \times P \to \mathbf{R}$, $f(x, k) = \dfrac{x^2 + k}{x^2 + 1}$.

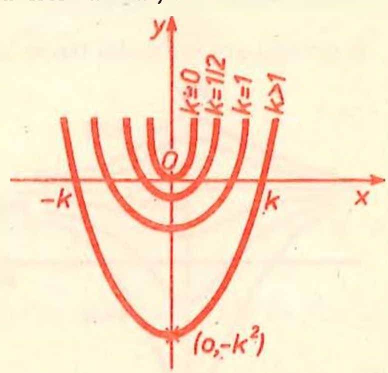


Fig. V.20

Presupunem mai întîi $k \geqslant 0$. Atunci graficul nu intersectează axa Ox. Pentru orice k, dreapta $y = 1$ este asimptotă orizontală spre $-\infty$ şi spre $+\infty$ şi nu avem asimptote verticale. Apoi

$$f'(x) = \frac{2x(x^2+1) - 2x(x^2+k)}{(x^2+1)^2} = \frac{2(1-k)x}{(x^2+1)^2}, \ \forall\, x \in \mathbf{R},$$

deci derivata se anulează în origine.

Dacă $0 \leqslant k < 1$, atunci tabloul de variaţie este

x	$-\infty$		0		∞
$f'_x(x, k)$		$-$	0	$+$	
$f(x, k)$	1	$\searrow$	k	$\nearrow$	1

şi graficul corespunzător este indicat în figura V.21, *a*.

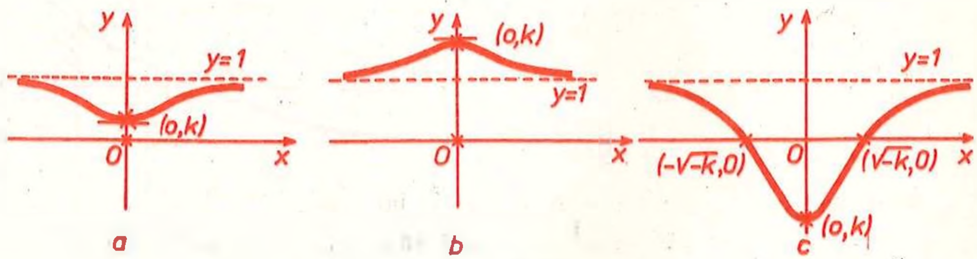


Fig. V.21

Dacă $k = 1$, atunci, de la început, $f(x, 1) = 1$, $\forall\, x$, adică graficul este dreapta $y = 1$.
Dacă $k > 1$, atunci tabloul de variaţie este

x	$-\infty$		0		∞
$f'_x(x, k)$		$+$	0	$-$	
$f(x, k)$	1	$\nearrow$	k	$\searrow$	1

şi graficul are forma din figura V.21, *b*.

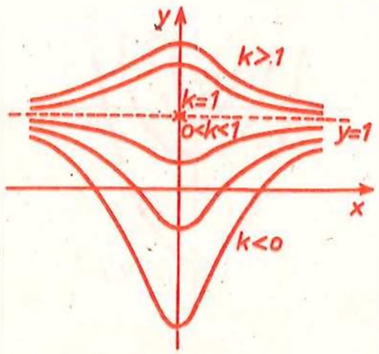


Fig. V.22

Presupunem acum $k < 0$. În acest caz graficul intersectează axa Ox în punctele $\pm\sqrt{-k}$. Tabloul de variaţie este

x	$-\infty$		$-\sqrt{-k}$		0		$\sqrt{-k}$		∞
$f'_x(x, k)$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$f(x, k)$	1	$\searrow$	0	$\searrow$	k	$\nearrow$	0	$\nearrow$	1

şi graficul este de forma din figura V.21, *c*.

Întreaga discuţie poate fi rezumată în cadrul unui singur desen (fig. V.22).

În exemplele precedente am omis studiul derivatei a doua. Iată acum două exemple în care se foloseşte şi derivata a doua.

13) $\boxed{f(x) = x^2 + \frac{8}{x}}$.

I. Domeniul maxim de definiţie este $D = \mathbf{R}\setminus\{0\}$. Graficul nu intersectează axa Oy. Ecuaţia $f(x) = 0$, adică $x^3 = -8$, are o unică soluţie reală, anume $x = -\sqrt[3]{8} = -2$.

II. Graficul nu are simetrii. Apoi $f(x) \geqslant 0$ dacă şi numai dacă $x \in (-\infty, -2] \cup [0, \infty)$.

III. $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \infty$, $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x<0}} f(x) = -\infty$, $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}} f(x) = \infty$, $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty$. Dreapta $x = 0$ este o asimptotă verticală şi nu există alte asimptote.

IV. Pentru orice $x \neq 0$, avem $f'(x) = 2x - \frac{8}{x^2} = \frac{2}{x^2}(x^3 - 4)$ şi $f''(x) =
= 2 + \frac{16}{x^3} = \frac{2(x^3 + 8)}{x^3} = \frac{2(x^2 - 2x + 4)}{x^4}(x + 2)x$.

Ecuaţia $f'(x) = 0$ are unica soluţie $x = \sqrt[3]{4}$; iar ecuaţia $f''(x) = 0$ are soluţia $x = -2$. Semnul lui f'' este acelaşi cu semnul produsului $x(x + 2)$. Punctul $x = -2$ este punct de inflexiune.

V. Tabloul de variaţie:

x	$-\infty$		-2		0		$\sqrt[3]{4}$		∞
$f'(x)$		$-$	-6	$-$		$-$	0	$+$	
$f''(x)$		$+$	0	$-$		$+$		$+$	
$f(x)$	∞	$\searrow$	0	$\searrow$	$-\infty$ | ∞	$\searrow$	$6\sqrt[3]{2}$	$\nearrow$	∞

VI. Graficul (fig. V.23).

14) $\boxed{f(x) = e^{-x^2}}$.

I. Domeniul de definiţie este $D = \mathbf{R}$; graficul intersectează axa Oy în punctul $A(0, 1)$.

II. Funcţia f este pară şi $f \geqslant 0$, deci graficul este simetric faţă de axa Oy şi este situat deasupra axei Ox.

III. $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = e^{-\infty} = 0$; $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = e^{-\infty} = 0$.
Graficul are asimptota orizontală $y = 0$ spre $+\infty$ şi spre $-\infty$.

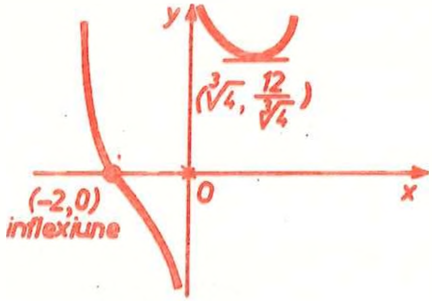


Fig. V.23

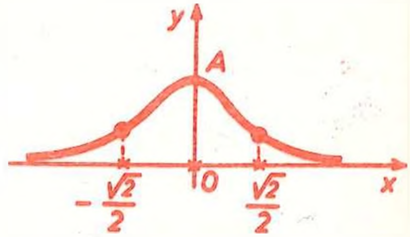


Fig. V.24

IV. $f'(x) = -2xe^{-x^2}$, $f''(x) = 2e^{-x^2}(2x^2 - 1)$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$.

V. Tabloul de variație:

x	$-\infty$		$-\frac{\sqrt{2}}{2}$		0		$\frac{\sqrt{2}}{2}$		∞
$f'(x)$		$+$	$\sqrt{\frac{2}{e}}$	$+$	0	$-$	$-\sqrt{\frac{2}{e}}$	$-$	
$f''(x)$		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	$\frac{1}{\sqrt{e}}$	$\nearrow$	1	$\searrow$	$\frac{1}{\sqrt{e}}$	$\searrow$	0

VI. Graficul corespunzător are forma celui din figura V.24. Acest grafic poartă numele de *clopotul lui K.F. Gauss* (1777—1855).

EXERCIȚII (capitolul V, § 3)

1. Să se reprezinte grafic următoarele funcții polinomiale (folosind numai derivata întîi):

a) $f(x) = -x^3 + 3x^2$;
b) $f(x) = 3x^3 - 27$;
c) $f(x) = x^4 - 8x^2$;
d) $f(x) = x^5 - 5x^4$;
e) $f(x) = x^3 - 3x + 2$;
f) $f(x) = x^2(x + 1)^2$;
g) $f(x) = (1 - x^3)(1 - x^2)$;
h) $f(x) = x^n - nx$ ($n \geqslant 1$ natural).

2. Să se reprezinte grafic următoarele funcții raționale:

a) $f(x) = \frac{x}{x+1}$;
b) $f(x) = \frac{2x}{x^2+1}$;
c) $f(x) = \frac{x-1}{x^2}$;
d) $f(x) = \frac{x-1}{x^4}$;
e) $f(x) = \frac{x}{(x-1)^2}$;
f) $f(x) = \frac{x^2-16}{x}$;
g) $f(x) = \frac{7x^2+20x}{x^2+2x-3}$;
h) $f(x) = x + \frac{4}{x}$;
i) $f(x) = \frac{x}{4-x^2}$;
j) $f(x) = \frac{(x-1)^2}{x^2}$;
k) $f(x) = \frac{x^3}{x^2-1}$;
l) $f(x) = \frac{1+x+x^2}{1-x+x^2}$.

3. Să se reprezinte grafic următoarele funcții :

a) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x}}{x+1}$;

b) $f(x) = \dfrac{|x|}{x+1}$;

c) $f(x) = \sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}$;

d) $f(x) = \sqrt{\dfrac{x-1}{x+1}}$;

e) $f(x) = x\sqrt{\dfrac{x+1}{x+4}}$;

f) $f(x) = \dfrac{x-1}{\sqrt{x^2-1}}$;

g) $f(x) = \dfrac{x-1}{\sqrt{x^2+1}}$;

h) $f(x) = \dfrac{x+1}{\sqrt{x^2-1}}$;

i) $f(x) = \dfrac{x+1}{\sqrt{x^2+1}}$;

j) $f(x) = \sqrt[3]{x^3-3x+2}$;

k) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2}{x-1}, & \text{dacă } x < 1; \\ x, & \text{dacă } x \geqslant 1; \end{cases}$

l) $f(x) = \begin{cases} x^2 + x, & \text{dacă } x \leqslant 0; \\ \dfrac{1}{x^2}, & \text{dacă } x > 0; \end{cases}$

m) $f(x) = 2 + \sqrt[3]{(x-1)^2}$;

n) $f(x) = x + 2\sqrt{-x}$.

4. Fie $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = \sqrt[3]{x^3 + 3x^2 - 4}$. Să se calculeze $\lim\limits_{x\to\infty}[f(x) - x]$, să se arate că $\forall\, x \in \mathbf{R}\setminus(-2, 1)$ avem $xf(x)f'(x) \geqslant 0$ și să se traseze graficul lui f.

5. Să se reprezinte grafic următoarele funcții:

a) $f(x) = e^x - 1$;

b) $f(x) = e^x - x$;

c) $f(x) = xe^{-\frac{1}{x}}$;

d) $f(x) = \dfrac{1}{1 + e^{\frac{1}{x}}}$;

e) $f(x) = x^{\frac{1}{x}}$;

f) $f(x) = \ln\dfrac{1+x}{1-x}$;

g) $f(x) = \dfrac{\ln x}{x-1}$;

h) $f(x) = (x^2 + x)e^{-x}$;

i) $f(x) = |\ln x + x|$;

j) $f(x) = \dfrac{\ln|x|}{1 + \ln|x|}$;

k) $f(x) = \ln(4 - x^2)$;

l) $f(x) = \ln\sqrt{1 + x^2} - \operatorname{arctg} x$.

6. Să se reprezinte grafic următoarele funcții:

a) $f(x) = 3\sin\left(2x + \dfrac{\pi}{4}\right)$;

b) $f(x) = \dfrac{1}{2 + \sin x}$;

c) $f(x) = \sin x - \cos x$;

d) $f(x) = \ln(2 + \sin x)$;

e) $f(x) = x + \sin x$;

f) $f(x) = 2x - \cos 2x$;

g) $f(x) = x + 2 \operatorname{arctg} x$;

h) $f(x) = 2 \arcsin \frac{1}{x} - \arccos \frac{1}{x}$;

i) $f(x) = \frac{\sin x}{x}$;

j) $f(x) = x + \ln(\cos x)$.

7. Să se reprezinte grafic următoarele funcții: $f : D \to \mathbf{R}$ (D fiind domeniul maxim de definiție), folosind și derivata a doua:

a) $f(x) = \frac{x^2}{x^2 + 1}$;

b) $f(x) = xe^{-x^2}$;

c) $f(x) = \frac{x}{x + 1}$;

d) $f(x) = \frac{\sqrt{x}}{x - 1}$;

e) $f(x) = \sin x - \cos x$;

f) $f(x) = \frac{\ln x}{x}$;

g) $f(x) = \sin x \cdot \cos^2 x$;

h) $f(x) = (x - 1)^2(x + 2)$;

i) $f(x) = \ln \frac{x + 1}{x - 2}$;

j) $f(x) = \operatorname{tg} x - x$.

8. Se consideră funcția $f(x) = \frac{x^2 + 1}{x^2 + ax + a}$, a fiind un parametru real, $a > 0$. Să se determine a astfel încît graficul lui f să aibă o singură asimptotă verticală și să se reprezinte apoi graficul funcției f pentru a astfel găsit.

9. Se consideră funcția $f : (0, \infty) \to \mathbf{R}$, $f(x) = \frac{x + k}{\sqrt{x}}$, k fiind un parametru real. Să se determine parametrul k astfel încît $f'(1) = -1$ și apoi să se reprezinte grafic funcția f.

10. Să se reprezinte graficele funcțiilor următoare ce depind de parametri:

a) $f : \mathbf{R} \setminus \{0\} \to \mathbf{R}$, $f(x) = \frac{x + k}{x}$, $k > 0$;

b) $f : [-k, k] \to \mathbf{R}$, $f(x) = \sqrt{k^2 - x^2}$, $1 \leqslant k \leqslant 2$;

c) $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = (x + 2)e^{kx}$, $k \in \mathbf{R}$;

§ 4. Probleme de maxim și minim; optimizări

Acest paragraf cuprinde aplicații directe ale rezultatelor teoretice anterioare privind determinarea punctelor de extrem ale unor funcții reale de o variabilă reală. În același timp, avem aici un prilej deosebit de a exemplifica forța metodelor analizei matematice în rezolvarea unor probleme de modelare a realității fizice. Citîndu-l pe matematicianul și pedagogul G. Polya, „problemele de maxim și minim idealizează o înclinație a naturii și a noastră înșine de a obține efecte optime cu eforturi minime".

1) *Dintre toate numerele reale $x > 0$, să se determine cel pentru care diferența $x - x^3$ este maximă.*

Soluție. Notăm $f(x) = x - x^3$. Trebuie să determinăm maximul lui f pe intervalul $(0, \infty)$. Aplicînd teorema lui Fermat, rezolvăm mai întîi ecuația $f'(x) = 0$, adică $1 - 3x^2 = 0$. Se obține soluția $x_0 = \frac{\sqrt{3}}{3}$. Din tabloul de variație

x	0		$\frac{\sqrt{3}}{3}$		∞
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	$\frac{2\sqrt{3}}{9}$	$\searrow$	$-\infty$

rezultă că punctul $x_0 = \frac{\sqrt{3}}{3}$ este un punct de maxim pentru funcția f și totodată soluția problemei puse.

(Se putea observa și direct că $f''(x) = -6x$, deci că $f''(x_0) < 0$, adică x_0 este punct de maxim cf. teoremei V.6).

2) *Să se determine extremele locale și extremele globale ale funcției $f(x) = 2x + \cos 2x$ pe intervalul $I = [-2, 1]$.*

Soluție. Avem $f'(x) = 2 - 2\sin 2x$, $x \in \mathbf{R}$. Punctele critice ale lui f sînt date de ecuația $f'(x) = 0$, deci $\sin 2x = 1$, $2x = 2k\pi + \frac{\pi}{2}$ $(k \in \mathbf{Z})$. Tabloul de variație a lui f pe intervalul I este

x	-2		$\frac{\pi}{4}$		1
$f'(x)$		$+$	0	$+$	
$f(x)$	$-4 + \cos 4$	$\nearrow$	$\frac{\pi}{2}$	$\nearrow$	$2 + \cos 2$

Funcția f nu are extreme locale în I, deoarece f este monoton crescătoare pe I; rezultă $\inf\limits_{x \in I} f(x) = f(-2) = -4 + \cos 4$ și $\sup\limits_{x \in I} f(x) = f(1) = 2 + \cos 2$.

3) *Presupunem că puterea $P(t)$ emisă la descărcarea unui dispozitiv electronic la fiecare moment $t > 0$ este $P(t) = t^3 \cdot e^{-0,2t}$ (puterea fiind măsurată în wați și timpul în secunde). Să se afle:*

a) *la ce moment puterea va fi maximă;*

b) *între ce limite (margini) variază puterea $P(t)$ în intervalul de timp $t \in [10, 20]$.*

Soluție. a) $P'(t) = 3t^2 \cdot e^{-0,2t} - 0,2t^3 \cdot e^{-0,2t} = t^2 \cdot e^{-\frac{1}{5}t}\left(3 - \frac{t}{5}\right)$; ecuația $P'(t) = 0$ are soluțiile $t = 0$, $t = 15$. Tabloul de variație al funcției P este

t	0		15		∞
$P'(t)$		$+$	0	$-$	
$P(t)$	0	$\nearrow$	$\left(\frac{15}{e}\right)^3$	$\searrow$	0

Așadar, după 15 secunde puterea respectivă va fi maximă.

b) Notăm $I = [10, 20]$. Atunci $\sup\limits_{t \in I} P(t) = P(15) = \left(\frac{15}{e}\right)^3$ și $\inf\limits_{t \in I} P(t) =$
$= \min(P(10), P(20)) = \min\left(\frac{10^3}{e^2}, \frac{20^3}{e^4}\right) = \frac{10^3}{e^2}$.

Așadar $\frac{10^3}{e^3} \leqslant P(t) \leqslant \frac{15^3}{e^3}$ pentru orice $t \in [10, 20]$.

Observație. În toate problemele precedente s-au cerut extremele unor funcții date. Pentru determinarea acestora s-a folosit teorema lui Fermat, împreună cu o parte din tabloul de variație (pentru precizarea extremelor).

Există situații unde în enunțul problemei nu apare explicit o funcție ale cărei extreme se cer determinate. În cele ce urmează, tocmai astfel de probleme vor fi analizate. Există aici o anumită libertate în alegerea variabilei și în exprimarea explicită a funcției care se cere extremată; de aceea este necesară obținerea unei oarecari îndemînări din partea rezolvitorului.

4) Putem da, în sfîrșit, *soluția completă la problema pusă la începutul acestui manual* (pagina 4). Anume, în condițiile indicate, am văzut că volumul cisternei era

$$V(x) = \frac{1}{6}(3Ax - 4\pi x^3),\ x > 0,$$

A fiind o constantă pozitivă. Trebuie aflat maximul funcției V pe intervalul $(0, \infty)$.

Dar $V'(x) = \frac{1}{6}(3A - 12\pi x^2)$, deci ecuația $V'(x) = 0$, adică $4\pi x^2 = A$, are soluția $x_0 = \sqrt{\frac{A}{4\pi}}$; apoi $V''(x_0) = -4\pi x_0 < 0$, deci x_0 este punct de maxim. În acest caz înălțimea cilindrului este $h = \frac{A - 4\pi x_0^2}{2\pi x_0} = 0$ și iată răspunsul la problema pusă: cisterna de forma considerată (fig. I.1) are volum maxim în cazul cînd ea este sferică (fără cilindru).

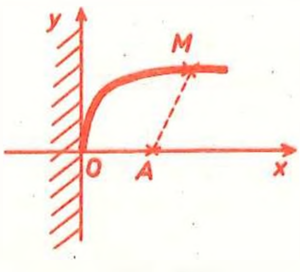


Fig. V.25

5) *Să se determine punctul de pe graficul funcției* $f(x) = 2\sqrt{x}$ *aflat la distanța minimă de punctul* $A(2, 0)$ (fig. V.25).

Soluție. Orice punct de pe grafic are coordonatele $M(t, 2\sqrt{t})$, $t \geqslant 0$. Notăm cu $\varphi(t)$ distanța dintre punctele A și M, deci $\varphi(t) = \sqrt{(t-2)^2 + (2\sqrt{t} - 0)^2} = \sqrt{t^2 + 4}$ și minimul lui φ este atins pentru $t = 0$.

6) *Se consideră o emisferă de centru O și rază R. Dintre conurile circulare drepte circumscrise emisferei și avînd centrul bazei în O, să se determine conul de volum minim* (fig. V.26).

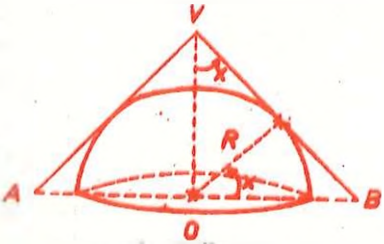


Fig. V.26

Soluție. Notăm cu $2x$ măsura unghiului $\widehat{AVB}$. Atunci $OV = \dfrac{R}{\sin x}$, $OB = \dfrac{R}{\cos x}$ și volumul conului va fi $W = \dfrac{\pi \cdot OB^2 \cdot OV}{3} = \dfrac{\pi R^3}{3} \cdot \dfrac{1}{\sin x \cdot \cos^2 x}$.

Condiția geometrică impune $0 < x < \dfrac{\pi}{2}$. Determinăm minimul funcției $W(x) = \dfrac{\pi R^3}{3} \cdot \dfrac{1}{\sin x \cdot \cos^2 x}$ pentru $x \in \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$. Dar $W'(x) = \dfrac{\pi R^3}{3} \cdot \left(- \dfrac{\cos^3 x - 2\sin^2 x \cdot \cos x}{\sin^2 x \cos^4 x}\right) = \dfrac{\pi R^3}{3} \cdot \dfrac{2\sin^2 x - \cos^2 x}{\sin^2 x \cos^2 x}$; ecuația $W'(x) = 0$ are soluțiile date de $2\sin^2 x - \cos^2 x = 0$, deci $\operatorname{tg} x = \pm \dfrac{\sqrt{2}}{2}$. Se reține soluția $x_0 \in \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$, $\operatorname{tg} x_0 = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$, adică $x_0 = \operatorname{arctg} \dfrac{\sqrt{2}}{2}$; în acest caz $W''(x_0) > 0$, deci x_0 este punct de minim.

