Lei 4,85

MINISTERUL EDUCAȚIEI ȘI ÎNVĂȚĂMÎNTULUI

Matematică

Elemente de algebră superioară

Manual pentru clasa a XI-a

XI

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{A_{11}}{d} & \frac{A_{21}}{d} & \frac{A_{31}}{d} \\ \frac{A_{12}}{d} & \frac{A_{22}}{d} & \frac{A_{32}}{d} \\ \frac{A_{13}}{d} & \frac{A_{23}}{d} & \frac{A_{33}}{d} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

Editura Didactică și Pedagogică, București — 1987

MINISTERUL EDUCAȚIEI ȘI ÎNVĂȚĂMÎNTULUI

C. NĂSTĂSESCU C. NIȚĂ
I. STĂNESCU

Matematică

Manual pentru clasa a XI-a

Elemente de algebră superioară

·XI·

Editura Didactică și Pedagogică
București

Manualul a fost elaborat în anul 1980, pe baza programei şcolare aprobate de Ministerul Educaţiei şi Învăţămîntului cu nr. 39490/1978.

Referenţi: Conf. univ. dr. **N. Radu**
Cercetător dr. **T. Spircu**
Prof. **I. V. Maftei**
Prof. **Florina Saon**
Prof. **Maria Ţuţuian**

Redactor: Prof. **Valentin Radu**
Tehnoredactor: **Ana Ţimpău**
Coperta: **N. Sîrbu**

CAPITOLUL I

Permutări

Am făcut cunoştinţă cu noţiunea de permutare a unei mulţimi finite încă din clasa a X-a (Algebră, clasa a X-a). Fiind dată o mulţime finită A, avînd n elemente, ea se poate ordona în diverse moduri, în sensul că fiecărui element al său i se asociază un anumit număr de la 1 la n, numit rangul elementului.

Mulţimea A cu o astfel de ordine se numeşte *permutare* a acestei mulţimi. Se arată, de asemenea, că a face o permutare a elementelor mulţimii A este totuna cu a defini o funcţie bijectivă a mulţimii A pe ea însăşi (Algebră, clasa a X-a).

Să presupunem acum că elementele mulţimii A sînt numerotate de la 1 la n; deci $A = \{a_1, a_2, ..., a_n\}$ (adică mulţimea A este ordonată). În această mulţime a_1 este primul element, a_2 este al doilea element, ..., a_n este ultimul element.

Dacă $\varphi : A \to A$ este o funcţie bijectivă, atunci putem scrie $\varphi(a_k) = a_{i_k}$ ($k = 1, 2, ..., n$), a_{i_k} fiind unul dintre elementele $a_1, a_2, ..., a_n$; deci i_k este unul dintre numerele $\{1, 2, ..., n\}$. Se observă că în felul acesta funcţiei bijective φ i se asociază funcţia bijectivă $\sigma : \{1, 2, ..., n\} \to \{1, 2, ..., n\}$ definită prin egalitatea $\sigma(k) = i_k$.

Invers, unei funcţii bijective σ a mulţimii $\{1, 2, ..., n\}$ pe ea însăşi i se poate asocia o funcţie bijectivă a mulţimii A. Din aceste motive în cele ce urmează vom studia permutările mulţimii $\{1, 2, ..., n\}$ sau, ceea ce este acelaşi lucru, funcţiile bijective ale mulţimii $\{1, 2, ..., n\}$ pe ea însăşi.

1. **Noţiunea de permutare** (substituţie). Să notăm cu A mulţimea primelor n numere naturale, adică $A = \{1, 2, ..., n\}$. O funcţie bijectivă $\sigma : A \to A$ se numeşte *permutare (substituţie) de gradul n.*

Vom nota mulţimea tuturor permutărilor de gradul n cu S_n sau σ_n, iar elementele din S_n le vom nota cu literele mici greceşti: φ, ψ, θ, ..., σ, τ. Se obişnuieşte ca o permutare σ de gradul n să se noteze astfel:

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \sigma(3) & \dots & \sigma(n) \end{pmatrix} \qquad (1)$$

adică printr-un tablou în care în linia a doua se scot în evidență toate valorile funcției σ. Deoarece σ este o funcție bijectivă, toate aceste valori $\sigma(1)$, $\sigma(2)$, ..., $\sigma(n)$ sînt distincte două cîte două și sînt tot numerele 1, 2, ..., n, eventual, în altă ordine.

Cunoaștem din Algebra pentru clasa a X-a că *numărul tuturor permutărilor de gradul n este $n!$*.

În mulțimea S_n distingem un element remarcabil și anume funcția identică $1_A : A \to A$, care poartă denumirea de *permutare identică, notată cu e*.

Folosind notația (1) pentru permutări, atunci e are scrierea

$$e = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ 1 & 2 & 3 & \dots & n \end{pmatrix}.$$

Exemple. 1) Dacă $n = 1$, atunci S_1 are un singur element, acest element este permutarea identică (adică, funcția identică a mulțimii $A = \{1\}$).

2) Dacă $n = 2$, atunci S_2 are $2! = 2$ elemente. Aceste elemente sînt permutările:

$$e = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \text{ (permutarea identică) și permutarea } \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

3) Dacă $n = 3$, atunci S_3 are $3! = 6$ elemente. Aceste elemente sînt permutările:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

2. **Produsul (compunerea) permutărilor.** Fie σ și τ două permutări de gradul n, adică $\sigma \in S_n$, $\tau \in S_n$. Cum $\sigma : A \to A$ și $\tau : A \to A$ sînt funcții bijective ale mulțimii A pe ea însăși, are sens să vorbim de compunerea $\sigma \circ \tau$ a acestor funcții, care este tot o funcție bijectivă (a se vedea manualul de Algebră, clasa a IX-a). Reamintim că $\sigma \circ \tau : A \to A$ și este definită prin egalitatea:

$$(\sigma \circ \tau)(a) = \sigma(\tau(a)), \text{ oricare ar fi } a \in A.$$

Deci $\sigma \circ \tau$ este o permutare de gradul n; această permutare poartă denumirea de *produsul* (sau *compunerea*) *permutărilor* σ și τ (în această ordine). Se notează mai *simplu* $\sigma\tau$. Operația prin care din permutările σ și τ obținem permutarea $\sigma\tau$ poartă denumirea de *înmulțirea* (sau *compunerea*) *permutărilor*. Folosind notația (1) pentru permutări, dacă

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \dots & \sigma(n) \end{pmatrix} \text{ și } \tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ \tau(1) & \tau(2) & \dots & \tau(n) \end{pmatrix}$$

atunci produsul $\sigma\tau$ se scrie astfel:

$$\sigma\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ \sigma(\tau(1)) & \sigma(\tau(2)) & \dots & \sigma(\tau(n)) \end{pmatrix}. \qquad (2)$$

Notăm $\sigma^2 = \sigma\sigma$; $\sigma^3 = \sigma^2\sigma$; $\sigma^4 = \sigma^3\sigma$; ...; $\sigma^{n+1} = \sigma^n\sigma$; ... .

Observații. 1) Trebuie observat că nu are sens să vorbim despre produsul a două permutări de grade diferite.

2) Cînd σ și τ sînt două permutări de același grad, putem face atît produsul $\sigma\tau$ cît și produsul $\tau\sigma$.

Exemplu. Să considerăm permutările de gradul 3:

$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ şi $\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$. Produsul $\sigma\tau$ este permutarea

$$\sigma\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\text{iar } \tau\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Se observă că $\sigma\tau \neq \tau\sigma$.

Proprietăţile înmulţirii (compunerii) permutărilor

Ţinînd cont de proprietăţile compunerii funcţiilor (a se vedea Algebra, clasa a IX-a) avem următoarele proprietăţi ale înmulţirii permutărilor:

1° *Înmulţirea permutărilor este asociativă*, adică oricare ar fi permutările φ, ψ, θ din S_n, avem

$$\varphi(\psi\theta) = (\varphi\psi)\theta.$$

Această proprietate a înmulţirii ne permite să folosim scrierea:

$$\varphi(\psi\theta) = (\varphi\psi)\theta = \varphi\psi\theta.$$

2° *Element neutru.* Permutarea identică de gradul n

$$e = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ 1 & 2 & \dots & n \end{pmatrix}$$

este element neutru pentru înmulţirea permutărilor, adică oricare ar fi $\varphi \in S_n$ avem $e\varphi = \varphi e = \varphi$.

Cum orice funcţie bijectivă este inversabilă (Algebra, clasa a IX-a), avem proprietatea

3° *Orice permutare are inversă*, adică oricare ar fi permutarea $\varphi \in S_n$, există o permutare $\varphi^{-1} \in S_n$ astfel încît

$$\varphi\varphi^{-1} = \varphi^{-1}\varphi = e.$$

Permutarea φ^{-1} se numeşte *inversa permutării* φ.

Exemplu. Considerăm permutarea $\varphi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \end{pmatrix}$. Inversa permutării φ este permutarea $\varphi^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}$.

În exemplul pe care l-am dat mai înainte s-a arătat că dacă $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ şi $\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$, atunci $\sigma\tau \neq \tau\sigma$.

Observaţie. Dacă φ şi ψ sînt din S_n în general $\varphi\psi \neq \psi\varphi$, adică înmulţirea permutărilor nu este comutativă.

3. **Transpoziţii.** Fie $i, j \in A = \{1, 2, \dots, n\}$, $i \neq j$. Definim funcţia $\tau_{ij} : A \to A$ prin egalitatea

$$\tau_{ij}(k) = \begin{cases} j \text{ dacă } k = i, \\ i \text{ dacă } k = j, \\ k \text{ dacă } k \neq i, j. \end{cases} \tag{3}$$

Se vede că τ_{ij} este o funcție bijectivă, deci o permutare de gradul n. O astfel de permutare se numește *transpoziție* și se notează simplu $\tau_{ij} = (ij)$. Folosind scrierea (1) a permutărilor:

$$\tau_{ij} = (ij) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & i & \dots & k & \dots & j & \dots & n \\ 1 & 2 & \dots & j & \dots & k & \dots & i & \dots & n \end{pmatrix}.$$

Se vede că τ_{ij} permută efectiv numai numerele i și j.

Să calculăm τ_{ij}^2; dacă $k \neq i, j$, atunci $\tau_{ij}^2(k) = \tau_{ij}(\tau_{ij}(k)) = \tau_{ij}(k) = k$; dacă $k = i$, atunci $\tau_{ij}^2(i) = \tau_{ij}(\tau_{ij}(i)) = \tau_{ij}(j) = i$, iar dacă $k = j$ avem $\tau_{ij}^2(j) = = \tau_{ij}(\tau_{ij}(j)) = \tau_{ij}(i) = j$. Deci $\tau_{ij}^2(k) = k$ oricare ar fi $k \in \{1, 2, ..., n\}$. Deci $\tau_{ij}^2 = e$. De aici obținem că $\tau_{ij}^{-1} = \tau_{ij}$. Deci transpoziția de gradul n, $\tau_{ij} = (ij)$ are următoarele proprietăți:

a) $(ij) = (ji)$,

b) $(ij)^{-1} = (ij)$,

c) $(ij)^2 = e$.

Din proprietatea a) rezultă că numărul tuturor transpozițiilor de gradul n este egal cu numărul perechilor ordonate (i, j) cu $1 \leqslant i < j \leqslant n$, care este egal cu C_n^2. Deci:

Numărul tuturor transpozițiilor de gradul n este egal cu C_n^2.

Exemple. 1) Transpozițiile de gradul 3 sînt următoarele: (12); (13); (23).

2) Transpozițiile de gradul 4 sînt următoarele: (12); (13); (14); (23); (24); (34).

4. **Inversiunile unei permutări. Signatura (semnul) unei permutări.** Fie $A = \{1, 2, ..., n\}$. Definim submulțimea M a produsului cartezian $A^2 = A \times A$ ca fiind: $M = \{(i, j) \mid 1 \leqslant i < j \leqslant n\}$. Dacă $\sigma \in S_n$ este o permutare de gradul n, o pereche ordonată $(i, j) \in M$ se numește *inversiune* a permutării σ dacă $\sigma(j) < \sigma(i)$. Vom nota cu $m(\sigma)$ numărul tuturor inversiunilor permutării σ. Se observă că $m(\sigma)$ este cel mult egal cu numărul elementelor mulțimii M, care este egal cu C_n^2. Deci

$$0 \leqslant m(\sigma) \leqslant C_n^2 = \frac{n(n-1)}{2}.$$

Numărul $\varepsilon(\sigma) = (-1)^{m(\sigma)}$ se numește *signatură (semnul) permutării* σ. Se observă că signatura unei permutări este $+1$ sau -1. Permutarea σ se zice *pară*, respectiv *impară*, dacă $\varepsilon(\sigma) = +1$, respectiv $\varepsilon(\sigma) = -1$.

Exemple. 1) Fie permutarea $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$. Numărul de inversiuni ale acestei permutări este $m(\sigma) = 3$ și deci signatura permutării σ este $\varepsilon(\sigma) = (-1)^3 = -1$, adică σ este impară.

2) Fie permutarea $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 4 & 5 & 3 & 1 \end{pmatrix}$. Numărul de inversiuni ale acestei permutări este $m(\sigma) = 6$ și deci $\varepsilon(\sigma) = (-1)^3 = +1$, adică permutarea σ este pară.

3) Dacă e este permutarea identică (de gradul n), atunci $m(e) = 0$ și deci $\varepsilon(e) = = +1$, adică e este o permutare pară.

Teorema 1. **Dacă $\tau_{ij} = (ij)$ $(i < j)$ este o transpoziție de gradul n, atunci $\varepsilon(\tau_{ij}) = -1$. Cu alte cuvinte, orice transpoziție este impară.**

Demonstrație. Fie $k \in \{1, 2, ..., n\}$. Dacă $k < i$ atunci, deoarece $\tau_{ij}(k) = k$ și $\tau_{ij}(i) = j$, rezultă $\tau_{ij}(k) < \tau_{ij}(i)$ și deci perechea (k, i) nu este o inversiune a lui τ_{ij}. Analog, dacă $j < k$, rezultă că perechea (j, k) nu este o inversiune a permutării τ_{ij}.

Presupunem acum că $i < k < j$. Cum $\tau_{ij}(i) = j$ și $\tau_{ij}(k) = k$, atunci $\tau_{ij}(k) < \tau_{ij}(i)$ și deci perechea (i, k) este o inversiune a permutării τ_{ij}. Analog, cum $\tau_{ij}(j) = i$, atunci $\tau_{ij}(j) < \tau_{ij}(k)$ și deci perechea (k, j) este o inversiune a lui τ_{ij}. Deci toate perechile (i, k) și (k, j) la care se mai adaugă și perechea (i, j) sînt toate inversiunile permutării τ_{ij}. În concluzie, numărul total de inversiuni ale lui τ_{ij} este

$$m(\tau_{ij}) = 2(j - i - 1) + 1 = 2(j - i) - 1.$$

Cum $m(\tau_{ij})$ este un număr impar, atunci $\varepsilon(\tau_{ij}) = -1$.

Teorema 2. **Dacă $\sigma \in S_n$ este o permutare de gradul n, atunci are loc egalitatea:**

$$\varepsilon(\sigma) = \prod_{1 \leqslant i < j \leqslant n} \frac{\sigma(i) - \sigma(j)}{i - j}. \tag{4}$$

Demonstrație. Produsul $\prod\limits_{1 \leqslant i < j \leqslant n} \frac{\sigma(i) - \sigma(j)}{i - j}$ (5) are C_n^2 factori. Să considerăm factorul $\frac{\sigma(i) - \sigma(j)}{i - j}$ $(i < j)$. Dacă notăm $\sigma(i) = l$ și $\sigma(j) = m$, atunci $l \neq m$ și l, m aparțin mulțimii $\{1, 2, ..., n\}$. Înseamnă că $\sigma(i) - \sigma(j) = l - m$ se simplifică cu numitorul din factorul $\frac{\sigma(l) - \sigma(m)}{l - m}$ dacă $l < m$, sau cu numitorul din factorul $\frac{\sigma(m) - \sigma(l)}{m - l}$ dacă $m < l$. Prin simplificare obținem -1 dacă (i, j) este o inversiune și $+1$, în caz contrar. Cum orice numărător din produsul (5) se regăsește ca numitor în alt factor cu semnul $+$ sau $-$, atunci produsul (5) după simplificare va fi un produs de $(+1)$ și de (-1); numărul de (-1) va fi egal cu numărul de inversiuni ale permutării σ. În concluzie produsul (5) va fi egal cu $\varepsilon(\sigma)$, adică egalitatea (4).

Teorema 3. **Dacă σ și τ sînt permutări din S_n, atunci**

$$\varepsilon(\sigma\tau) = \varepsilon(\sigma)\varepsilon(\tau)$$

(adică signatura produsului a două permutări este egală cu produsul signaturilor celor două permutări).

Demonstrație. Din teorema 2 avem

$$\varepsilon(\sigma\tau) = \prod_{1 \leqslant i < j \leqslant n} \frac{(\sigma\tau)(i) - (\sigma\tau)(j)}{i - j} = \prod_{1 \leqslant i < j \leqslant n} \frac{\sigma(\tau(i)) - \sigma(\tau(j))}{i - j} =$$
$$= \prod_{1 \leqslant i < j \leqslant n} \frac{\sigma(\tau(i)) - \sigma(\tau(j))}{\tau(i) - \tau(j)} \cdot \prod_{1 \leqslant i < j \leqslant n} \frac{\tau(i) - \tau(j)}{i - j}.$$

Exact ca în teorema 2 se poate arată că $\prod\limits_{1 \leqslant i < j \leqslant n} \frac{\sigma(\tau(i)) - \sigma(\tau(j))}{\tau(i) - \tau(j)}$ este egal cu signatura permutării σ. Deci $\varepsilon(\sigma\tau) = \varepsilon(\sigma)\varepsilon(\tau)$.

Textul prevăzut cu o bară verticală în marginea paginii este facultativ.

Consecinţa 1. **Permutarea $\sigma\tau$ este pară (respectiv impară) dacă ambele permutări σ şi τ au acelaşi semn (respectiv semne contrare).**

În particular, permutările σ şi σ^{-1} au acelaşi semn.

5. **Descompunerea unei permutări în produs de transpoziţii.**

Teorema 4. **Orice permutare din S_n ($n \geqslant 2$) este un produs de transpoziţii.**

Demonstraţie. Să notăm cu t numărul elementelor $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ pentru care $\sigma(i) \neq i$. Vom proceda prin inducţie după t. Dacă $t = 0$, atunci σ este permutarea identică e. Dar cum $e = (1\ 2)\ (1\ 2)$, în acest caz afirmaţia este demonstrată. Presupunem că $t \geqslant 1$ şi că afirmaţia este adevărată pentru $1, 2, \ldots, t-1$. Cum $t \geqslant 1$, există un număr i_1, $1 \leqslant i_1 \leqslant n$ astfel încît $\sigma(i_1) = i_2$ şi $i_1 \neq i_2$. Considerăm permutarea $\sigma' = \tau\sigma$ unde $\tau = (i_1 i_2)$. Se vede că dacă $\sigma(j) = j$, atunci $j \neq i_1$ şi $j \neq i_2$. În acest caz $\sigma'(j) = \tau(\sigma(j)) = \tau(j) = j$. Dacă $j = i_1$, avem $\sigma'(i_1) = \tau(\sigma(i_1)) = \tau(i_2) = i_1$. Deci există cel mult $t-1$ numere j cuprinse între 1 şi n pentru care $\sigma'(j) \neq j$. Din ipoteza de inducţie rezultă că σ' este un produs de transpoziţii, $\sigma' = \tau_1\tau_2 \ldots \tau_k$ sau $\tau\sigma = \tau_1\tau_2 \ldots \tau_k$. Înmulţind la stînga cu τ obţinem că $\tau^2\sigma = \tau\tau_1\tau_2\ldots\tau_k$. Cum $\tau^2 = e$, atunci $\sigma = \tau\tau_1\ldots\tau_k$.