7) *Un camion trebuie să parcurgă 100 km cu o viteză constantă de v km/h (cu condiția* $40 \leqslant v \leqslant 70$), *consumînd* $\left(8 + \dfrac{v^2}{300}\right)$ *litri/h de benzină. Care este viteza optimă dacă șoferul este retribuit cu 15 lei/h, iar benzina costă 6 lei litrul?*

Soluție. Timpul total al parcursului este $\dfrac{100}{v}$ ore și consumul de benzină va fi $\left(8 + \dfrac{v^2}{300}\right) \cdot \dfrac{100}{v} = \dfrac{v^2 + 2400}{3v}$ litri. Atunci costul pentru întregul parcurs va fi $C(v) = 15 \cdot \dfrac{100}{v} + 6 \cdot \dfrac{v^2 + 2400}{3v} = \dfrac{2v^2 + 6300}{v}$.

Viteza optimă este cea pentru care acest cost este minim.

Avem $C'(v) = \dfrac{2v^2 - 6300}{v^2}$, deci $v_{optim} = \sqrt{3150} = 15\sqrt{14} \simeq 56{,}125$ (km/h).

8) *Fie o dreaptă (D) care împarte un plan în două regiuni* R_1, R_2 (figura V.27). *Fie A un punct fixat în regiunea* R_1 *și B un punct fixat în* R_2. *Ne propunem ca dintre toate punctele M situate pe (D) să determinăm pe cel pentru care expresia* $\dfrac{AM}{v_1} + \dfrac{MB}{v_2}$ (v_1, v_2 *fiind numere strict pozitive date) să fie minimă.*

Alegem axele ca în figura V.27 și notăm cu x abscisa punctului M (am presupus $b \geqslant 0$). Atunci avem $OM = |x|$, $MB_1 = |b - x|$ și expresia dată este de forma

$$g(x) = \frac{\sqrt{a^2 + x^2}}{v_1} + \frac{\sqrt{(b-x)^2 + c^2}}{v_2}, \quad x \in \mathbf{R}.$$

Condiția necesară de minim pentru funcția g este $g'(x) = 0$, adică

$$(*)\ \frac{x}{v_1\sqrt{a^2 + x^2}} - \frac{b - x}{v_2\sqrt{(b-x)^2 + c^2}} = 0,$$

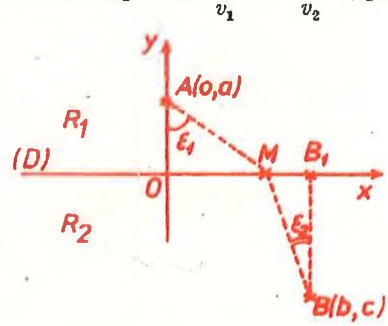


Fig. V.27

de unde se află x. Un calcul ușor arată că în acest punct avem $g'(x) > 0$. Condiția (*) se scrie, în mod echivalent,

$$\frac{\sin \varepsilon_1}{v_1} = \frac{\sin \varepsilon_2}{v_2}.$$

Acest exemplu a jucat un rol important din punct de vedere istoric și are o interpretare fizică remarcabilă.

Presupunem că R_1 și R_2 reprezintă două medii omogene și că lumina se propagă rectiliniu cu viteza v_1 în R_1, respectiv v_2 în R_2. Fie, ca mai sus, A un punct fixat în regiunea R_1 și B un punct fixat în regiunea R_2. Ne propunem să determinăm punctul M_0 situat pe (D) prin care trece o rază de lumină plecînd din A și care se propagă pînă în punctul B, știind că, în conformitate cu ***principiul lui Fermat***, o rază de lumină se propagă pe acea traiectorie pe care o parcurge în timpul cel mai scurt. Timpul necesar luminii pentru a parcurge segmentul AM (respectiv MB) va fi $\frac{AM}{v_1}$ $\left(\text{respectiv } \frac{MB}{v_2}\right)$ și timpul minim necesar pentru a ajunge din A în B se determină ca mai sus. Notînd cu ε_1 (respectiv ε_2) unghiurile făcute de razele de lumină AM_0 (respectiv M_0B) cu normala la (D) în M_0 (fig. V.28),

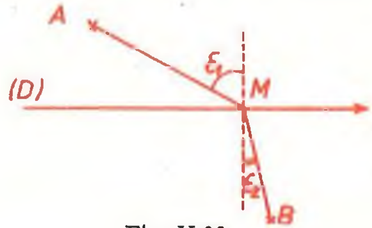


Fig. V.28

relația $\frac{\sin \varepsilon_1}{\sin \varepsilon_2} = \frac{v_1}{v_2}$ demonstrată anterior este tocmai legea refracției, demonstrată deci pe baza principiului lui Fermat.

EXERCIȚII (capitolul V, § 4)

1. Să se afle $x > 0$ astfel încît suma $x + \frac{1}{x}$ să fie minimă.

2. Să se determine extremele absolute ale funcției $f(x) = 2x^3 - 3x^2$ pe fiecare din intervalele $I_1 = [-2, 3]$, $I_2 = [0{,}9, 1{,}1]$, $I_3 = [1, \infty)$.

3. Costul fabricării pe zi a n unități dintr-un produs este $C(n) = 10\,000 + 30n - 0{,}001\,n^3$. Să se afle pentru ce n acest cost este maxim (presupunînd funcția $n \longmapsto C(n)$ prelungită prin formula precedentă la întreg intervalul $[1, \infty)$).

4. Fie $a > 0$ o constantă și $m, n \in \mathbf{N}$. Dacă x și y sînt strict pozitive și $x + y = a$, în ce caz produsul $x^m \cdot y^n$ este maxim?

5. Se consideră un semicerc de diametru $AB = 2R$. Dintre toate coardele PQ paralele cu diametrul AB să se determine cea pentru care aria trapezului $APQB$ este maximă.

6. Un bazin circular are raza 100 m și fie A, B două puncte diametral opuse. O persoană trebuie să ajungă din punctul A în punctul B, cu condiția să treacă printr-un punct P situat pe circumferință, mergînd înot pe coarda AP și apoi alergînd pe arcul PB. Presupunînd că persoana înoată cu 3 km/h și aleargă cu 12 km/h, să se afle între ce limite variază timpul în care persoana poate să ajungă din A în B.

7. Se consideră un con circular drept cu raza bazei R și înălțimea I. Să se înscrie în con un cilindru: a) avînd volumul maxim; b) avînd aria laterală maximă.

§ 5. Aplicații ale analizei matematice la studiul ecuațiilor

5.1. Rezolvarea grafică a unor ecuații

Dacă $f, g : D \to \mathbf{R}$ sînt două funcții, a rezolva grafic ecuația $f(x) = g(x)$ revine la a determina abscisele punctelor de intersecție ale graficelor funcțiilor f și g (fig. V.29).

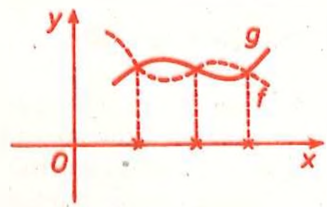


Fig. V.29

În aplicarea acestei metode, se recomandă ca graficele să fie trasate cu cît mai mare precizie (pe hîrtie milimetrică, alegînd puncte suplimentare pe grafice etc.).

Să considerăm acum o ecuație de forma $m = \varphi(x)$, unde m este un parametru real și φ o funcție avînd graficul (C). A rezolva grafic această ecuație revine la a intersecta graficul (C) cu drepte $y = m$, $m \in \mathbf{R}$, paralele cu axa Ox. Pentru valorile lui m, pentru care nu există astfel de puncte de intersecție, ecuația $\varphi(x) = m$ nu admite soluții reale.

Exemple

1) Rezolvăm grafic ecuația $3^x - 3x = 0$. Ecuația se scrie $3^x = 3x$ și soluțiile ei sînt tocmai abscisele ξ și ξ' ale punctelor de intersecție ale graficelor $y = 3^x$, $y = 3x$ (fig. V.30).

2) Discutăm numărul de soluții reale ale ecuației $x^3 - mx^2 + 1 = 0$, după valorile parametrului real m. Deoarece $x = 0$ nu este soluție, ecuația se scrie echivalent $m = \dfrac{x^3+1}{x^2}$. Trasăm graficul funcției $\varphi(x) = \dfrac{x^3+1}{x^2}$. Domeniul de definiție este $R \setminus \{0\}$, $x = 0$ este asimptotă verticală, iar $y = x$ este asimptotă oblică. Apoi $\varphi'(x) = \dfrac{x^4 - 2x}{x^4} = \dfrac{x^3-2}{x^3}$ și tabloul de variație este

x	$-\infty$		0			$\sqrt[3]{2}$		∞
$\varphi'(x)$		$+$	|		$-$	0	$+$	
$\varphi(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	∞ |	∞	$\searrow$	$\dfrac{3}{\sqrt[3]{4}}$	$\nearrow$	∞

Graficul lui φ este trasat în figura V.31.

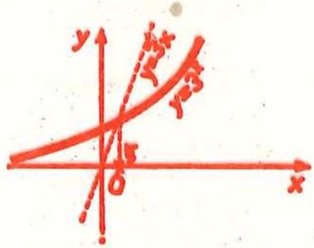


Fig. V.30

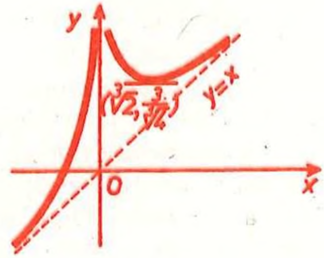


Fig. V.31

Dacă $m < \frac{3}{\sqrt[3]{4}}$, atunci ecuația are o singură rădăcină reală (și negativă), deoarece în acest caz dreapta $y = m$ intersectează graficul într-un singur punct de abscisă $x_1 < 0$.

Dacă $m = \frac{3}{\sqrt[3]{4}}$, atunci $x_{2,3} = \sqrt[3]{2}$ este rădăcină dublă și ecuația are încă o rădăcină $x_1 < 0$.

Dacă $m > \frac{3}{\sqrt[3]{4}}$, atunci ecuația dată are trei rădăcini reale ($x_1 < 0$, $0 < x_2 < \sqrt[3]{2}$, $x_3 > \sqrt[3]{2}$)

5.2. Șirul lui Rolle

O aplicație utilă a teoremelor lui Rolle (IV.9) și Darboux (III.6) o constituie șirul lui Rolle asociat unei ecuații de forma $f(x) = 0$ cu f funcție derivabilă, cu ajutorul căruia se poate decide numărul rădăcinilor reale ale ecuației, indicîndu-se totodată intervalele unde se află aceste rădăcini. De fapt, cu ajutorul șirului lui Rolle căpătăm informații despre „liniile de nivel" ale lui f, adică mulțimile de puncte unde f ia valori fixate $\{x \mid f(x) = a\}$, $a \in \mathbf{R}$. Studiul lui f poate fi restrîns la un interval.

Stabilim mai întîi o consecință simplă a teoremei lui Rolle, anume:

TEOREMA V. 9. Fie $f : I \to \mathbf{R}$ o funcție derivabilă pe un interval I. Dacă $x_1, x_2 \in I$, $x_1 < x_2$ sînt două rădăcini consecutive ale lui f' (adică $f'(x_1) = f'(x_2) = 0$ și între x_1 și x_2 nu există alte rădăcini ale lui f'), atunci în intervalul (x_1, x_2) există cel mult o rădăcină a ecuației $f(x) = 0$.

Demonstrație. Raționăm prin reducere la absurd. Dacă în intervalul (x_1, x_2) ar exista cel puțin două rădăcini $\xi < \eta$ ale ecuației $f(x) = 0$, atunci aplicînd teorema lui Rolle pentru intervalul $[\xi, \eta]$, ar rezulta că există $u \in (\xi, \eta)$ astfel încît $f'(u) = 0$. Atunci $x_1 < u < x_2$, și x_1, x_2 nu ar mai fi rădăcini consecutive ale lui f'.

Cu aceeași demonstrație se arată că dacă x_m (respectiv x_M) este cea mai mică (respectiv cea mai mare) rădăcină a lui f' în intervalul I, atunci la stînga lui x_m (respectiv la dreapta lui x_M) există cel mult o rădăcină a lui f.

Observație. Se mai spune pe scurt că zerourile derivatei separă zerourile funcției (termenii de rădăcină și zerou sînt aici sinonimi).

Facem ipoteza suplimentară că rădăcinile lui f' nu se acumulează în jurul vreunui punct din $\mathbf{R}$.

Etapele formării șirului lui Rolle

I. Se fixează intervalul de studiu I al ecuației $f(x) = 0$, funcția $f : I \to \mathbf{R}$ fiind presupusă derivabilă.

II. Se rezolvă ecuația $f'(x) = 0$ și se consideră rădăcinile reale ale acestei ecuații (situate în I), în ordine crescătoare $x_m < \ldots < x_1 < x_2 < \ldots < x_M$.

III. Se calculează valorile funcției f în aceste puncte, la care se adaugă limitele lui f, notate α și β, la capetele din stînga și respectiv din dreapta, ale intervalului I. Se obține un șir de valori asociat funcției f (sau echivalent, ecuației $f(x) = 0$), anume

$$\alpha,\ f(x_m),\ \ldots,\ f(x_1),\ f(x_2),\ \ldots,\ f(x_M),\ \beta.$$

IV. Datele anterioare pot fi organizate într-un tablou cu rubrici pentru x, $f'(x)$, $f(x)$. Şirul lui Rolle este şirul semnelor acestor valori (putînd apărea valoarea 0) în ordinea indicată la etapa a III-a. Concluzia rezultă astfel:

a) Dacă în şirul lui Rolle apar două semne alăturate identice, de exemplu $f(x_1) \cdot f(x_2) > 0$, atunci în intervalul (x_1, x_2) nu există rădăcini reale ale ecuaţiei $f(x) = 0$. Într-adevăr, două sau mai multe astfel de rădăcini nu pot exista conform teoremei V.9 (x_1, x_2 fiind zerouri consecutive ale lui f'). Iar dacă ar exista exact o rădăcină $\xi \in (x_1, x_2)$, atunci, cum $f(x_1) \cdot f(x_2) > 0$, în mod necesar ξ este punct de extrem pentru f, adică $f'(\xi) = 0$, absurd.

b) Dacă în şirul lui Rolle apar două semne alăturate diferite, de exemplu $f(x_1) < 0$, $f(x_2) > 0$, atunci, conform teoremei lui Darboux şi respectiv teoremei V.9, f are cel puţin (respectiv cel mult) o rădăcină în intervalul (x_1, x_2), deci ecuaţia $f(x) = 0$ are exact o rădăcină în intervalul (x_1, x_2).

c) Dacă în şirul lui Rolle apare 0 (de exemplu $f(x_k) = 0$, sau $f(x_{k+1}) = 0$), atunci x_k sau x_{k+1} este o rădăcină multiplă a ecuaţiei $f(x) = 0$ şi în intervalul (x_k, x_{k+1}) nu va exista altă rădăcină a acestei ecuaţii.

Prin *rădăcină multiplă* $x_0 \in \mathbf{R}$ a unei funcţii derivabile în x_0 înţelegem un număr x_0 astfel încît $f(x_0) = f'(x_0) = 0$. Dacă f este polinomială, aceasta revine la $f(x) \vdots (x - x_0)^2$.

În acest mod, numărînd schimbările de semn şi zerourile se determină numărul de rădăcini reale (fără a determina ordinele de multiplicitate ale acestora) ale ecuaţiei considerate şi, totodată, intervale în care aceste rădăcini sînt situate.

Exemple

1) Determinăm numărul rădăcinilor reale ale ecuaţiei $x^3 + 3x^2 - 9 = 0$. Parcurgem sistematic etapele anterioare.

I. Intervalul de studiu este $I = (-\infty, \infty)$; notăm $f(x) = x^3 + 3x^2 - 9$.

II. Ecuaţia $f'(x) = 0$ este $3x^2 + 6x = 0$ şi are rădăcinile $x_1 = -2$, $x_2 = 0$.

III. $\alpha = \lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} (x^3 + 3x^2 - 9) = -\infty$, $f(-2) = -8 + 12 - 9 = -5$, $f(0) = -9$, $\beta = \lim\limits_{x \to \infty} f(x) = \infty$.

IV. Considerăm tabloul

x	$-\infty$	-2	0	∞
$f'(x)$		0	0	
$f(x)$	$-\infty$	-5	-9	∞

Şirul lui Rolle este şirul semnelor valorilor cuprinse în ultima rubrică, anume $-, -, -, +$. Există o singură schimbare de semn, deci ecuaţia iniţială are o singură rădăcină reală, situată în intervalul $(0, \infty)$. Acest interval corespunde în prima rubrică schimbării de semn din şirul lui Rolle.

2) Ne propunem să determinăm numărul de rădăcini reale ale ecuației $2x^5 - 5x^4 + 10x^3 + 10x^2 - 40x + 1 = 0$. Notînd $f(x) = 2x^5 - 5x^4 + 10x^3 + 10x^2 - 40x + 1$, $I = \mathbf{R}$, avem $f'(x) = 10x^4 - 20x^3 + 30x^2 + 20x - 40 = 10(x^4 - 2x^3 + 3x^2 + 2x - 4) = 10[x^4 - x^2 - 2(x^3 - x) + 4(x^2 - 1)] = 10[x^2(x^2 - 1) - 2x(x^2 - 1) + 4(x^2 - 1)] = 10(x^2 - 1)(x^2 - 2x + 4)$, $\forall x \in I$. Rădăcinile reale ale ecuației $f'(x) = 0$ sînt $x_1 = -1$, $x_2 = 1$. Tabloul asociat este următorul:

x	$-\infty$	-1	1	∞
$f'(x)$		0	0	
$f(x)$	$-\infty$	$f(-1) = 34 > 0$	$f(1) = -22 < 0$	∞

iar șirul lui Rolle este $-, +, -, +$. Așadar, ecuația considerată are trei rădăcini reale, situate respectiv în intervalele $(-\infty, -1)$, $(-1, 1)$, $(1, \infty)$.

3) Considerăm acum ecuația $x^2 - 2 \ln x + m = 0$, unde m este un parametru real. În acest caz, luăm $I = (0, \infty)$ și notăm $f(x) = x^2 - 2 \ln x + m$. Ecuația $f'(x) = 0$, adică $2x - \frac{2}{x} = 0$, are în I soluția $x = 1$. Deoarece $\alpha = \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} (x^2 - 2 \ln x + m) = 0 - 2 \ln 0 + m = \infty$ și $\beta = \lim\limits_{x \to \infty} f(x) = \lim\limits_{x \to \infty} x^2 \left(1 + \frac{m - 2 \ln x}{x^2}\right) = \infty \cdot 1 = \infty$, tabloul asociat este:

x	0	1	∞
$f'(x)$		0	
$f(x)$	∞	$m + 1$	∞

Dacă $m + 1 > 0$, atunci șirul lui Rolle este $(+, +, +)$ și nu există nici o schimbare de semn, deci ecuația nu are soluții reale. Dacă $m = -1$ șirul lui Rolle este $(+, 0, +)$, deci $x = 1$ este rădăcină multiplă, iar dacă $m < -1$, atunci șirul lui Rolle este $+, -, +$ și, ca atare, ecuația are două rădăcini reale, situate în intervalele $(0, 1)$ și respectiv $(1, \infty)$.

Observație. Metoda șirului lui Rolle se bazează pe posibilitatea rezolvării efective a ecuației $f'(x) = 0$, ceea ce limitează aplicarea ei. De asemenea, metoda grafică are și ea anumite limite de aplicabilitate și nu se pot da indicații generale asupra utilizării uneia sau alteia din cele două metode. Numai prin exercițiu veți putea căpăta singuri priceperea de a decide care metodă trebuie aplicată de la caz la caz.

5.3. Obținerea unor inegalități

Rezultatele teoretice ale analizei permit obținerea unor inegalități care cu ajutorul metodelor elementare ar fi fost greu de probat. Demonstrăm mai întîi un rezultat general.

TEOREMA V. 10. Dacă f și g sînt funcții derivabile pe un interval $I = [x_0, \infty)$ astfel încît $f(x_0) = g(x_0)$ și $f'(x) \geqslant g'(x)$ pentru orice $x \in I$, atunci $f(x) \geqslant g(x)$, pentru orice $x \in I$ (rezultate similare au loc și pentru alte tipuri de intervale).

Demonstrație. Intuitiv situația este destul de clară: graficele lui f și g pornesc din același punct, iar coeficientul unghiular al tangentei în graficul lui f este mai mare și, ca atare, $f \geqslant g$. Este însă necesar un raționament. Notăm $h = f - g$. Așadar, $h(x_0) = 0$, $h'(x) \geqslant 0$ pentru orice $x \geqslant x_0$. Atunci funcția h este monoton crescătoare pe intervalul I (conform teoremei V.2) și, în particular, $h(x) \geqslant h(x_0) = 0$ pentru orice $x \geqslant x_0$, deci $f(x) \geqslant g(x)$ pentru orice $x \geqslant x_0$.

Exemple

1) Arătăm că pentru orice $x \geqslant 0$ au loc inegalitățile

$$\frac{x}{1+x} \leqslant \ln(1+x) \leqslant x.$$

Notăm $f(x) = x$, $g(x) = \ln(1+x)$, $h(x) = \frac{x}{1+x}$, $\forall x \in I$, unde $I = [0, \infty)$. Avem $f(0) = 0$, $g(0) = 0$, $h(0) = 0$, $f'(x) = 1$, $g'(x) = \frac{1}{1+x}$, $h'(x) = \frac{1}{(1+x)^2}$, $\forall x \in I$ și este evident că $f'(x) \geqslant g'(x) \geqslant h'(x)$, $\forall x \in I$. Atunci, conform teoremei V.10, rezultă că $f(x) \geqslant g(x) \geqslant h(x)$, $\forall x \in I$.

2) Arătăm că pentru orice $x \geqslant 0$ avem $x - \frac{x^3}{3} \leqslant \operatorname{arctg} x$. Notăm $f(x) = \operatorname{arctg} x$, $g(x) = x - \frac{x^3}{3}$. Atunci $f'(x) = \frac{1}{1+x^2}$, $g'(x) = 1 - x^2$. Deoarece $f''(x) \geqslant g''(x)$, $\forall x \geqslant 0$ și $f'(0) = g'(0)$, rezultă că $f'(x) \geqslant g'(x)$; aplicînd încă o dată teorema V.10, rezultă că $f(x) \geqslant g(x)$, $\forall x \geqslant 0$.

Demonstrăm acum o inegalitate importantă.

TEOREMA V.11 *(inegalitatea lui O. Hölder, 1859—1937).* **Dacă**

$a_1, \ldots, a_n \geqslant 0$; $b_1, \ldots, b_n \geqslant 0$; $p > 1$, $q > 1$ și $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, atunci

$$\sum_{i=1}^{n} a_i b_i \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^p\right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} b_i^q\right)^{\frac{1}{q}}. \tag{8}$$

Demonstrație. Să considerăm funcția $\varphi(x) = x^\alpha - \alpha x$, $x > 0$, unde $\alpha \in (0, 1)$ este un parametru. Din tabloul de variație a lui φ

x	0		1		∞
$\varphi'(x)$		$+$	0	$-$	
$\varphi(x)$	0	$\nearrow$	$1-\alpha$	$\searrow$	$-\infty$

rezultă că $\varphi(x) \leqslant 1 - \alpha$, adică $x^\alpha - \alpha x \leqslant 1 - \alpha$ pentru orice $x > 0$. Atunci pentru orice $A > 0$, $B > 0$, punînd $x = \frac{A}{B}$ și $\alpha = \frac{1}{p}$, rezultă că $1 - \alpha = 1 - \frac{1}{p} = \frac{1}{q}$, deci $\left(\frac{A}{B}\right)^{\frac{1}{p}} - \frac{1}{p}\left(\frac{A}{B}\right) \leqslant \frac{1}{q}$, de unde $A^{\frac{1}{p}} \cdot B^{\frac{1}{q}} \leqslant \frac{A}{p} + \frac{B}{q}$.

Punînd aici $A = \dfrac{a_i^p}{\sum\limits_{i=1}^n a_i^p}$, $B = \dfrac{b_i^q}{\sum\limits_{i=1}^n b_i^q}$ și adunînd inegalitățile astfel obținute, rezultă

$$\frac{\sum\limits_{i=1}^n a_i b_i}{\left(\sum\limits_{i=1}^n a_i^p\right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\sum\limits_{i=1}^n b_i^q\right)^{\frac{1}{q}}} \leqslant \frac{1}{p} \cdot \frac{\sum\limits_{i=1}^n a_i^p}{\sum\limits_{i=1}^n a_i^p} + \frac{1}{q} \cdot \frac{\sum\limits_{i=1}^n b_i^q}{\sum\limits_{i=1}^n b_i^q} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

și inegalitatea (2) este probată.

Pentru $p = 2$, $q = 2$ se obține o inegalitate care joacă un rol important în matematică (și care de altfel se poate demonstra direct), anume: $\left(\sum\limits_{i=1}^n a_i b_i\right)^2 \leqslant \left(\sum\limits_{i=1}^n a_i^2\right) \cdot \left(\sum\limits_{i=1}^n b_i^2\right)$ *(inegalitatea Cauchy-Buniakowski-Schwartz)*.

EXERCIȚII (capitolul V, § 5)

1. Să se rezolve grafic (cu aproximație) ecuațiile:

a) $2^x + x - 1 = 0$;
b) $2^x - 2x = 0$;
c) $2^x - 3x + 2 = 0$;
d) $\sin x + 2x - 1 = 0$;
e) $\ln x + x - 1 = 0$;
f) $\sin x - x = 0$.

2. Să se arate că ecuația $x = 2(1 - \cos x)$ are 3 soluții reale.

3. Să se discute, după valorile parametrului real m numărul soluțiilor reale ale ecuațiilor:

a) $m = \dfrac{x}{x^2 + 1}$;
b) $m = \dfrac{x^2}{x^2 + 1}$;
c) $m = 2^x - x \ln 2$;
d) $x^2 + x - m \cdot |x| = 0$;
e) $\sin x + m \cos x = 0$;
f) $m = e^x - x$.

4. Folosind metoda șirului lui Rolle să se discute numărul de soluții reale ale ecuațiilor următoare după valorile parametrului real m:

a) $x^2 + 2x + m = 0$;
b) $x^3 + 3x + m = 0$;
c) $x^3 + 3x^2 + m = 0$;
d) $2 \ln x + x^2 - 4x + m = 0$;
e) $x^4 - 4x^3 + m = 0$;
f) $\operatorname{ch} x + m = 0$.

5. Să se determine numărul soluțiilor reale ale ecuației:

$$xe^{-x} + e^{-x} + \frac{1}{2} x^2 - 1 = 0.$$

6. Să se determine numărul de soluții reale ale ecuațiilor:

a) $2 \sin x = x$;
b) $5 \sin x = x$;
e) $e^x = 1 + x$;
d) $\ln x = x - 1$.

7*. a) Să se arate, folosind șirul lui Rolle, că ecuația $x^n + px + q = 0$ ($p, q \in \mathbf{R}$) are cel mult două soluții reale, dacă n este par, și cel mult trei, dacă n este impar;

b) Să se arate că ecuația $x^{p+q} - A(x^p - 1) = 0$ ($p, q \in \mathbf{N}$ impare, $A > 0$) are două rădăcini reale și pozitive dacă $p^p \cdot q^q \cdot A^p < (p + q)^{p+q}$.

8. Fie $a, b > 0$ și $\varphi : (0, \infty) \to \mathbf{R}$, $\varphi(x) = x + a + b - 3\sqrt[3]{abx}$. Să se arate că $\varphi(x) \geqslant 0$ pentru $x > 0$ și să se deducă apoi că media aritmetică a trei numere reale pozitive este mai mare decît media lor geometrică. Generalizare.

9. Să se arate că

$$1 \leqslant \frac{x}{\sin x} \leqslant \frac{\pi}{2}, \text{ pentru orice } x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right].$$

10. a) Să se arate că ecuaţia $e^x = ax$ are cel puţin o soluţie, pentru orice $a \in (-\infty, 0) \cup [e, \infty)$.

b) Să se discute numărul de soluţii reale ale ecuaţiei $e^x = ax^2$ după valorile parametrului real a.

11. Să se arate că:

a) $e^x \geqslant x^e$, pentru orice $x > 0$;

b) $x^\alpha \cdot |\ln x| \leqslant \frac{1}{\alpha e}$ (dacă $0 < x < 1$ şi $\alpha > 0$);

c) $e^x \geqslant 1 + \ln(1 + x)$, pentru orice $x > -1$;

d) $\frac{\ln x}{x - 1} \leqslant \frac{1}{\sqrt{x}}$, $\forall x \in (0, 1) \cup (1, \infty)$.

§ 6. Aplicaţii ale analizei matematice în cinematică

6.1. Noţiunea de curbă

După cum am văzut, pentru orice funcţie elementară se poate reprezenta graficul ei (relativ la un sistem ortogonal de axe). În vorbirea curentă un astfel de grafic este numit curbă. Dar definiţia riguroasă, într-un cadru mai general, a noţiunii de curbă ridică dificultăţi.

Începem cu următorul exemplu:

Să considerăm cercul (C) cu centrul în originea axelor cu raza 1, avînd deci ecuaţia $x^2 + y^2 = 1$ (fig. V.32).

Aşadar, $(C) = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$. Mulţimea (C) nu este graficul vreunei funcţii reale; ea poate fi reprezentată ca reuniunea graficelor funcţiilor $f_1(x) = \sqrt{1 - x^2}$ şi $f_2(x) = -\sqrt{1 - x^2}$, $x \in [-1, 1]$. Aşadar, deşi cercul este o entitate geometrică bine definită, pentru a-l încadra în teoria anterioară, trebuie considerate două funcţii ale căror grafice se racordează în punctele $x = -1$ şi $x = 1$. Un alt dezavantaj al reprezentării explicite $(y = \pm\sqrt{1 - x^2})$ a cercului este acela că iniţial variabilele x şi y au rol simetric şi acesta este deteriorat prin explicitarea uneia din variabile, mai ales că funcţiile f_1, f_2 sînt nederivabile în punctele $x = -1$, $x = 1$. Se pune atunci întrebarea: nu există alt mod de a reprezenta curbele (cercul în cazul de faţă)?

Să considerăm intervalul $I = [0, 2\pi)$. Pentru orice punct $M(x, y)$ situat pe cercul (C) există şi este unic $t \in I$ astfel încît $x = \cos t$, $y = \sin t$ (t este unghiul măsurat în radiani dintre versorul $\vec{i}$ al axei Ox şi vectorul $\overrightarrow{OM}$; v. fig. V. 32). Se mai scrie

$$(C) \begin{cases} x = \cos t \\ x = \sin t \end{cases}, \ t \in I$$

şi se mai spune că este indicată o reprezentare parametrică a cercului (C) (o altă reprezentare parametrică a cercului (C) este:

$$x = \frac{1 - u^2}{1 + u^2}, \ y = \frac{2u}{1 + u^2}, \ u \in \mathbf{R},$$

obţinută din cea anterioară punînd $\operatorname{tg} \frac{t}{2} = u$; evident,

$$x^2 + y^2 = \left(\frac{1 - u^2}{1 + u^2}\right)^2 + \left(\frac{2u}{1 + u^2}\right)^2 = 1, \ \forall u \in \mathbf{R}).$$

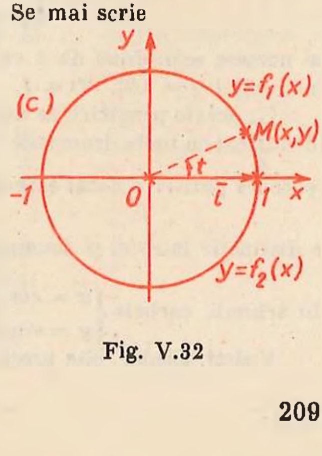


Fig. V.32

Pentru o elipsă (E) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$ $(a > 0,\ b > 0)$, se poate indica reprezentarea parametrică:

$$(\mathrm{E}) \begin{cases} x = a \cos t \\ y = b \sin t \end{cases}, \ t \in [0, 2\pi).$$

Această discuţie sugerează următoarea definiţie: se numeşte *drum parametrizat plan* orice aplicaţie

$$(9) \qquad \gamma : I \to \mathbf{R}^2,\ t \mapsto (x(t),\ y(t))$$

astfel încît funcţiile $x(t)$, $y(t)$ să fie continue pe I. Se mai spune că drumul parametrizat γ are reprezentarea parametrică

$$\gamma : \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}, \ t \in I.$$

Această definiţie este foarte generală şi a condus la exemple ciudate de drumuri parametrizate (de exemplu, curba lui G. Peano, 1858—1932, care trece prin toate punctele unui pătrat), care contrazic intuiţia noastră asupra noţiunii de curbă. În aplicaţiile analizei este util de presupus că funcţiile $x(t)$, $y(t)$ sînt de două ori derivabile pe I. Această ipoteză face ca fenomene precum cel relevat de curba lui Peano să fie eliminate.

Submulţimea (γ) a lui $\mathbf{R}^2$ a tuturor punctelor $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ cînd t parcurge intervalul I, se numeşte *imaginea* drumului γ. Aşadar,

$$(\gamma) = \{(x(t),\ y(t)) \mid t \in I\}.$$

Trebuie făcută distincţia între un drum γ şi imaginea (γ) a lui. De ce? Să considerăm pentru orice întreg $n \geqslant 1$ drumul $\gamma_n : [0, 2\pi) \to \mathbf{R}^2$, $\gamma_n(t) = (\cos nt,\ \sin nt)$, numit *cercul unitate parcurs de n ori în sens pozitiv*. Este evident că $(\gamma_n) = \{x^2 + y^2 = 1\} = (C)$ pentru orice n, dar γ_2 şi γ_3, de exemplu, sînt drumuri distincte. Iată şi un argument euristic. Să ne închipuim un mobil care se mişcă într-un plan raportat la un sistem ortogonal de axe xOy. Atunci, la fiecare moment t coordonatele poziţiei mobilului $x(t)$, $y(t)$ depind de t şi mobilul descrie o anumită traiectorie. El poate reveni acolo de unde a plecat, poate să repete parcursul de mai multe ori etc. Putem să ne imaginăm un al doilea mobil care trece prin aceleaşi puncte cu primul, dar avînd viteză diferită sau alt sens de parcurs. Deşi mulţimile de puncte ocupate de cele două mobile sînt aceleaşi, nu putem spune că drumurile corespunzătoare sînt aceleaşi. Este însă natural să considerăm că dacă traiectoriile coincid ca mulţimi de puncte, sînt parcurse în acelaşi sens, diferind doar prin viteza cu care sînt parcurse, atunci drumurile celor două mobile sînt echivalente. Definiţia precisă este următoarea:

Două drumuri parametrizate $\gamma : I \to \mathbf{R}^2$, $\lambda : J \to \mathbf{R}^2$

$$\gamma : \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}, \ t \in I; \ \lambda : \begin{cases} x = x(u) \\ y = y(u) \end{cases}, \ u \in J$$

se numesc *echivalente* dacă există o funcţie $\theta : I \to J$ bijectivă, strict crescătoare, astfel încît $\lambda(\theta(t)) = \lambda(t)$, $\forall t \in I$.

Cu aceste pregătiri, se numeşte *curbă plană parametrizată*, orice drum parametrizat, identificat cu toate drumurile echivalente cu el. De exemplu, semicercul superior unitate (parcurs pozitiv o dată) este drumul parametrizat $\begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t \end{cases}$, $t \in [0, \pi]$ şi nu se face nici o distincţie între el şi drumurile $\begin{cases} x = \cos 2u \\ y = \sin 2u \end{cases}$, $u \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, $\begin{cases} x = -v \\ y = \sqrt{1 - v^2} \end{cases}$, $v \in [-1, 1]$.

În schimb, curbele $\begin{cases} x = \cos 2t \\ y = \sin 2t \end{cases}$, $t \in [0, 2\pi]$, $\begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t \end{cases}$, $t \in [0, 2\pi)$ sînt distincte.

Vedeţi, aşadar, cîte precauţii au fost luate pentru a defini o noţiune simplă intuitivă.

Pentru a rezuma discuţia anterioară, curbele plane pot fi reprezentate:

a) prin ecuaţie carteziană de forma $F(x, y) = 0$;

b) ca grafice de ecuaţie $y = f(x)$ sau $x = g(y)$;

c) parametric $\gamma : \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}, \ t \in I.$

În cadrul geometriei diferenţiale se analizează mai adînc legătura între aceste moduri de reprezentare şi se extinde conceptul de curbă (considerîndu-se curbe în spaţiul $\mathbf{R}^2$, suprafeţe în $\mathbf{R}^3$ şi, mai general, varietăţi multidimensionale).

6.2. Cîteva noţiuni de cinematică

Cinematica este în esenţă studiul matematic al mişcării în timp a mobilelor. Studiem aici mişcări într-un plan (raportat la un sistem ortogonal de axe xOy de versori $\vec{i}$, $\vec{j}$).

Presupunem că la fiecare moment t, dintr-un interval de studiu I, un mobil M se află în punctul de coordonate $(x(t), y(t))$ astfel încît funcţiile $x(t)$, $y(t)$ să fie de două ori derivabile în I. Este astfel definit în mod firesc un drum parametrizat.

$$\gamma : I \to \mathbf{R}^2, \ \gamma(t) = (x(t), y(t)), \ \forall \, t \in I.$$

Imaginea ei (γ) se numeşte *traiectoria mobilului.*

Notînd $\vec{r}(t) = \overrightarrow{OM}$, vectorul de poziţie al lui M, avem

$$\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j}, \ \forall \, t \in I.$$

Se numeşte *vector-viteză* (respectiv *vector-acceleraţie*) al mobilului la un moment $t_0 \in I$

$$\vec{r}\,'(t_0) = x'(t_0)\vec{i} + y'(t_0)\vec{j} \ (\text{respectiv } \vec{r}\,''(t_0) = x''(t_0)\vec{i} + y''(t_0)\vec{j}\,).$$

Numărul real şi pozitiv $v(t_0) = \| \vec{r}\,'(t_0) \| = \sqrt{x'(t_0)^2 + y'(t_0)^2}$ se numeşte viteza la momentul t_0 a mobilului M pe traiectoria (γ). Dacă $x'(t_0) = 0$ şi $y'(t_0) = 0$, se mai spune că punctul corespunzător pe traiectorie este *singular*; în acest caz viteza $v(t_0)$ este nulă. Într-un punct nesingular, vectorul $\vec{r}\,'(t_0)$ are următoarea interpretare geometrică: deoarece

$$x'(t_0) = \lim_{t \to t_0} \frac{x(t) - x(t_0)}{t - t_0}, \quad y'(t_0) = \lim_{t \to t_0} \frac{y(t) - y(t_0)}{t - t_0},$$

rezultă că

$$\vec{r}\,'(t_0) = x'(t_0)\vec{i} + y'(t_0)\vec{j} = \lim_{t \to t_0} \frac{[x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j}] - [x(t_0)\vec{i} + y(t_0)\vec{j}]}{t - t_0} = \lim_{t \to t_0} \frac{\vec{r}(t) - \vec{r}(t_0)}{t - t_0} =$$

$$= \lim_{t \to t_0} \frac{\overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OM_0}}{t - t_0} = \lim_{t \to t_0} \frac{\overrightarrow{M_0M}}{t - t_0},$$ deci $\vec{r}\,'(t_0)$ este coliniar cu limita vectorului $\overrightarrow{M_0M}$, adică $\vec{r}\,'(t_0)$ *este tangent la* (γ) *în punctul* M_0 (fig. V.33).

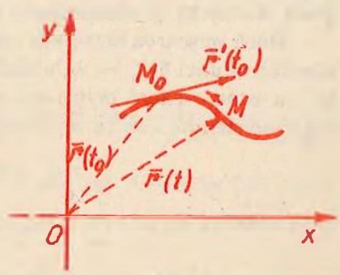


Fig. V.33

Am definit deja noţiunile de viteză, acceleraţie în cazul unei mişcări rectilinii (pe o axă) a mobilelor şi acum am extins aceste noţiuni la cazul mişcării plane.

Exemple

1) Presupunem că un mobil are la fiecare moment $t \in [0, 2]$ coordonatele $x = 2t$, $y = t^2 - t$ şi ne propunem să figurăm traiectoria mobilului, să calculăm vectorul-viteză şi să determinăm în ce moment viteza mobilului este minimă.

Aşadar, $x \in [0, 4]$ şi $y = \left(\frac{x}{2}\right)^2 - \left(\frac{x}{2}\right) = \frac{x^2 - 2x}{4}$. Traiectoria mobilului va fi o porţiune din parabola $y = \frac{x^2 - 2x}{4}$. Vectorul de poziţie al punctului M la momentul t este

$$\vec{r}(t) = 2t\vec{i} + (t^2 - t)\vec{j}, \text{ deci}$$

vectorul viteză va fi $\vec{r}'(t) = 2\vec{i} + (2t - 1)\vec{j}$. Mărimea lui este $v(t) = \|\vec{r}'(t)\| = \sqrt{4 + (2t - 1)^2}$ şi viteza minimă este atinsă la momentul $t = \frac{1}{2}$.

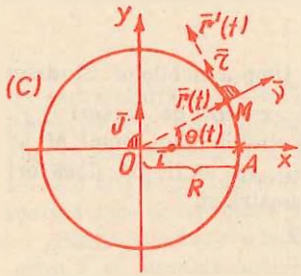


Fig. V.34

2) *Mişcarea circulară.* Se spune că un mobil are o *mişcare circulară* dacă traiectoria sa este un cerc (C) sau o submulţime a acestuia. Fie O centrul şi R raza cercului (C). Fixăm un punct A pe cerc şi alegem sistemul ortogonal de axe xOy (fig. V.34). La fiecare moment t mobilul se află într-un punct M: notînd cu $\theta(t) = (\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OM})$ măsurat, în radiani, măsura arcului $\widehat{AM}$ va fi egală cu $s(t) = R \cdot \theta(t)$. Coordonatele lui M vor fi $x = R\cos\theta(t)$, $y = R\sin\theta(t)$ şi $\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j}$, deci

$$\vec{r}(t) = R\cos\theta(t)\vec{i} + R\sin\theta(t)\vec{j}.$$

În acest caz, vectorul-viteză $\vec{r}'(t) = [-R\sin\theta(t)\vec{i} + R\cos\theta(t)\vec{j}]\theta'(t)$ este tangent în M la (C) şi mărimea vitezei este $v(t) = \|\vec{r}'(t)\| = \sqrt{R^2\sin^2\theta \cdot \theta'^2 + R^2\cos^2\theta \cdot \theta'^2} = R \cdot |\theta'(t)|$.

$\omega(t) = \theta'(t) = \frac{d\theta}{dt}$ se numeşte *viteza unghiulară* a mobilului la momentul t.

Se observă că notînd cu $\vec{\nu}$ (respectiv cu $\vec{\tau}$) versorul lui $\vec{r}(t)$ (respectiv $\vec{r}'(t)$), avem

$$\vec{\nu} = \frac{\vec{r}(t)}{R} = \cos\theta\,\vec{i} + \sin\theta\,\vec{j}, \quad \vec{\tau} = -\sin\theta\,\vec{i} + \cos\theta\,\vec{j}$$

(numite versorul-normală şi versorul-tangentă la (C) la momentul t) şi rezultă $\vec{r}(t) = R\cdot\vec{\nu}$, $\vec{r}'(t) = R\omega(t)\cdot\vec{\tau}$ (fig. V.34).

Deci $\vec{r}''(t) = R\omega'(t)\cdot\vec{\tau}(t) + R\omega(t)\vec{\tau}'(t) = R\omega'(t)\vec{\tau}(t) - R\omega^2(t)\,\vec{\nu}(t)$, deoarece $\vec{\tau}'(t) = (-\sin\theta\,\vec{i} + \cos\theta\,\vec{j})' = -\cos\theta\cdot\theta'\vec{i} - \sin\theta\cdot\theta'\vec{j} = -\omega\cdot\vec{\nu}$.

Am descompus astfel vectorul-acceleraţie $\vec{r}''(t)$ al mişcării în componenta sa tangenţială $R\omega'(t)\vec{\tau}(t)$ şi componenta sa normală $-R\omega^2(t)\vec{\nu}(t)$.

Dacă mişcarea circulară considerată este *uniformă* (adică viteza unghiulară este constantă), atunci $\theta'(t) = \omega$, constant ($\omega'(t) = 0$), deci funcţiile $\theta(t)$ şi ωt au aceeaşi derivată şi, ca atare, diferă printr-o constantă, $\theta(t) = \omega t + \theta_0$. *Componenta tangenţială a vectorului-acceleraţie este în acest caz nulă*; de asemenea,

$$\vec{r}(t) = R\cos(\omega t + \theta_0)\vec{i} + R\sin(\omega t + \theta_0)\vec{j}$$

şi se observă că pentru orice t avem $\vec{r}(t) = \vec{r}\left(t + \frac{2\pi}{\omega}\right)$, adică *o mişcare circulară uniformă cu viteza unghiulară ω este periodică de perioadă $\frac{2\pi}{\omega}$*.

EXERCIŢII (capitolul V, § 6)

1. Să se reprezinte grafic imaginea următoarelor drumuri parametrizate $\gamma(t) = (x(t), y(t))$, $t \in I$:

a) $x = t$, $y = t$, $I = [0, 2]$;
b) $x = t$, $y = t^2$, $I = [-1, 1]$;
c) $x = t^2$, $y = t$, $I = [0, 1]$;
d) $x = 2 \cos t$, $y = 2 \sin t$, $I = [0, \pi]$;
e) $x = \cos t$, $y = \cos 2t$, $I = [0, 2\pi]$;
f) $x = |\cos t|$, $y = \sin t$, $I = [0, 2\pi]$.