Exemplu. Fie permutarea $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$ şi s-o scriem ca produs de transpoziţii.

Cum $\sigma(1) = 3$, atunci $\sigma(1) \neq 1$ şi considerăm transpoziţia $\tau_1 = (13)$

Facem produsul $\sigma' = \tau_1\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 2 & 1 & 4 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 5 & 3 & 2 & 4 \end{pmatrix}$.

Cum $\sigma'(2) = 5$, atunci $\sigma'(2) \neq 2$ şi considerăm transpoziţia $\tau_2 = (25)$. Facem produsul $\sigma'' = \tau_2\sigma' = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 5 & 3 & 4 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 5 & 3 & 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 5 & 4 \end{pmatrix} = (45)$.

Deci $(45) = \tau_2\sigma' = \tau_2\tau_1\sigma = (25)\ (13)\sigma$, de unde obţinem că $\sigma = (13)\ (25)\ (45)$ (Pentru obţinerea lui σ am înmulţit egalitatea $(45) = (25)\ (13)\sigma$, la stînga, cu produsul $(13)\ (25)$.)

Consecinţa 2. **Orice permutare pară (respectiv impară) este un produs al unui număr par (respectiv impar) de transpoziţii.**

Demonstraţie. Fie $\sigma \in S_n$ şi $\sigma = \tau_1\tau_2\ldots\tau_n$ o descompunere a lui σ în produs de transpoziţii. Din teorema 3 avem că $\varepsilon(\sigma) = \varepsilon(\tau_1)\varepsilon(\tau_2)\ldots\varepsilon(\tau_n)$. Din teorema 1 obţinem că $\varepsilon(\sigma) = (-1)^n$. Dacă $\varepsilon(\sigma) = +1$, atunci n este par; dacă $\varepsilon(\sigma) = -1$, atunci n este impar.

Vom nota cu A_n mulţimea permutărilor pare de gradul n. Din consecinţa 1 rezultă că dacă $\sigma, \tau \in A_n$, atunci $\sigma\tau \in A_n$ şi $\sigma^{-1} \in A_n$. În plus, A_n conţine permutarea identică e.

Consecinţa 3. **A_n are $\frac{n!}{2}$ elemente.**

Demonstraţie. Să notăm cu I_n permutările impare de gradul n. Fie τ_0 o transpoziţie de gradul n, fixată. Deci putem defini funcţia $f : A_n \to I_n$, $f(\sigma) = \sigma\tau_0$. Funcţia f este bijectivă. Într-adevăr dacă $f(\sigma) = f(\sigma')$, atunci $\sigma\tau_0 = \sigma'\tau_0$, de unde $(\sigma\tau_0)\tau_0^{-1} = (\sigma'\tau_0)\tau_0^{-1}$ şi deci $\sigma = \sigma'$. Deci f este injectivă. Fie $\tau \in I_n$; din consecinţa 1, rezultă că $\tau\tau_0 \in A_n$. Dar se vede că $f(\tau\tau_0) = (\tau\tau_0)\tau_0 = \tau\tau_0^2 = \tau$ şi deci f este surjectivă. În concluzie, f este bijectivă. Deci A_n şi I_n au acelaşi număr de elemente. Cum $S_n = A_n \cup I_n$ şi $A_n \cap I_n = \varnothing$ deducem că A_n şi I_n au fiecare $\frac{n!}{2}$ elemente.

Exerciţii

1. Fie permutările $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ şi $\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$. Să se calculeze $\sigma\tau$ şi $\tau\sigma$.

2. Fie permutarea $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \end{pmatrix}$. Să se calculeze puterile σ, σ^2, σ^3, ... Să se determine cel mai mic număr natural $k > 0$ pentru care $\sigma^k = e$.

3. Fie $\sigma \in S_n$. Să se arate că există un număr natural $p > 0$ astfel încît $\sigma^p = e$.

4. Fie permutările $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 1 & 2 & 4 & 5 \end{pmatrix}$, $\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 5 & 4 \end{pmatrix}$. Să se arate că $\sigma\tau = \tau\sigma$.

5. Să se determine numărul de inversiuni şi signatura pentru fiecare dintre permutările următoare:

2 3 3 8 14 13

$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 6 & 5 & 4 & 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 6 & 4 & 5 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

6. Să se scrie toate transpoziţiile de gradul 4.

7. Fie $H \subset S_n$, $H \neq \varnothing$ şi avînd proprietatea că oricare ar fi $\sigma, \tau \in H$, atunci $\sigma\tau \in H$. Să se arate că H conţine permutarea identică de gradul n şi dacă $\sigma \in H$, atunci şi $\sigma^{-1} \in H$.

8. Fie permutarea $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 1 & 2 & 5 & 4 \end{pmatrix}$. Să se scrie σ ca produs de transpoziţii. Aceeaşi problemă pentru permutarea $\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 6 & 4 & 5 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

9. Să se determine permutarea $\sigma \in S_n$ care are numărul maxim de inversiuni.

10. Fie permutarea $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 1 & 2 & 7 & 4 & i & 5 & 6 & j & 9 \end{pmatrix}$. Să se determine i şi j astfel încît σ să fie o permutare pară. Există i şi j astfel încît σ să fie impară?

11. Fie permutarea $\sigma \in S_{2n}$

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \dots & n & n+1 & n+2 & \dots & 2n \\ 1 & 3 & 5 & 7 & \dots & 2n-1 & 2 & 4 & \dots & 2n \end{pmatrix}.$$

Să se determine numărul inversiunilor permutării σ.

Să se determine n astfel încît σ să fie pară (respectiv impară).

12. Fie permutarea $\sigma \in S_{2n}$

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \dots & n & n+1 & n+2 & n+3 & \dots & 2n \\ 2 & 4 & 6 & 8 & \dots & 2n & 1 & 3 & 5 & \dots & 2n-1 \end{pmatrix}.$$

Să se determine numărul inversiunilor permutării σ.

13. Fie $\sigma \in S_n$ $(n \geqslant 3)$ dacă $\sigma\varphi = \varphi\sigma$ oricare ar fi $\varphi \in S_n$, să se arate că $\sigma = e$.

CAPITOLUL II

Matrice

Considerăm un sistem de m ecuații liniare cu n necunoscute:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}\, x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n \; = b_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}\, x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m, \end{cases} \tag{1}$$

unde $a_{ij}\,(1 \leqslant i \leqslant m,\ 1 \leqslant j \leqslant n)$ și $b_1, b_2, \dots, b_m$ sînt numere (reale sau complexe). Numerele $a_{ij}\,(1 \leqslant i \leqslant m,\ 1 \leqslant j \leqslant n)$ poartă denumirea de coeficienți ai necunoscutelor, iar numerele $b_1, b_2, \dots, b_m$ se numesc termeni liberi.

A rezolva sistemul (1) înseamnă a determina toate sistemele ordonate de numere $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ astfel încît înlocuind în sistem necunoscutele $x_1, x_2, \dots, x_n$ respectiv cu numerele $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ fiecare dintre ecuațiile sistemului este verificată. Se știe că un astfel de sistem pentru cazul $m = n = 2$ sau $m = n = 3$ se rezolvă folosind metoda reducerii sau metoda substituției. Cum practica impune rezolvarea unor sisteme (1) care au un număr mare de ecuații și necunoscute, metodele învățate în clasele anterioare sînt, în general, ineficiente. Din aceste motive se impune un studiu mai atent al sistemelor, de ecuații liniare. În acest studiu un rol important îl au următoarele două tablouri:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}; \quad \bar{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}.$$

Primul tablou, respectiv al doilea, se numește *matricea*, respectiv *matricea extinsă* a sistemului (1). În capitolul IV se va vedea clar importanța acestor două matrice în studiul sistemelor de ecuații liniare.

În cele ce urmează vom face un studiu sistematic al matricelor, al operațiilor cu matrice etc.

Un alt motiv care a impus introducerea noțiunii de matrice și a calculului cu matrice a fost „algebrizarea noțiunii de transformare geometrică". Mai precis, unei transformări geometrice i se asociază o matrice, reducînd astfel studiul transformărilor geometrice la studiul unor matrice de un anumit tip.

Manualul de față nu ne permite să prezentăm acest aspect al folosirii calculului matriceal.

1. **Noțiunea de matrice.** Vom nota cu $\mathbf{C}$, așa cum am obișnuit, mulțimea numerelor complexe.

Fie $M = \{1, 2, ..., m\}$, $N = \{1, 2, ..., n\}$ mulțimea primelor m, respectiv n, numere naturale nenule. Vom numi *matrice de tipul* (m, n) o funcție $A : M \times N \to \mathbf{C}$. Dacă notăm $A(i, j) = a_{ij} \in \mathbf{C}$, $i \in M$, $j \in N$, vom nota pe A sub forma

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \tag{1}$$

adică printr-un tablou cu m linii și n coloane ce cuprinde valorile funcției A. Datorită notației (1), în loc de matrice de tipul (m, n) se mai spune *matrice cu m linii și n coloane.* Numerele a_{ij} se numesc *elementele matricei A.* De multe ori pentru matricea A se mai folosește notația prescurtată:

$$A = (a_{ij})_{\substack{1 \le i \le m \\ 1 \le j \le n}} \quad \text{sau} \quad A = (a_{ij})_{\substack{i = 1,2,...,m \\ j = 1,2,...,n}}$$

Se observă că o matrice de tipul (m, n) are mn elemente.

Cazuri particulare: I) Dacă $n = 1$, o matrice de tipul $(m, 1)$ se numește *matrice coloană* și este de forma

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}.$$

II) Dacă $m = 1$, o matrice de tipul $(1, n)$ se numește *matrice-linie* și este de forma

$$A = (a_{11} \ \ a_{12} \ \dots \ a_{1n}).$$

III) Dacă $m = n$, o matrice de tipul (n, n) se numește *matrice pătratică de ordinul n.*

Dacă

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

este o matrice pătratică de ordinul n, sistemul ordonat de elemente $(a_{11}, a_{22}, a_{33}, ..., a_{nn})$ se numește *diagonala principală* a matricei A, iar sistemul ordonat de elemente $(a_{1n}, a_{2n-1}, ..., a_{n1})$ se numește *diagonala secundară* a matricei.

Vom nota cu $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbf{C})$ mulțimea tuturor matricelor de tipul (m, n) avînd elementele numere complexe. În cazul că $m = n$, vom nota în loc de $\mathcal{M}_{n,n}(\mathbf{C})$, mai simplu $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$. ($\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ este mulțimea matricelor pătratice de ordinul n.) Elementele mulțimii $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbf{C})$ le vom nota cu literele mari ale alfabetului latin: A, B, C, ... sau A', B', C', ...

În mulțimea $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbf{C})$ distingem cîteva submulțimi importante, și anume: $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbf{R})$, care reprezintă mulțimea matricelor de tip (m, n) cu elemente numere reale; $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbf{Q})$, care reprezintă mulțimea matricelor de tip (m, n) cu elemente numere raționale; $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbf{Z})$, care reprezintă mulțimea matricelor de tip (m, n) cu elemente numere întregi.

Este clar că avem incluziunile:

$$\mathcal{M}_{m,n}(\mathbf{Z}) \subset \mathcal{M}_{m,n}(\mathbf{Q}) \subset \mathcal{M}_{m,n}(\mathbf{R}) \subset \mathcal{M}_{m,n}(\mathbf{C}).$$

Exemple. 1) Matricea $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ este o matrice de tipul (2, 3) cu elemente numere întregi; deci $A \in \mathcal{M}_{2,3}(\mathbf{Z})$. Elementele acestei matrice sînt: $a_{11} = -1$; $a_{12} = 0$; $a_{13} = 2$; $a_{21} = -1$; $a_{22} = 1$; $a_{23} = 3$.

2) Matricea $B = \begin{pmatrix} -2 & \frac{1}{2} & \frac{3}{4} \\ 0 & 0 & 1 \\ -\frac{1}{2} & 1 & -2 \end{pmatrix}$ este o matrice pătratică de ordinul 3 cu elemente numere raționale; deci $B \in \mathcal{M}_3(\mathbf{Q})$.

Observație. Uneori pentru o matrice A de tipul (m, n) se mai folosește și notația:

$$A = \begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{Vmatrix},$$

unde $a_{ij} (i = 1, 2, \ldots, m;\ j = 1, 2, \ldots, n)$ sînt elementele matricei.

Egalitatea matricelor. Fie A și B două matrice de tipul (m, n) adică $A, B \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbf{C})$. Cum A și B sînt funcții $A : M \times N \to \mathbf{C}$ și $B : M \times N \to \mathbf{C}$, matricele A și B sînt egale dacă și numai dacă sînt egale ca funcții. Deci $A = B$ dacă și numai dacă oricare ar fi $i \in M$ și $j \in N$, $A(i, j) = B(i, j)$.

Folosind notația (1) și presupunînd că

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \text{ și } B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mn} \end{pmatrix}$$

atunci $A = B$ dacă și numai dacă $a_{ij} = b_{ij}$, oricare ar fi $i = 1, 2, \ldots, m$ și $j = 1, 2, \ldots, n$.

2. **Operații cu matrice.** 1) *Adunarea matricelor.* Fie A și B două matrice de tipul (m, n), adică $A, B \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbf{C})$. Presupunem că

$$A = (a_{ij})_{\substack{1 \le i \le m \\ 1 \le j \le n}} \text{ și } B = (b_{ij})_{\substack{1 \le i \le m \\ 1 \le j \le n}}.$$

Definim matricea $C = (c_{ij})_{\substack{1 \le i \le m \\ 1 \le j \le n}}$ ale cărei elemente sînt date de egalitățile $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$, oricare ar fi $i = 1, 2, \ldots, m$ și $j = 1, 2, \ldots, n$. *Matricea C se numește suma dintre matricele A și B și se notează $C = A + B$.*

Operaţia prin care oricăror două elemente A, B din $M_{m,n}(\mathbb{C})$ li se asociază suma lor se numeşte *adunare*.

Exemple. 1) Dacă $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 3 & 4 \\ -2 & 1 & -3 & -4 \end{pmatrix}$ şi $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & -2 \\ 2 & -1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$, atunci suma lor este $A + B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

2) Dacă $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$ şi $B = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, atunci suma lor este

$$A + B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}.$$

Observaţie. Are sens să vorbim de suma a două matrice numai dacă ele sînt de acelaşi tip.

Proprietăţile adunării matricelor

1° *Adunarea este comutativă*, adică oricare ar fi A, $B \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C})$ avem $A + B = B + A$.

Într-adevăr, dacă $A = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}}$, $B = (b_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}}$ atunci $A + B = (a_{ij} + b_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}}$ şi $B + A = (b_{ij} + a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}}$. Cum adunarea numerelor complexe este comutativă, avem $a_{ij} + b_{ij} = b_{ij} + a_{ij}$, oricare ar fi $i = 1, 2, \ldots, m$ şi $j = 1, 2, \ldots, n$. Deci $A + B = B + A$.

2° *Adunarea este asociativă*, adică oricare ar fi A, B şi C din $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C})$ avem $(A + B) + C = A + (B + C)$.

Într-adevăr, dacă $A = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}}$, $B = (b_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}}$, $C = (c_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}}$, atunci $A + B = (a_{ij} + b_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}}$ şi deci $(A + B) + C = ((a_{ij} + b_{ij}) + c_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}}$. Analog, obţinem că $A + (B + C) = (a_{ij} + (b_{ij} + c_{ij}))_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}}$. Cum operaţia de adunare a numerelor complexe este asociativă, avem $(a_{ij} + b_{ij}) + c_{ij} = a_{ij} + (b_{ij} + c_{ij})$ pentru orice $i = 1, 2, \ldots, m$; $j = 1, 2, \ldots, n$. Deci $(A + B) + C = A + (B + C)$.

3° *Element neutru*. Matricea de tipul (m, n) ale cărei elemente sînt toate egale cu 0 se notează $0_{m,n}$ şi se numeşte *matricea zero*. Matricea $0_{m,n}$ este element neutru pentru adunarea matricelor, în sensul că oricare ar fi $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C})$ avem

$$A + 0_{m,n} = 0_{m,n} + A = A.$$

Verificarea acestei proprietăţi este evidentă.

4° *Orice matrice are un opus*, adică oricare ar fi $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C})$, există o matrice notată cu $-A$, astfel încît

$$A + (-A) = (-A) + A = 0_{m,n}.$$

Într-adevăr, dacă $A = (a_{ij})_{\substack{1\leq i\leq m\\1\leq j\leq n}}$, atunci $-A = (-a_{ij})_{\substack{1\leq i\leq m\\1\leq j\leq n}}$ deoarece $A + (-A) = (a_{ij} + (-a_{ij}))_{\substack{1\leq i\leq m\\1\leq j\leq n}} = (0_{ij})_{\substack{1\leq i\leq m\\1\leq j\leq n}} = 0_{m,n}$. Conform proprietății 1° avem și $(-A) + A = 0_{m,n}$.

Exemplu. Fie $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 & -4 \\ 0 & -5 & 1 & -2 \end{pmatrix}$; atunci $-A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 & 4 \\ 0 & 5 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.

Observație. Dacă A și B sînt din $\mathcal{M}_{m,n}$ (C), suma $A+(-B)$ se notează simplu $A - B$ și se numește *diferența* dintre A și B. Operația prin care oricăror două matrice A și B li se asociază diferența lor se numește *scădere*.

De exemplu, dacă $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -3 \\ 0 & -2 & -5 \end{pmatrix}$ și $B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -4 \\ -2 & -3 & -2 \end{pmatrix}$, atunci $A - B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -3 \end{pmatrix}$.

2) *Înmulțirea matricelor.* Fie $A = (a_{ij})_{\substack{1\leq i\leq m\\1\leq j\leq n}}$ o matrice de tipul (m, n) și $B = (b_{jk})_{\substack{1\leq j\leq n\\1\leq k\leq p}}$ o matrice de tipul (n, p). Definim matricea $C = (c_{ik})_{\substack{1\leq i\leq m\\1\leq k\leq p}}$ de tipul (m, p) ale cărei elemente sînt date de egalitățile:

$$c_{ik} = a_{i1}b_{1k} + a_{i2}b_{2k} + \dots + a_{in}b_{nk} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}b_{jk} \qquad (1)$$

oricare ar fi $i = 1, 2, \dots, m$ și $k = 1, 2, \dots, p$.

Matricea C se numește *produsul* dintre A și B (în această ordine) și se notează $C = AB$. Operația prin care oricărui element $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C})$ și oricărui element $B \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C})$ se asociază produsul lor se numește *înmulțire*.