2. Considerăm drumurile parametrizate $\gamma, \gamma_1 : [0, 1] \to \mathbf{R}^2$, definite prin $\gamma(t) = (t, 2t)$, $\gamma_1(t) = (4t - 4t^2, 8t - 8t^2)$.

a) Să se arate că ele au aceeaşi imagine, anume segmentul de dreaptă $y = 2x$, $0 \leqslant x \leqslant 1$.

b) Să se figureze punctele $\gamma(t)$, $\gamma_1(t)$, pentru valorile $t = 0$, $t = \frac{1}{4}$, $t = \frac{1}{3}$, $t = \frac{1}{2}$, $t = \frac{2}{3}$, $t = \frac{3}{4}$, $t = 1$ şi apoi să se arate că drumurile γ şi γ_1 nu sînt echivalente.

3. Presupunem că la fiecare moment $t \geqslant 0$ un mobil se află în punctul de coordonate $x = t + 2$, $y = \frac{1}{t^2 + 4t + 3}$. Să se arate că traiectoria lui aparţine curbei $y = \frac{1}{x^2 - 1}$ şi să se determine la fiecare moment t vectorul-acceleraţie.

4. Să se reprezinte traiectoria unui mobil care la fiecare moment $t \in [0, 2\pi]$ se află în punctul de coordonate $x = \sin t$, $y = -2 - \cos 2t$ şi să se calculeze norma (mărimea) vectorului-viteză şi a vectorului-acceleraţie la momentul $t = \frac{3}{4}$.

EXERCIŢII ŞI PROBLEME REZOLVATE LA CAPITOLUL V

1. *Fie $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ o funcţie derivabilă. Să se arate că:*

a) *dacă f este pară (respectiv impară), atunci f' este impară (respectiv pară). Dar reciproc?*

b) *dacă f este periodică de perioadă T, atunci f' este periodică şi are aceeaşi perioadă. Dar reciproc?*

Soluţie. a) Derivăm relaţia $f(-x) = f(x)$. Obţinem $-f'(-x) = f'(x)$ pentru $\forall\, x \in \mathbf{R}$.
b) Derivăm relaţia $f(x + T) = f(x)$. Obţinem $f'(x + T) = f(x)$ pentru $\forall\, x \in \mathbf{R}$. Reciproca nu este adevărată; de exemplu, funcţia $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = x + \sin x$ nu este periodică, dar derivata ei f' este periodică.

2. Să se calculeze următoarele limite:

$$l_1 = \lim_{x\to 0} \frac{x}{x + \sin x}, \quad l_2 = \lim_{x\to\infty} \frac{x}{x + \sin x}, \quad l_3 = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \left(\operatorname{tg} x - \frac{1}{\cos x}\right),$$

$$l_4 = \lim_{x\to 0,\, x>0} \left(\frac{\operatorname{tg} x}{x}\right)^{\frac{1}{\sin x}} \quad \text{şi} \quad l_5 = \lim_{x\to 0,\, x<0} (1 - 4^x)^x.$$

Soluţie. Folosind regula lui l'Hospital $\left(\text{pentru cazul } \frac{0}{0}\right)$ se obţine $l_1 = \lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{1 + \cos x} = \frac{1}{2}$. Limita l_2 nu se poate calcula folosind regula lui l'Hospital (deoarece $\lim\limits_{x\to\infty} \cos x$ nu există); totuşi $l_2 = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{1}{1 + \frac{\sin x}{x}} = 1$, deoarece $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\sin x}{x} = 0$.

Limita l_3 este de tipul $\infty - \infty$. Avem $l_3 = \lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{\sin x - 1}{\cos x} = \lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{-\sin x} = 0$.

Limita l_4 este de tipul 1^∞ $\left(\text{deoarece } \frac{\operatorname{tg} x}{x} \to 1 \text{ şi } \frac{1}{\sin x} \to \infty \text{ pentru } x \to 0\right)$. Avem $\ln l_4 =$

$$= \lim_{x\to 0,\, x>0} \frac{1}{\sin x} \ln \frac{\operatorname{tg} x}{x} = \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{\ln \operatorname{tg} x - \ln x}{\sin x} = \lim_{x\to 0,\, x>0} \frac{\frac{1}{\operatorname{tg} x} \cdot \frac{1}{\cos^2 x} - \frac{1}{x}}{\cos x} =$$

$$= \lim_{x\to 0,\, x>0} \frac{x - \sin x \cos x}{x \sin x \cos^2 x} = \lim_{x\to 0,\, x>0} \frac{x - \sin x \cos x}{x \sin x}$$ (deoarece $\lim\limits_{x\to 0} \cos x = 1$). Aplicînd încă o dată regula lui l'Hospital, rezultă $\ln l_4 = \lim\limits_{x\to 0,\, x>0} \frac{1 - \cos^2 x + \sin^2 x}{\sin x + x \cos x} =$

$$= \lim_{x\to 0,\, x>0} \frac{2 \sin^2 x}{\sin x + x \cos x} = \lim_{x\to 0,\, x>0} \frac{2 \sin x}{1 + \frac{x}{\sin x} \cos x} = 0,$$ deci $l_4 = 1$.

În sfîrşit, l_5 este de tipul 0^0 şi $\ln l_5 = \lim\limits_{x\to 0,\, x<0} x \ln(1 - 4^x) = \lim\limits_{x\to 0,\, x<0} \frac{\ln(1-4^x)}{\frac{1}{x}} =$

$$= \lim_{x\to 0,\, x<0} \frac{\frac{1}{1-4^x}(-4^x \ln 4)}{-\frac{1}{x^2}} = (\ln 4) \lim_{x\to 0,\, x<0} \frac{x^2}{1-4^x} = (\ln 4) \cdot \lim_{x\to 0,\, x<0} \frac{2x}{-4^x \ln 4} = 0,$$

deci $l_5 = 1$.

3. *Fie* $f : [0, a] \to \mathbf{R}$, $a > 0$, *o funcţie derivabilă cu* f' *continuă şi astfel ca* $f(0) = 0$. *Să se arate că dacă există* $M > 0$ *astfel încît* $f'(x) \geqslant M$ *pentru orice* $x \in [0, a)$, *atunci* $f(x) \geqslant \frac{Ma}{2}$ *pentru orice* $x \in \left[\frac{a}{2}, a\right]$.

Soluţie. Considerăm funcţia $\varphi(x) = f(x) - Mx$. Avem $\varphi(0) = 0$ şi $\varphi'(x) = f'(x) - M \geqslant 0$, deci φ este crescătoare pe intervalul $[0, a]$. Aşadar, $\varphi(x) \geqslant 0$, adică $f(x) \geqslant Mx$ pentru orice $x \in [0, a]$. Dacă $x \in \left[\frac{a}{2}, a\right]$ avem $x \geqslant \frac{a}{2}$, deci $f(x) \geqslant f\left(\frac{a}{2}\right) \geqslant \frac{Ma}{2}$.

4. Dacă $f : (-a, a) \to \mathbf{R}$ $(a > 0)$ *este o funcţie derivabilă, cu* f' *continuă*, $f(0) = 1$ *şi* $f(x) > 0$ *pentru orice* $x \in (-a, a)$, *să se arate că*

$$\lim_{x\to 0} f(x)^{\frac{1}{x}} = e^{f'(0)}.$$

Soluţie. Avem de arătat că $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln f(x)}{x} = f'(0)$, adică, folosind regula lui l'Hospital, $f'(0) = \lim\limits_{x\to 0} \frac{f'(x)}{f(x)}$, ceea ce este evident, deoarece $f(0) = 1$.

Observaţie. Pentru o limită $\lim u^v$ de tipul 1^∞, scriind $u^v = \left[(1 + u - 1)^{\frac{1}{u-1}}\right]^{v(u-1)}$, rezultă că $\lim u^v = e^{\lim v(u-1)}$, dacă există limita de la exponent. În cazul acestui exerciţiu,

$$\lim_{x\to 0} f(x)^{\frac{1}{x}} = e^{\lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{x}(f(x)-1)} = e^{\lim\limits_{x\to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x}} = e^{f'(0)}.$$

5. *Să se arate că dacă funcția $f : I \to \mathbf{R}$ este convexă pe un interval $I \subset \mathbf{R}$, atunci pentru orice $x_1, \ldots, x_n \in I$,* avem

$$f\left(\frac{x_1 + \ldots + x_n}{n}\right) \leqslant \frac{1}{n}[f(x_1) + \ldots + f(x_n)] \text{ (inegalitatea lui Jensen).}$$

Soluție. Procedăm prin inducție după n. Pentru $n = 1$ afirmația este evidentă; presupunem $n \geqslant 2$ și afirmația adevărată pentru orice $k \leqslant n - 1$ numere. Atunci, $f\left(\frac{x_1 + \ldots + x_n}{n}\right) = f\left(\left(1 - \frac{1}{n}\right)\frac{x_1 + \ldots + x_{n-1}}{n-1} + \frac{1}{n}x_n\right)$ și cum f este convexă, rezultă $f\left(\frac{x_1 + \ldots + x_n}{n}\right) \leqslant \left(1 - \frac{1}{n}\right) f\left(\frac{x_1 + \ldots + x_{n-1}}{n-1}\right) + \frac{1}{n} f(x_n) \leqslant \left(1 - \frac{1}{n}\right) \cdot \frac{1}{n-1}[f(x_1) + \ldots + f(x_{n-1})] + \frac{1}{n} f(x_n)$, folosind ipoteza de inducție.

Așadar, $f\left(\frac{x_1 + \ldots + x_n}{n}\right) \leqslant \frac{f(x_1) + \ldots + f(x_n)}{n}$.

Pentru funcțiile concave avem inegalitatea inversă.

Observație. Se poate arăta, mai general, că dacă $f : I \to \mathbf{R}$, I fiind un interval din $\mathbf{R}$, funcția este convexă, atunci pentru orice $x_1, \ldots, x_n \in I$ și pentru orice $t_1, \ldots, t_n > 0$ astfel încît $t_1 + \ldots + t_n = 1$, avem $f(t_1x_1 + \ldots + t_nx_n) \leqslant t_1f(x_1) + \ldots + t_nf(x_n)$. Pentru $t_1 = \ldots = t_n = \frac{1}{n}$ se obține inegalitatea din enunț.

6. *Să se arate că:*

1) *dacă* $0 < b < a$, *atunci* $\frac{a-b}{a} < \ln\frac{a}{b} < \frac{a-b}{b}$;

2) *dacă* $0 \leqslant a < b \leqslant \frac{\pi}{2}$, *atunci* $(b - a)\cos b \leqslant \sin b < \sin a \leqslant (b - a)\cos a$.

Soluție. 1) Considerăm funcția $f(x) = \ln x$ pe intervalul $[b, a]$ și aplicăm formula creșterilor finite; atunci $f(a) - f(b) = (a - b) \cdot f'(c)$, deci $\frac{1}{a-b}\ln\frac{a}{b} = f'(c)$, unde $b < c < a$. Dar $f'(c) = \frac{1}{c}$ și deci $\frac{1}{a} < f'(c) < \frac{1}{b}$; ca atare, $\frac{1}{a} < \frac{1}{a-b}\ln\frac{a}{b} < \frac{1}{b}$.

2) Dacă $a = b$, inegalitățile sînt evidente și putem presupune $a < b$, inegalitățile rezultă aplicînd teorema creșterilor finite funcției $\sin : [a, b] \to \mathbf{R}$ (ținînd cont că pe intervalul $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ funcția cos este descrescătoare).

PROBLEME RECAPITULATIVE

I

1. Să se arate că funcţia $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = |x|$ nu este polinomială.

2. Se consideră şirurile

$$a_n = \frac{2n + (-1)^n \cdot n}{2n + 1}, \qquad b_n = \frac{2n + (-1)^{n+1} \cdot n}{2n + 1}, \ n \in \mathbf{N}.$$

Să se arate că $|a_n - b_n| \leqslant 1$ pentru orice $n \geqslant 1$ şi să se determine valorile lui n astfel încît $|a_n + b_n - 2| < \frac{1}{101}$.

3*. Se consideră mulţimea $A = \left\{ \frac{m}{n} \,\middle|\, 0 < m < n \text{ cu } m, n \text{ întregi} \right\}$. Să se arate că A nu are un cel mai mic element şi nici un cel mai mare element şi să se determine $\inf A$, $\sup A$.

4*. Să se traseze graficele funcţiilor $\varphi, \psi : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ definite prin $\varphi(x) = \inf\limits_{t \leqslant x} t^2$ şi $\psi(x) = \sup\limits_{t \in [x, x+1]} (t^2 - t)$.

5*. Fie $f: [0, 1] \to \mathbf{R}$ o funcţie mărginită. Să se arate că pentru orice întreg $n \geqslant 1$ există funcţii polinomiale P, Q de grad n astfel încît $P(x) \leqslant f(x) \leqslant Q(x)$ pentru orice $x \in [0, 1]$.

II

6. Fie $a_n = \frac{n}{(n+1)!}$ şi $s_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$ $(n \geqslant 1)$. Să se arate că $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = 0$ şi $\lim\limits_{n \to \infty} s_n = 1$.

7. Dacă $(x_n)_{n \geqslant 0}$ şi $(y_n)_{n \geqslant 0}$ sînt şiruri de numere reale convergente către a şi respectiv b, $a \neq b$, ce se poate spune despre convergenţa şirului $x_0, y_0, x_1, y_1, \ldots, x_n, y_n, \ldots$? Dar dacă $a = b$?

8. a) Fie $a_{n+1} = \frac{5a_n + 3}{a_n + 3}$, $n \geqslant 1$, $a_1 > 0$. Să se arate că şirul $b_n = \frac{a_n - 3}{a_n + 1}$, $n \geqslant 1$ este o progresie geometrică şi să se studieze convergenţa şirurilor (a_n), (b_n).

b) Fie $a_n = \frac{1}{3} a_{n-1} - 4$, $\forall\ n \geqslant 1$ şi $a_0 = 3$. Să se arate că diferenţa $a_n - a_{n-1}$ are semn constant pentru orice n şi că şirul $b_n = a_n + 6$, $n \geqslant 0$ este o progresie geometrică convergentă către zero.

9. a) Să se determine constanta α astfel încît limita $\lim_{n\to\infty} n^\alpha \left(\sqrt{n+\sqrt{n}} - \sqrt{n-\sqrt{n}}\right)$ să existe şi să fie finită.

b) Să se arate că dacă $a + b + 1 = 0$, atunci $\lim_{n\to\infty} (a\sqrt{n+1} + b\sqrt{n+2} + \sqrt{n+3}) = 0$ şi $\lim_{n\to\infty} [a \ln(3+n) + b \ln(2+n) + \ln(1+n)] = 0$.

10. Un segment AB de lungime a este împărţit în n segmente de lungimi egale $AA_1 = A_1A_2 = \ldots = A_{n-1}B$ şi pe fiecare din aceste segmente se construieşte, de aceeaşi parte, cîte un triunghi echilateral cu vîrfurile $C_1, C_2, \ldots, C_n$ respectiv. Să se calculeze $\lim_{n\to\infty} (AC_1 + C_1A_1 + A_1C_2 + \ldots + A_{n-1}C_n + C_nB)$ şi să se explice rezultatul, aparent paradoxal, obţinut.

11. Fie $f, g\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = \begin{cases} 0, & \text{dacă } x \neq 0 \\ 1, & \text{dacă } x = 0 \end{cases}$ şi $g(x) = \begin{cases} 1, & \text{dacă } x \neq 1 \\ 0, & \text{dacă } x = 1 \end{cases}$. Să se arate că $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$, $\lim_{x\to 1} g(x) = 1$ şi să se calculeze $\lim_{x\to 0} g(f(x))$.

12. Să se determine asimptotele funcţiilor $f : D \to \mathbf{R}$ următoare (D fiind domeniul maxim de definiţie):

a) $f(x) = \dfrac{x^3+1}{x^2}$; b) $f(x) = \dfrac{x^2}{x+5}$; c) $f(x) = \sqrt{x} - \sqrt{x-1}$; d) $f(x) = \dfrac{x}{(x-1)^2}$;

e) $f(x) = \ln(x^2 + x)$; f) $f(x) = \operatorname{arctg} \dfrac{x+1}{x-1}$.

13. Fie $a_n = \left(5 - \dfrac{1}{n}\right)^{r_n}$ unde $r_n = \dfrac{(-1)^n}{n}$, $n \geqslant 1$. Să se studieze monotonia, mărginirea şi convergenţa acestui şir.

14. Să se arate că dacă $(x_n)_{n\geqslant 0}$ este un şir convergent de numere reale, atunci pentru orice $\varepsilon > 0$ există N natural astfel încît $\forall\, m, n \geqslant N$, $|x_m - x_n| < \varepsilon$.

III

15. Să se studieze continuitatea funcţiilor $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ următoare:

a) $f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{dacă } x \in \mathbf{Q} \\ 2x, & \text{dacă } x \notin \mathbf{Q} \end{cases}$; b) $f(x) = \sin|x|$; c) $f(x) = x - [x]$;

d) $f(x) = \lim_{n\to\infty} \dfrac{x^{2n}}{x^{2n}+1}$; e) $f(x) = \lim_{n\to\infty} \dfrac{1 + x\,e^{nx}}{1 + e^{nx}}$; f) $f(x) = \operatorname{sgn}(\sin \pi x)$.

16. Să se arate că ecuaţiile următoare au soluţii pe intervalele indicate:

a) $x^3 + 2x - 5 = 0$, $I = (1, 2)$; b) $x^4 + 5x + 3 = 0$, $I = (-1, 0)$;

c) $2^x = \dfrac{1}{x}$, $I = (0, 1)$; d) $x \ln x = \dfrac{1}{2} - x$, $I = (0, 1)$;

e) $\cos^6 x = \sin x$, $I = (0, \pi)$.

17*. a) Fie $f : [0, 2\pi] \to \mathbf{R}$ o funcţie continuă astfel încît $f(0) = f(2\pi)$. Să se arate că există $c \in [0, \pi]$ astfel încît $f(c) = f(c + \pi)$.

b) Să se demonstreze că dacă $f : [-a, a] \to [-a, a]$, $a > 0$ este o funcţie continuă, atunci există puncte u, $v \in [-a, a]$ astfel încît $f(u) = u$, $f(v) = -v$.

18*. Un automobil porneşte la momentul $t = 0$ dintr-un punct A şi la momentul $t = 2$ (timpul măsurat în ore) ajunge într-un punct B după ce a parcurs rectiliniu 160 km. Pentru orice $t \in [0, 2]$ notăm cu $f(t)$ distanţa parcursă de automobil în intervalul de timp $[0, t]$ (deci $f(0) = 0, f(2) = 160$) şi presupunem că f este funcţie continuă. Să se arate că există cel puţin o pereche de puncte (U, V) situate între A şi B aflate la o distanţă $d(U, V) = 80$ km şi astfel încît automobilul să parcurgă distanţa $d(U, V)$ exact într-o oră, iar dacă mişcarea este uniformă există chiar o infinitate de astfel de perechi (U, V).

IV

19. Să se calculeze $f'_s(0)$, $f'_d(0)$ pentru funcţiile $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$

a) $f(x) = \begin{cases} -x^2, & \text{dacă } x < 0 \\ 4, & \text{dacă } x \geq 0 \end{cases}$; b) $f(x) = |x^2 - 2x|$; c) $f(x) = \begin{cases} 2x^2 + 2x, & \text{dacă } x < 0 \\ 2x + 3, & \text{dacă } x \geq 0 \end{cases}$.

20. Să se determine constantele reale a, b astfel încît funcţia $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ definită prin

$f(x) = \begin{cases} 2x^2 + b, & \text{dacă } x \leq 2 \\ 2ax^3 + 11a, & \text{dacă } x > 2 \end{cases}$ să fie:

1°. continuă pe $\mathbf{R}$;

2°. derivabilă pe $\mathbf{R}$.

Aceeaşi problemă pentru funcţia $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = \begin{cases} x^2 + ax, & \text{dacă } x < 0 \\ b \ln(x + 1), & \text{dacă } x \geq 0 \end{cases}$.

21. Să se afle constantele reale α şi β încît funcţia $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, definită prin

$$f(x) = \begin{cases} xe^x, & \text{dacă } x \leq 1 \\ \alpha x + \beta, & \text{dacă } x > 1 \end{cases}$$

să fie derivabilă pe $\mathbf{R}$. Ce interpretare geometrică se poate da rezultatului obţinut?

22. Să se indice două funcţii derivabile $f, g : (0, 1) \to \mathbf{R}$ astfel încît $f(x) < g(x)$, $f'(x) > g'(x)$ pentru orice $x \in (0, 1)$.

23. Fie $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = e^{-x} \cdot \sin x$. Să se arate că $|f(x)| \leq 1$, $|f'(x)| \leq \sqrt{2}$, $|f''(x)| \leq 2$; pentru orice $x \geq 0$.

24. Se consideră funcţia $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = \left(ax + \sqrt{1 + a^2x^2}\right)^{\frac{1}{a}}$, unde $a \neq 0$ este o constantă reală.

a) Să se verifice că $\sqrt{1 + a^2x^2} \cdot f'(x) - f(x) = 0$, $\forall\, x \in \mathbf{R}$.

b) Să se arate că $(1 + a^2x^2)f''(x) + a^2xf'(x) - f(x) = 0$, $\forall\, x \in \mathbf{R}$. Ce relaţii de forma $P(x) \cdot f''(x) + Q(x) \cdot f'(x) + R(x) \cdot f(x) = 0$ au loc pentru orice $x \in \mathbf{R}$, unde P, Q, R sînt funcţii polinomiale reale?

25. a) Să se determine parametrul real m astfel încît funcţia $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = mx - \ln(x^2 + 1)$ să fie monoton descrescătoare pe $\mathbf{R}$.

b) Să se arate că pentru orice parametru real m funcţia $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = (x^2 + mx)e^{-x}$ are un maxim şi un minim local.

26. Să se determine intervalele de monotonie ale funcţiei $f : (0, \infty) \to \mathbf{R}$, $f(x) = \dfrac{\ln x}{\sqrt{x}}$ şi, folosind rezultatul obţinut, să se decidă care din numerele $a = 3^{\sqrt{5}}$, $b = 5^{\sqrt{3}}$ este mai mare.

27. Să se arate că există o unică funcţie $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ derivabilă, astfel încît $f'(x) = 3f(x)$, $\forall\, x \in \mathbf{R}$ şi $f(0) = 3$.

28*. Presupunem că f este de două ori derivabilă într-o vecinătate V a unui punct a. Să se arate că pentru orice h suficient de mic există puncte p, q în V astfel încît

$$\frac{f(a + h) - f(a - h)}{2h} = f'(p) \text{ şi } \frac{f(a + h) + f(a - h) - 2f(a)}{h^2} = f''(q).$$

29. Să se reprezinte grafic următoarele funcţii $f : D \to \mathbf{R}$ (folosind eventual şi derivata secundă), D fiind domeniul maxim de definiţie:

a) $f(x) = \sqrt{x^6} - \sqrt{x^4}$;

b) $f(x) = x^6 - 2x^3 + 1$;

c) $f(x) = \dfrac{|x| - 1}{x - 1}$;

d) $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{(x - 2)^2}$;

e) $f(x) = \dfrac{x^2}{(x^2 - 1)^2}$;

f) $f(x) = \dfrac{x^2 - 3|x - 2|}{x - 1}$;

g) $f(x) = x + \sqrt{\left|\dfrac{x - 1}{x + 1}\right|}$;

h) $f(x) = \dfrac{x^2}{\sqrt{x^2 + 1}}$;

i) $f(x) = \sqrt{\dfrac{x}{x - 1}}$;

j) $f(x) = 2x - 1 + \sqrt{x - 1}$;

k) $f(x) = \sqrt{x^2 + 2|x|}$;

l) $f(x) = (2 + x)\sqrt{1 - x}$;

m) $f(x) = \operatorname{tg} x + \cos x$;

n) $f(x) = \cos x + \cos \dfrac{x}{2}$;

o) $f(x) = \dfrac{3 + \sin x}{1 + \sin x}$;

p) $f(x) = \arcsin \dfrac{2x}{1 + x^2}$;

q) $f(x) = \pi x + \sin \pi x$;

r) $f(x) = \dfrac{\sin x - \cos x}{\cos 2x}$;

s) $f(x) = \dfrac{\operatorname{tg} 3x}{\operatorname{tg}^3 x}$;

t) $f(x) = \sin^2 x - 2 \sin^4 x$;

u) $f(x) = x + \ln x^2$;

v) $f(x) = \dfrac{x^2}{4} - \dfrac{1}{2} \ln x$;

w) $f(x) = |\ln|x| + x|$;

z) $f(x) = \operatorname{arctg} \dfrac{x}{\sqrt{x^2 - 1}}$

30. Se cere numărul de soluţii reale ale ecuaţiilor $x^4 - 4x + 1 = 0$; $1 + x - \operatorname{arctg} x = 0$; $x^3 - 2x + 1 = \ln |x|$.

31. Să se arate că:

a) $x \leqslant e^x - 1 \leqslant xe^x$, $\forall x \in \mathbf{R}$;

b) $\ln (x + 1) \geqslant \dfrac{2x}{x + 2}$, dacă $x \geqslant 0$;

c) $0 \leqslant x^n e^{1-x} \leqslant 1$ pentru orice $x \in [0, 1]$ şi pentru orice $n \in \mathbf{N}^*$.

NOTĂ ISTORICĂ

Considerentele de natură istorică în evoluția unei discipline prezintă un dublu interes unul strict informativ și altul legat de reflecțiile inevitabile în legătură cu rădăcinile, motivațiile și caracterul sinuos al descoperirii științifice. În ceea ce privește matematica, o privire în trecut este poate și mai oportună, pentru că deși este știință fundamentală, ca element direct de cunoaștere sau ca instrument indispensabil pentru alte discipline, există totuși opinia că matematica ar avea un caracter static, că „totul este cunoscut". Realitatea este că matematica a avut și are o evoluție continuă, progresele ei datorîndu-se atît impulsurilor venite din afară (în mod constant din fizică și din tehnică, iar în ultimul timp din științele economice), cît și structurii ei interne, nevoii de cunoaștere și înțelegere, de armonie și aspirație spre claritate maximă, frumusețe și economie de efort.

În această scurtă prezentare vom încerca să examinăm apariția și dezvoltarea conceptelor fundamentale pe care le-ați întîlnit în acest manual — numărul real, funcția, limita, continuitatea și derivata, marcînd momentele semnificative. O bună cunoaștere a manualului vă va permite să fiți în măsură să apreciați singuri progresele efectuate.

Numerele raționale pozitive au fost cunoscute încă din antichitate și tot atunci geometrii greci au evidențiat și insuficiența acestora, dovedind că diagonala unui pătrat nu este „comensurabilă" cu latura pătratului (adică, în limbajul nostru, numărul $\sqrt{2}$ nu este rațional). O primă tentativă logic coerentă de a construi o teorie a numerelor reale, ca teorie axiomatică a mărimilor, se datorește lui Eudox (elev al lui Platon) și se găsește în cartea a V-a a Elementelor lui Euclid; în particular este explicitată acolo și proprietatea lui Arhimede. Teoria lui Eudox era greoaie, puțin favorabilă calculului numeric sau algebric. De altfel, în acea epocă întreaga matematică era învăluită într-o haină geometrică, operațiile se făceau cu mărimi și nu cu numere asociate convenabil. Unele reminiscențe se observă și astăzi în terminologia curentă (a^2 se citește „a pătrat" iar a^3 — „a cub" etc.). Nevoia de a face calcule cu aproximații „din ce în ce mai bune", prefigurînd însăși trecerea la limită, l-a condus pe Arhimede să inventeze metoda cleștelui și să calculeze cu extraordinară ingeniozitate aria unui subgrafic de parabolă, aria elipsei și volumele unor corpuri de rotație, în pofida lipsei unei teorii sistematice. Încă din antichitate au fost evidențiate unele șiruri infinite definite prin recurență, iar progresiile se întîlnesc în papirusuri egiptene.

Evenimentele istorice (cucerirea Greciei de către romani, năvălirile barbare etc.) au condus la un profund regres și datorăm culturii arabe transmiterea unor texte antice prețioase ca și sistemul pozițional de notare a numerelor, pe care îl folosim și noi. Începînd cu secolul al XIV-lea (elementele lui Euclid fuseseră între timp traduse din arabă în latină), matematica însăși cunoaște o adevărată renaștere. Francezul N. Oresme introduce ideea de reprezentare grafică și demonstrează că seria armonică este divergentă, iar Galileo Galilei utilizează sistematic reprezentarea grafică a dependenței între mărimi. Matematicienii francezi R. Descartes și P. Fermat introduc, spre mijlocul secolului al XVII-lea, conceptul de coordonată și-l utilizează sistematic în reprezentarea geometrică a mărimilor, folosind notația algebrică pe care ne-am însușit-o și noi. Ideea lor de a studia ecuațiile cu ajutorul curbelor și invers a evidențiat importanța „variabilelor continue", a condus la descoperirea geometriei analitice, pregătind terenul pentru progrese mai substanţiale, legate, nu întîmplător, de nevoile astronomiei şi navigaţiei.

Pasul hotărîtor în constituirea analizei matematice, ca domeniu esenţial de studiu, a fost făcut de englezul Isaac Newton (1642—1727) şi de germanul Gottfried Wilhelm Leibniz (1646—1716). Este interesant că Newton şi-a publicat principalele sale contribuţii în mecanică şi în optică, dar opera sa matematică a fost publicată în întregime abia în 1967, rezultatele sale matematice circulînd ca scrisori sau manuscrise puse la dispoziţia unor prieteni. La sfîrşitul anului 1666 Newton descoperise calculul cu derivate (pe care le numise fluxiuni). Referitor la o curbă $f(x, y) = 0$, Newton avea o viziune pur dinamică, ca loc de intersecţie a două drepte mobile, una paralelă cu axa Ox şi cealaltă paralelă cu axa Oy, viteza fiind orientată pe tangenta la curbă, obţinută compunînd după legea paralelogramului vitezele pe orizontală şi pe verticală. Notaţiile şi modul de calcul propuse de Newton erau greoaie, dar el a descoperit cu această ocazie rezultate esenţiale în analiza matematică, ce se confirmau în rezolvările unor probleme concrete şi acest fapt nu-l îndemna spre o examinare critică a conceptelor folosite. În aceeaşi perioadă, Leibniz, trimis ca diplomat la Paris (în 1673) a intrat în contact cu olandezul Cr. Huygens (1629—1695), de la care a aflat de rezultatele lui B. Pascal (1623—1662) în lămurirea conceptului de limită. Leibniz a definit (foarte restrictiv) noţiunea de funcţie şi a descoperit, independent de Newton, noţiunea de diferenţială, regulile de derivare şi integrare, introducînd totodată notaţii potrivite, apropiate de cele folosite astăzi. Newton a contestat meritele lui Leibniz, cerînd instituirea unei comisii care să stabilească prioritatea sa în descoperirea Calculului diferenţial. Acum, privind cu detaşarea celor aproape 300 ani scurşi de atunci, a devenit clar că descoperirile lui Leibniz au fost meritul exclusiv al acestuia şi, ca o ironie a soartei, matematicienii englezi, neadoptînd notaţia şi metodele de calcul ale lui Leibniz, au rămas mult timp izolaţi de realizările majore ale celorlalţi matematicieni europeni. Se poate afirma că Leibniz a avut ca scop elaborarea unor metode şi algoritmi cît mai generali, în timp ce Newton era interesat în a rezolva îndeosebi probleme fizice. Aceste două moduri de a privi matematica au coexistat dintotdeauna, au ambele justificări serioase şi corespund unor temperamente ştiinţifice diferite, dar la fel de necesare progresului.

Entuziasmul provocat de rezultatele calculului diferenţial creat de Newton şi Leibniz a întîrziat fundamentarea riguroasă a conceptelor. Marele matematician elveţian L. Euler (1707—1783) a introdus numărul e, a precizat noţiunea de funcţie, acceptînd ideea „funcţiilor cu acoladă" (date prin expresii analitice diferite pe intervale diferite). Studiul matematic al mişcării corzii vibrante şi, mai tîrziu, studiul propagării căldurii (datorat lui J.B. Fourier, 1768—1830) au condus la considerarea „funcţiilor arbitrare". P. Lejeune-Dirichlet (1805—1859) a construit în 1829 exemplul său celebru, dat şi în acest manual, de funcţie discontinuă în orice punct, care nu este definită printr-o expresie analitică. Toate aceste contribuţii au impus, cu necesitate, analizarea şi sistematizarea conceptelor şi rezultatelor obţinute. Francezului A.L. Cauchy (1789—1857) şi cehului B. Bolzano (1781—1848) le datorăm definirea modernă a conceptului de continuitate (în limbajul $\varepsilon - \delta$), iar lui K. Weierstrass conceptul de continuitate uniformă. În anul 1821 Cauchy a enunţat criteriul de convergenţă care îi poartă numele şi a fundamentat noţiunea de limită introducînd în analiză standarde noi de rigoare. Abia după ce matematicienii germani K. Weierstrass, R. Dedekind, G. Cantor şi francezul Ch. Méray au definit conceptul de număr real şi după ce Cantor a creat teoria mulţimilor (condus de cercetările sale asupra mulţimilor de convergenţă punctuală a seriilor trigonometrice), se poate vorbi de fundamentarea riguroasă a analizei matematice.

Metodele analizei matematice s-au dovedit de la început extrem de puternice şi în alte domenii ale ştiinţei. Astfel marele matematician german Karl Friedrich Gauss (1777—1855) a aplicat rezultatele analizei la studiul curbelor şi suprafeţelor creînd geometria diferenţială, J.L. Lagrange (1736—1813) şi P.S. Laplace (1749—1827) au creat mecanica analitică, primul avînd o contribuţie însemnată în multe alte domenii. Folosind metode de analiză matematică, Ch. Hermite (1822—1901) și F. Lindemann (1852—1939) au reușit să demonstreze, la sfîrșitul secolului trecut, că numerele e și respectiv π sînt transcendente, dînd astfel răspuns negativ unei probleme care a pasionat omenirea timp de peste două milenii — problema cuadraturii cercului (a construirii, cu rigla și compasul, a unui pătrat avînd aceeași arie cu cea a unui cerc dat).

Datorăm lui Bernhard Riemann (1826—1866), David Hilbert (1862—1943) și lui Henri Lebesgue (1875—1941) rezultatele fundamentale (ce nu pot fi prezentate aici), care au deschis posibilități imense de aplicare a analizei matematice, conducînd la crearea analizei funcționale și marcînd decisiv limbajul întregii științe actuale. Relativ recent, sovieticul S.L. Sobolev (n. 1908) și francezul L. Schwartz (n. 1915) au dat o generalizare naturală a noțiunii de derivată în cadrul teoriei distribuțiilor. Analiza matematică are aplicații profunde în studiul ecuațiilor diferențiale, în teoria controlului optimal, studiul fenomenelor aleatoare, ca și în utilizarea superioară a tehnicii moderne de calcul, iar aventura cunoașterii continuă...

În privința comunicării largi a rezultatelor analizei matematice merită să fie, de asemenea, amintite cîteva momente importante. Primul manual de analiză scris vreodată a fost cel al lui l'Hospital, tipărit puțin înainte de 1700. Printre manualele larg difuzate și cunoscute menționăm pe cele datorate lui L. Euler, A.L. Cauchy, C. Jordan (1838—1922), E. Goursat (1858—1936), Șt. Banach (1892—1945), J. Dieudonné (n. 1906), G.E. Șilov, L. Schwartz.

În țara noastră o serie de profesori de valoare recunoscută au pus bazele unui învățămînt serios al analizei matematice. Menționăm aici numele lui *Spiru Haret* (1851—1912) — întemeietorul învățămîntului românesc modern, autor al unor studii în mecanica cerească făcute cu metode de analiză matematică, *David Emmanuel* (1854—1941) — autorul unui excelent tratat de teoria funcțiilor și *Anton Davidoglu* (1876—1958) — avînd contribuții notabile în teoria ecuațiilor diferențiale.

Printre matematicienii noștri care au obținut rezultate originale de mare însemnătate, recunoscute ca atare pe plan mondial în analiza matematică, în analiza funcțională, teoria funcțiilor și teoria potențialului, subliniem în primul rînd numele lui *Dimitrie Pompeiu* (1873—1954) care, printre altele, a introdus noțiunea de derivată areolară și a demonstrat o teoremă celebră de reprezentare integrală, și numele lui *Traian Lalescu* (1882—1929), autor al unor contribuții de mare importanță în teoria ecuațiilor integrale.

În anii construcției socialiste, matematica românească a cunoscut o dezvoltare deosebită atît pe linia cercetării originale, cît și prin poziția matematicii ca disciplină de învățămînt sau prin legăturile ei cu alte discipline. Lui *Simion Stoilow* (1887—1961) i se datorează lucrări fundamentale, cu rezultate definitive, în teoria topologică a funcțiilor, iar *Miron Nicolescu* (1903—1975) a inițiat și dezvoltat teoria funcțiilor policalorice. S. Stoilow este creatorul școlii românești de teoria funcțiilor (analiza complexă), iar M. Nicolescu este profesorul unei întregi pleiade de tineri cercetători, care se afirmă viguros în domeniul analizei funcționale, teoriei potențialului și teoriei operatorilor.

Datorită unor astfel de prezențe, a devenit o tradiție ca predarea analizei matematice în țara noastră să se afle întotdeauna la cea mai înaltă cotă științifică și didactică.

RĂSPUNSURI ŞI INDICAŢII

CAPITOLUL I

I. § 1 (pagina 12). 1. $x \in \{-a, a\}$; $x = a$; $x \in \{-a, a\}$. **2.** Există $n \in \mathbf{N}$ astfel încît $\frac{y}{x} < n$. **4.** $-3 \leqslant x \leqslant 5$, $-3 \leqslant y \leqslant 7 \Rightarrow -6 \leqslant x + y \leqslant 12$. **5.** a) $x \in \mathbf{R}$; b) $\varnothing$; c) $x \in [0, 2]$; d) $x \in [1, \infty)$; e) $x \in (-\infty, -3) \cup (1, \infty)$; f) $x \in \mathbf{R}$; g) $|x - 1| + |x-1| \cdot |x - 2| > 0 \Rightarrow |x - 1| > 0 \Rightarrow x \in \mathbf{R} \setminus \{1\}$. **6.** $|x - y| > 0$; $|x - y| < \frac{1}{10}$.

7. $\left|\sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i a_i\right| \leqslant \sum_{i=1}^{n} |\varepsilon_i| \cdot |a_i| \leqslant \sum_{i=1}^{n} |a_i|$, deoarece $|\varepsilon_i| \leqslant 1$ pentru orice i cuprins între $1 \leqslant i \leqslant n$. **8.** b) Generalizare: dacă $x_1 \leqslant y_1, \ldots, x_n \leqslant y_n$ şi $x_1 + \ldots + x_n = y_1 + \ldots + y_n$, atunci $x_1 = y_1, \ldots, x_n = y_n$. **10.** Dacă $b_1 = b_2$, atunci $f(x) = 2 \cdot |x + b_1|$ este evident neinjectivă; putem presupune $b_1 < b_2$ etc. În toate cazurile există o paralelă la axa Ox care intersectează graficul lui f în puncte distincte. **13.** Se obţin mulţimi finite de valori în cazurile b, e, f, g. **14.** $\{0\}$; $\varnothing$; $\mathbf{R}$; $[0, 1)$. **15.** Dacă I este un interval mărginit de lungime l, atunci în I se află cel mult $[l] + 1$ numere întregi. **17.** b) $\mathbf{R} \setminus \mathbf{Z} = \bigcup_{k \in \mathbf{Z}} (k, k + 1)$. **18.** Considerăm qx şi există un întreg p unic astfel încît $p \leqslant qx < p + 1$. **20.** $A_1 = [0, 2]$, $A_3 = (-\infty, -1) \cup (3, \infty)$, $A_4 = \mathbf{R}$, $A_5 = (-\infty, -4] \cup [4, \infty)$, $A_6 = [-4, 4)$. **22.** a) $\left|\frac{3n + 1}{n} - 3\right| < \frac{1}{10}$, deci $n > 10$; b) $n > 10^4$; c) $\left|\frac{3n + 1}{n} - 1\right| < \frac{1}{10}$, $\frac{2n + 1}{n} < \frac{1}{10}$ şi inegalitatea nu este verificată pentru $n \in \mathbf{N}$. **23.** a) Nici una; b) cinci; c) una; d) 40. **24.** a) Luăm $N_1 = 10$ $\left(\text{dacă } n \geqslant 10, \text{ atunci } \frac{n}{n^2 + n + 1} < \frac{1}{n} \leqslant \frac{1}{10}\right)$; b) $N_2 = 2$. **25.** a) $M = 2$; b) se observă că $n \leqslant \frac{n^4 + 1}{n^2 + 1}$. **26.** $a = 0$, $b = 3$. **27.** În aproximările $\pi \simeq 3{,}14$, $\sqrt{2} \simeq 1{,}41$ erorile absolute sînt $\varepsilon_1 < \frac{0{,}16}{10^2} < \frac{1}{10^2}$, respectiv $\varepsilon_2 < \frac{0{,}43}{10^2} < \frac{1}{10^2}$. Conform teoremei I.3,1°, avem $\pi + \sqrt{2} \simeq 4{,}55$ cu eroarea absolută cel mult $\frac{0{,}59}{10^2} < \frac{1}{10^2}$. Apoi luăm $\pi \simeq 3{,}141$ şi $\sqrt{2} \simeq 1{,}414$ cu erorile $\varepsilon_1 < \frac{0{,}6}{10^3} < \frac{1}{10^3}$, respectiv $\varepsilon_2 < \frac{0{,}22}{10^3} < \frac{1}{10^3}$; în acest caz $\pi\sqrt{2} \simeq 3{,}141 \times 1{,}414 \simeq 4{,}44$ cu eroarea absolută cel mult $\varepsilon_1\varepsilon_2 + 3{,}141\varepsilon_2 + 1{,}414\varepsilon_1 < \frac{1}{10^7} + \pi\frac{1}{10^3} + \sqrt{2} \cdot \frac{1}{10^4} < \frac{1}{10^2}$. **28.** Trebuie arătat că $\left|\frac{p + 2q}{p + q} - \sqrt{2}\right| \leqslant \left|\frac{p}{q} - \sqrt{2}\right|$ (acesta este sensul exact al expresiei „mai bună"); notăm $u = \frac{p}{q}$ şi avem de arătat că dacă $u > 0$, atunci $\left|\frac{u+2}{u+1} - \sqrt{2}\right| \leqslant |u - \sqrt{2}|$, adică $\left|\frac{(u-\sqrt{2})(1-\sqrt{2})}{u+1}\right| \leqslant$ $\leqslant |u-\sqrt{2}|$ şi pentru aceasta, este suficient de observat că $\frac{\sqrt{2}-1}{u+1} \leqslant 1$. **29.** $|a-b| \leqslant 1$; $a = b$. **30.** Presupunem, prin absurd, că $a > b$ şi luăm $\varepsilon = \frac{a-b}{2}$. Rezultă $b + \varepsilon = b + \frac{a-b}{2} = \frac{a+b}{2} < a$, ceea ce contravine ipotezei că $a < b + \varepsilon$. **32.** Pentru $n = 0$, $n = 1$ inegalitatea este evidentă. Presupunem inegalitatea adevărată pentru n şi o demonstrăm pentru $n+1$; avem $x^{n+1} = x \cdot x^n \geqslant x[1 + n(x-1)] = x + nx^2 - nx$. Dar $x + nx^2 - nx \geqslant 1 + (n+1)(x-1)$ pentru că aceasta revine la $n(x-1)^2 \geqslant 0$. Aşadar, $x^{n+1} \geqslant 1 + (n+1)(x-1)$.

I. § 2 (pagina 20). 1. Notăm cu D_f domeniul maxim de definiţie al unei funcţii reale f. a) $D_f = \mathbf{R}\setminus\{1\}$; b) $D_f = [1, \infty)$; c) $D_f = (1, \infty)$; d) $D_f = (-\infty, -1] \cup (1, \infty)$; e) $D_f = (-\infty, -2] \cup [2, \infty)$; q) $D_f = \mathbf{R}\setminus\{1, -1, \sqrt[4]{31}, -\sqrt[4]{31}\}$; r) $D_f = [-1, 1]$; s) $D_f = \mathbf{R}$; t) $D_f = (1, \infty)$; u) $D_f = \mathbf{R}$; v) $D_f = \{x \in \mathbf{R} \mid \sin x \geqslant 0\} = \bigcup_{k\in\mathbf{Z}} [2k\pi, \pi + 2k\pi]$; w) $D_f = \mathbf{R}\setminus\pi\mathbf{Z}$; z) $D_f = \mathbf{R}\setminus\mathbf{Z}$. **5.** a) $f(x) = \begin{cases} 0, \text{ dacă } x \leqslant 0 \\ x, \text{ dacă } x > 0 \end{cases}$; b) $f(x) = \begin{cases} 2, \text{ dacă } x < 0 \\ 0, \text{ dacă } x \geqslant 0 \end{cases}$;

e) $f(x) = \begin{cases} 0, \text{ dacă } x \in (-\infty, 0) \cup \left[\frac{1}{n}, \infty\right) \\ n, \text{ dacă } x \in \left[0, \frac{1}{n}\right) \end{cases}$ **6.** Notăm $x + 1 = u$, deci $f(u) = (u-1)^2 + 3(u-1) - 1 = u^2 + u - 3$; apoi, notînd $v = 2x - \pi$, avem $f(v) = \cos^2\frac{\pi + v}{2} = \sin^2\frac{v}{2}$ şi, în ultimul caz, $f(u) = \left|\frac{1-u}{2}\right|$. **7.** a) Graficul G_g este obţinut din G_f prin translaţie $(x, y) \longmapsto (x + a, y)$, adică $(x, y) \in G_f \Leftrightarrow (x + a, y) \in G_g$; b) Graficul lui u este obţinut din graficul lui f prin translaţia $(x, y) \longmapsto (x, y + k)$, iar graficul lui v prin transformarea $(x, y) \longmapsto (x, ky)$, adică $y = f(x) \Leftrightarrow ky = v(x)$. **8.** Graficul lui $-f$ este simetricul lui G_f în raport cu Ox; graficul lui $|f|$ coincide cu G_f în punctele unde $f \geqslant 0$ şi este simetricul acestuia în raport cu Ox în punctele unde $f < 0$. Apoi $(\sigma f(x)) = \begin{cases} 0, \text{ dacă } f(x) < 0 \\ 1, \text{ dacă } f(x) \geqslant 0 \end{cases}$ etc.