Așadar, pentru a obține elementul din matricea AB de pe linia i și coloana k se face suma produselor elementelor corespunzătoare de pe linia i a matricei A cu cele de pe coloana k a matricei B. Mai pe scurt, se spune că „se înmulțesc liniile cu coloanele". Să explicităm mai pe larg modul cum se înmulțesc două matrice. Fie

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1p} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2p} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{np} \end{pmatrix}.$$

Dacă

$$C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1p} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2p} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{m1} & c_{m2} & \dots & c_{mp} \end{pmatrix}$$

este produsul lor, atunci

$$\begin{aligned} c_{11} &= a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + \dots + a_{1n}b_{n1}; \\ c_{12} &= a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} + \dots + a_{1n}b_{n2}; \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ c_{1p} &= a_{11}b_{1p} + a_{12}b_{2p} + \dots + a_{1n}b_{np}; \\ c_{21} &= a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} + \dots + a_{2n}b_{n1}; \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ c_{2p} &= a_{21}b_{1p} + a_{22}b_{2p} + \dots + a_{2n}b_{np}; \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ c_{mp} &= a_{m1}b_{1p} + a_{m2}b_{2p} + \dots + a_{mn}b_{np}. \end{aligned}$$

Să facem cîteva observații necesare înțelegerii înmulțirii matricelor:
1) Trebuie să reținem că are sens să vorbim de produsul matricei A cu matricea B (în această ordine) numai dacă numărul de coloane ale lui A este egal cu numărul de linii ale lui B.
2) Trebuie să subliniem că înmulțirea matricelor nu este în general o operație definită pe mulțimea tuturor matricelor, aşa cum rezultă şi din observația 1); ea este asemănătoare compunerii funcțiilor.
3) Dacă $A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ şi $B\in\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, atunci are sens să facem produsul $AB\in\in\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ și în acest caz înmulțirea matricelor, este o operație definită pe mulțimea $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ a matricelor. Trebuie să observăm că în cazul matricelor pătratice (de ordinul n) are sens să facem atît produsul AB cît şi produsul BA.
4) Se pune întrebarea de ce definim produsul matricelor A și B înmulțind liniile lui A cu coloanele lui B. Această definiție, care la prima vedere pare arbitrară, are de fapt justificări profunde, care sînt greu de explicat la nivelul clasei a XI-a. Totuși, vom spune în mare cum stau lucrurile: fiecărei transformări geometrice i se asociază o matrice. Matricea asociată compunerii a două transformări geometrice este exact produsul matricelor asociate fiecărei transformări în parte.

Exemple. 1) Fie $A=\begin{pmatrix}1 & -1 & 2\\ 0 & 4 & -3\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & 4\\ 0 & 0\\ -1 & 1\end{pmatrix}$.

Cum A este de tipul $(2, 3)$ și B este de tipul $(3, 2)$, are sens să facem produsul lor, care va fi o matrice de tipul $(2, 2)$. Să presupunem că $C=AB$, deci C este de forma $\begin{pmatrix}c_{11} & c_{12}\\ c_{21} & c_{22}\end{pmatrix}$, unde

$c_{11}=1\cdot1+(-1)\cdot0+2\cdot(-1)=-1$; $c_{12}=1\cdot4+(-1)\cdot0+2\cdot1=6$;
$c_{21}=0\cdot1+4\cdot0+(-3)(-1)=3$; $c_{22}=0\cdot4+4\cdot0+(-3)\cdot1=-3$.

Deci $AB=\begin{pmatrix}-1 & 6\\ 3 & -3\end{pmatrix}$.

2) Fie $A=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 2 & 3\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & -1 & 0\\ 2 & -2 & 1\end{pmatrix}$.

Cum A este de tipul $(2, 2)$ și B este de tipul $(2, 3)$, are sens să facem produsul AB, care va fi o matrice de tipul $(2, 3)$. Să presupunem că produsul este de forma $C=\begin{pmatrix}c_{11} & c_{12} & c_{13}\\ c_{21} & c_{22} & c_{23}\end{pmatrix}$. Atunci

$c_{11}=1\cdot1+(-1)\cdot2=-1$; $c_{12}=1\cdot(-1)+(-1)(-2)=1$; $c_{13}=1\cdot0+$
$+(-1)\cdot1=-1$; $c_{21}=2\cdot1+3\cdot2=8$; $c_{22}=2\cdot(-1)+3\cdot(-2)=-8$;
$c_{23}=2\cdot0+3\cdot1=3$.
Deci

$$AB=\begin{pmatrix}-1 & 1 & -1\\ 8 & -8 & 3\end{pmatrix}.$$

Proprietățile înmulțirii matricelor
1° *Înmulțirea este asociativă* în sensul următor: dacă $A\in\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C})$, $B\in\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{C})$ și $C\in\mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{C})$, atunci are loc egalitatea

$$(AB)C=A(BC).$$

Să observăm mai întîi că are sens să facem produsele $(AB)C$ şi $A(BC)$.
Fie $A = (a_{ij})_{\substack{1\leqslant i\leqslant m\\ 1\leqslant j\leqslant n}}$; $B = (b_{jk})_{\substack{1\leqslant j\leqslant n\\ 1\leqslant k\leqslant p}}$; $C = (c_{kl})_{\substack{1\leqslant k\leqslant p\\ 1\leqslant l\leqslant q}}$.
Să notăm $AB = (d_{ik})_{\substack{1\leqslant i\leqslant m\\ 1\leqslant k\leqslant p}}$ care este o matrice de tipul (m, p) şi $(AB)C = (e_{il})_{\substack{1\leqslant i\leqslant m\\ 1\leqslant l\leqslant q}}$ care este o matrice de tipul (m, q). Atunci $d_{ik} = \sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij}b_{jk}$ şi $e_{il} = \sum\limits_{k=1}^{p} d_{ik}c_{kl}$. Deci
$e_{il} = \sum\limits_{k=1}^{p}\left(\sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij}b_{jk}\right)c_{kl} = \sum\limits_{k=1}^{p}\sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij}b_{jk}c_{kl}$.
Fie $BC = (d'_{jl})_{\substack{1\leqslant j\leqslant n\\ 1\leqslant l\leqslant q}}$ şi $A(BC) = (e'_{il})_{\substack{1\leqslant i\leqslant m\\ 1\leqslant l\leqslant q}}$.
Atunci $d'_{jl} = \sum\limits_{k=1}^{p} b_{jk}c_{kl}$ şi $e'_{il} = \sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij}d'_{jl}$.

Deci $e'_{il} = \sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij}\sum\limits_{k=1}^{p} b_{jk}c_{kl} = \sum\limits_{j=1}^{n}\sum\limits_{k=1}^{p} a_{ij}b_{jk}c_{kl} = \sum\limits_{k=1}^{p}\sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij}b_{jk}c_{kl}$.

Să observăm că $e_{il} = e'_{il}$, oricare ar fi $i = 1, 2, \ldots, m$; $l = 1, 2, \ldots, q$ şi prin urmare $(AB)C = A(BC)$.

2° *Înmulţirea este distributivă la stînga faţă de adunare* în sensul următor: dacă $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbf{C})$, B, $C \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{C})$, atunci

$$A(B + C) = AB + AC.$$

Într-adevăr, dacă $A = (a_{ij})_{\substack{1\leqslant i\leqslant m\\ 1\leqslant j\leqslant n}}$, $B = (b_{jk})_{\substack{1\leqslant j\leqslant n\\ 1\leqslant k\leqslant p}}$ şi $C = (c_{jk})_{\substack{1\leqslant j\leqslant n\\ 1\leqslant k\leqslant p}}$, atunci $B + C = (b_{jk} + c_{jk})_{\substack{1\leqslant j\leqslant n\\ 1\leqslant k\leqslant p}}$. Dacă notăm $A(B + C)$ cu D, unde $D = (d_{ik})_{\substack{1\leqslant i\leqslant m\\ 1\leqslant k\leqslant p}}$, atunci $d_{ik} = \sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij}(b_{jk} + c_{jk})$.
Dacă notăm AB cu D' şi AC cu D'', unde $D' = (d'_{ik})_{\substack{1\leqslant i\leqslant m\\ 1\leqslant k\leqslant p}}$ şi $D'' = (d''_{ik})_{\substack{1\leqslant i\leqslant m\\ 1\leqslant k\leqslant p}}$, atunci $d'_{ik} = \sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij}b_{jk}$ şi $d''_{ik} = \sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij}c_{jk}$.
Rezultă că $AB + AC = D' + D'' = (d'_{ik} + d''_{ik})_{\substack{1\leqslant i\leqslant m\\ 1\leqslant k\leqslant p}}$.
Deoarece $d'_{ik} + d''_{ik} = \sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij}b_{jk} + \sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij}c_{jk} = \sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij}(b_{jk} + c_{jk}) = d_{ik}$, rezultă că $A(B + C) = AB + AC$.

2'° *Înmulţirea este distributivă la dreapta faţă de adunare* în sensul următor: dacă A, $B \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbf{C})$ şi $C \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{C})$ atunci

$$(A + B)C = AC + BC.$$

Demonstraţia acestei proprietăţi se face exact ca cea de la 2°.

În cazul matricelor pătratice are loc următoarea proprietate importantă:

3° *În mulţimea $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ există un element neutru faţă de înmulţire.* Matricea pătratică de ordinul n

$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 \end{pmatrix}$$

care are pe diagonala principală numerele 1 iar restul elementelor sînt 0 *are proprietatea că oricare ar fi* $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{C})$,

$$AI_n = I_nA = A.$$

Într-adevăr, dacă introducem notația,

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 \text{ dacă } i = j, \\ 0 \text{ dacă } i \neq j \end{cases}$$

(δ_{ij} se numește simbolul lui Kronecker), atunci $I_n = (\delta_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}}$. Fie $A = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}}$ o matrice pătratică de ordinul n. Dacă notăm AI_n cu $B = (b_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}}$, atunci $b_{ij} = \sum_{h=1}^{n} a_{ih}\delta_{hj} = a_{ij}$. Deci $AI_n = A$. În mod analog se arată că $I_nA = A$.

Observație. Am văzut că dacă $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbf{C})$, atunci are sens să facem produsele AB și BA. În general, cele două matrice sînt distincte, adică $AB \neq BA$. Într-adevăr, fie $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ și $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$; atunci $AB = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ și $BA = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Se observă că $AB \neq BA$.

3) *Înmulțirea cu scalari a matricelor.* Fie $A = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}}$ o matrice de tipul (m, n) și a un număr complex. Definim matricea $B = (b_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}}$ de tipul (ι, n) ale cărei elemente sînt date de egalitățile: $b_{ij} = aa_{ij}$ oricare ar fi $i = 1, 2, \ldots, m$ și $j = 1, 2, \ldots, n$. Matricea B se numește *produsul dintre numărul a* (sau *scalarul a*) *și matricea A* și se notează $B = aA$. Operația prin care oricărui element $a \in \mathbf{C}$ și oricărui element $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbf{C})$ li se asociază produsul aA se numește *înmulțirea cu scalari* (la stînga).

Observații. 1) Se numește înmulțirea cu scalari la stînga deoarece produsul dintre $a \in \mathbf{C}$ și matricea A se notează aA, adică a se scrie la stînga lui A.
2) Observăm că dacă $a \in \mathbf{C}$ și A este o matrice de tipul (m, n), atunci aA este de tipul (m, n).

Exemplu. Fie $a = 3$ și $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$ care este o matrice de tipul $(2, 3)$. Avem $aA = \begin{pmatrix} 3 & -6 & 0 \\ 6 & -3 & 9 \end{pmatrix}$.

Proprietățile înmulțirii cu scalari a matricelor

1° Dacă $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbf{C})$, atunci $1 \cdot A = A$.
2° Dacă $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbf{C})$ și $a, b \in \mathbf{C}$, atunci $(a + b)A = aA + bA$.
3° Dacă $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbf{C})$ și $a, b \in \mathbf{C}$, atunci $(ab)A = a(bA)$.
4° Dacă $A, B \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbf{C})$ și $a \in \mathbf{C}$, atunci $a(A + B) = aA + aB$.
5° Dacă $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbf{C})$, $B \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{C})$ și $a \in \mathbf{C}$, atunci $a(AB) = (aA)B = A(aB)$.

Cele cinci proprietăți se demonstrează fără nici o dificultate; verificarea lor o lăsăm ca exercițiu.

3. **Transpusa unei matrice.** Fie $A = (a_{ij})_{\substack{1\leq i\leq m\\ 1\leq j\leq n}}$ o matrice de tipul (m, n). Matricea ${}^tA = ({}^ta_{kl})_{\substack{1\leq k\leq n\\ 1\leq l\leq m}}$ unde ${}^ta_{kl} = a_{lk}$ pentru orice $k = 1, 2, \ldots, n$; $l = 1, 2, \ldots, m$ se numește *transpusa matricei* A.

Se observă că ${}^tA$ este o matrice de tipul (n, m) și se obține din A luînd liniile, respectiv coloanele, lui A drept coloane, respectiv linii, pentru ${}^tA$ (mai precis prima linie a matricei ${}^tA$ este prima coloană a matricei A, a doua linie a lui ${}^tA$ este a doua coloană a lui A ș.a.m.d.).

În particular, dacă A este o matrice pătratică de ordinul n, atunci transpusa sa ${}^tA$ este de asemenea o matrice pătratică de ordinul n. Dacă $k = l$ atunci ${}^ta_{kk} = a_{kk}$ și deci diagonala principală a matricei ${}^tA$ este aceeași cu diagonala principală a matricei A.

Exemple. 1) Fie $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & -3 \end{pmatrix}$; matricea A este de tipul $(2, 3)$. Transpusa acestei matrice este ${}^tA = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \\ 3 & -3 \end{pmatrix}$.

2) Dacă $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -2 \end{pmatrix}$ atunci transpusa ${}^tA$ este matricea ${}^tA = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & -2 \end{pmatrix}$.

Următoarele proprietăți se verifică fără nici o dificultate. Demonstrarea lor o lăsăm ca exercițiu:

1° Dacă $A, B \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbf{C})$, atunci

$${}^t(A + B) = {}^tA + {}^tB.$$

2° Dacă $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbf{C})$ și $B \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{C})$, atunci ${}^t(AB) = {}^tB\,{}^tA$.

3° Dacă $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbf{C})$ și $a \in \mathbf{C}$, atunci

$${}^t(aA) = a\,{}^tA.$$

Exerciții

1. Fie $A = \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 5 & 7 \\ 6 & -2 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 0 & 8 \\ 6 & 2 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}$. Să se calculeze $A + B$.

2. Fie $A = \begin{pmatrix} -1 & 4 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ -2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Să se calculeze:

a) $A + B$, AB și BA.

b) A^2, B^2 și $A^2 - B^2$.

c) $AB - BA$.

3. Dacă $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ și $AB = BA$ să se arate că are loc egalitatea:
$$A^k - B^k = (A - B)(A^{k-1} + A^{k-2}B + A^{k-3}B^2 + \dots + AB^{k-2} + B^{k-1}),$$
oricare ar fi $k > 0$.

4. Fie $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Q})$. Să se determine toate matricele $X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Q})$ astfel încît: $AX = XA$.

5. Fie $A = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$. Să se calculeze $A^n (n \geqslant 1)$.

6. Dacă $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$, atunci A verifică ecuația:
$$x^2 - (a + d)x + (ad - bc)I_2 = 0.$$

7. Fie $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \\ 3 & -1 & 3 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{Q})$. Dacă $f(x) = x^2 + 3x + I_3$ să se calculeze $f(A)$.

8. Fie $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$, să se determine $A^n (n \geqslant 1)$.

9. Dacă $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ să se arate că egalitatea $AB - BA = I_n$ este imposibilă.

10. Să se determine $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ astfel încît:
a) $A^2 = I_2$,
b) $A^2 = 0$.

11. Să se determine x, y, z, u, v, w, dacă se cunoaște că avem egalitatea:
$$2\begin{pmatrix} x & -2y & 3z \\ -3 & 2 & -1 \end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ u & v & -3w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -2 & 18 \\ 3 & -5 & -11 \end{pmatrix}.$$

12. Să se determine matricea X din ecuația:
$$3X + \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 7 & 4 \\ -2 & 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 & 6 \\ -9 & 3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

13. Să se determine x și y, dacă avem:
$$x\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -4 \\ -1 & 3 & -2 & 2 \\ 3 & 1 & -4 & -1 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 5y & 3x & -10 \\ -1 & 5 & -4 & 6y \\ 13 & 5 & -4y & -1 \end{pmatrix}.$$

14. Să se calculeze suma:
$$\sum_{k=1}^{n} \begin{pmatrix} 1 & k & k^2 & k^3 \\ -1 & 2 & 3 & k(k+1) \end{pmatrix}.$$

15. Dacă ω este o rădăcină a ecuației $x^2 + x + 1 = 0$, să se calculeze suma:
$$\sum_{k=1}^{n} \begin{pmatrix} \omega^k & \omega^{2k} & \omega^{3k} \\ \omega^{3k} & \omega^k & \omega^{2k} \end{pmatrix}.$$

16. Să se determine valorile lui $x \in \mathbf{R}$ pentru care avem:

$$\begin{pmatrix} 2\sin^2 x & \sin^2 2x \\ \operatorname{tg} x & \cos 2x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

17. Să se rezolve ecuația:

$$X^2 = \begin{pmatrix} 1 & 12 \\ -4 & 1 \end{pmatrix},$$

X fiind o matrice pătrată de ordinul doi cu elemente numere reale.

18. Se consideră $A = \begin{pmatrix} 0 & a \\ a & 0 \end{pmatrix}$. Se cere A^n.

19. Fie A o matrice pătratică de ordinul doi. Dacă $A^2 = 0$, atunci suma elementelor de pe diagonala principală a matricei A este egală cu zero.

20. Să se arate că există o infinitate de matrice $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ care verifică egalitatea

$A^2 = I_2$ și $a, b, c, d \in \mathbf{Z}$.

21. Fie $\mathcal{M}$ mulțimea matricelor pătrate de ordinul doi de forma $\begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}$, unde $a, b \in \mathbf{R}$. Definim funcția

$$f : \mathbf{C} \to \mathcal{M},\ f(a + ib) = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}.$$

Să se arate că: a) f este bijectivă;

b) oricare ar fi $z, z' \in \mathbf{C}$ au loc egalitățile

$$f(z + z') = f(z) + f(z'),$$
$$f(zz') = f(z)f(z').$$

22. Fie matricea $A = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$ astfel încît $0 \leqslant a^2 + b^2 < 1$.

a) Să se arate că matricea A^n este de forma $\begin{pmatrix} a_n & b_n \\ -b_n & a_n \end{pmatrix}$.

b) Să se demonstreze că șirurile a_n și b_n sînt convergente și au limita zero.

23. Să notăm cu $\mathcal{M}$ mulțimea tuturor matricelor de tipul (m, n) în care toate elementele sînt numerele $+1$ sau -1 și astfel încît produsul numerelor din fiecare linie și din fiecare coloană să fie -1. Să se calculeze numărul elementelor mulțimii $\mathcal{M}$.

24. Să se calculeze suma

$$\sum_{k=1}^{n} \begin{pmatrix} \cos k\alpha & \sin k\alpha \\ \cos^2 k\alpha & \sin^2 k\alpha \end{pmatrix}.$$

CAPITOLUL III

Determinanți

1. **Determinanți de ordinul 2 și 3.** Fie sistemul de două ecuații liniare cu două necunoscute

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2. \end{cases} \tag{1}$$

Să notăm cu A matricea coeficienților sistemului (1), adică

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

A este o matrice pătratică de ordinul doi.

Rezolvarea sistemului (1) este bine cunoscută. Aplicînd metoda reducerii obținem sistemul echivalent

$$\begin{cases} (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_1 = b_1a_{22} - a_{12}b_2, \\ (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_2 = a_{11}b_2 - b_1a_{21}. \end{cases}$$

Presupunem că $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$; atunci soluția sistemului (1) este

$$x_1 = \frac{b_1a_{22} - a_{12}b_2}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}, \quad x_2 = \frac{a_{11}b_2 - b_1a_{21}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}. \tag{2}$$

Se observă că numitorul din egalitățile (2) se exprimă simplu: el este egal cu produsul elementelor de pe diagonala principală a matricei A din care se scade produsul elementelor de pe diagonala secundară a matricei A.

Acest număr îl notăm cu det A și îl numim *determinantul matricei* A, sau încă, *determinant de ordinul doi* (deoarece matricea A este de ordinul doi). Acest număr se notează de obicei și astfel:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}.$$

Deci avem egalitatea

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

Produsele $a_{11}a_{22}$, $a_{12}a_{21}$ se numesc *termenii determinantului de ordinul doi.*

Exemplu. Fie matricea $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$. Avem det $A = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = 1 \cdot 5 - 4 \cdot 2 = -3.$

Să revenim la formulele (2) care dau soluțiile sistemului (1). Se observă că numărătorul formulei care dă valoarea lui x_1 este tot un determinant de ordinul doi, şi anume determinantul matricei

$$A_1 = \begin{pmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{pmatrix}.$$

Această matrice se obţine din A înlocuind prima coloană a matricei A cu coloana formată din elementele b_1 şi b_2. Analog, numărătorul formulei care dă valoarea lui x_2 este un determinant de ordinul doi, şi anume determinantul matricei

$$A_2 = \begin{pmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{pmatrix}.$$

Deci formulele (2) se pot rescrie sub forma

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}, \quad x_2 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}. \tag{3}$$

Formulele (3) poartă denumirea de *formulele lui Cramer*.

Să considerăm acum un sistem de trei ecuaţii liniare cu trei necunoscute.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases} \tag{4}$$

şi să notăm cu A matricea coeficienţilor, adică

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}.$$

Rezolvarea sistemului (4) o vom face prin metoda reducerii. Dacă înmulţim prima ecuaţie din (4) cu a_{23} şi a doua cu $-a_{13}$ şi le adunăm, obţinem ecuaţia

$$(a_{11}a_{23} - a_{21}a_{13})x_1 + (a_{12}a_{23} - a_{22}a_{13})x_2 = b_1a_{23} - b_2a_{13}. \tag{5}$$

Analog, înmulţind prima ecuaţie cu a_{33} şi a treia cu $-a_{13}$ şi apoi adunînd, obţinem ecuaţia

$$(a_{11}a_{33} - a_{31}a_{13})x_1 + (a_{12}a_{33} - a_{32}a_{13})x_2 = b_1a_{33} - b_3a_{13}. \tag{6}$$

Cu ecuaţiile (5) şi (6) formăm sistemul

$$\begin{cases} (a_{11}a_{23} - a_{21}a_{13})x_1 + (a_{12}a_{23} - a_{22}a_{13})x_2 = b_1a_{23} - b_2a_{13}. \\ (a_{11}a_{33} - a_{31}a_{13})x_1 + (a_{12}a_{33} - a_{32}a_{13})x_2 = b_1a_{33} - b_3a_{13}, \end{cases} \tag{7}$$

care este un sistem de două ecuaţii cu două necunoscute. Dacă în sistemul (7) înmulţim prima ecuaţie cu $a_{12}a_{33} - a_{32}a_{13}$ şi a doua cu $-(a_{12}a_{23} - a_{22}a_{13})$ şi apoi le adunăm obţinem

$$[(a_{11}a_{23} - a_{21}a_{13})(a_{12}a_{33} - a_{32}a_{13}) - (a_{11}a_{33} - a_{31}a_{13})(a_{12}a_{23} - a_{22}a_{13})]x_1 =$$
$$= (b_1a_{23} - b_2a_{13})(a_{12}a_{33} - a_{32}a_{13}) - (b_1a_{33} - b_3a_{13})(a_{12}a_{23} - a_{22}a_{13}).$$

Desfăcînd parantezele, avem

$$(a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32})x_1 =$$
$$= b_1a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}b_3 + a_{13}b_2a_{32} - a_{13}a_{22}b_3 - a_{12}b_2a_{33} - b_1a_{23}a_{32}. \qquad (8)$$

Numărul care este coeficientul lui x_1 în ecuația (8) îl notăm cu det A și îl numim *determinantul matricei* A, sau încă, *determinant de ordinul trei* (deoarece matricea A este o matrice de ordinul trei). Acest număr se notează de obicei și astfel:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

Deci avem egalitatea

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}. \qquad (9)$$

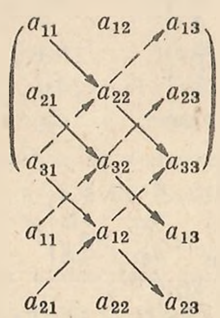
Din (9) se vede că formula care dă valoarea determinantului de ordinul trei are șase termeni, numiți *termenii determinantului de ordinul trei*.

Exemplu. Fie matricea

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & -1 \\ 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Aplicînd formula (9), avem: det $A = (-1)\cdot 1\cdot 3 + 4\cdot 2\cdot 3 + 4\cdot 2\cdot(-1) - 4\cdot 1\cdot 3 - (-1)\cdot 2\cdot(-1) - 4\cdot 2\cdot 3 = -3 + 24 - 8 - 12 - 2 - 24 = -25$.

Observăm că formula (9) care dă valoarea determinantului de ordinul trei este greu de ținut minte. Pentru aceasta se stabilește o regulă simplă pentru calculul determinantului de ordinul trei. Se formează următorul tablou: se scriu mai întîi liniile matricei A și apoi dedesubt se scrie mai întîi prima linie și apoi a doua linie a matricei A. În felul acesta se obține un tablou cu cinci linii



Termenii cu semnul (+) în dezvoltarea determinantului de ordinul trei sînt cei care se obțin prin înmulțirea elementelor în sensul săgeților continui, adică: $a_{11}a_{22}a_{33}$, $a_{21}a_{32}a_{13}$, $a_{31}a_{12}a_{23}$ iar termenii cu semnul (—) sînt cei care se obțin prin înmulțirea elementelor în sensul săgeților punctate, adică: $a_{31}a_{22}a_{13}$, $a_{11}a_{32}a_{23}$, $a_{21}a_{12}a_{33}$.

Regula expusă mai înainte după care se face dezvoltarea determinantului de ordinul trei se numește *regula lui Sarrus*.

Exemplu. Să considerăm matricea

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 3 \end{pmatrix}.$$

Formăm tabloul pentru aplicarea regulii lui Sarrus

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$
$$\begin{matrix} -1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{matrix}$$

Deci $\det A = (-1)\cdot 1\cdot 3 + 2\cdot 3\cdot 1 + 4\cdot 1\cdot 0 - 4\cdot 1\cdot 1 - (-1)\cdot 3\cdot 0 - 2\cdot 1\cdot 3 = -3 + 6 - 4 - 6 = -7.$

Să ne reîntoarcem la ecuația (8) care dă valoarea lui x_1. Se observă că membrul doi este tot un determinant de ordinul trei și anume este determinantul matricei de ordinul trei care se obține din matricea A, matricea coeficienților, prin înlocuirea primei coloane cu coloana termenilor liberi din sistemul (4). Deci formula (8) se poate scrie astfel:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} x_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Procedînd exact așa cum am făcut pentru obținerea ecuației (8), avem și ecuațiile care dau valorile lui x_2 și x_3:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} x_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} x_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}.$$

Dacă

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \neq 0$$

atunci valorile lui x_1, x_2 și x_3 sînt:

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}, \quad x_2 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}, \quad x_3 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}. \quad (10)$$

Formulele (10) se numesc, de asemenea, *formulele lui Cramer* de rezolvare a sistemelor de trei ecuații liniare cu trei necunoscute.

2. **Definiția determinantului de ordinul** n. În cele ce urmează vom căuta să dăm definiția determinantului unei matrice pătratice de ordinul n în așa fel încît pentru $n = 2$ și $n = 3$ să obținem determinanții de ordinul 2 și 3. În definirea determinanților de ordinul 2 și 3 am utilizat rezolvarea sistemelor de ecuații liniare. Acest procedeu este greu de folosit pentru cazul general, datorită calculelor laborioase care intervin. Noi vom utiliza altă metodă: analizînd formulele care dau determinanții de ordinul 2 și 3, vom deduce o lege generală prin care vom defini determinantul de ordinul n. În capitolul următor vom arăta că formula determinantului de ordinul n, așa cum o dăm mai jos, ne va permite obținerea unor formule de tip Cramer pentru rezolvarea sistemelor de n ecuații liniare cu n necunoscute.

Să reamintim formulele determinanților de ordinul 2 și 3:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21},$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - \\ - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}.$$

Constatăm că termenii determinanților de ordinul 2 și 3 sînt produse de elemente aparținînd la linii și coloane distincte. În plus, orice astfel de produs (adică din elemente aparținînd la linii și coloane distincte) este termen în formula determinantului respectiv.

Să considerăm acum o matrice pătratică de ordinul n

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}; \ A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{C}).$$

Vom forma toate produsele posibile de n elemente aparținînd la linii și coloane distincte. Un astfel de produs este de forma

$$a_{1i_1} a_{2i_2} \dots a_{ni_n}, \qquad (1)$$

unde $i_1, i_2, \dots, i_n$ sînt toate elementele mulțimii $\{1, 2, \dots, n\}$, eventual, în altă ordine. Înseamnă că putem considera permutarea de gradul n

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ i_1 & i_2 & \dots & i_n \end{pmatrix}$$

și deci produsul (1) se scrie

$$a_{1i_1}a_{2i_2} \dots a_{ni_n} = a_{1\sigma(1)}a_{2\sigma(2)} \dots a_{n\sigma(n)}.$$

Numărul total al produselor de forma (1) este egal cu numărul tuturor permutărilor de grad n, deci $n!$.

Ținînd cont de formulele determinanților de ordinul 2 și 3, în mod natural formula determinantului de ordinul n trebuie să conțină toate produsele

$$a_{1\sigma(1)}a_{2\sigma(2)}\ldots a_{n\sigma(n)},$$

unde σ parcurge toate permutările lui S_n. Mai rămîne de aflat semnul cu care apare produsul $a_{1\sigma(1)}a_{2\sigma(2)}\ldots a_{n\sigma(n)}$.

Să revenim din nou la formulele determinanților de ordinul 2 și 3. Să luăm de exemplu din formula determinantului de ordinul 3 termenii cu semnul $(+)$: $a_{11}a_{22}a_{33}$, $a_{12}a_{23}a_{31}$, $a_{13}a_{21}a_{32}$. Se observă că permutările asociate acestor termeni:

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

sînt permutări pare, deci semnul lor este $+1$.

Dacă luăm acum termenii cu semnul $(-)$: $a_{13}a_{22}a_{31}$, $a_{12}a_{21}a_{33}$, $a_{11}a_{23}a_{32}$, permutările asociate acestor termeni:

$$\sigma_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad \sigma_5 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \quad \sigma_6 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

sînt permutări impare, deci au signatura (semnul) -1.

Aceste observații ne sugerează că în definiția determinantului de ordinul n, produsul $a_{1\sigma(1)}a_{2\sigma(2)}\ldots a_{n\sigma(n)}$ trebuie să aibă semnul $(+)$ sau $(-)$ după cum permutarea σ are signatura (semnul) $+1$ sau -1.

Acum sîntem în măsură să definim determinantul de ordinul n.

Definiție. **Numărul** $\det A = \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) a_{1\sigma(1)}a_{2\sigma(2)}\ldots a_{n\sigma(n)}$, (2)

unde S_n este mulțimea tuturor permutărilor de gradul n și $\varepsilon(\sigma)$ este signatura permutării σ se numește ***determinantul matricei A*** **sau, mai simplu, determinant de ordinul n și se notează de obicei astfel:**

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Produsul $a_{1\sigma(1)}a_{2\sigma(2)}\ldots a_{n\sigma(n)}$ se numește *termen al determinantului de ordinul n.*

Se obișnuiește să se spună despre elementele, liniile și coloanele matricei A că sînt elementele, liniile, respectiv coloanele determinantului $\det A$. Uneori numărul $\det A$ se mai notează prescurtat și $|A|$ sau $|a_{ij}|_{\substack{1\leq i\leq n \\ 1\leq j\leq n}}$.

Observații. 1) Noțiunea de determinant al unei matrice are sens numai pentru matrice pătratice. Este deosebire între matrice și determinantul său: matricea este o funcție, iar determinantul matricei este un număr.

2) În formula determinantului unei matrice există $n!$ termeni dintre care $\frac{n!}{2}$ au semnul $(+)$, iar $\frac{n!}{2}$ au semnul $(-)$.

3) Dacă $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ (respectiv $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{Q})$, respectiv $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{Z})$), atunci det A este un număr real (respectiv raţional, respectiv întreg).
4) Definiţia determinantului se aplică şi matricelor de ordinul 1, cînd $A = (a_{11})$. În acest caz det $A = a_{11}$.
5) Aşa cum a fost definit determinantul de ordinul n, pentru $n = 2$ şi $n = 3$ obţinem determinantul de ordinul 2 respectiv 3.

3. **Proprietăţile determinanţilor.** Formula determinantului de ordinul 2 este simplă, formula determinantului de ordinul 3 este deja complicată. Aici avem avantajul că avem o regulă simplă, regula lui Sarrus, care ne permite să calculăm destul de uşor un determinant de ordinul 3. Dacă în schimb avem de calculat determinanţi de ordinul $n \geqslant 4$, formula prin care este definit determinantul de ordinul n, în general este aproape imposibil de aplicat, datorită calculelor laborioase ce apar. De exemplu, pentru un determinant de ordinul 4 avem $4! = 24$ termeni în formula sa, pentru $n = 5$ avem $5!=120$ termeni de calculat, iar pentru $n = 10$ avem $10! = 3\,628\,800$ termeni de calculat. Din aceste motive se caută să se scoată în evidenţă o serie de proprietăţi ale determinanţilor de ordinul n, care simplifică de multe ori calculul determinanţilor.

Proprietatea 1. **Determinantul unei matrice coincide cu determinantul matricei transpuse. Adică dacă $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ atunci det A = det ${}^tA$.**

Demonstraţie. Fie $A = (a_{ij})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ 1\leqslant j\leqslant n}}$ şi ${}^tA = ({}^ta_{ij})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ 1\leqslant j\leqslant n}}$ matricea transpusă a lui A. Deci ${}^ta_{ij} = a_{ji}$, oricare ar fi $i = 1, 2, \ldots, n$; $j = 1, 2, \ldots, n$. Avem:

$$\det A = \sum_{\sigma\in S_n} \varepsilon(\sigma) a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \cdots a_{n\sigma(n)}, \tag{1}$$

$$\det {}^tA = \sum_{\tau\in S_n} \varepsilon(\tau) {}^ta_{1\tau(1)} {}^ta_{2\tau(2)} \cdots {}^ta_{n\tau(n)} = \sum_{\tau\in S_n} \varepsilon(\tau) a_{\tau(1)1} a_{\tau(2)2} \cdots a_{\tau(n)n}. \tag{2}$$

Dacă notăm $\sigma(i) = k_i$, atunci $i = \sigma^{-1}(k_i)$ şi deci produsul

$$\varepsilon(\sigma) a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \cdots a_{n\sigma(n)} = \varepsilon(\sigma) a_{\sigma^{-1}(k_1)k_1} a_{\sigma^{-1}(k_2)k_2} \cdots a_{\sigma^{-1}(k_n)k_n} =$$
$$= \varepsilon(\sigma^{-1}) a_{\sigma^{-1}(k_1)k_1} a_{\sigma^{-1}(k_2)k_2} \cdots a_{\sigma^{-1}(k_n)k_n}$$

deoarece $\varepsilon(\sigma) = \varepsilon(\sigma^{-1})$. Cum numerele $k_1, k_2, \ldots, k_n$ sînt numerele $1, 2, \ldots, n$ eventual în altă ordine, iar înmulţirea numerelor este comutativă, atunci

$$\varepsilon(\sigma) a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \cdots a_{n\sigma(n)} = \varepsilon(\sigma^{-1}) a_{\sigma^{-1}(1)1} a_{\sigma^{-1}(2)2} \cdots a_{\sigma^{-1}(n)n}$$

şi deci orice termen din suma (1) se regăseşte ca termen în suma (2) şi invers. Deci det A = det ${}^tA$.

Observaţii. 1) Propietatea 1 se scrie şi astfel:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \ldots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \ldots & a_{n2} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{1n} & a_{2n} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

2) Proprietatea 1 arată că ori de cîte ori avem o proprietate adevărată referitoare la liniile unui determinant, aceeaşi proprietate este adevărată şi pentru coloanele determinantului.

Proprietatea 2. **Dacă toate elementele unei linii (sau coloane) dintr-o matrice sînt nule, atunci determinantul matricei este nul.**

Demonstrație. Să presupunem că toate elementele de pe linia i sînt nule. Cum fiecare termen al determinantului este un produs de elemente printre care se găsește și un element de pe linia i, atunci acest termen este zero. Deci determinantul este zero.

Exemplu. Fie matricea

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 7 \end{pmatrix}.$$

Deoarece linia a 2-a a matricei A are toate elementele nule, det $A = 0$.

Proprietatea 3. **Dacă într-o matrice schimbăm două linii (sau coloane) între ele obținem o matrice care are determinantul egal cu opusul determinantului matricei inițiale.**

Demonstrație. Fie matricea

$$A = \begin{array}{c} \left(\begin{array}{cccc} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{i1} & a_{i2} & \ldots & a_{in} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{j1} & a_{j2} & \ldots & a_{jn} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{array}\right) \end{array} \begin{array}{c} \\ \\ (i) \\ \\ (j) \\ \\ \\ \end{array}$$

Prin schimbarea liniilor i și j între ele obținem matricea

$$A' = \begin{array}{c} \left|\begin{array}{cccc} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{j1} & a_{j2} & \ldots & a_{jn} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{i1} & a_{i2} & \ldots & a_{in} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{array}\right| \end{array} \begin{array}{c} \\ \\ (i) \\ \\ (j) \\ \\ \\ \end{array}$$

Avem det $A' = \sum\limits_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \ldots a_{j\sigma(i)} \ldots a_{i\sigma(j)} \ldots a_{n\sigma(n)}$. Să considerăm transpoziția $\tau = (ij)$ deci $\tau(i) = j$, $\tau(j) = i$ și $\tau(k) = k$ dacă $k \neq i, j$. Atunci

$$\det A' = \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \ldots a_{j\sigma(i)} \ldots a_{i\sigma(j)} \ldots a_{n\sigma(n)} =$$

$$= \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) a_{1(\sigma\tau)(1)} a_{2(\sigma\tau)(2)} \ldots a_{j(\sigma\tau)(j)} \ldots a_{i(\sigma\tau)(i)} \ldots a_{n(\sigma\tau)(n)}.$$

Cum $\varepsilon(\sigma\tau) = \varepsilon(\sigma)\varepsilon(\tau) = -\varepsilon(\sigma)$, avem

$$\det A' = -\sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma\tau) a_{1(\sigma\tau)(1)} \ldots a_{i(\sigma\tau)(i)} \ldots a_{j(\sigma\tau)(j)} \ldots a_{n(\sigma\tau)(n)}.$$

Cînd σ parcurge toate permutările lui S_n atunci și $\sigma\tau$ parcurge toate permutările lui S_n; deci dacă notăm $\sigma\tau = \sigma'$ avem

$$\det A' = -\sum_{\sigma' \in S_n} \varepsilon(\sigma') a_{1\sigma'(1)} a_{2\sigma'(2)} \ldots a_{n\sigma'(n)}$$

și deci det $A' = -$det A.