10. a) Condiţia $|f(x) - 9| < \frac{1}{100}$ revine la $|2x + 7 - 9| < \frac{1}{100}$, adică $|x - 1| < \frac{1}{200}$ şi putem lua $\delta = \frac{1}{200}$; b) Condiţia $g(x) < -100$ revine la $\frac{1}{2x-2} < -100$, adică $x \in \left(\frac{199}{200}, 1\right)$. Luăm $\delta = \frac{1}{100}$.

I. § 4 (pagina 27). 1. a) $1, \frac{1}{3}, \frac{1}{5}; \frac{1}{7}, \frac{1}{9}, \frac{1}{11}$; b) $9, 8, \frac{25}{3}, 9, \frac{49}{5}, \frac{32}{3}$; c) $2, 2, 1, \frac{1}{3}, \frac{1}{12}, \frac{1}{60}$. **2.** a) Pentru $x = 1{,}02$, $n = 100$ se obţine $1{,}02^{100} \geqslant 1 + 100 \cdot 0{,}02 = 3$; b) Dacă $0 < a < 1$, atunci $a = \frac{1}{1+r}$, cu $r > 0$, deci $a^n = \frac{1}{(1+r^n)} < \frac{1}{1+nr}$. Punînd condiţia $\frac{1}{1+nr} > \frac{1}{10}$, rezultă $n > \frac{9}{r}$ şi alegem $N = \left[\frac{9}{r}\right] + 1$; c) Presupunem $a > 1$, deci $a^n = [1 + (a-1)]^n \geqslant 1 + n(a-1)$. Punem condiţia $1 + n(a-1) > 10$ şi rezultă $n > \frac{9}{a-1}$ şi, luînd $N = \left[\frac{9}{a-1}\right] + 1$, rezultă $a^n > 10$, pentru orice $n \geqslant N$. Deoarece $a > 1$, rezultă $a^n > 1$ şi nu putem avea $a^n < \frac{1}{10}$. **3.** a) Dacă mulţimea A este mărginită, atunci există $a < b$ şi $A \subset [a, b]$ şi dacă $B \subset A$, atunci $B \subset [a, b]$, deci B este mărginită; b) $A_1 \cap A_2$ şi $A_1 \setminus A_2$ sînt mulţimi mărginite ca submulţimi ale lui A_1 etc. **4.** 1°. Dacă $a \geqslant b$, atunci $\max(a, b) = a$, $\min(a, b) = b$ şi relaţiile de demonstrat devin $a = \frac{a+b+(a-b)}{2}$; $b = \frac{a+b+(b-a)}{2}$ şi sînt evidente etc. 2°. Dacă $a \neq b$, atunci avem $a < b$ sau $b < a$ şi, în acest caz, $\max(a, b) \neq \neq \min(a, b)$. **5.** a) Minoranţii lui A sînt numerele $x \leqslant -1$, iar majoranţii sînt $x \geqslant 1$, $\min A = -1$, dar $\max A$ nu există; c) $\sin 1 \simeq \sin 57°18'$, $\sin 2 \simeq \sin 114°36'$, $\sin 3 \simeq \simeq \sin 171°54' = \sin 8°06'$, deci $\sin 3 < \sin 1 < \sin 2$, $\min A = \sin 3$, $\max A = \sin 2$; d) $\min A = -2$, $\max A = 4$, minoranţii (respectiv majoranţii) sînt numerele $x \leqslant -2$ (respectiv $x \geqslant 4$); e) Avem $A = \left\{0, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \ldots, \frac{n-1}{n}, \ldots\right\}$, $\min A = 0$, $\max A$ nu există; apoi minoranţii lui A sînt numerele $x \leqslant 0$ etc.; f) $\min A = \frac{1}{3}$, $\max A$ nu există. Minoranţii (respectiv majoranţii) lui A sînt numerele $x \leqslant \frac{1}{3}$ $(x \geqslant 1)$ **6.** Fie $a = = \inf C$, $b = \sup C$. Arătăm că $\sup(-C) = -a$. Pentru orice $x \in -C$, avem $-x \in C$, deci $-x \geqslant a$, adică $x \leqslant -a$, deci $-a$ este un majorant al mulţimii $-C$. Apoi $-a$ este cel mai mic majorant al lui $-C$ (într-adevăr, dacă c este un majorant oarecare pentru $-C$, atunci $-c$ este un minorant pentru C, deci $-c \leqslant a$, adică $-a \leqslant c$). Aşadar $-a = \sup(-C)$ etc. **7.** $\inf M_1 = -\sqrt{2}$, $\sup M_1 = \sqrt{2}$; $\inf M_2 = -\sqrt{2}$, $\sup M_2 = \sqrt{2}$; $\inf M_3 = -2$, $\sup M_3 = 2$. **8.** a) $\inf a_n = 0$, $\sup a_n = 1$; b) Avem $0 \leqslant a_n \leqslant \frac{2}{\sqrt{n}} \leqslant 2$, pentru orice $n \geqslant 1$ şi $\inf a_n = 0$, $\sup a_n = a_0 = \sqrt{2}$; c) $\inf a_n = 0$, $\sup a_n = 1$; d) $\inf a_n = \frac{1}{2}$, $\sup a_n = 2$; e) $\inf a_n = a_0 = 0$, $\sup a_n = 10$; f) $\inf a_n = \cos 1$, $\sup a_n = 1$. **9.** a) $A = = (\sqrt{3}, \infty)$, deci $\inf A = \sqrt{3}$, $\sup A = \infty$; c) Avem $\inf A = 0$, $\sup A = \infty$; d) $\inf A = = -\infty$, $\sup A = \infty$. **10.** a), c). **11.** Da, nu, da. **12.** a) şi c) sînt vecinătăţi ale lui ∞, iar b), c) sînt vecinătăţi pentru $-\infty$. **13.** În orice vecinătate $(-r, r)$, $r > 0$ a originii se află o infinitate de numere de forma $\frac{1}{n^2}$ $\left(\text{pentru că avem } \frac{1}{n^2} < r, \text{ pentru orice } n > \frac{1}{\sqrt{r}}\right)$. Apoi în orice interval (a, ∞) se află o infinitate de pătrate de numere naturale. **14.** În orice vecinătate a punctului $\alpha = 8$ se află o infinitate de elemente ale fiecărei mulţimi D. **15.** Punctele de acumulare: a) $[-1, 1]$; b) $[-\infty, 1] \cup [5, \infty]$; c) $\pm\infty$; d) $\overline{\mathbf{R}}$; e) originea; f) $D = [0, 1] \cup \{-1\}$. În exemplele c) şi e) punctele sînt izolate. **16.** Fie $A = \{a_n \mid n \geqslant 0\}$ şi $a = \sup A$. Avem $a_n \leqslant b_n$, $\forall\, n \geqslant 0$, deci $a \leqslant b = \inf b_n$. Pentru orice $c \in [a, b]$, avem $a_n \leqslant a \leqslant c \leqslant b \leqslant b_n$, adică $c \in I_n$, pentru orice $n \geqslant 0$.

I. § 5 (pagina 35). **1.** Funcţiile a, c, h, i, j sînt pare, iar d, e, f, k sînt impare. **2.** Perioadele principale sînt respectiv π, π, $\frac{2\pi}{|\omega|}$. **3.** a) În acest caz, $(x, y) \in G_f \Leftrightarrow \Leftrightarrow (2a - x, y) \in G_f$, adică $y = f(x) \Leftrightarrow y = f(2a - x)$ şi aceasta revine la existenţa relaţiei $f(x) = f(2a - x)$ pentru orice $x \in \mathbf{R}$. O funcţie $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ are graficul simetric faţă de punctul $(a, 0)$, dacă şi numai dacă $f(2a - x) = -f(x)$, $\forall\, x \in \mathbf{R}$; b) Aşadar $f(x) = f(2a - x) = f(2b - x)$ pentru orice $x \in \mathbf{R}$ $(a < b)$; înlocuim $x = 2a - y$ şi rezultă că pentru orice $y \in \mathbf{R}$ avem $f(y) = f(2b - 2a + y)$, deci f este periodică cu perioada $2b - 2a$. **4.** Dacă $x_1 < x_2$, atunci $x_1^3 < x_2^3$, $x_1^5 < x_2^5$ şi rezultă imediat $f(x_1) < f(x_2)$ şi $g(x_1) < g(x_2)$. **5.** a) f nu este monotonă pe $\mathbf{R}$; b) este strict crescătoare; c) f este strict descrescătoare pe $[0, \pi]$; d) Presupunem $x_1 < x_2$. Diferenţa $f(x_2) - f(x_1) = \frac{x_2^2}{1 + x_2^2} - \frac{x_1^2}{1 + x_1^2} = \frac{x_2^2 - x_1^2}{(1 + x_2^2)(1 + x_1^2)}$ nu are un semn constant, deci f nu este monotonă pe $\mathbf{R}$ (f este monoton descrescătoare pe $(-\infty, 0]$ şi monoton crescătoare pe intervalul $[0, \infty)$. **6.** f rezultă injectivă (dacă $x_1 \neq x_2$, de exemplu, dacă $x_1 < x_2$, rezultă $f(x_1) < f(x_2)$, adică $f(x_1) \neq f(x_2)$). Apoi, dacă $y_1 < y_2$, rezultă $f^{-1}(y_1) < f^{-1}(y_2)$; în caz contrar, avem $f^{-1}(y_2) \leqslant f^{-1}(y_1)$ şi aplicînd f, ar rezulta $y_2 \leqslant y_1$, ceea ce este absurd. **8.** a) $a_n = (-1)^n \cdot \frac{1}{n}$, $n > 1$; b) $a_n = n^2$, $n \geqslant 0$. **9.** Se arată că diferenţa $a_{n+1} - a_n$ este pozitivă pentru orice $n \geqslant 1$ $(n \in \mathbf{N})$. **10.** a) $|f(x)| \leqslant 3$, $\forall x \in \mathbf{R}$; b) $|f(x)| \leqslant \frac{1}{2}$, $\forall x \in \mathbf{R}$; $0 \leqslant f(x) < 1$, $\forall x \in \mathbf{R}$; d) $0 \leqslant f(x) \leqslant 1$, $\forall x \in \mathbf{R}$; e) $|f(x)| \leqslant 2$, $\forall x \in \mathbf{R}$; f) $0 \leqslant f(x) \leqslant 1$, $\forall x \in \mathbf{R}$. **11.** Funcţiile b, f sînt mărginite. **12.** Vom nota $m = \inf\limits_{x \in D} f(x)$, $M = \sup\limits_{x \in D} f(x)$. Răspunsurile sînt: a) $m = -1$, $M = 1$; b) $m = 0$, $M = 1$; c) $m = 0$, $M = 1$; d) $m = 0$, $M = 1$.

CAPITOLUL II

II. § 1 (pagina 48). 1. a) Pentru orice $\varepsilon > 0$, condiţia $\frac{1}{n^2} < \varepsilon$ este îndeplinită pentru orice $n > \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}$ şi, în particular, pentru orice $n \geqslant N$, unde $N = \left[\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\right] + 1$. Aşadar, $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} = 0$. Putem, de asemenea, folosi următorul rezultat general: dacă $(a_n)_{n \geqslant k}$ este un şir crescător şi nemărginit, atunci $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{a_n} = 0$, aplicat pentru $a_n = n^2$, $n \geqslant 1$; b) Pentru orice $\varepsilon > 0$, condiţia $\frac{n}{n^2 + 1} < \varepsilon$, adică $\varepsilon n^2 - n + \varepsilon > 0$ este îndeplinită pentru orice n în cazul cînd $\varepsilon > \frac{1}{2}$; dacă $0 < \varepsilon \leqslant \frac{1}{2}$, atunci, luînd $N(\varepsilon) = \left[\frac{1 + \sqrt{1 - 4\varepsilon^2}}{2}\right] + 1$, condiţia anterioară are loc pentru orice $n \geqslant N(\varepsilon)$. De asemenea, se poate aplica rezultatul general amintit mai sus pentru $a_n = \frac{n^2 + 1}{n} = n + \frac{1}{n}$, care este un şir crescător şi nemărginit. Se poate raţiona similar pentru toate celelalte exerciţii. **2.** Avem de arătat că $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2}{n} = 0$, $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{3}{n} = 0$, $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{p}{n} = 0$ ($p \geqslant 1$ fixat), $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{n} = 1$, ceea ce este evident. **3.** Fie $a_n = \frac{4n - 1}{n}$, $n \geqslant 1$ şi V o vecinătate oarecare a punctului $a = 4$. Aşadar există

$r >$ astfel încît $(4 - r, 4 + r) \subset V$. Punem condiţia $a \in (4 - r, 4 + r)$, adică $|a_n - 4| < r$, adică $\left|\frac{4n-1}{n} - 4\right| < r$, deci $n > \frac{1}{r}$. Aşadar, toţi termenii a_n ai şirului pentru $n > \frac{1}{r}$ aparţin lui V. Se raţionează similar în cazul exerciţiului secund. **4.** Şirurile b, c, e, f, g, h sînt convergente. Şirul a) nu este convergent deoarece are trei subşiruri care converg către limite distincte, iar pentru şirul d) $a_{2n} \to 2$, $a_{2n+1} \to 0$, deci şirul $(a_n)_{n\geq 0}$ este divergent. **5.** Există $\varepsilon > 0$ astfel încît pentru orice N natural să existe n natural $n \geqslant N$ cu proprietatea că $|a_n - a| \geqslant \varepsilon$. **6.** Avem $0 \leqslant a_n \leqslant 1$ şi $a_{n+1} - a_n \geqslant 0$ pentru orice $n \geqslant 0$, deci şirul $(a_n)_{n\geqslant 0}$ este monoton şi mărginit. Avem $a_0 = 0$, $a_1 = \frac{1}{5}$, $a_2 = \frac{1}{2}$, $a_3 = \frac{9}{13}$, $a_4 = \frac{4}{5}$, $a_5 = \frac{25}{29}$, $a_6 = \frac{9}{10}$ etc. şi ne este sugerat că $a_n \to 1$. Într-adevăr $|a_n - 1| = \left|\frac{n^2}{n^2+4} - 1\right| = \frac{4}{n^2+4} \to 0$. **7.** a) $a_1 = 1{,}002$; $a_2 = 0{,}252$; $a_3 \simeq 0{,}113$; $a_4 = 0{,}0645$; $a_5 = 0{,}042$. Nu! (avem $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0{,}002$); b) Avem $a_{2n} \to 2$ şi $a_{2n+1} \to 0$, deci şirul este divergent. **8.** a) Şirul este mărginit; b) Şirul este constant, $a_n = 0, \forall\, n \geqslant 0$; c) $a_n \to 0$. **9.** a) $0 \leqslant \frac{\cos^2 n}{n} \leqslant \frac{1}{n}$; $\left|\frac{2^n - 1}{2^n + 1} - 1\right| = \frac{2}{2^n+1} < \frac{1}{n}$; $\left|\frac{4n+1}{n+1} - 4\right| = \frac{3}{n+1}$; $\left|\frac{1}{n}\sin\frac{n\pi}{3}\right| \leqslant \frac{1}{n}$; c) $n^2 + 1 > n$. **11.** a) Avem $|a_{n+2} - a_n| = |a_{n+2} - a + a - a_n| \leqslant |a_{n+2} - a| + |a - a_n|$. Deoarece $a_n \to a$, rezultă $|a_n - a| \to 0$, $|a_{n+2} - a| \to 0$, deci $a_{n+2} - a_n \to 0$; b) Dacă $a_n \to a$, atunci în afara oricărei vecinătăţi a lui a se află un număr finit de termeni ai şirului $(a_n)_{n\geqslant 0}$, deci un număr finit de termeni ai şirului $(a_{p(n)})_{n\geqslant 0}$. Aşadar, $a_{p(n)} \to a$. **13.** $a + \frac{1}{n} \to a$; luăm $b_n = \frac{a}{n}$, $c_n = \frac{1}{n}$. **14.** Pentru orice $\varepsilon > 0$ condiţia $\sqrt{n} > \varepsilon$ este îndeplinită pentru orice $n > \varepsilon^2$, deci pentru orice $n \geqslant N$, unde $N = [\varepsilon^2] + 1$. Apoi $2^{n-1} \geqslant n$ şi $\frac{n^2+4}{n} \geqslant n$ pentru orice $n \geqslant 1$ şi aplicăm teorema II.4,2°. **15.** De exemplu, $a_n = -n + (-1)^n$, $n \geqslant 1$. **16.** Dacă un şir $(a_n)_{n\geqslant 0}$ este nemărginit, atunci el nu poate fi convergent, conform teoremei II.3. Şirurile $(2^n)_{n\geqslant 0}$, $((-2)^n)_{n\geqslant 0}$ sînt nemărginite, deci divergente; primul are limita ∞ şi al doilea nu are limită.

II. § 2 (pagina 57). 1. a) Dacă $x_n \to \alpha$, $x_n \neq \alpha$, atunci $x_n + 5 \to \alpha + 5$, deci $f(x_n) \to f(\alpha)$. Aşadar, $\lim\limits_{x\to\alpha} f(x) = f(\alpha)$, adică $\lim\limits_{x\to\alpha} (x + 5) = \alpha + 5$; b) Dacă $x_n \to \alpha$, $x_n \neq \alpha$, atunci $x_n^2 \to \alpha^2$, deci $\lim\limits_{x\to\alpha} x^2 = \alpha^2$; c) $\lim\limits_{x\to\alpha} (x^2 + 5) = \alpha^2 + 5$. **2.** $x = 1$; dacă $x_n \to 1$, $x_n \neq 1$, atunci şirul $f(x_n) = \frac{1}{2x_n - 2}$ nu are limită. În cazul secund, funcţia f nu are limită în punctele $x = 0$, $x = 2$. **3.** a) Fie V o vecinătate oarecare a punctului $l = \frac{2}{3}$, deci există $\varepsilon > 0$ astfel încît $\left(\frac{2}{3} - \varepsilon, \frac{2}{3} + \varepsilon\right) \subset V$. Notăm $f(x) = \frac{x+1}{x+2}$, $x \neq -2$ şi punem condiţia ca $f(x) \in \left(\frac{2}{3} - \varepsilon, \frac{2}{3} + \varepsilon\right)$, adică $\left|\frac{x+1}{x+2} - \frac{2}{3}\right| < \varepsilon$ sau, echivalent, $\frac{|x-1|}{|x+2|} < 3\varepsilon$. Alegem δ astfel încît $0 < \delta < 2$ şi $\delta < 3\varepsilon$ şi notăm $U = (1 - \delta, 1 + \delta)$. Atunci, dacă $x \in U$, $x \neq 1$, avem $x + 2 > 3 - \delta > 1$, deci $\frac{1}{|x+2|} < 1$ şi $|x - 1| < \delta < 3\varepsilon$ şi, ca atare, am arătat că dacă $x \in U$, $x \neq 1$, avem $f(x) \in V$ şi, în concluzie, $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = \frac{2}{3}$; b) Similar.

4. Se aplică teorema II.7 şi avem $f(0-0)=-\infty$, $f(0+0)=\infty$, $g(0-0)=-\infty$, $g(0+0)=\infty$ şi, ca atare, f şi g nu au limită în origine. Apoi $(f-g)(x)=3x$, $\left(\frac{f}{g}\right)(x)=$ $=\frac{5x^2+1}{2x^2+1}$ şi $\lim\limits_{x\to0}(f-g)(x)=0$, $\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{f}{g}\right)(x)=1$ etc. **5.** a) Fie V o vecinătate oarecare pentru ∞; alegem $\varepsilon>0$ astfel încît $(\varepsilon,\infty]\subset V$ şi punem condiţia $\frac{1}{(x-1)^2}>\varepsilon$, adică $(x-1)^2<\frac{1}{\varepsilon}$, sau $|x-1|<\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}$. Luînd $U=\left(1-\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}},\ 1+\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\right)$ rezultă că pentru orice $x\in U$ avem $\frac{1}{(x-1)^2}\in V$, deci $\lim\limits_{x\to1}\frac{1}{(x-1)^2}=\infty$, folosind definiţia II.4; b) Condiţia (4) nu poate fi îndeplinită pentru nici o valoare $l\in\overline{\mathbf{R}}$, deoarece orice vecinătate a punctului $x=1$ conţine puncte unde $f(x)$ este oricît de mare sau oricît de mic. De altfel, $f(1-0)=-\infty$, $f(1+0)=\infty$. **6.** Funcţiile f, g au limită în orice punct, iar h are limită în orice punct $x\neq1$. **7.** Funcţiile g şi h nu au limită în punctul $x=0$, dar f,g,h au limită în orice punct $x\neq0$. **8.** a) $f(0-0)=f(0+0)=0$; b) $f(0-0)=$ $=-1$; $f(0+0)=1$; c) $f(0-0)=0$, $f(0+0)=2$; d) $f(1-0)=1$, $f(1+0)=2$; e) $f(7-0)=9$; $f(7+0)=9$; $f(2-0)=f(2+0)=4$. **9.** Pentru $k=-2$; pentru nici o valoare a lui k. **10.** a) $S_{f,\alpha}=0$; b) $f(2+0)=8$, $f(2-0)=3$, deci $S_{f,\alpha}=5$; c) $f(1+0)=k+2$, $f(1-0)=-1$, deci $S_{f,\alpha}=k+3$.

II. § 3 (pagina 68). **1.** Se aplică teorema II.8. **2.** Aşadar există $M>0$ astfel încît $|b_n|\leqslant M$ pentru orice $n\geqslant0$. Atunci, $|a_nb_n-0|\leqslant M\cdot|a_n|$ şi, aplicînd teorema II.4.1°, rezultă $a_nb_n\to0$. **3.** Fie $a_n\to a$, $a\neq0$. Atunci $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}a_{n+1}}{\lim\limits_{n\to\infty}a_n}=\frac{a}{a}=1$. Pentru partea secundă luăm $a_n=\frac{-(1)^n}{n}$ şi avem $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=-1$. **4.** $c_n=\frac{n^2\left(2+\frac{7}{n}-\frac{10}{n^2}\right)}{n^2\left(5+\frac{1}{n^2}\right)}=$ $=\frac{2+\frac{7}{n}-\frac{10}{n^2}}{5+\frac{1}{n^2}}$ şi luăm $a_n=2+\frac{7}{n}-\frac{10}{n^2}$, $b_n=5+\frac{1}{n^2}$. Evident $\lim\limits_{n\to\infty}c_n=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}a_n}{\lim\limits_{n\to\infty}b_n}=$ $=\frac{2}{5}$. **5.** Se procedează ca la exerciţiul precedent. a) $\frac{1}{2}$; b) 1; c) 0; d) 8. **6.** Avem $1\leqslant\sqrt[n]{1^p+2^p+\ldots+n^p}\leqslant\sqrt[n]{n\cdot n^p}=(\sqrt[n]{n})^{p+1}$ şi $\sqrt[n]{n}\to1$ etc. **7.** 1°. Dacă l e finit, luăm $a_n=\frac{l}{n}$, $b_n=\frac{1}{n}$; pentru $l=\infty$, $a_n=\frac{1}{n}$, $b_n=\frac{1}{n^2}$; pentru $l=-\infty$, $a_n=$ $=-\frac{1}{n}$, $b_n=\frac{1}{n^2}$; 2°. Pentru $l\in\mathbf{R}$, luăm $a=n+l$, $b_n=n$; pentru $l=\infty$, $a_n=$ $=n^2+n$, $b_n=n$ etc.

II. § 4 (pagina 78). **1.** a) 0; b) 1; c) 0; d) 4; e) ∞; f) 0; g) 0; h) 0; i) 1; j) ∞; k) ∞; l) ∞; m) $-\infty$; n) 0; o) 2; p) $\frac{1}{3}$; q) 0; r) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n\cdot\frac{n(n+1)}{2}}{\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3n}{2n+1}=\frac{3}{2}$; s) $\frac{1}{3}$; t) $\frac{1}{2}$; u) 100; v) ∞; w) 0; y) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a^n-1}{a^{n^2}+1}=\begin{cases}-1, & \text{dacă } |a|<1\\ 0, & \text{dacă } a=1\\ 0, & \text{dacă } |a|>1\end{cases}$;

z) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a^{2n}-1}{a^{2n}+1} = \begin{cases} -1, \text{ dacă } |a|<1 \\ 1, \text{ dacă } |a|>1 \\ 0, \text{ dacă } a=\pm 1 \end{cases}$. **2.** Dacă $R = \frac{P}{Q}$, avem $\frac{R(n)}{R(n+1)} = \frac{P(n)\cdot Q(n+1)}{Q(n)\cdot P(n+1)} \to 1$, deoarece $\frac{P(n)}{P(n+1)} \to 1$, $\frac{Q(n+1)}{Q(n)} \to 1$ (P, Q fiind funcţii polinomiale). **3.** $a_n = \frac{1\cdot 3}{2}\cdot\frac{2\cdot 4}{3^2}\cdot\frac{3\cdot 5}{4^2}\cdot\ldots\cdot\frac{(n-2)\cdot n}{(n-1)^2}\cdot\frac{(n-1)(n+1)}{n^2} = \frac{n+1}{2n} \to \frac{1}{2}$.

4. $a=1$, $b=0$, $c=1$. **5.** $|b|<1$, a arbitrar sau $b\neq 1$, $a = \frac{1}{1-b}$. **6.** Arătăm prin inducţie că $0 \leqslant a_n \leqslant 2$ pentru orice $n \geqslant 1$. Pentru $n=1$ afirmaţia este evidentă; apoi dacă $0\leqslant a_n \leqslant 2$, atunci $0 \leqslant a_{n+1} = \sqrt{2+a_n} \leqslant \sqrt{2+2} = 2$. Şirul este crescător; într-adevăr, avem $a_{n+1} \geqslant a_n$, adică $\sqrt{2+a_n} \geqslant a_n$, $a_n^2 - a_n - 2 \leqslant 0$ sau $(a_n-2)(a_n+1) \leqslant 0$, deoarece $0 \leqslant a_n \leqslant 2$. Aşadar, şirul este convergent şi fie $a_n \to l$, deci $l \geqslant 0$ şi, din relaţia de recurenţă, $l = \sqrt{2+l}$, de unde $l=2$. **7.** Pentru $n=0, 1, 2$ relaţia se verifică; o presupunem adevărată pentru orice $k \leqslant n$ şi o probăm pentru $n+1$, adică presupunem $a_{n-2} = \frac{2a_1+a_0}{3} + (-1)^{n-1}\frac{a_1-a_0}{3\cdot 2^{n-3}}$ şi $a_{n-1} = \frac{2a_1+a_0}{3} + (-1)^n\cdot\frac{a_1-a_0}{3\cdot 2^{n-2}}$ şi probăm acelaşi lucru pentru a_n, folosind relaţia $a_n = \frac{a_{n-1}+a_{n-2}}{2}$. Apoi $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \frac{2a_1+a_0}{3}$. **8** $x_{n+1}-1 = (x_n-1)^2$ şi notăm $y_n = x_n - 1$, $y_1 \in [0, 1]$ etc. **9.** Evident $c_n \geqslant 0$. Mai mult, se verifică prin inducţie că avem $c_n \geqslant \sqrt{2}$; într-adevăr $c_1 \geqslant \sqrt{2}$ şi dacă $c_n \geqslant \sqrt{2}$, atunci $c_{n+1} = \frac{2+c_n^2}{2c_n} \geqslant \sqrt{2}$, deoarece $(c_n - \sqrt{2})^2 \geqslant 0$. Apoi $c_{n+1} - c_n = \frac{2+c_n^2}{2c_n} - c_n = \frac{2-c_n^2}{2c_n} < 0$. Aşadar, şirul $(c_n)_{n\geqslant 1}$ este descrescător şi mărginit inferior, deci convergent. **10.** Alegem q astfel încît $l<q<1$. Conform ipotezei, există N astfel încît $\frac{a_{n+1}}{a_n} < q$ pentru orice $n \geqslant N$, deci $a_{N+1} < qa_N$, $a_{N+2} < qa_{N+1} < q^2a_N$, şi, în general, $0 < a_{N+k} < q^k\cdot a_N$. Pentru $k\to\infty$ rezultă $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$. Notăm $a_n = \frac{n}{2^n}$; avem $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{n+1}{2n} = \frac{1}{2}$, deci, conform celor spuse mai sus, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ etc. **11.** a) Pentru orice $k\geqslant 1$, $\frac{1}{4k^2-1} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k+1}\right)$, deci $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4n^2-1} = \lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{4k^2-1} = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2n+1}\right) = \frac{1}{2}$; b) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^2+n} = \lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=2}^{n}\frac{1}{k^2+k} = \lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=2}^{n}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) = \lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{n+1}\right) = \frac{1}{2}$; c) $-\frac{1}{3}$; d) 2; e) $\frac{1}{21}$; f) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2n+1}{n!} = 2\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n-1)!} + \sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!} = 2\left(1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\ldots\right) + \left(\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\ldots\right) = 2e + (e-1) = 3e-1$. **12.** Sumele parţiale de rang n sînt $s_n = 1 - \frac{1}{\sqrt[3]{n+1}} \to 1$ şi respectiv $s_n = \sqrt[3]{n+1} - 1 \to \infty$.

II. § 5 (pagina 76). 1. a) $f(-5-0) = -\infty$, $f(-5+0) = \infty$; b) dacă $x_n \to 3$, $x_n < 3$, atunci $\frac{1}{x_n - 3} \to -\infty$ şi $2^{\frac{1}{x_n-3}} \to 0$, deci $f(3-0) = 1$; similar, dacă $x_n \to 3$, $x_n > 3$, atunci $\frac{1}{x_n - 3} \to \infty$, $2^{\frac{1}{x_n - 3}} \to \infty$ şi $f(3+0) = 0$; c) $f(0-0) = f(0+0) = \infty$; d) $f(-1-0) = f(-1+0) = \infty$. De remarcat că limita există (fără a fi finită) doar în cazurile c şi d. **2.** a) ∞; b) 2; c) 0; d) 0; e) $-\infty$; f) 3; g) ∞; h) $-\infty$; i) ∞; j) $\frac{11}{2}$.

3. Presupunem că există $l = \lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$. Arătăm atunci că există limita $\lim\limits_{x \to \infty} f(-x)$ şi că este egală cu l. Într-adevăr, fie un şir oarecare $x_n \to \infty$, atunci $-x_n \to -\infty$ şi, conform ipotezei, $f(-x_n) \to l$. Reciproca se demonstrează similar. Regula stabilită poate fi formulată şi astfel: limita $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ există dacă (punînd $x = -z$) există limita $\lim\limits_{z \to -\infty} f(-z)$ şi, în acest caz, cele două limite sînt egale; pe scurt, $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{z \to \infty} f(-z)$. Aplicaţie:

a) $\lim\limits_{x \to -\infty} (x^2 - x) = \lim\limits_{z \to \infty} (z^2 + z) = \infty$; b) $\lim\limits_{x \to -\infty} (x + \sqrt{x^2 + 1}) = \lim\limits_{z \to \infty} (\sqrt{z^2 + 1} - z) =$

$$= \lim_{z \to \infty} \frac{1}{\sqrt{z^2+1} + z} = 0; \quad \text{c)} \lim_{x \to -\infty} \frac{4x^2 + 1}{7x^2 + 3} = \lim_{z \to \infty} \frac{4z^2 + 1}{7z^2 + 3} = \lim_{z \to \infty} \frac{z^2\left(4 + \frac{1}{z^2}\right)}{z^2\left(7 + \frac{3}{z^2}\right)} =$$

$$= \lim_{z \to \infty} \frac{4 + \frac{1}{z^2}}{7 + \frac{3}{z^2}} = \frac{\lim\limits_{z \to \infty}\left(4 + \frac{1}{z^2}\right)}{\lim\limits_{z \to \infty}\left(7 + \frac{3}{z^2}\right)} = \frac{4}{7}; \quad \text{d)} \lim_{x \to -\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}} = \lim_{z \to \infty} \frac{-z}{\sqrt{z^2 + 1}} =$$

$$= \lim_{z \to \infty} \frac{-z}{z\sqrt{1 + \frac{1}{z^2}}} = -\lim_{z \to \infty} \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{z^2}}} = -1.$$

II. § 6 (pagina 80). 1. a) Funcţia admite doar asimptota orizontală $y = 2$ (spre $-\infty$ şi spre $+\infty$); b) $x = -1$, $x = 1$ asimptote verticale; $y = 0$ asimptotă orizontală spre $-\infty$ şi spre $+\infty$; c) $x = 0$, $x = -2$, $y = 0$; d) $x = 0$ asimptotă verticală la dreapta şi $y = 0$ asimptotă orizontală spre ∞; e) $x = -1$; $y = -1$ (respectiv $y = 1$) asimptotă orizontală spre $-\infty$ (respectiv $+\infty$); f) $y = -1$ (respectiv $y = 1$) asimptotă orizontală spre $-\infty$ (respectiv ∞), $x = -2$ asimptotă verticală; g) $x = 1$, $x = 5$ verticale, $y = 0$ orizontală; h) $x = 0$ verticală, $y = x + 1$ oblică (spre $-\infty$ şi $+\infty$); i) $D = (-\infty, 0)$ şi $f(x) = 0$, $\forall x \in D$. În acest caz $y = 0$ este asimptotă orizontală spre $-\infty$; j) $x = 0$ verticală; $y = 1$ spre $-\infty$ şi ∞; k) $x = 1$ verticală; $y = x + 1$ oblică spre $+\infty$ şi $y = -x - 1$ oblică spre $-\infty$; l) $D = \mathbf{R}$. Funcţia nu are asimptote. **2.** a) $a = 5$, b nedeterminat; b) $a = \frac{1}{2}$, $b = -\frac{1}{4}$; c) $a = 8$, $b = 2$. **3.** $f(x) = \frac{1}{\sin \pi x}$.

II. § 7 (pagina 92). 1. a) -1; b) 0; c) 0; d) 0; e) 91; f) ∞; g) $-\infty$; h) ∞; i) $-\infty$; j) $2\sqrt{6}$; l) $-\infty$; m) 0; n) ∞; p) -1; q) ∞; r) ∞; s) 1; t) -1; u) 1; v) 1.

2. a) $\frac{m}{n}$; b) 1, dacă $m = n$; 0, dacă $m < n$; ∞, dacă $m > n$. **3.** a) $\frac{2}{3}$; b) $\frac{2}{3}$; c) ∞; d) 0; e) $-\infty$; f) 2; g) -2. **5.** $P(x) = (ax + b)Q(x) + r$, gr $r <$ gr Q; $\lim\limits_{x \to \infty}\left[\frac{P(x)}{Q(x)} - (ax + b)\right] =$ $= \lim\limits_{x \to \infty} \frac{r}{Q(x)} = 0$. **6.** Alegem şirurile $x'_n = \frac{1}{n\pi}$, $x''_n = \frac{1}{\frac{\pi}{2} + 2n\pi}$ $(n \geq 1)$ care converg către zero, iar $f(x'_n) \to 0$, $f(x''_n) \to 1$, deci limita $\lim\limits_{x \to 0} \sin \frac{1}{x}$ nu există etc.

7. a) $\frac{1}{3}$; b) $\frac{1}{2}$; c) $\frac{1}{2\sqrt{a-b}}$; d) $\frac{1}{2}$; e) $-\frac{1}{2}$; f) 1; g) ∞; h) $\frac{5}{4}$; i) 1; j) $\frac{1}{4}$; k) 6; l) 0; m) 0; n) 0; o) $\frac{1}{e}$. **8.** a) $l_s = 0$; $l_d = \infty$; b) $l_s = 0$, $l_d = \infty$; c) $l_s = l_d = \infty$; d) $l_s = \infty$; $l_d = 0$; e) $l_s = l_d = \infty$. **9.** a) $-\infty$; b) ∞; c) 0; d) ∞; e) 0; f) ∞; g) $-\infty$; h) 0.

10. $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{P(x)}{\ln x} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{x^n\left(a_0 + \frac{a_1}{x} + \ldots + \frac{a_n}{x^n}\right)}{\ln x} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{x^n}{\ln x} \cdot \lim\limits_{x\to\infty}\left(a_0 + \frac{a_1}{x} + \ldots + \frac{a_n}{x^n}\right) =$ $= a_0 \cdot \lim\limits_{x\to\infty} \frac{x^n}{\ln x} = \infty$. Se foloseşte esenţial faptul că $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{e^x}{x} = \infty$. **11.** a) $x = 0$ este asimptotă verticală la dreapta $\left(\text{deoarece } \lim\limits_{x\to 0,\, x>0} x \cdot e^{\frac{1}{x}} = \lim\limits_{z\to\infty} \frac{e^z}{z} = \infty\right)$; $y = x + 1$ este asimptotă oblică spre $-\infty$ şi spre $+\infty$; b) $y = 1$ este asimptotă orizontală spre $-\infty$ şi spre ∞; k) $x = \frac{5}{3}$ este asimptotă verticală, $y = -\frac{1}{3}$ asimptotă orizontală spre $-\infty$, $y = \frac{1}{3}$ asimptotă orizontală spre ∞; l) $x = 1$, $x = -1$ sînt asimptote verticale. **12.** a) e^{-4}; b) e^{-1}; c) e; d) 1; e) 1; f) e. **13.** Logaritmînd, avem de arătat că $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\ln a_1 + \ln a_2 + \ldots + \ln a_n}{n} = \ln a$, ceea ce rezultă din faptul că, dacă $c_n \to a$ (în **R**), atunci $\frac{1}{n}(c_1 + c_2 + \ldots + c_n) \to a$. **14.** $k = 1$.

CAPITOLUL III

III. § 1 (pagina 107). 1. a) Dacă $x_n \to 1$, $x_n \neq 0$, atunci $f(x_n) = \frac{1}{x_n} \to 1$, adică $f(x_n) \to f(1)$; similar, dacă $x_n \to -5$, atunci $\frac{1}{x_n} \to -\frac{1}{5}$, adică $f(x_n) \to f(-5)$; b) dacă $x_n \to 2$, $x_n \leq 2$, atunci $f(x_n) = \sqrt{2 - x_n} \to 0 = f(0)$. **2.** Condiţia $|f(x) - 1| < \frac{1}{10}$ se scrie $|x^3 - 1| < \frac{1}{10}$ şi cum $|x + 1| \leq 4$ (deoarece $0 \leq x \leq 3$), condiţia anterioară este îndeplinită dacă $|x - 1| < \frac{1}{40}$, adică pentru $\delta = \frac{1}{40}$. Este adevărat că f este continuă în punctul $x = 1$, dar trebuie verificat că pentru orice $\varepsilon > 0$ $\left(\text{şi nu numai pentru } \varepsilon = \frac{1}{10}\right)$ există $\delta > 0$ astfel încît $|x - 1| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(1)| < \varepsilon$. **3.** a, b, d, h. **4.** Orice punct $x \neq 0$. **5.** Avem $f(3 - 0) = 6$, $f(3 + 0) = 3a$, $f(3) = 6$ şi continuitatea lui f în punctul $x = 3$ are loc pentru $a = 2$. **6.** Funcţia f este continuă pe intervalele $(-\infty, 2)$, $(2, \infty)$, fiind elementară. Condiţia de continuitate în punctul $x = 2$ este $4 + a = 2a + b$; apoi limitele la stînga şi la dreapta ale raportului considerat sînt egale cu 4 şi a, deci $4 + a = 2a + b$, $a = 4$. Atunci $a = 4$, $b = 0$. **7.** $x^2 - 2x \leq f(x) \leq x^2 + 2x$, $\forall x \in \mathbf{R}$. Pentru $x = 0$ rezultă $f(0) = 0$. Apoi pentru orice şir $x_n \to 0$ rezultă $x_n^2 - 2x_n \leq f(x_n) \leq x_n^2 + 2x_n$, deci $f(x_n) \to 0$. **8.** $f(0 - 0) \neq f(0 + 0)$, $g(0 - 0) = 0$ şi $g(0 + 0) = \infty$. **10.** a) În punctele $x \neq 0$ funcţia f este continuă, fiind elementară, iar în punctul $x = 0$ avem $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = f(0)$; într-adevăr, $\left| x \sin\frac{1}{x} - 0 \right| \leq |x|$, adică $\lim\limits_{x\to 0} x \sin\frac{1}{x} = 0$; b) în orice vecinătate V a originii, funcţia f este nenulă, dar se anulează de o infinitate de ori, deci nu poate fi monotonă pe V. **12.** a) $f = 0$ este continuă;

$$\text{b) } f(x) = \begin{cases} 0, & \text{dacă } x < 0 \\ \frac{1}{2}, & \text{dacă } x = 0 \text{ şi } f \text{ este continuă} \\ 1, & \text{dacă } x > 0 \end{cases}$$

în $\mathbf{R} \setminus \{0\}$; d) $f = \operatorname{sgn}$ şi este continuă în $\mathbf{R} \setminus \{0\}$. **13.** Fie $x_0 \in I$ şi $f(x) = \begin{cases} 1, & \text{dacă } x \in I \setminus \{x_0\} \\ 0, & \text{dacă } x = x_0 \end{cases}$, $g(x) = \begin{cases} 0, & \text{dacă } x \in I \setminus \{x_0\} \\ 1, & \text{dacă } x = x_0 \end{cases}$. Funcţiile f, g sînt discontinue în x_0, dar $f + g = 1$, $fg = 0$.

III. § 2 (pagina 115). 1. Funcţia f este continuă; faptul că f nu este mărginită pe $[1, \infty)$ rezultă observînd că pentru orice M există $x \in [1, \infty)$ astfel încît $f(x) > M$. **2.** Marginile lui f sînt -1 şi 0, dar nu coincid cu vreo valoare $f(x)$, $x \in (1, 2)$, deci nu sînt atinse etc. **3.** Deoarece $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = 0$, există $\delta > 0$ astfel încît pentru orice $x > \delta$ avem $|f(x)| < 1$. Pe intervalul compact $[0, \delta]$ funcţia f este mărginită (fiind continuă), deci există $M > 0$, astfel încît $|f(x)| \leqslant M$ pentru orice $x \in [0, \delta]$. Aşadar, $|f(x)| \leqslant \max(M, 1)$ pentru orice $x \in [0, 8)$, deci f este mărginită. **5.** Nu, pentru că f nu este continuă în $x = 0$. **6.** Aşadar, există $M > 0$ astfel încît $|f(x)| \leqslant M$ pentru orice $x \in \mathbf{R}$. Considerăm funcţia continuă $g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $g(x) = f(x) - x$. Avem $g(-M) = f(-M) + M \geqslant 0$ şi $g(M) = f(M) - M \leqslant 0$, deci, conform lemei (teorema III.6), există $\xi \in [-M, M]$ astfel încît $g(\xi) = 0$, adică $f(\xi) = \xi$. **7.** a) $f(0) \cdot f(4) < 0$;, b) $f(-1) \cdot f(0) < 0$; c) presupunem $a > 0$, avem $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$ şi $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = \infty$, deci există puncte $a_1 < b_1$ din $\mathbf{R}$ astfel încît $f(a_1) \cdot f(b_1) < 0$, deci funcţia continuă f se va anula pe (a_1, b_1); d) $f(1) = 0$. **8.** a) $x \in (0, 1) \cup (2, \infty)$; b) $x \in (-\infty, -5) \cup (1, 2)$; c) $x \in A_1 \cup A_2$ unde $A_1 = \bigcup\limits_{k \leqslant -1} (k\pi, (k+1)\pi)$, k impar şi $A_2 = \bigcup\limits_{k \geqslant 0} (k\pi, (k+1)\pi)$, k par. **9.** $a = \sqrt{5}$.

CAPITOLUL IV

IV. § 1 (pagina 128). 1. g) Nu este derivabilă în $x = 0$, $f'(0) = +\infty$; h) Nu este derivabilă în $x = 0$, $f'_s(0) = 0$, $f'_d(0) = 1$. **2.** c) Nu este derivabilă în $x = 0$. **3.** $f(x) - f(0) = x \sin \frac{1}{x} \to 0$, cînd $x \to 0$. Dar $\frac{f(x) - f(0)}{x} = \sin \frac{1}{x}$ nu are limită pentru $x \to 0$. **4.** $\frac{f(x) - f(0)}{x} = x^{\alpha - 1} \sin \frac{1}{x}$ şi $\alpha - 1 > 0$ implică $x^{\alpha - 1} \to 0$ pentru $x \to 0$, deci $f'(0) = 0$. **5.** Nu, căci $f'(0) = \infty$. **8.** $a = -1, b = 1$. **9.** $f'_s(-1) = -\infty$, $f'_d(-1) = \infty$, $f'_s(0) = f'_d(0) = 0$, $f'_s(+1) = -\infty$, $f'_d(+1) = +\infty$. **12.** a) $x = 2$ punct de întoarcere; b) $x = 1$ punct de întoarcere; c) $x = 1$ punct unghiular; d) $x = 0$ şi $x = 1$ puncte unghiulare. **13.** f derivabilă în $\mathbf{R} \setminus \{0\}$. Punctele cerute sînt $x \in (-\infty, 0) \cup \{\sqrt{2}\}$. **14.** Tangenta în $x_0 = \pm 1$; $x_0 = \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$.