Exemplu. Fie matricea $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ -1 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Dacă schimbăm liniile 1 şi 3 între ele obţinem matricea $A' = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & -2 \end{pmatrix}$.

Conform proprietăţii 3, avem $\det A' = -\det A$, fapt ce se poate verifica şi folosind regula lui Sarrus.

Proprietatea 4. **Dacă o matrice are două linii (sau coloane) identice, atunci determinantul său este nul.**

Demonstraţie. Fie $A = (a_{ij})_{\substack{1\leq i\leq n \\ 1\leq j\leq n}}$ o matrice pătratică de ordinul n în care liniile i şi j sînt identice. Aceasta înseamnă că $a_{ik} = a_{jk}$ pentru orice $k = 1, 2, \ldots, n$. Dacă schimbăm liniile i şi j între ele obţinem o matrice A' egală cu A. Aplicînd proprietatea 3, avem că $\det A' = -\det A$. Cum $A = A'$ avem $\det A = \det A'$ şi atunci $\det A = -\det A$; deci $\det A = 0$.

Exemplu. Fie matricea $A = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 1 \\ -2 & 6 & -2 \\ 4 & -2 & 4 \end{pmatrix}$

care are două coloane identice (coloana 1 şi coloana 3). Deci conform proprietăţii 4 avem $\det A = 0$.

Proprietatea 5. **Dacă toate elementele unei linii (sau coloane) ale unei matrice sînt înmulţite cu un număr α obţinem o matrice al cărei determinant este egal cu α înmulţit cu determinantul matricei iniţiale.**

Demonstraţie. Fie matricea $A = (a_{ij})_{\substack{1\leq i\leq n \\ 1\leq j\leq n}}$ şi fie $A' = (a'_{ij})_{\substack{1\leq i\leq n \\ 1\leq j\leq n}}$ matricea care se obţine din A prin înmulţirea liniei i cu numărul α. Deci avem $a'_{rj} = a_{rj}$ pentru $r \neq i$ şi $j = 1, 2, \ldots, n$ şi $a'_{ij} = \alpha a_{ij}$ oricare ar fi $j = 1, 2, \ldots, n$. Deci

$$\det A' = \sum_{\sigma\in S_n} \varepsilon(\sigma) a'_{1\sigma(1)} a'_{2\sigma(2)} \ldots a'_{i\sigma(i)} \ldots a'_{n\sigma(n)} =$$

$$= \sum_{\sigma\in S_n} \varepsilon(\sigma) a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \ldots (\alpha a_{i\sigma(i)}) \ldots a_{n\sigma(n)} =$$

$$= \alpha \sum_{\sigma\in S_n} \varepsilon(\sigma) a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \ldots a_{i\sigma(i)} \ldots a_{n\sigma(n)} = \alpha \det A.$$

Deci $\det A' = \alpha \det A$.

Observaţie. Proprietatea 5 se transcrie şi astfel (pentru linii):

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \alpha a_{i1} & \alpha a_{i2} & \ldots & \alpha a_{in} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} = \alpha \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{i1} & a_{i2} & \ldots & a_{in} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Exemplu. Fie matricea

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 3 & -1 \\ -2 & 6 & -2 \\ 4 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Dacă înmulţim linia a 2-a cu numărul $\alpha = 1/2$ obţinem matricea

$$A' = \begin{pmatrix} 4 & 3 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ 4 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Aplicînd proprietatea 5 avem $\det A' = \frac{1}{2} \det A$, lucru ce se poate verifica şi direct aplicînd regula lui Sarrus. Avem $\det A = 10$ şi $\det A' = 5$.

Proprietatea 6. Dacă elementele a două linii (sau coloane) ale unei matrice sînt proporţionale, atunci determinantul matricei este nul.

Demonstraţie. Fie matricea $A = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}}$ în care liniile i şi j sînt proporţionale, adică există un număr α astfel încît $a_{jl} = \alpha a_{il}$ oricare ar fi $l = 1, 2, \ldots, n$. Aplicînd proprietatea 5 rezultă că $\det A$ este produsul dintre numărul α şi determinantul unei matrice care are două linii egale. Aplicînd proprietatea 4 rezultă că $\det A$ este zero.

Exemplu. Fie matricea

$$A = \begin{vmatrix} 4 & 2 & -1 & -3 \\ -3 & 7 & -9 & 1 \\ 2 & 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \\ 5 & 8 & 9 & 10 \end{vmatrix}.$$

Cum linia 1 şi linia a 3-a a matricei A sînt proporţionale aplicînd proprietatea 6 avem $\det A = 0$.

Proprietatea 7. Fie $A = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}}$ o matrice pătratică de ordinul n. Presupunem că elementele liniei i sînt de forma

$a_{ij} = a'_{ij} + a''_{ij}$, oricare ar fi $j = 1, 2, \ldots, n$.

Dacă A', respectiv A'', este matricea care se obţine din A înlocuind elementele de pe linia i cu elementele a'_{ij} (respectiv a''_{ij}), $j = 1, 2, \ldots, n$, atunci

$$\det A = \det A' + \det A''.$$

Demonstraţie. Avem:

$$\det A = \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \ldots a_{i\sigma(i)} \ldots a_{n\sigma(n)} = \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \ldots (a'_{i\sigma(i)} + a''_{i\sigma(i)}) \ldots a_{n\sigma(n)} = \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \ldots a'_{i\sigma(i)} \ldots a_{n\sigma(n)} + \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \ldots a''_{i\sigma(i)} \ldots a_{n\sigma(n)} = \det A' + \det A''.$$

Observaţii. 1) Proprietatea 7 se transcrie şi astfel:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a'_{i1} + a''_{i1} & a'_{i2} + a''_{i2} & \ldots & a'_{in} + a''_{in} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a'_{i1} & a'_{i2} & \ldots & a'_{in} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a''_{i1} & a''_{i2} & \ldots & a''_{in} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

2) Folosind proprietatea 1 obţinem pentru proprietatea 7 şi varianta pe coloane, adică egalitatea:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a'_{1j}+a''_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a'_{2j}+a''_{2j} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a'_{nj}+a''_{nj} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a'_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a'_{2j} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a'_{nj} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a''_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a''_{2j} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a''_{nj} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Fie $A = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}}$ o matrice pătratică. Vom spune că linia i a matricei A este o *combinaţie liniară* de celelalte linii, dacă există numerele α_j, $j = 1, 2, \dots, i-1, i+1, \dots, n$ astfel încît

$$a_{ij} = \alpha_1 a_{1j} + \alpha_2 a_{2j} + \dots + \alpha_{i-1} a_{i-1,j} + \alpha_{i+1} a_{i+1,j} + \dots + \alpha_n a_{nj},$$

oricare ar fi $j = 1, 2, \dots, n$. Asupra numerelor α_j nu se pune nici o condiţie, în sensul că unele dintre ele pot fi zero. Analog se poate defini ce înseamnă că o coloană j a matricei A este combinaţie liniară de celelalte coloane.

Exemplu. Fie matricea

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ -3 & 3 & -10 \\ -2 & 5 & -6 \end{pmatrix}.$$

Linia a 2-a a matricei A este combinaţie liniară de celelalte două linii. Într-adevăr, dacă considerăm numerele $\alpha_1 = -1$ şi $\alpha_3 = 1$ se observă că: $-3 = (-1) \cdot 1 + 1 \cdot (-2)$; $3 = (-1) \cdot 2 + 1 \cdot 5$; $-10 = (-1) \cdot 4 + 1 \cdot (-6)$.

Proprietatea 8. **Dacă o linie (sau o coloană) a unei matrice pătratice este o combinaţie liniară de celelalte linii (sau coloane), atunci determinantul matricei este zero.**

Demonstraţie. Presupunem că linia i a matricei A este o combinaţie liniară de celelalte linii. Utilizînd proprietatea 7, determinantul matricei A este o sumă de determinanţi care au două linii proporţionale, deci, după proprietatea 6, sînt zero toţi aceşti determinanţi. Prin urmare şi determinantul matricei A este zero.

Exemplu. Să considerăm din nou matricea de mai sus

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ -3 & 3 & -10 \\ -2 & 5 & -6 \end{pmatrix}.$$

Cum linia a 2-a este o combinaţie liniară de celelalte două linii, rezultă că $\det A = 0$.

Proprietatea 9. **Dacă la o linie (sau coloană) a matricei A adunăm elementele altei linii (sau coloane) înmulţite cu acelaşi număr, atunci această matrice are acelaşi determinant ca şi matricea A.**

Demonstrație. Să presupunem că $A = (a_{ij})_{\substack{1\leq i\leq n\\1\leq j\leq n}}$ și că la linia i adunăm elementele liniei j înmulțite cu numărul α. Obținem astfel o matrice A' care are aceleași linii ca matricea A, în afară de linia i, ale cărei elemente sînt

$$a_{ir} + \alpha a_{jr},\ r = 1, 2, \ldots, n.$$

Folosind proprietatea 7, determinantul matricei A' este suma a doi determinanți dintre care unul este determinantul matricei A și al doilea determinant este determinantul unei matrice care are două linii proporționale. Conform proprietății, 6 acest al doilea determinant este nul. Prin urmare, $\det A' = \det A$.

Observație. Proprietatea 9 se transcrie astfel (pentru linii):

$$\begin{array}{c} \\ \\ (i) \\ \\ (j) \\ \\ \\ \end{array}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{i1}+\alpha a_{j1} & a_{i2}+\alpha a_{j2} & \ldots & a_{in}+\alpha a_{jn} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{j1} & a_{j2} & \ldots & a_{jn} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{i1} & a_{i2} & \ldots & a_{in} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{j1} & a_{j2} & \ldots & a_{jn} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Observație. Se poate constata că proprietatea 8 extinde proprietatea 6 și că proprietățile 4 și 2 sînt cazuri particulare ale proprietății 6. Dar le-am dat datorită importanței lor și pentru o reținere mai bună.

Aplicație. Fie $A = (a_{ij})_{\substack{1\leq i\leq n\\1\leq j\leq n}}$ o matrice pătratică. Matricea A se numește *antisimetrică* dacă $a_{ij} = -a_{ji}$ oricare ar fi $i = 1, 2, \ldots, n$; $j = 1, 2, \ldots, n$. Dacă $i = j$ obținem că $a_{ii} = -a_{ii}$ și deci $a_{ii} = 0$. Rezultă că elementele de pe diagonala principală a unei matrice antisimetrice sînt toate zero.

Să arătăm că dacă A este antisimetrică și n este număr impar, atunci $\det A = 0$.

Matricea A se poate scrie astfel:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} & \ldots & a_{1n} \\ -a_{12} & 0 & a_{23} & \ldots & a_{2n} \\ -a_{13} & -a_{23} & 0 & \ldots & a_{3n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ -a_{1n} & -a_{2n} & -a_{3n} & \ldots & 0 \end{pmatrix}.$$

Înmulțind fiecare linie cu -1, obținem transpusa matricei A. Aplicînd proprietatea 1 și proprietatea 5 rezultă că

$$\det A = (-1)^n \det A.$$

Cum n este impar, atunci

$$\det A = -\det A$$

și deci

$$\det A = 0.$$

4. Interpretarea geometrică a determinantului de ordinul 3.

Fie $\vec{u}, \vec{v}, \vec{t}$ trei vectori necoplanari cu originea în punctul O (fig. 1). Volumul paralelipipedului construit pe vectorii $\vec{u}, \vec{v}, \vec{t}$ este egal cu valoarea absolută a expresiei $(\vec{u} \times \vec{v}) \cdot \vec{t}$ numită produs mixt.

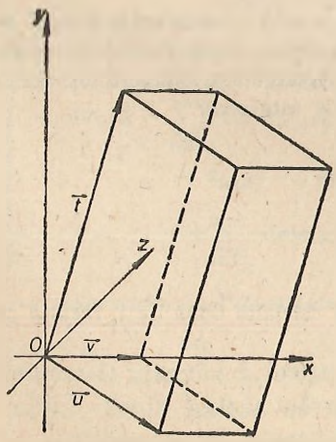


Fig. 1

Fie u_x, u_y, u_z — componentele scalare ale vectorului $\vec{u}$,

v_x, v_y, v_z — componentele scalare ale vectorului $\vec{v}$,

t_x, t_y, t_z — componentele scalare ale vectorului $\vec{t}$.

Avem

$$\vec{u} \times \vec{v} = (u_y v_z - u_z v_y)\vec{a} + (u_z v_x - u_x v_z)\vec{b} + (u_x v_y - u_y v_x)\vec{c}$$

și deci

$$(\vec{u} \times \vec{v}) \cdot \vec{t} = t_x(u_y v_z - u_z v_y) + t_y(u_z v_x - u_x v_z) + t_z(u_x v_y - u_y v_x).$$

Ținînd cont de formula determinantului de ordinul 3, putem scrie:

$$(\vec{u} \times \vec{v}) \cdot \vec{t} = \begin{vmatrix} t_x & t_y & t_z \\ u_x & u_y & u_z \\ v_x & v_y & v_z \end{vmatrix}.$$

Deci volumul paralelipipedului construit pe cei trei vectori este egal cu valoarea absolută a determinantului

$$\begin{vmatrix} t_x & t_y & t_z \\ u_x & u_y & u_z \\ v_x & v_y & v_z \end{vmatrix}.$$

Ceea ce este interesant, este că fiecare proprietate a determinanților are o interpretare geometrică. Să presupunem că unul dintre vectorii $\vec{u}$, $\vec{v}$ sau $\vec{t}$ este multiplicat cu un număr α; atunci volumul paralelipipedului se multiplică cu $|\alpha|$. Această proprietate este corespondentul proprietății 5 de la determinanți. Sau, să presupunem că există un număr α astfel încît $\vec{v} = \alpha\vec{u}$. În acest caz vectorii $\vec{u}$ și $\vec{v}$ se suprapun și deci volumul paralelipipedului este zero, ceea ce rezultă pe de altă parte folosind proprietatea 6.

Dacă unul dintre vectorii $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{t}$ este zero, atunci volumul paralelipipedului este zero. Această proprietate geometrică este corespondentul proprietății 2 a determinanților.

Căutați să interpretați geometric și celelalte proprietăți ale determinanților.

5. **Calculul determinanților.** În cele ce urmează vom da un procedeu prin care calculul unui determinant de ordinul n se reduce la calculul unui anumit număr de determinanți de ordinul $n-1$.

Fie

$$d = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

un determinant de ordinul n. Determinantul de ordinul $n-1$ care se obține suprimînd linia i și coloana j din determinantul d se numește *minorul elementului* a_{ij} și se notează cu d_{ij}. Numărul

$$\delta_{ij} = (-1)^{i+j} d_{ij}$$

se numește *complementul algebric* al elementului a_{ij} în determinantul d.

Evident, unui determinant de ordinul n i se pot asocia n^2 minori de ordinul $n-1$ şi respectiv n^2 complemenţi algebrici.

Exemplu. Fie determinantul de ordinul 3

$$d = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ \frac{1}{2} & -3 & 1 \\ 0 & 4 & 5 \end{vmatrix}.$$

Minorii elementelor din d sînt în număr de 9. Aceştia sînt următorii:

$$d_{11} = \begin{vmatrix} -3 & 1 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = -19; \quad d_{12} = \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 5 \end{vmatrix} = \frac{5}{2}; \quad d_{13} = \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & -3 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} = 2;$$

$$d_{21} = \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = -13; \quad d_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 5 \end{vmatrix} = 5; \quad d_{23} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} = 4;$$

$$d_{31} = \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} = 5; \quad d_{32} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ \frac{1}{2} & 1 \end{vmatrix} = 0, \quad d_{33} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ \frac{1}{2} & -3 \end{vmatrix} = -\frac{5}{2}.$$

Complemenţii algebrici ai elementelor din d sînt:

$$\delta_{11} = (-1)^{1+1}d_{11} = -19; \quad \delta_{12} = (-1)^{1+2}d_{12} = -\frac{5}{2}; \quad \delta_{13} = (-1)^{1+3}d_{13} = 2;$$

$$\delta_{21} = (-1)^{2+1}d_{21} = 13; \quad \delta_{22} = (-1)^{2+2}d_{22} = 5; \quad \delta_{23} = (-1)^{2+3}d_{23} = -4;$$

$$\delta_{31} = (-1)^{3+1}d_{31} = 5; \quad \delta_{32} = (-1)^{3+2}d_{32} = 0; \quad \delta_{33} = (-1)^{3+3}d_{33} = -\frac{5}{2}.$$

Teorema 1. Fie determinantul de ordinul n, $d = |a_{ij}|_{\substack{1 \le i \le n \\ 1 \le j \le n}}$. Atunci pentru orice $1 \le i \le n$, are loc egalitatea: (1)

$$d = a_{i1}\delta_{i1} + a_{i2}\delta_{i2} + \ldots + a_{in}\delta_{in}.$$

Egalitatea (1) poartă denumirea de *dezvoltarea determinantului d după linia i.*

Demonstraţie. Vom nota cu S suma

$$S = a_{i1}\delta_{i1} + a_{i2}\delta_{i2} + \ldots + a_{in}\delta_{in}. \tag{2}$$

Să considerăm termenul $a_{ij}\delta_{ij} = (-1)^{i+j}a_{ij}d_{ij}$ din suma (2). Să presupunem mai întîi că $i = j = 1$. În acest caz un termen oarecare din dezvoltarea determinantului d_{11} de ordinul $n-1$ este de forma $a_{2k_2}a_{3k_3} \ldots a_{nk_n}$ unde $k_2, k_3, \ldots, k_n$ sînt numerele $2, 3, \ldots, n$, eventual în altă ordine. Rezultă că termenul $a_{11}a_{2k_2}a_{3k_3} \ldots a_{nk_n}$ este un termen al determinantului d. Semnul termenului $a_{2k_2}a_{3k_3} \ldots a_{nk_n}$ provenit din dezvoltarea determinantului d_{11} este egal cu $(-1)^l$ unde l este numărul de inversiuni ale permutării

$$\sigma = \begin{pmatrix} 2 & 3 & \ldots & n \\ k_2 & k_3 & \ldots & k_n \end{pmatrix}.$$

Deci semnul termenului $a_{11}a_{2k_2}a_{3k_3} \ldots a_{nk_n}$ provenit din produsul $a_{11}\delta_{11}$ este $(-1)^{1+1}(-1)^l = (-1)^l$.

Pe de altă parte, semnul termenului $a_{11}a_{2k_2}a_{3k_3} \ldots a_{nk_n}$ în dezvoltarea determinantului d este egal cu $(-1)^r$ unde r este numărul de inversiuni ale permutării

$$\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \ldots & n \\ 1 & k_2 & k_3 & \ldots & k_n \end{pmatrix}.$$

Cum $k_2 > 1$, $k_3 > 1$, ..., $k_n > 1$, permutările σ şi τ au acelaşi număr de inversiuni; deci $r = l$. Prin urmare termenul $a_{11}a_{2k_2}a_{3k_3}\dots a_{nk_n}$, provenit din produsul $a_{11}\delta_{11}$, are acelaşi semn cu cel provenit din dezvoltarea determinantului d.