IV. § 2 (pagina 143). 1. a) $f'(x) = 3x^2 - 1$, $E = \mathbf{R}$, $F = \mathbf{R}$; b) $f'(x) = 100\, x^{99} + 2x^{49}$, $F = E = \mathbf{R}$; c) $f'(x) = \cos x - \sin x$, $F = E = \mathbf{R}$; h) $f'(x) = 2x + \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$, $E = [0, \infty)$,

$F = (0, \infty)$; o) $f'(x) = \dfrac{1 - x}{2\sqrt{x}(x+1)^2}$; $E = [0, \infty)$, $F = (0, \infty)$. **2.** d) $x = -1$; e) $x = \dfrac{1}{e}$, f) $x = 2k\pi + \dfrac{\pi}{2}$, $k \in \mathbf{Z}$; g) $x = k\pi + \dfrac{\pi}{4}$, $k \in \mathbf{Z}$; h) $x = 0$. **3.** a) 0; b) $\dfrac{7}{2}$. **5.** $(f+g)(x) = 2x$ şi $(fg)(x) = x^2 - |x|^3 = 0$, deci $f+g$, fg sînt derivabile pe $\mathbf{R}$. Nederivabilitatea funcţiilor f şi g în $x = 0$ se datorează prezenţei lui $|x|$. **6.** $\dfrac{x\sqrt{x} - 0}{x} = \sqrt{x} \to 0$ pentru $x \to 0$, deci $f'(0) = 0$. **7.** $f'(x) = 2x\sin\dfrac{1}{x} - \cos\dfrac{1}{x}$ nu are limită cînd $x \to 0$, căci $2x\sin\dfrac{1}{x} \to 0$, iar $\cos\dfrac{1}{x}$ nu are limită; apoi $f'(0) = 0$. **8.** a) $y - 1 = 2(x-1)$; d) $y - 0 = 1(x-1)$; f) $y - \sin\dfrac{\pi}{4} = 2\left(\cos\dfrac{\pi}{4}\right)\left(x - \dfrac{\pi}{8}\right)$ etc. **13.** $(f^{-1})'(4) = \dfrac{1}{f'(0)} = \dfrac{1}{4}$. **14.** a) Notăm $df(x_0) = \varphi$, deci $\varphi(x) = f'(x_0)\cdot x$, $\forall\, x \in \mathbf{R}$. În primul caz $\varphi(x) = 7x$, apoi $\varphi(x) = 2x$ etc.; b) $df = f'(x)dx$, deci $df = (3x^2 - 1)dx$ etc. **15.** c) $a = 1$, $a = -3$; $a = -2$. **16.** b) $f'(x) = 0$ pentru $x = \dfrac{1}{e}$, f'' nu se anulează; c) f' nu se anulează, $f''(x) = 0$ pentru $x = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$; e) $f'(x) = 0$ pentru $x = 2k\pi + \dfrac{\pi}{2}$, $k \in \mathbf{Z}$, f' nu se anulează; i) $f'(x) = 0$ pentru $x = \dfrac{1}{4}$, f'' nu se anulează; l) f' nu se anulează, $f''(x) = 0$ pentru $x = 0$. **17.** a) $f^{(n)}(x) = 0$ pentru $n \geqslant 4$; b) $f^{(n)}(x) = n!$; c) $f^{(n)}(x) = (-1)^n \dfrac{n!}{x^{n+1}}$, $x \in \mathbf{R}\setminus\{0\}$; d) $f'(x) = \cos x = \sin\left(\dfrac{\pi}{2} + x\right)$, $f''(x) = \cos\left(\dfrac{\pi}{2} + x\right) = \sin(\pi + x)$, $f'''(x) = \cos(\pi + x) = \sin\left(\dfrac{3\pi}{2} + x\right)$ şi prin inducţie $f^{(n)}(x) = \sin\left(\dfrac{n\pi}{2} + x\right)$ etc. **18.** a) $f'(x) = -\sum\limits_{i=1}^{n} \dfrac{1}{(x - a_i)^2}$ $(x \in E)$, deci $f'(x) < 0$; b) Din $P(x) = (x - a_1)\ldots(x - a_n)$ rezultă $P'(x) = (x - a_2)\ldots(x - a_n) + (x - a_1)(x - a_3)\ldots(x - a_n) + \ldots + (x - a_1)\ldots(x - a_{n-1})$ de unde rezultatul etc.

19. Demonstraţia se face prin inducţie; pentru $n = 1$ relaţia este verificată. Dacă ea este verificată pentru n, să arătăm că este verificată pentru $n+1$. Avem $(fg)^{(n+1)}(x) = ((fg)^{(n)})' = \left(\sum\limits_{k=0}^{n} C_n^k f^{(n-k)}(x) g^{(k)}(x)\right)' = \sum\limits_{k=0}^{n} C_n^k (f^{(n-k)} g^{(k)})'(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} C_n^k (f^{(n+1-k)} g^{(k)} + f^{(n-k)} g^{(k+1)})(x) = \sum\limits_{k=0}^{n+1} C_{n+1}^k (f^{(n+1-k)} g^{(k)})(x)$. În ultima egalitate am folosit faptul că $C_{n+1}^k = C_n^k + C_n^{k-1}$.

IV. § 3 (pagina 150). 1. $v(t) = s'(t) = 2t - 2$, $v(1) = 0$; $a(t) = s''(t) = 2$, $a(1) = 2$; mişcarea este uniform accelerată; pentru $t < 1$ viteza este negativă, se anulează pentru $t = 1$ şi apoi devine pozitivă. Dar $s(0) = 1$, $s(1) = 0$. Interpretarea mecanică este: mobilul se deplasează într-un sens al axei pentru $0 < t < 1$, iar apoi în sensul opus, mişcarea fiind uniform accelerată. **2.** $k = -1$, $v(t) = s'(t)$, $a(t) = s''(t)$, etc. **3.** $v(t) = s'(t) = 3t^2 - 24t$, deci v este minim pentru $t = 4$ şi $v_{\min} = v(4) = -48$. Apoi $a(t) = 6t - 24$. **4.** $\dfrac{dm}{dv} = \dfrac{m_0}{c}\cdot\dfrac{9\sqrt{2}}{32}$. **5.** $i(t) = -2\pi\sin\pi t$; maximul este atins în punctele unde $\sin \pi t = -1$ şi minimul în $\sin \pi t = 1$. **7.** b) $f(x) \simeq x$, deci $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1 + \sin x - \cos x}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{x}{x} = 1$; c) Aproximarea liniară a funcţiei $f(x) = \sqrt{3+x} - 2$ în vecinătatea lui $x_0 = 1$ este $\frac{x-1}{4}$, deci $\lim\limits_{x\to 1} \frac{\sqrt{3+x}-2}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1} \frac{\frac{x-1}{4}}{x-1} = \frac{1}{4}$. **8.** Dacă $f(x) = \sqrt{x}$, atunci $f(x) \simeq f(4) + f'(4)(x-4)$ şi deci $\sqrt{4,17} \simeq f(4) + \frac{1}{4}(4,17-4)$, deci $\sqrt{4,17} \simeq 2,042$; luînd $f(x) = \sqrt[3]{x}$ avem $\sqrt[3]{29} \simeq 3,074$; luînd $f(x) = \ln x$, găsim $\ln 1,11 \simeq 0,11$; găsim, în mod analog, $\sin 33° \simeq \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\pi}{60} \simeq 0,5452$, $\cos 56° \simeq \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\pi}{45} \simeq 0,560$.

IV. § 4 (pagina 159). 3. Avem $\lim\limits_{\lambda\to 0,\, \lambda>0} f(\lambda) = 0$, $\lim\limits_{\lambda\to\infty} f(\lambda) = 0$, punînd $\lambda = \frac{1}{z}$; apoi avem $\lim\limits_{\substack{\lambda\to 0\\ \lambda>0}} f'(\lambda) = 0$, iar $f'(\lambda) = 0$ este echivalent cu $e^{\frac{1}{\lambda}} - 5\lambda e^{\frac{1}{\lambda}} + 5\lambda = 0$ sau, cu substituţia $x = \frac{1}{\lambda}$, $e^x - 5e^x \cdot \frac{1}{x} + \frac{5}{x} = 0$, adică $(5-x)e^x - 5 = 0$. Dar funcţia $g(x) = (5-x)e^x - 5$ are proprietatea lui Darboux şi cum $g(4) = e^4 - 5 > 0$, $g(5) = -5 < 0$, rezultă că există $x_0 \in (4, 5)$ cu $g(x_0) = 0$, $\lambda_0 = \frac{1}{x_0}$ va fi singurul punct critic cu $\frac{1}{5} < \lambda_0 < \frac{1}{4}$. **4.** Funcţia $x \mapsto |3x - 2| - 5$ nu este derivabilă în $x = \frac{2}{3} \in \left[-1, \frac{7}{3}\right]$, deci nu sînt îndeplinite condiţiile teoremei lui Rolle. **5.** a) f' este un polinom de gradul 2, conform teoremei lui Rolle, f' are o rădăcină în intervalul $(1, 2)$ şi alta în $(2, 3)$; analog pentru g'; b) Dacă între două rădăcini consecutive x', x'' ale lui P' ar exista două rădăcini ale lui P, atunci, aplicînd teorema lui Rolle, între aceste rădăcini ar exista o rădăcină x''' a lui P', ceea ce contrazice faptul că rădăcinile x' şi x'' ar fi consecutive. **6.** Aplicînd teorema lui Rolle funcţiei f, rezultă că pe intervalul (a_i, a_{i+1}) există cel puţin o rădăcină c_i a lui f'. Dacă f este un polinom de gradul n, şi dacă ar avea mai mult de n rădăcini reale, atunci, aplicînd succesiv rezultatul precedent lui $f', f'', \ldots, f^{(n-1)}$, ar rezulta că $f^{(n)}$ ar avea cel puţin o rădăcină, ceea ce este absurd, căci f este o constantă. **7.** Nu se contravine teoremei lui Rolle căci funcţia f nu este definită în $0 \in [-1, 1]$. **8.** Raţionament analog cu cel de la problema 6.

9. $c = \frac{1}{\ln 2}$. **11.** $c = e - 1$ pentru primul caz, $c = \frac{\pi}{4}$ în al doilea caz.

CAPITOLUL V

V. § 1 (pagina 173). 1. a) Pe intervalele $(-8, -4]$, $[0, \infty)$ f este crescătoare $(f' \geqslant 0)$ şi pe $[-4, 0]$ este descrescătoare $(f' \leqslant 0)$; m) pe $(0, 1]$ este descrescătoare şi pe $(1, \infty)$ este crescătoare. **3.** Dacă ar exista F_1, F_2 derivabile pe (a, b) astfel ca $F_1(x) = F_2(x) = f(x)$ şi $F_1(x_0) = F_2(x_0) = \alpha$, atunci $F_1' = F_2' = 0$ pe (a, b), deci $F_1 - F_2$ ar fi o constantă, anume constanta nulă. **5.** a) 1; b) $\frac{1}{10}$; c) 4; d) $\frac{1}{2}$; e) 1; f) $\frac{4}{3}$; g) 0; h) $\frac{2}{\pi}$; i) $\frac{2}{3}$; j) $\frac{1}{2}$; k) 2; l) $\frac{1}{e}$; m) $\frac{1}{e}$; n) 1; o) 0; p) e^0; q) ∞; r) 1; s) 1; t) 1; **7.** Aplicarea regulii lui l'Hospital conduce la cîtul $\frac{1-\cos x}{1-\sin x}$ care nu are limită pentru $x \to \infty$, dar $\frac{x-\sin x}{x+\cos x} = \frac{1-\frac{\sin x}{x}}{1+\frac{\cos x}{x}} \to 1$ pentru $x \to \infty$.

V. § 2 (pagina 180). 1. a) Pe $(-\infty, -1)$ f este concavă şi pe $(-1, \infty)$ convexă; d) Pe $(-\infty, 0)$ funcţia este convexă şi pe $(0, \infty)$ concavă; h) Pe $(-\infty, 0)$ f este concavă şi pe $(0, \infty)$ convexă. **2.** Se pune mai întîi condiţia necesară $f''(x) = 0$, apoi se discută semnul lui f'' în jurul punctelor găsite. **3.** $f'' > 0$ pe (a, b) implică f' crescătoare pe (a, b). Ecuaţia tangentei la grafic în punctul $(\alpha, f(\alpha))$ este $y - f(\alpha) = f'(\alpha)(x - \alpha)$, adică $y = f(\alpha) + f'(\alpha)(x - \alpha)$. Aplicînd teorema lui Lagrange funcţiei f pe intervalul (α, x), $x > \alpha$, obţinem $f(x) = f(\alpha) + f'(c)(x - \alpha)$, cu $\alpha < c < x$ şi cum $f'(c) > f'(\alpha)$, rezultă $f(x) > y$. Raţionament analog pentru cazul $x < \alpha$. **4.** Direct din definiţia V.1 pentru $t = \frac{1}{2}$.
6. a) $f(x) = 1 + x + x^2 - \frac{x^3}{2}$; b) $f(x) = 1 - \frac{x^3}{6}$; c) $f(x) = \frac{k}{6}(x-1)^3$.

V. § 5 (pagina 208). 7. a) Dacă n este par, atunci $n - 1$ este impar şi ecuaţia $nx^{n+1} + p = 0$ are o singură rădăcină reală; şirul lui Rolle va avea doar trei termeni, deci pot apărea cel mult două schimbări de semn. Raţionament analog pentru cazul n impar. **9.** Dacă $f(x) = \frac{x}{\sin x}$ definită pe $\left(0, \frac{\pi}{2}\right]$, atunci $f'(x) = \frac{\sin x - x\cos x}{\sin^2 x} > 0$, deci $f_{max} = f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2}$, deci $f(x) \leqslant \frac{\pi}{2}$. **11.** a) Remarcăm mai întîi că pentru $0 < x < 1$, $x^e \leqslant x$ şi cum avem $e^x > x$ rezultă inegalitatea cerută în acest caz. Este suficient de arătat că $e^x \geqslant x^e$ pentru $x > 1$. Inegalitatea cerută se mai poate scrie $e^x \geqslant e^{e \ln x}$ $(x > 1)$ şi din monotonia funcţiei e^t rezultă că ultima inegalitate este echivalentă cu $x \geqslant e \ln x$, adică $\frac{x}{\ln x} \geqslant e$, pentru $x > 1$. Funcţia $f(x) = \frac{x}{\ln x}$ are un singur punct de minim pentru $x = e$, deci $f(x) \geqslant f_{min} = f(e) = e$; b) notînd $\frac{1}{x} = t$, $t > 1$ pentru $x \in (0, 1)$, inegalitatea de demonstrat devine: $\ln t \leqslant \frac{t^\alpha}{\alpha e}$ pentru $t > 1$. Dacă $f(t) = \frac{t^\alpha}{\alpha e} - \ln t$, $f'(t) = \frac{t^\alpha - e}{et}$ se anulează în $t = e^{\frac{1}{e}}$ şi f are un minim în acel punct, deci $f(t) > f_{min} = \frac{(e^{\frac{1}{e}})^\alpha}{\alpha e} - \ln(e^{\frac{1}{e}}) = 0$; c) fie $f(x) = e^x$, $g(x) = 1 + \ln(1 + x)$. Derivata funcţiei $F = f - g$ este $e^x - \frac{1}{1+x}$ şi se anulează doar în $x=0$. În $x=0$ F are un minim şi $F(0) = f(0) - g(0) = 0$, deci $F(x) \geqslant \geqslant 0$ pentru $x \in (-1, \infty)$, adică inegalitatea cerută (egalitatea avînd loc doar pentru $x=0$).

PROBLEME RECAPITULATIVE

1. Presupunem, prin absurd, că ar exista o funcţie polinomială reală P de gradul $n \geqslant 0$ astfel încît $|x| = P(x)$, $\forall x \in \mathbf{R}$. Atunci $x^2 = P^2(x)$ şi ar rezulta $n = 1$, deci ar exista $a, b \in \mathbf{R}$, $a \neq 0$ astfel încît $|x| = ax + b$ pentru orice $x \in \mathbf{R}$. Pentru $x = 0$ se obţine $b = 0$ şi pentru $x = 1$, $a = 1$; ar rezulta $|x| = x$ pentru orice $x \in \mathbf{R}$, contradicţie. **2.** $|a_n - b_n| = \dfrac{2n}{2n+1} < 1$ pentru orice $n \geqslant 1$; apoi $|a_n + b_n - 2| = = \dfrac{2}{2n+1}$ şi condiţia din enunţ are loc pentru $n > 100$. **3.** Dacă $0 < m < n$ sînt întregi, atunci $\dfrac{m}{n} = \dfrac{2m}{2n} > \dfrac{2m-1}{2n} > 0$, $\dfrac{m}{n} = \dfrac{2m}{2n} < \dfrac{2m+1}{2n} < 1$ şi, ca atare, în mulţimea A nu există min A, max A. Arătăm apoi că inf $A = 0$, sup $A = 1$. Pentru orice $\varepsilon > 0$ şi pentru orice m natural există un întreg $n > m$ astfel încît $n > \dfrac{m}{\varepsilon}$, deci $\dfrac{m}{n} < \varepsilon$. Aşadar inf $A = 0$. Apoi pentru orice $\varepsilon > 0$ şi pentru orice k natural există m natural astfel încît $m > \dfrac{k(1-\varepsilon)}{\varepsilon}$, deci $\dfrac{m}{k+m} > 1 - \varepsilon$ şi notînd $n = k + m$ avem $1 > \dfrac{m}{n} > 1 - \varepsilon$, deci sup $A = 1$. **4.** $\varphi(x) = \begin{cases} x^2, & \text{dacă } x < 0 \\ 0, & \text{dacă } x \geqslant 0 \end{cases}$ etc. **5.** Fie $m_1 = \inf\limits_{x \in [0,1]} x^n$, n fiind fixat şi fie m, M marginile lui f pe $[0, 1]$. Luăm $Q(x) = x^n + A$, cu A ales astfel încît $M \leqslant m_1 + A$. Atunci $f(x) \leqslant M \leqslant m_1 + A \leqslant x^n + A = Q(x)$ pentru orice $x \in [0, 1]$ etc. Intervalul $[0, 1]$ poate fi înlocuit cu $[a, b]$. **7.** Divergent; convergent. **10.** Suma lungimilor segmentelor $AC_1 + C_1A_1 + A_1C_2 + \ldots + A_{n-1}C_n + C_nB$ este egală cu $2n \cdot \dfrac{a}{n} = 2a$ şi limita respectivă este $2a$ (deşi linia poligonală „converge" în poziţie către segmentul AB de lungime a). Noţiunea de „convergenţă" folosită aici diferă de cea din cazul şirurilor de numere reale. **14.** Dacă $x_n \to a$, atunci există N natural astfel încît $\forall m, n \geqslant N$, să avem $|x_m - a| < \dfrac{\varepsilon}{2}$, de unde $|x_m - x_n| < \varepsilon$. **15.** a) Discontinuă pe $\mathbf{R} \setminus \{0\}$, continuă în $x = 0$; b) este continuă pe $\mathbf{R}$; f) dacă $x \in \mathbf{Z}$, atunci $\sin \pi x = 0$ şi în vecinătatea unui astfel de punct $\sin x\pi$ ia atît valori pozitive cît şi negative, deci $f(x)$ va lua valorile $+1$ şi -1 oricît de aproape de x, deci f nu poate fi continuă. În celelalte puncte, f este local constantă, deci continuă, căci $\sin \pi x$ are semn constant. **17.** a) Din condiţia $f(0) = = f(2\pi)$ rezultă că putem prelungi funcţia f la o funcţie periodică pe $\mathbf{R}$, de perioadă 2π, care va fi continuă şi pe care o notăm, de asemenea, cu f. Fie $g(x) = f(x + \pi) - - f(x)$; $g(x + \pi) = f(x + 2\pi) - f(x + \pi) = f(x) - f(x + \pi) = -g(x)$, deci pe orice interval $[x, x + \pi]$, g (care este continuă), se va anula, adică există $c \in [0, \pi]$ pentru care $f(c + \pi) - f(c) = 0$; b) fie $g(x) = f(x) - x$ şi $h(x) = f(x) + x$; este uşor de văzut că $g(a) \cdot g(-a) \leqslant 0$ şi $h(a) \cdot h(-a) \leqslant 0$, de unde, aplicînd teorema valorilor intermediare, aplicabilă deoarece g şi h sînt continue, rezultă concluzia dorită. **18.** Distingem două cazuri. Dacă $f(1) < 80$, atunci considerăm funcţia $g(t) = f(t + 1) - f(t)$; $g(0) = f(1)$, $g(1) = f(2) - f(1) = 160 - f(1) > 80$, deci g (care este continuă) va lua, cînd t parcurge intervalul $(1, 2)$, toate valorile cuprinse între $f(1)$ şi $160 - f(1)$, deci la un moment t_0, $g(t_0) = 80$. Dacă $f(1) > 80$, considerăm funcţia $h(t) = f(t) - f(t - 1)$ definită pe $(1, 2)$ şi raţionăm analog. **21.** $\alpha = 2e$, $\beta = -e$. Dreapta $y = \alpha x + \beta$ este atunci tangentă în $x = 1$ la curba $y = xe^x$. **22.** Se pot da numeroase exemple. Un exemplu simplu este următorul: $f(x) = x, g(x) = \frac{1}{2}(x + 1)$. **25.** a) $m \leqslant -1$. **26.** Pe $(0, e^2]$ funcţia este crescătoare, şi $f(3) < f(5)$, deci $a \leqslant b$. **28.** Prima relaţie rezultă aplicînd teorema lui Lagrange funcţiei f pe intervalul $(a - h, a + h)$, a doua rezultă aplicînd de două ori teorema lui Lagrange funcţiei $g(x) = f(a + h) - f(x)$, definită pe $[a - h, a]$.

NOTĂ. Indicăm numele autorilor de drept ai unora dintre exerciţiile şi problemele din acest manual, adresîndu-le totodată mulţumirile noastre: N. Boboc, Gr. Arsene, Gh. Sireţchi, M. Rădulescu, S. Rădulescu, L. Panaitopol, M.E. Panaitopol, C. Ottescu, C. Niculescu, D.M. Bătineţu, D. Buşneag, A. Ghioca, P. Dragoş. Sîntem recunoscători Gazetei matematice şi tuturor profesorilor care ne-au transmis observaţiile lor.

TABLA DE MATERII

Plan editură : 35 109
Coli de tipar : 15
Bun de tipar : 17.02.1989

Com. nr. 90 017
Combinatul Poligrafic
„CASA SCÎNTEII"
București — R.S.R.