Trecem la cazul general. Vom proceda în modul următor: vom schimba liniile şi coloanele în aşa fel încît elementul a_{ij} să vină în locul elementului a_{11} şi minorul d_{ij} să rămînă neschimbat. În acest fel linia i şi coloana j devin linia 1 respectiv coloana 1; linia 1 devine linia 2, linia 2 devine linia 3, ..., linia $i - 1$ devine linia i; coloana 1 devine coloana 2, coloana 2 devine coloana 3, ..., coloana $j - 1$ devine coloana j.

Determinantul obţinut prin aceste schimbări îl notăm cu d'. Aplicînd proprietatea 3 a determinanţilor, avem

$$d = (-1)^{i+j}d'. \tag{3}$$

În plus $d'_{11} = d_{ij}$. Dacă $a_{1k_1}a_{2k_2}\dots a_{i-1k_{i-1}}a_{i+1k_{i+1}}\dots a_{nk_n}$ este un termen oarecare din dezvoltarea determinantului d_{ij}, din egalitatea (3) şi ţinînd seamă de prima parte a demonstraţiei, rezultă că semnul termenului $(-1)^{i+j}a_{1k_1}a_{2k_2}\dots a_{i-1k_{i-1}}a_{ij}a_{i+1k_{i+1}}\dots a_{nk_n}$ provenit din produsul $a_{ij}\delta_{ij}$ este acelaşi cu cel dat de dezvoltarea determinantului d. În concluzie, fiecare termen din produsul $a_{ij}\delta_{ij}$ luat cu semnul său este un termen cu acelaşi semn, al determinantului d. Cum produsul $a_{ij}d_{ij}$ conţine $(n-1)!$ termeni, atunci toţi termenii care apar în suma (2) sînt în număr de $(n-1)!n = n!$. Deci în suma (2) se găsesc toţi termenii (inclusiv semnul) determinantului d. Deci are loc egalitatea $d = S$.

Consecinţa 1. **Fie $d = |a_{ij}|_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ 1\leqslant j\leqslant n}}$ un determinant de ordinul n. Pentru orice $j \neq i$ are loc egalitatea**

$$a_{i1}\delta_{j1} + a_{i2}\delta_{j2} + \dots + a_{in}\delta_{jn} = 0.$$

Demonstraţie. Considerăm determinantul

$$d' = \begin{array}{c} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \\ \\ (i) \\ \\ (j) \\ \\ \\ \end{array}$$

care s-a obţinut din d prin înlocuirea liniei j cu linia i. Cum d' are două linii egale, aplicînd proprietatea 4 a determinanţilor, avem $d' = 0$. Dezvoltînd determinantul d' după linia j (conform teoremei 1) obţinem egalitatea căutată.

Din proprietatea 1 a determinanţilor şi teorema 1 obţinem

Teorema 2. **Fie determinantul de ordinul n, $d = |a_{ij}|_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ 1\leqslant j\leqslant n}}$. Atunci pentru orice $1 \leqslant j \leqslant n$ are loc egalitatea**

$$d = a_{1j}\delta_{1j} + a_{2j}\delta_{2j} + \dots + a_{nj}\delta_{nj}. \tag{1'}$$

Egalitatea (1′) poartă denumirea de *dezvoltarea determinantului d după coloana j.*

Consecinţa 2. **Fie $d = |a_{ij}|_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ 1\leqslant j\leqslant n}}$ un determinant de ordinul n. Pentru orice $i \neq j$ are loc egalitatea**

$$a_{1j}\delta_{1i} + a_{2j}\delta_{2i} + \dots + a_{nj}\delta_{ni} = 0.$$

Demonstrație. Se aplică proprietatea 1 a determinanților și consecința 1.

După cum se observă, teorema 1 cît și teorema 2 dau procedee prin care calculul unui determinant de ordinul n se reduce la calculul unui anumit număr de determinanți de ordinul $n-1$. Pentru a simplifica calculele, în aplicații, vom face dezvoltarea unui determinant după acea linie sau coloană care are cel mai mare număr de elemente egale cu zero. Din aceste motive, la calculul unui determinant vom aplica sistematic cele 9 proprietăți ale determinanților pentru ca, pe o anumită linie sau coloană, să obținem cît mai multe elemente egale cu zero.

Exemple. 1) Să calculăm determinantul de ordinul 4:

$$d = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 4 \\ 3 & 1 & 4 & -5 \\ 2 & 0 & 1 & -1 \\ 6 & -5 & 4 & -4 \end{vmatrix}.$$

Cum linia a treia conține un element nul vom face dezvoltarea determinantului după linia a treia:

$$d = (-1)^{3+1} \cdot 2 \begin{vmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 1 & 4 & -5 \\ -5 & 4 & -4 \end{vmatrix} + (-1)^{3+3} \cdot 1 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & 1 & -5 \\ 6 & -5 & -4 \end{vmatrix} +$$

$$+ (-1)^{3+4} \cdot (-1) \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 4 \\ 6 & -5 & 4 \end{vmatrix}.$$

Calculăm primul determinant de ordinul 3:

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 1 & 4 & -5 \\ -5 & 4 & -4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -3 & 3 & 0 \\ 1 & 4 & -5 \\ -5 & 4 & -4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 1 & 5 & -5 \\ -5 & -1 & -4 \end{vmatrix} = -3 \begin{vmatrix} 5 & -5 \\ -1 & -4 \end{vmatrix} = 75.$$

La calculul acestui determinant am procedat astfel: mai întîi am adunat linia 3 la linia 1 și apoi am adunat coloana 1 la coloana 2. În final am dezvoltat determinantul după prima linie.

Calculăm al doilea determinant

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & 1 & -5 \\ 6 & -5 & -4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 7 & -3 & 0 \\ 3 & 1 & -5 \\ 6 & -5 & -4 \end{vmatrix} = 7 \begin{vmatrix} 1 & -5 \\ -5 & -4 \end{vmatrix} + 3 \begin{vmatrix} 3 & -5 \\ 6 & -4 \end{vmatrix} =$$

$$= 7 \cdot (-29) + 3 \cdot 18 = -149.$$

La calculul acestui determinant am adunat mai întîi linia 3 la linia 1 și apoi am făcut dezvoltarea după linia 1.

Calculăm al treilea determinant:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 4 \\ 6 & -5 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 7 \\ 6 & -5 & 10 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & -5 & 7 \\ 6 & -17 & 10 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -5 & 7 \\ -17 & 10 \end{vmatrix} = -50+119 = 69.$$

La calculul acestui determinant am procedat astfel: mai întîi am adunat coloana 1 la coloana 3, apoi am înmulţit prima coloană cu -2 şi am adunat-o la coloana a doua. În final, am dezvoltat determinantul după prima linie. Deci valoarea determinantului d este:

$$d = 2 \cdot 75 - 149 + 69 = 70.$$

2) Să calculăm determinantul de ordinul 4:

$$d = \begin{vmatrix} -2 & 5 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 3 & 7 \\ 3 & -1 & 0 & 5 \\ 2 & 6 & -4 & 1 \end{vmatrix}.$$

Cum coloana a treia conţine două elemente egale cu zero vom face dezvoltarea după această coloană:

$$d = (-1)^{2+3} \cdot 3 \begin{vmatrix} -2 & 5 & -1 \\ 3 & -1 & 5 \\ 2 & 6 & 1 \end{vmatrix} + (-1)^{4+3} \cdot (-4) \begin{vmatrix} -2 & 5 & -1 \\ 1 & 0 & 7 \\ 3 & -1 & 5 \end{vmatrix}.$$

Calculăm primul determinant de ordinul 3:

$$\begin{vmatrix} -2 & 5 & -1 \\ 3 & -1 & 5 \\ 2 & 6 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 11 & 0 \\ 3 & -1 & 5 \\ 2 & 6 & 1 \end{vmatrix} = -11 \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 77.$$

La calculul acestui determinant am adunat linia 3 la prima linie şi apoi am dezvoltat determinantul obţinut după prima linie.
Calculăm al doilea determinant:

$$\begin{vmatrix} -2 & 5 & -1 \\ 1 & 0 & 7 \\ 3 & -1 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 5 & 13 \\ 1 & 0 & 7 \\ 3 & -1 & 5 \end{vmatrix} = -5 \begin{vmatrix} 1 & 7 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} + 13 \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = 80 - 13 = 67.$$

La calculul acestui determinant am înmulţit linia a 2-a cu 2 şi apoi am adunat-o la prima. În final, am făcut dezvoltarea după prima linie. Valoarea determinantului d este

$$d = (-1)^{2+3} \cdot 3 \cdot 77 + (-1)^{4+3} \cdot (-4) \cdot 67 = -231 + 268 = 37.$$

3) Să calculăm determinantul

$$d = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \dots & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Facem dezvoltarea după prima linie şi obţinem

$$d = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_{32} & a_{33} & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n2} & a_{n3} & \dots & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

În continuare facem dezvoltarea tot după prima linie şi obţinem

$$d = a_{11}a_{22}\begin{vmatrix} a_{33} & 0 & \dots & 0 \\ a_{43} & a_{44} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n3} & a_{n4} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Continuînd procedeul ca mai sus obţinem în final că

$$d = a_{11}a_{22}a_{33}\dots a_{nn}.$$

Exerciţii

1. Să se calculeze determinanţii de ordinul doi:

a) $\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 7 & 8 \end{vmatrix}$; b) $\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ -5 & -1 \end{vmatrix}$; c) $\begin{vmatrix} a & b \\ -b & a \end{vmatrix}$; d) $\begin{vmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{vmatrix}$;

e) $\begin{vmatrix} \sin\alpha & \cos\alpha \\ \sin\beta & \cos\beta \end{vmatrix}$; f) $\begin{vmatrix} 1 & 1+i \\ 1-i & 2 \end{vmatrix}$; g) $\begin{vmatrix} \sqrt{2}+\sqrt{3} & 2-\sqrt{5} \\ 2+\sqrt{5} & \sqrt{2}-\sqrt{3} \end{vmatrix}$;

h) $\begin{vmatrix} \log_a b & \log_c d \\ \log_d c & \log_b a \end{vmatrix}$; i) $\begin{vmatrix} \omega & \omega \\ -1 & \omega \end{vmatrix}$; j) $\begin{vmatrix} \omega^2 & \omega \\ -\omega & 1 \end{vmatrix}$; k) $\begin{vmatrix} 2^{\alpha} & 2^{\beta} \\ 2^{-\beta} & 2^{-\alpha} \end{vmatrix}$.

unde ω este o rădăcină cubică a unităţii ($\omega^3 = 1$); α, β sînt numere reale.

2. Să se calculeze determinanţii de ordinul 3 folosind regula lui Sarrus:

a) $\begin{vmatrix} -1 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & 2 \\ 4 & 5 & -1 \end{vmatrix}$; b) $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 7 \\ -2 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}$; c) $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$; d) $\begin{vmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{vmatrix}$;

e) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \omega & \omega^2 \\ 1 & \omega^2 & \omega \end{vmatrix}$ unde ω este o rădăcină cubică a unităţii ($\omega^3 = 1$);

f) $\begin{vmatrix} a^2 & ab & b^2 \\ b^2 & a^2 & ab \\ ab & b^2 & a^2 \end{vmatrix}$; g) $\begin{vmatrix} a^2 & 2ab & b^2 \\ b^2 & a^2 & 2ab \\ 2ab & b^2 & a^2 \end{vmatrix}$.

3. Cu ce semn vor apărea în determinantul de ordinul 5 termenii:

a) $a_{14}a_{23}a_{31}a_{45}a_{52}$; b) $a_{12}a_{25}a_{33}a_{41}a_{54}$; c) $a_{13}a_{25}a_{34}a_{41}a_{52}$?

4. În determinantul de ordinul 4, se găsesc termenii următori:

a) $a_{13}a_{\ 4}a_{33}a_{42}$; b) $a_{14}a_{23}a_{33}a_{41}$; c) $a_{12}a_{21}a_{34}a_{44}$?

5. Cu ce semn apare, în determinantul de ordinul n, produsul elementelor de pe diagonala principală?

6. Cu ce semn apare, în determinantul de ordinul n, produsul elementelor de pe diagonala secundară?

7. Să se scrie toţi termenii care apar în determinantul de ordinul 6 şi care sînt de forma $a_{15}a_{24}a_{3k_3}a_{41}a_{5k_5}a_{62}$.

8. Folosind numai definiţia determinanţilor de ordin n, să se calculeze următorii determinanţi:

$$\text{a)}\ \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 3 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & n \end{vmatrix}; \quad \text{b)}\ \begin{vmatrix} 0 & 0 & \dots & & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 3 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ n & 0 & \dots & & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

9. Fie $d = |a_{ij}|_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}}$ unde a_{ij} sînt numere complexe. Dacă $a_{ij} = \bar{a}_{ji}$ oricare ar fi $i = 1, 2, \dots, n$ şi $j = 1, 2, \dots, n$, să se arate că d este un număr real.

10. Să se calculeze determinanţii:

$$\text{a)}\ \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}; \quad \text{b)}\ \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}; \quad \text{c)}\ \begin{vmatrix} -1 & 2 & 4 & 5 \\ -1 & 4 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & -2 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{vmatrix};$$

$$\text{d)}\ \begin{vmatrix} -1 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 3 & 4 \\ 5 & -1 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & 4 & 1 \end{vmatrix}; \quad \text{e)}\ \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \end{vmatrix}; \quad \text{f)}\ \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix};$$

$$\text{g)}\ \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 3 & 4 \\ -2 & -3 & 0 & 5 \\ -3 & -4 & -5 & 0 \end{vmatrix}; \quad \text{h)}\ \begin{vmatrix} 0 & a & b & c \\ -a & 0 & d & e \\ -b & -d & 0 & f \\ -c & -e & -f & 0 \end{vmatrix}; \quad \text{i)}\ \begin{vmatrix} -4 & 1 & 2 & -2 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 1 & -5 \\ -3 & 1 & -3 & 1 \\ -1 & -1 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 2 & 5 \end{vmatrix}.$$

11. Să se verifice egalităţile:

$$\text{a)}\ \begin{vmatrix} a+b & b+c & c+a \\ a^2+b^2 & b^2+c^2 & c^2+a^2 \\ a^3+b^3 & b^3+c^3 & c^3+a^3 \end{vmatrix} = 2abc(a-b)(b-c)(c-a);$$

$$\text{b)}\ \begin{vmatrix} a-b-c & 2a & 2a \\ 2b & b-c-a & 2b \\ 2c & 2c & c-a-b \end{vmatrix} = (a+b+c)^3;$$

$$\text{c)}\ \begin{vmatrix} x & y & z \\ x^2 & y^2 & z^2 \\ yz & zx & xy \end{vmatrix} = (xy+yz+zx)(x-y)(y-z)(z-x);$$

$$\text{d)}\ \begin{vmatrix} a^3 & 3a^2 & 3a & 1 \\ a^2 & a^2+2a & 2a+1 & 1 \\ a & 2a+1 & a+2 & 1 \\ 1 & 3 & 3 & 1 \end{vmatrix} = (a-1)^6.$$

12. Să se rezolve ecuaţia:

$$\begin{vmatrix} a^2 - x & ab & ac \\ ba & b^2 - x & bc \\ ca & cb & c^2 - x \end{vmatrix} = 0.$$

13. Să se rezolve ecuaţia:

$$\begin{vmatrix} x & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & x & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & x-1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & x & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & x \end{vmatrix} = 0.$$

14. Să se rezolve ecuaţia:

$$\begin{vmatrix} x & a & a & a \\ a & x & a & a \\ a & a & x & a \\ a & a & a & x \end{vmatrix} = 0.$$

15. Să se calculeze determinantul de ordinul n:

$$\begin{vmatrix} -1 & a & a & \dots & a \\ a & -1 & a & \dots & a \\ a & a & -1 & \dots & a \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a & a & a & \dots & -1 \end{vmatrix}.$$

16. Să se calculeze determinantul

$$d = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_2 & x_3 & x_1 \\ x_3 & x_1 & x_2 \end{vmatrix}$$

ştiind că x_1, x_2, x_3 sînt rădăcinile ecuaţiei $x^3 - 2x^2 + 2x + 17 = 0$.

17. Să se calculeze determinantul

$$d = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ x_2 & x_3 & x_4 & x_1 \\ x_3 & x_4 & x_1 & x_2 \\ x_4 & x_1 & x_2 & x_3 \end{vmatrix}$$

ştiind că x_1, x_2, x_3, x_4 sînt rădăcinile ecuaţiei $x^4 + px^2 + qx + r = 0$.

18. Să se demonstreze prin inducţie după n că determinantul

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ a_1^2 & a_2^2 & \dots & a_n^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & \dots & a_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

este egal cu $\prod\limits_{1 \leqslant j < i \leqslant n} (a_i - a_j)$.

CAPITOLUL IV

Rangul unei matrice. Matrice inversabile

1. **Rangul unei matrice.** Să considerăm o matrice A cu m linii și n coloane cu elemente numere complexe,

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C}),$$

iar k un număr natural, astfel încît $1 \leqslant k \leqslant \min(m, n)$ (prin $\min(m, n)$ înțelegem cel mai mic dintre numerele m și n).

Dacă în A alegem k linii: $i_1, i_2, \dots, i_k$ și k coloane: $j_1, j_2, \dots, j_k$, elementele care se găsesc la intersecția acestor linii și coloane formează o matrice pătratică de ordin k:

$$\begin{pmatrix} a_{i_1j_1} & a_{i_1j_2} & \dots & a_{i_1j_k} \\ a_{i_2j_1} & a_{i_2j_2} & \dots & a_{i_2j_k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i_kj_1} & a_{i_kj_2} & \dots & a_{i_kj_k} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_k(\mathbb{C}),$$

al cărei determinant se numește *minor de ordin* k al matricei A.

Observăm că din matricea A se pot obține $C_m^k \cdot C_n^k$ minori de ordinul k ai matricei A.

În continuare ne va interesa să aflăm ordinele minorilor nenuli ai matricei A și în special ordinul cel mai mare al acestor minori (nenuli).

Să considerăm $A \neq 0_{m,n}$ o matrice cu m linii și n coloane. Cum matricea A are elemente nenule, există minori nenuli de un anumit ordin $k \geqslant 1$. Dar mulțimea minorilor matricei A fiind finită este evident că există un număr natural r, $1 \leqslant r \leqslant \min(m, n)$, astfel încît să avem cel puțin un minor de ordin r nenul, iar toți minorii de ordin mai mare decît r (dacă există) să fie nuli.

Definiție. **Fie $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C})$ o matrice nenulă. Spunem că matricea A are *rangul* r, și scriem rang $A = r$, dacă A are un minor nenul de ordin r, iar toți minorii lui A de ordin mai mare decît r (dacă există) sînt nuli.**

Dacă A este matricea nulă, convenim să spunem că matricea are rangul 0, adică rang $(0_{m,n}) = 0$.

Pentru calculul rangului unei matrice este utilă teorema următoare.

Teorema 1. **Fie $A \neq 0_{m,n}$ o matrice. Numărul natural r este rangul matricei A dacă şi numai dacă există un minor de ordinul r al lui A, nenul, iar toţi minorii de ordinul $r + 1$ (dacă există) sînt nuli.**

Demonstraţie. Dacă r este rangul matricei A, atunci toţi minorii de ordin mai mare decît r sînt nuli; deci şi cei de ordin $r + 1$ sînt nuli. Pentru a demonstra reciproca, este suficient să observăm că dacă toţi minorii de un anumit ordin k ai matricei A sînt nuli, atunci sînt nuli şi minorii de ordin $k + 1$ ai matricei. Într-adevăr, dezvoltînd un minor de ordin $k + 1$ după elementele unei linii (sau unei coloane) obţinem o sumă de produse, în fiecare produs fiind ca factor un minor de ordinul k al matricei. Aceştia fiind nuli rezultă că suma este nulă, adică minorul de ordin $k + 1$ este nul.

Exemple. 1) Să calculăm, rangul matricei

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -5 & 4 \\ 3 & -1 & 3 & -3 \\ 3 & 5 & -13 & 11 \end{pmatrix}.$$

Calculăm minorii de ordinul al treilea ai matricei A şi găsim că toţi sînt nuli:

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & -5 \\ 3 & -1 & 3 \\ 3 & 5 & -13 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 3 & -1 & -3 \\ 3 & 5 & 11 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & -5 & 4 \\ 3 & 3 & -3 \\ 3 & -13 & 11 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -5 & 4 \\ -1 & 3 & -3 \\ 5 & -13 & 11 \end{vmatrix} = 0.$$

Deoarece există minori de ordinul al doilea nenuli, ca de exemplu:

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = -9 \neq 0$$

rezultă că rang $A = 2$.

2) Să calculăm rangul matricei

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 1 \\ 1 & 3 & 6 & 10 & 1 \\ 1 & 4 & 10 & 20 & 1 \end{pmatrix}.$$

Calculînd minorii de ordinul al patrulea, găsim că minorul

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 6 & 10 \\ 1 & 4 & 10 & 20 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$$

este nenul şi nu există minori de ordin mai mare (matricea avînd patru linii). Deci rang $B = 4$.

Calculul în acest mod al rangului unei matrice este în general anevoios. Vom da ulterior un mod de calcul mult mai simplu al rangului.

Vom expune acum un rezultat util pentru unele consideraţii asupra rangului produsului a două matrice.

Teorema 2. **Fie $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbf{C})$ şi $B \in \mathcal{M}_{n,s}(\mathbf{C})$ două matrice. Atunci orice minor de ordin k, $1 \leqslant k \leqslant \min(m, s)$, al produsului de matrice AB se poate scrie ca o combinaţie liniară de minori de ordinul k ai matricei A (sau, ca o combinaţie liniară de minori de ordinul k ai matricei B).**

Demonstrație. Fie $A = (a_{ij})_{\substack{1\leq i\leq m\\ 1\leq j\leq n}}$ și $B = (b_{ij})_{\substack{1\leq i\leq n\\ 1\leq j\leq s}}$ cele două matrice. Atunci produsul lor se scrie:

$$AB = \begin{pmatrix} \sum_{h=1}^{n} a_{1h}b_{h1} & \sum_{h=1}^{n} a_{1h}b_{h2} & \dots & \sum_{h=1}^{n} a_{1h}b_{hs} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \sum_{h=1}^{n} a_{mh}b_{h1} & \sum_{h=1}^{n} a_{mh}b_{h2} & \dots & \sum_{h=1}^{n} a_{mh}b_{hs} \end{pmatrix}.$$

Să considerăm un minor δ de ordin k al matricei AB, situat la intersecția liniilor $i_1, i_2, \dots, i_k$, și coloanelor $j_1, j_2, \dots, j_k$.

$$\delta = \begin{vmatrix} \sum_{h=1}^{n} a_{i_1h}b_{hj_1} & \sum_{h=1}^{n} a_{i_1h}b_{hj_2} & \dots & \sum_{h=1}^{n} a_{i_1h}b_{hj_k} \\ \sum_{h=1}^{n} a_{i_2h}b_{hj_1} & \sum_{h=1}^{n} a_{i_2h}b_{hj_2} & \dots & \sum_{h=1}^{n} a_{i_2h}b_{hj_k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \sum_{h=1}^{n} a_{i_kh}b_{hj_1} & \sum_{h=1}^{n} a_{i_kh}b_{hj_2} & \dots & \sum_{h=1}^{n} a_{i_kh}b_{hj_k} \end{vmatrix}.$$

Deoarece fiecare element al lui δ este suma a n termeni, δ se poate descompune, folosind proprietatea 7 din Cap. III, pct. 3, într-o sumă de n^k minori de forma:

$$\begin{vmatrix} a_{i_1h_1}b_{h_1j_1} & a_{i_1h_2}b_{h_2j_2} & \dots & a_{i_1h_k}b_{h_kj_k} \\ a_{i_2h_1}b_{h_1j_1} & a_{i_2h_2}b_{h_2j_2} & \dots & a_{i_2h_k}b_{h_kj_k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i_kh_1}b_{h_1j_1} & a_{i_kh_2}b_{h_2j_2} & \dots & a_{i_kh_k}b_{h_kj_k} \end{vmatrix} =$$

$$= b_{h_1j_1}b_{h_2j_2} \dots b_{h_kj_k} \begin{vmatrix} a_{i_1h_1} & a_{i_1h_2} & \dots & a_{i_1h_k} \\ a_{i_2h_1} & a_{i_2h_2} & \dots & a_{i_2h_k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i_kh_1} & a_{i_kh} & \dots & a_{i_kh_k} \end{vmatrix}.$$

Deci δ este o combinație liniară de minori de ordinul k ai matricei A.

Analog se arată că δ este o combinație liniară de minori de ordinul k ai matricei B.

Din această teoremă se deduce următoarea:

Consecință. **Rangul produsului a două matrice este mai mic sau egal cu rangul fiecărei matrice.**

Demonstrație. Într-adevăr, fie A și B două matrice astfel încît să putem efectua produsul AB, și să presupunem că toți minorii de ordin k ai lui A (sau ai lui B) sînt nuli. Conform teoremei precedente rezultă că minorii de ordin k ai matricei AB, care sînt combinații liniare de minorii de ordin k ai matricei A (sau ai matricei B) sînt, de asemenea, nuli. După definiția rangului unei matrice, rezultă deci că: rang $(AB) \leq$ rang A și rang $(AB) \leq$ rang B.

Observație. Nu există o relație bine determinată între rangurile factorilor și rangul produsului de matrice, după cum se poate vedea din exemplele următoare:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 4 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 8 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 4 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

În aceste două exemple în care se înmulțesc matrice de rang 1, produsul este, în primul caz, de rang 1, iar în cazul al doilea de rang 0.

2. **Matrice inversabile.** O matrice pătratică se numește *singulară* (sau *degenerată*) dacă determinantul său este nul, și se numește *nesingulară* (sau *nedegenerată*) dacă determinantul său este nenul.

Amintim că am notat cu I_n matricea unitate de ordin n, adică matricea pătratică cu n linii şi n coloane:

$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

Matricea I_n comută cu orice matrice A de același ordin cu ea; mai mult:

$$AI_n = I_nA = A. \tag{1}$$

Definiție. **Fie A o matrice pătratică de ordin n. Se spune că A este *inversabilă* dacă există o matrice B pătratică de ordin n astfel încît**

$$AB = BA = I_n.$$

Matricea B se numeşte *inversa* matricei A.

Observăm, de asemenea, că și A este inversa lui B.

Teorema 1. **Inversa unei matrice pătratice, dacă există, este unică.**

Demonstrație. Fie A o matrice pătratică de ordin n. Să presupunem că B și B' sînt două matrice de ordin n, astfel încît

$$AB = BA = I_n \text{ şi } AB' = B'A = I_n.$$

Folosind asociativitatea produsului de matrice, avem

$$B' = B'I_n = B'(AB) = (B'A)B = I_nB = B;$$

deci $B = B'$

Notație. Inversa matricei A, dacă există, se notează cu A^{-1}.

Din relația

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I_n,$$

rezultă că $(A^{-1})^{-1} = A$.

În continuare vom studia problema existenței inversei unei matrice pătratice date. Mai întîi demonstrăm următoarea

Teorema 2. **Fie A o matrice pătratică de ordin n cu coeficienţi numere complexe. Atunci matricea A este inversabilă dacă şi numai dacă $\det A$ este nenul (adică A este nesingulară).**

Demonstrație. Să presupunem că A este o matrice inversabilă de ordin n; atunci există A^{-1} astfel încît:

$$AA^{-1} = I_n \tag{2}$$

(I_n este matricea unitate de ordin n).

Este evident că rang $I_n = n$. Conform consecinței din paragraful precedent avem că rang $(AA^{-1}) \leqslant$ rang A. Cum rang $(AA^{-1}) =$ rang $I_n = n$, rezultă că $n \leqslant$ rang A și deci rang $A = n$. Așadar, ordinul celui mai mare minor nenul al lui A este n, acesta fiind tocmai $\det A$. Deci $\det A \neq 0$, adică A este nesingulară.

Reciproc, dacă A este o matrice nesingulară, adică $d = \det A \neq 0$, demonstrăm că ea este inversabilă, construind efectiv inversa sa.

Definim mai întîi o matrice ajutătoare. Dacă A este matricea de ordin n:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

atunci matricea

$$A^* = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix},$$

al cărei element aparținînd liniei j şi coloanei i este complementul algebric al elementului a_{ij} din matricea A, se numeşte *matricea adjunctă* matricei A.

Să calculăm produsele AA^* şi A^*A. Folosind formula de dezvoltare a unui determinant după elementele uneia dintre linii (sau coloane), cît şi faptul că suma produselor dintre elementele unei linii (sau coloane) a unui determinant şi complemenții algebrici ai elementelor corespunzătoare ale altei linii (sau coloane) este nulă (vezi, Cap. III, pct. 5, consecința 1), obținem:

$$AA^* = A^*A = \begin{pmatrix} d & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & d & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & d \end{pmatrix} \tag{3}$$

unde d este determinantul matricei A. Împărțind prin d egalitățile (3), se obține:

$$A\left(\frac{1}{d} A^*\right) = \left(\frac{1}{d} A^*\right)A = \frac{1}{d}\begin{pmatrix} d & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & d & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

Aşadar, $A\left(\frac{1}{d} A^*\right) = \left(\frac{1}{d} A^*\right) A = I_n$ şi deci A este inversabilă.

Avem $A^{-1} = \frac{1}{d} A^*$, sau explicit

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{A_{11}}{d} & \frac{A_{21}}{d} & \dots & \frac{A_{n1}}{d} \\ \frac{A_{12}}{d} & \frac{A_{22}}{d} & \dots & \frac{A_{n2}}{d} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{A_{1n}}{d} & \frac{A_{2n}}{d} & \dots & \frac{A_{nn}}{d} \end{pmatrix}.$$

Deci inversa unei matrice nesingulare A se obține împărțind elementele matricei adjuncte A^* prin $d = \det A$.

Observații. 1) Dacă A este o matrice nesingulară, deci inversabilă, atunci A^{-1} este, de asemenea, inversabilă ($(A^{-1})^{-1} = A$) și deci nesingulară.

2) Dacă A este o matrice nesingulară, atunci matricea sa adjunctă A^* este nesingulară.

Într-adevăr, dacă A este o matrice de ordin n, nesingulară, avem relația

$$AA^* = A^*A = \begin{pmatrix} d & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & d & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & d \end{pmatrix}, \tag{4}$$

unde $d = \det A$ și A^* este matricea adjunctă.

Este suficient să observăm că rangul matricei din dreapta egalităților (4) este n și, ca în teorema precedentă, rezultă că rang $A^* = n$, adică $\det A^* \neq 0$.

3) Dacă $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{Q})$ (respectiv $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$) cu $\det A \neq 0$, atunci $A^{-1} \in \mathcal{M}_n(\mathbf{Q})$ (respectiv $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$).

Exemplu. Fie matricea

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Calculăm determinantul său și obținem

$$\begin{vmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -7 \neq 0.$$

Determinantul său fiind nenul, matricea A este inversabilă. Avem

$$A^* = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix}.$$

Să calculăm A_{ij}, $1 \leq i, j \leq 3$. De exemplu,

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -3;$$

$$A_{21} = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 4;$$

ş.a.m.d.

Deci $$A^* = \begin{pmatrix} -3 & 4 & 5 \\ -2 & 5 & 1 \\ 1 & -6 & -4 \end{pmatrix}$$ și astfel

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{-3}{-7} & \frac{4}{-7} & \frac{5}{-7} \\ \frac{-2}{-7} & \frac{5}{-7} & \frac{1}{-7} \\ \frac{1}{-7} & \frac{-6}{-7} & \frac{-4}{-7} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{7} & -\frac{4}{7} & -\frac{5}{7} \\ \frac{2}{7} & -\frac{5}{7} & -\frac{1}{7} \\ -\frac{1}{7} & \frac{6}{7} & \frac{4}{7} \end{pmatrix}.$$

Observații. 1) În exemplul precedent matricea $A \in \mathcal{M}_3(\mathbf{Z})$ are ca elemente numere întregi, iar elementele lui A^{-1} nu sînt numere întregi, adică A nu este inversabilă în $\mathcal{M}_3(\mathbf{Z})$.

Este evident că, dacă $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{Z})$ și $\det A = \pm 1$, atunci $A^{-1} \in \mathcal{M}_n(\mathbf{Z})$, adică A este inversabilă în $\mathcal{M}_n(\mathbf{Z})$.

2) Fie A și B două matrice pătratice de ordin n astfel încît A să fie nesingulară (deci există A^{-1}). Să considerăm ecuațiile matriceale:

$$AX = B, \quad YA = B. \tag{5}$$

Înmulțind prima ecuație la stînga cu A^{-1} și pe a doua la dreapta cu A^{-1}, se obține:

$$A^{-1}(AX) = A^{-1}B, \quad (YA)A^{-1} = BA^{-1}.$$

Folosind asociativitatea înmulțirii matricelor, rezultă

$$X = A^{-1}B \text{ și } Y = BA^{-1}.$$

În general, soluțiile ecuațiilor (5) sînt matrice distincte, deoarece înmulțirea matricelor nu este comutativă.

De exemplu, fie matricele

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Matricea A este nesingulară, avînd determinantul 1.

Deci există matricea A^{-1}, care este

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Soluțiile ecuațiilor matriceale:

$$AX = B \text{ și } YA = B$$

sînt deci, respectiv, matricele:

$$X = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -13 & -12 \\ 8 & 7 \end{pmatrix}.$$

$$Y = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -8 \\ 4 & -9 \end{pmatrix}.$$

Exerciții

Să se calculeze rangurile matricelor:

1. a) $\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 6 & 15 \end{pmatrix}$; b) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 6 & 5 \end{pmatrix}$; c) $\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 2 & \alpha \end{pmatrix}$, $\alpha \in \mathbf{C}$.

2. a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 4 \\ 4 & 5 & 8 & 10 \\ 3 & 1 & 6 & 2 \end{pmatrix}$; b) $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \\ 4 & 2 & 4 \\ 3 & -6 & 9 \end{pmatrix}$; c) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -1 & 3 & 0 \\ 2 & \alpha & 3 \end{pmatrix}$, $\alpha \in \mathbf{C}$.

3. a) $\begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 & 2 & 0 \\ 4 & 1 & 0 & -3 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 3 & -9 & -1 \end{pmatrix}$; b) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$; c) $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 3 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 0 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$.

4. a) $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 & 1 & 4 \\ -1 & 5 & 2 & 3 & 5 \\ 6 & -12 & 3 & -7 & -8 \\ 10 & 2 & 7 & 1 & 10 \end{pmatrix}$; b) $\begin{pmatrix} 5 & 4 & 2 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 3 & -3 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 4 & -1 \\ 3 & 4 & 3 & -2 & -9 \end{pmatrix}$.

5. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ a_1 & a_2 & \dots & a_m \\ a_1^2 & a_2^2 & \dots & a_m^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & \dots & a_m^{n-1} \end{pmatrix}$, unde $m \leqslant n$, iar $a_1, a_2, \dots, a_m$ sînt numere diferite între ele două cîte două.

6. Să se afle valorile posibile ale rangului matricei

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & a_{1n} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & a_{m,n-1} \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{m,n-1} & a_{mn} \end{pmatrix},$$

unde $a_{in} (1 \leqslant i \leqslant m)$ şi $a_{mj} (1 \leqslant j \leqslant n)$ sînt numere oarecare.

7. Să se afle valorile lui $\alpha \in \mathrm{C}$, pentru care matricea

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & -1 & 4 \\ \alpha & 3 & 5 & -3 \\ 7 & -5 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

are rangul minim.

8. Să se calculeze rangul matricei

$$\begin{pmatrix} 2 & \alpha & -2 & 2 \\ 4 & -1 & 2\alpha & 5 \\ 2 & 10 & -12 & 1 \end{pmatrix}$$

pentru diferite valori ale lui $\alpha \in \mathrm{C}$.

9. Să se demonstreze că rangul unei matrice nu se schimbă dacă:
a) se transpune matricea;
b) se înmulţesc elementele unei linii sau unei coloane cu un număr nenul;
c) se permută între ele două linii (coloane);
d) se adaugă la elementele unei linii (coloane) elementele corespunzătoare ale altei linii (coloane) înmulţite cu un număr oarecare.

Să se afle dacă matricele următoare sînt inversabile şi în caz afirmativ să se găsească inversele lor:

10. a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$; b) $\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$; c) $\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$.

11. a) $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$; b) $\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$, unde $a, b, c, d \in \mathbf{R}$.

12. a) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 6 \end{pmatrix}$; b) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; c) $\begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & \alpha \end{pmatrix}$, unde $\alpha \in \mathbf{R}$.

13. a) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$; b) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

14. a) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$; b) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$; c) $\begin{pmatrix} \lambda & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & 1 \\ 1 & 1 & \lambda \end{pmatrix}$, unde $\lambda \in \mathbf{C}$.

15. Fie matricele:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -5 \\ 4 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \text{ și } B = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 3 \\ 0 & 4 & -3 \\ 2 & 5 & 0 \end{pmatrix}.$$

Să se calculeze:

$$2A - 2B;\ AB;\ B^{-1};\ B + B^{-1}.$$

16. Să se afle cum se modifică inversa A^{-1} a matricei A, dacă asupra lui A se efectuează una dintre transformările:

a) se permută între ele două linii (coloane);

b) se înmulțesc elemertele unei linii (coloane) cu un număr nenul;

c) se adaugă la elementele unei linii (coloane) elementele corespunzătoare ale altei linii (coloane) înmulțite cu un număr oarecare.

17. Fie A și B matrice inversabile de același ordin. Să se arate că următoarele egalități sînt echivalente:

$$AB = BA;\ AB^{-1} = B^{-1}A;\ A^{-1}B = BA^{-1};\ A^{-1}B^{-1} = B^{-1}A^{-1}.$$

Să se rezolve următoarele ecuații matriceale:

18. a) $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 6 & 8 \end{pmatrix}$; b) $X \cdot \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 5 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 2 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}$.

19. $\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -3 & 8 \end{pmatrix} \cdot X \cdot \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 5 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 13 \\ -4 & -7 \end{pmatrix}$.

20. $X \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 5 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \\ -3 & 4 & -5 \end{pmatrix}$.

21. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

22. $\begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot X \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

CAPITOLUL V

Sisteme de ecuații liniare

1. **Noțiuni generale.** În acest capitol ne vom ocupa de sistemele de ecuații algebrice de gradul întîi cu mai multe necunoscute sau, așa cum li se mai spune de obicei, *sistemele de ecuații liniare.*

Studiul acestora este foarte important pentru matematică. Spre deosebire de clasele anterioare, vom studia acum sistemele cu un număr oarecare de ecuații și de necunoscute, chiar și cazurile cînd numărul de ecuații ale sistemului nu va fi egal cu numărul necunoscutelor.

Fie dat un sistem de m ecuații cu n necunoscute. Convenim să notăm necunoscutele prin: $x_1, x_2, \ldots, x_n$, coeficientul cu care apare necunoscuta x_j din ecuația a i-a prin: a_{ij}, iar membrul al doilea (numit termenul liber) din ecuația a i-a prin b_i. Cu aceste notații, sistemul de ecuații liniare se scrie sub forma generală:

$$\left\{\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m. \end{array}\right. \tag{1}$$

Sistemul (1) poate fi scris condensat sub forma:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_1,\ 1 \leqslant i \leqslant m. \tag{1'}$$

Coeficienții necunoscutelor formează o matrice cu m linii și n coloane:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix} \tag{2}$$

numită *matricea coeficienților sistemului* sau, simplu, *matricea sistemului.* Matricea cu m linii și $n+1$ coloane

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} & b_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$$

care se obţine adăugînd la coloanele matricei A coloana termenilor liberi $b_1, b_2, \ldots, b_m$, se numeşte *matricea extinsă* a sistemului.

Un sistem de numere $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ se numeşte *soluţie* a sistemului (1), dacă înlocuind necunoscutele $x_1, x_2, \ldots, x_n$ respectiv prin aceste numere, toate ecuaţiile acestui sistem sînt verificate, adică

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\alpha_j = b_i, \quad 1 \leqslant i \leqslant m.$$

Un sistem de ecuaţii care nu are soluţii se numeşte *incompatibil.* Aşa este, de exemplu, sistemul:

$$\begin{cases} 3x_1 + 5x_2 = 2, \\ 3x_1 + 5x_2 = 9. \end{cases}$$

Deoarece primii membri ai celor două ecuaţii ale sistemului sînt aceiaşi, iar membrii ai doilea sînt diferiţi între ei, este evident că nici un sistem de valori ce înlocuiesc necunoscutele x_1, x_2 nu poate satisface simultan ambele ecuaţii.

Un sistem de ecuaţii liniare care are cel puţin o soluţie se numeşte *compatibil.* Un sistem compatibil se numeşte *determinat* dacă are o singură soluţie, şi se numeşte *nedeterminat* dacă are mai mult decît o soluţie.

Astfel, sistemul

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 = 7, \\ x_1 + x_2 = 5 \end{cases}$$

este determinat, deoarece are soluţia $x_1 = 4$, $x_2 = 1$ şi aceasta este singura soluţie a sistemului.

Sistemul

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 = 1, \\ 4x_1 - 2x_2 = 2 \end{cases}$$

este nedeterminat, deoarece are mai multe soluţii (chiar o mulţime infinită de soluţii) $x_1 = k$, $x_2 = 2k - 1$, k fiind un număr arbitrar. (3)

Observăm că soluţiile care se obţin din formulele (3) ne dau întreaga mulţime de soluţii a sistemului.

În legătură cu sistemele de ecuaţii liniare ne punem problema stabilirii unor metode care să ne permită să decidem dacă un sistem de ecuaţii dat este compatibil sau nu, iar în cazul în care este compatibil, să putem spune dacă este determinat sau nu, şi să dăm procedee de găsire a tuturor soluţiilor sale.

2. **Regula lui Cramer.** La început vom relua rezolvarea unui sistem de ecuaţii liniare de trei ecuaţii cu trei necunoscute, expusă în cap. III, pct. 1.

Să considerăm sistemul:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3. \end{cases} \tag{1}$$

Matricea sistemului este:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}.$$

Să presupunem că determinantul $d = \det A$ al matricei A este *nenul*. Numărul $d = \det A$ se numeşte *determinantul sistemului*.

Să notăm prin X respectiv B, coloana necunoscutelor, respectiv a termenilor liberi, adică

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}.$$

Numărul coloanelor matricei A fiind egal cu acela al liniilor matricei X, produsul AX se poate efectua şi este egal cu coloana primilor membri ai ecuaţiilor (1). Astfel, sistemul (1) se poate scrie sub forma unei ecuaţii matriceale:

$$AX = B. \tag{2}$$

Matricea A fiind nesingulară, există inversa sa A^{-1}. Înmulţind la stînga ambii membri ai ecuaţiei (2) cu A^{-1}, obţinem $A^{-1}(AX) = A^{-1}B$, sau $(A^{-1}A)X = A^{-1}B$, adică $I_3X = A^{-1}B$, unde I_3 este matricea unitate de ordin 3. În final, obţinem:

$$X = A^{-1}B.$$

Ţinînd seama de notaţiile de mai înainte şi de faptul că

$$A^{-1} = \begin{vmatrix} \frac{A_{11}}{d} & \frac{A_{21}}{d} & \frac{A_{31}}{d} \\ \frac{A_{12}}{d} & \frac{A_{22}}{d} & \frac{A_{32}}{d} \\ \frac{A_{13}}{d} & \frac{A_{23}}{d} & \frac{A_{33}}{d} \end{vmatrix}$$

obţinem:

$$\begin{vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{A_{11}}{d} & \frac{A_{21}}{d} & \frac{A_{31}}{d} \\ \frac{A_{12}}{d} & \frac{A_{22}}{d} & \frac{A_{32}}{d} \\ \frac{A_{13}}{d} & \frac{A_{23}}{d} & \frac{A_{33}}{d} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{1}{d}(A_{11}b_1 + A_{21}b_2 + A_{31}b_3) \\ \frac{1}{d}(A_{12}b_1 + A_{22}b_2 + A_{32}b_3) \\ \frac{1}{d}(A_{13}b_1 + A_{23}b_2 + A_{33}b_3) \end{vmatrix}.$$

Din egalitatea matricelor rezultă că:

$$x_1 = \frac{1}{d}(A_{11}b_1 + A_{21}b_2 + A_{31}b_3),$$

$$x_2 = \frac{1}{d}(A_{12}b_1 + A_{22}b_2 + A_{32}b_3),$$

$$x_3 = \frac{1}{d}(A_{13}b_1 + A_{23}b_2 + A_{33}b_3),$$

ceea ce putem scrie condensat:

$$x_j = \frac{1}{d}\sum_{i=1}^{3} A_{ij}b_i, \; j = 1, 2, 3.$$

Dar expresia $\sum_{i=1}^{3} A_{ij}b_i = A_{1j}b_1 + A_{2j}b_2 + A_{3j}b_3$ reprezintă tocmai dezvoltarea, după elementele coloanei j, a determinantului care se obține din determinantul d, înlocuind în el coloana j prin coloana B a termenilor liberi. Vom nota acest determinant prin d_j. Atunci:

$$d_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad d_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}, \quad d_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}.$$

Prin urmare, soluția sistemului (1) este:

$$x_1 = \frac{d_1}{d}, \quad x_2 = \frac{d_2}{d}, \quad x_3 = \frac{d_3}{d}. \tag{3}$$

Observăm că formulele (3) sînt tocmai formulele obținute în cap. III, pct. 1.

În concluzie, am obținut pe altă cale că, un sistem de 3 ecuații cu 3 necunoscute, care are determinantul matricei sistemului nenul, este *compatibil* și *determinat*, iar soluția sa este dată de formulele (3), cunoscute sub numele de *formulele lui Cramer*.

Vom generaliza acest rezultat pentru sistemele de ecuații liniare de n ecuații cu n necunoscute (care au determinantul sistemului nenul).

Fie sistemul

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n = b_n, \end{cases} \tag{4}$$

unde a_{ij} și b_i, $1 \leqslant i, j \leqslant n$, sînt numere complexe.

Făcînd notații analoage celor de mai înainte, anume:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

sistemul (4) se poate rescrie sub forma unei ecuații matriceale:

$$AX = B.$$

Fie $d = \det A$ determinantul sistemului și d_j, $1 \leqslant j \leqslant n$, determinantul care se obține din d prin înlocuirea coloanei j prin coloana B.

De exemplu,

$$d_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_n & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}, \quad d_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & b_n & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

ş.a.m.d.

Teoremă **(Regula lui Cramer). Cu notaţiile de mai înainte, dacă $d = \det A$ este nenul, atunci sistemul (4) are o soluţie unică, anume:**

$$x_1 = \frac{d_1}{d}, \quad x_2 = \frac{d_2}{d}, \quad \dots, \quad x_n = \frac{d_n}{d}.$$

Demonstraţie. Ca şi în exemplul considerat mai înainte, sistemul (4) poate fi scris sub forma unei ecuaţii matriceale:

$$AX = B. \tag{5}$$

Cum A este nesingulară există inversa A^{-1}; înmulţim la stînga ambii membri ai ecuaţiei (5) cu A^{-1} şi obţinem

$$X = A^{-1}B.$$

Dar

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{A_{11}}{d} & \frac{A_{21}}{d} & \dots & \frac{A_{n1}}{d} \\ \frac{A_{12}}{d} & \frac{A_{22}}{d} & \dots & \frac{A_{n2}}{d} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{A_{1n}}{d} & \frac{A_{2n}}{d} & \dots & \frac{A_{nn}}{d} \end{pmatrix}$$

şi cu notaţiile precedente obţinem

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{A_{11}}{d} & \frac{A_{21}}{d} & \dots & \frac{A_{n1}}{d} \\ \frac{A_{12}}{d} & \frac{A_{22}}{d} & \dots & \frac{A_{n2}}{d} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{A_{1n}}{d} & \frac{A_{2n}}{d} & \dots & \frac{A_{nn}}{d} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{d}\sum_{i=1}^{n} A_{i1} b_i \\ \frac{1}{d}\sum_{i=1}^{n} A_{i2} b_i \\ \dots \\ \frac{1}{d}\sum_{i=1}^{n} A_{in} b_i \end{pmatrix}$$

de unde $x_j = \frac{1}{d}\sum_{i=1}^{n} A_{ij}b_i, \ 1 \leqslant j \leqslant n.$

Dar, avem $\sum_{i=1}^{n} A_{ij}b_i = d_j$ şi deci

$$x_j = \frac{d_j}{d}, \quad 1 \leqslant j \leqslant n. \tag{6}$$

În concluzie, un sistem de n ecuații liniare cu n necunoscute, al cărui determinant este nenul, este compatibil determinat, iar soluția sa este dată de formulele (6), numite *formulele lui Cramer*.

Observație. Dacă sistemul (4) are coeficienți numere raționale (respectiv numere reale), atunci soluțiile sale sînt raționale (respectiv reale).

Exemple. 1) Să rezolvăm sistemul de ecuații liniare

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 1, \\ ax_1 + bx_2 + cx_3 = t, \quad (a \neq b,\ b \neq c,\ a \neq c). \\ a^2x_1 + b^2x_2 + c^2x_3 = t^2. \end{cases}$$

Determinantul

$$d = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} = (b-a)(c-a)(c-b)$$

al acestui sistem este nenul, soluția este dată de formulele lui Cramer. Avem

$$d_1 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ t & b & c \\ t^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} = (b-t)(c-t)(c-b)$$

și deci

$$x_1 = \frac{d_1}{d} = \frac{(b-t)(c-t)}{(b-a)(c-a)},$$

x_2 și x_3 se deduc analog.

2) Să rezolvăm sistemul de ecuații liniare

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 1, \\ 2x_1 - x_2 - 3x_4 = 2, \\ 3x_1 - x_3 + x_4 = -3, \\ 2x_1 + 2x_2 - 2x_3 + 5x_4 = -6. \end{cases}$$

Determinantul

$$d = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 0 & -3 \\ 3 & 0 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & -2 & 5 \end{vmatrix} = -9$$

al acestui sistem fiind nenul, soluția este dată de formulele lui Cramer.

Valorile necunoscutelor vor avea la numărător determinanții:

$$d_1 = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 0 & -3 \\ -3 & 0 & -1 & 1 \\ -6 & 2 & -2 & 5 \end{vmatrix} = 0; \quad d_2 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & 0 & -3 \\ 3 & -3 & -1 & 1 \\ 2 & -6 & -2 & 5 \end{vmatrix} = -18;$$

$$d_3 = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 2 & -3 \\ 3 & 0 & -3 & 1 \\ 2 & 2 & -6 & 5 \end{vmatrix} = -15; \quad d_4 = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & -1 & -3 \\ 2 & 2 & -2 & -6 \end{vmatrix} = 12.$$

Astfel, $x_1 = 0$, $x_2 = 2$, $x_3 = \frac{5}{3}$, $x_4 = -\frac{4}{3}$ este soluţia sistemului nostru; mai mult, aceasta este unica soluţie.

3. **Calculul rangului unei matrice.** Am observat în cap. IV, pct. 1 că metoda de calcul a rangului unei matrice (bazată pe definiția rangului) necesită, în general, calculul unui număr destul de mare de minori. În cele ce urmează vom arăta cum se poate simplifica considerabil acest calcul.

Am arătat în cap. III, pct. 3, ce înţelegem prin faptul că o coloană (respectiv linie) a unei matrice este combinaţie liniară de celelalte coloane (respectiv linii) ale matricei.

Fie acum $D = |a_{ij}|$, $1 \leqslant i, j \leqslant n$, un determinant, iar A matricea (a_{ij}), $1 \leqslant i, j \leqslant n$. Dacă o coloană (respectiv linie) a matricei A este combinaţie liniară de celelalte coloane (respectiv linii) ale sale, se obişnuieşte să se spună: *coloana (respectiv linia) determinantului este combinaţie liniară de celelalte coloane (respectiv linii) ale sale.*

Teoremă. **Dacă $d = |a_{ij}|$, $1 \leqslant i, j \leqslant k-1$, este un determinant de ordin $k-1$, nenul, iar determinantul $D = |a_{ij}|$, $1 \leqslant i, j \leqslant k$, care se obţine prin adăugarea unei linii şi a unei coloane (a k — a) la d este nul, atunci ultima (a k — a), adică cea adăugată, coloană (respectiv linie) a lui D este combinaţie liniară de celelalte coloane (respectiv linii).**

Demonstrație. Să considerăm sistemul de ecuaţii liniare:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1,k-1}x_{k-1} = a_{1k}, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2,k-1}x_{k-1} = a_{2k}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{k-1,1}x_1 + a_{k-1,2}x_2 + \ldots + a_{k-1,k-1}x_{k-1} = a_{k-1,k} \end{cases} \qquad (1)$$

de $k-1$ ecuaţii cu $k-1$ necunoscute. Deoarece determinantul sistemului, care este tocmai d, este nenul, rezultă că sistemul este compatibil determinat.

Există deci numerele $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{k-1}$ astfel încît:

$$\begin{cases} a_{11}\alpha_1 + a_{12}\alpha_2 + \ldots + a_{1,k-1}\alpha_{k-1} = a_{1k}, \\ a_{21}\alpha_1 + a_{22}\alpha_2 + \ldots + a_{2,k-1}\alpha_{k-1} = a_{2k}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{k-1,1}\alpha_1 + a_{k-1,2}\alpha_2 + \ldots + a_{k-1,k-1}\alpha_{k-1} = a_{k-1,k} \end{cases} \qquad (2)$$

Scădem din ultima coloană a lui D combinaţia liniară a primelor $k-1$ coloane cu coeficienţii $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{k-1}$ şi rezultă:

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1,k-1} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2,k-1} & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{k-1,1} & a_{k-1,2} & \ldots & a_{k-1,k-1} & 0 \\ a_{k1} & a_{k2} & \ldots & a_{k,k-1} & a_{kk} - \sum_{i=1}^{k-1} a_{kj}\alpha_j \end{vmatrix} = 0.$$

Dezvoltăm determinantul după elementele ultimei coloane şi obţinem:

$$D = d(a_{kk} - \sum_{j=1}^{k-1} a_{kj}\alpha_j) = 0.$$

Cum $d \neq 0$, rezultă:

$$a_{kk} = \sum_{j=1}^{k-1} a_{kj}\alpha_j = a_{k1}\alpha_1 + a_{k2}\alpha_2 + \ldots + a_{k,k-1}\alpha_{k-1}.$$

Această relaţie, împreună cu relaţiile (2) exprimă faptul că ultima coloană din D este o combinaţie liniară a celorlalte $k - 1$ coloane ale lui D, cu coeficienţii:

$$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{k-1}.$$

Coeficienţii $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{k-1}$ ai combinaţiei liniare din teorema precedentă sînt independenţi de linia k, după cum rezultă din formulele lui Cramer.

Operaţia prin care adăugăm unui determinant o linie şi o coloană se numeşte, de obicei, *bordarea* determinantului.

Aşadar, dacă bordăm determinantul d de ordin $k - 1$ din teorema precedentă cu o altă linie şi coloană, astfel încît determinantul de ordinul k obţinut să fie nul, atunci, şi în acest caz, ultima coloană (respectiv linie) a acestui determinant este combinaţie liniară de celelalte coloane (respectiv linii).

Am demonstrat în cap. III, pct. 3 (proprietatea 8) faptul că un determinant care are proprietatea că o coloană (respectiv linie) a sa este combinaţie liniară de celelalte coloane (respectiv linii) este nul.

Teorema precedentă ne arată că este adevărată şi afirmaţia reciprocă. Deci:

Consecinţa 1. **Un determinant este nul dacă şi numai dacă una dintre coloanele (respectiv liniile) sale este combinaţie liniară de celelalte coloane (respectiv linii).**

Consecinţa 2. **Rangul r al unei matrice A este egal cu numărul maxim de coloane (respectiv linii) care se pot alege dintre coloanele (respectiv liniile) matricei A, astfel încît nici una dintre ele să nu fie combinaţie liniară a celorlalte.**

Astfel, dacă rangul unei matrice A cu m linii şi n coloane este r, iar D_r este un minor de ordinul r, nenul, coloanele (respectiv liniile) matricei A cuprinse în D_r au proprietatea că nici una dintre ele nu este combinaţie liniară de celelalte. Mai mult, după cum rezultă din observaţia precedentă, fiecare dintre celelalte $n - r$ coloane (respectiv $m - r$ linii) este combinaţie liniară a coloanelor (respectiv liniilor) lui D_r.

Deci numărul r, care reprezintă rangul matricei A, poate fi găsit după procedeul prin care arătăm că acele coloane (respectiv linii) ale matricei A care sînt cuprinse în D_r au proprietatea indicată în consecinţa 2.

Or, în demonstraţie am folosit numai faptul că toţi minorii de ordinul $r + 1$, care se obţin prin bordarea lui D_r cu una dintre liniile şi cu una dintre coloanele rămase, sînt nuli. Nu am folosit faptul că toţi minorii de ordin $r + 1$ sînt nuli.

Pentru a calcula rangul unei matrice, trebuie să trecem în mod iterativ de la un minor la cei de ordin mai mare, obținuți prin bordarea cu linii și coloane dintre cele rămase în afara minorului considerat.

Astfel, rangul unei matrice se poate calcula în modul următor:

Fiind dată o matrice nenulă, aceasta are neapărat un minor de ordinul întîi nenul (putem lua orice element nenul al matricei).

Dacă am găsit un minor de ordinul k nenul, îl bordăm pe rînd cu elementele corespunzătoare ale uneia dintre liniile și uneia dintre coloanele rămase, obținînd astfel toți minorii de ordinul $k+1$ care-l conțin. Dacă toți acești minori sînt nuli, rangul matricei este $r = k$.

Dacă însă cel puțin unul dintre aceștia (de ordinul $k+1$) este nenul, atunci reținem unul dintre ei și continuăm procedeul.

Numărul minorilor de ordin $r+1$ care trebuie considerați este $(m-r)\cdot(n-r)$ (în loc de $C_m^{r+1}\,C_n^{r+1}$), reducîndu-se în mod substanțial numărul lor.

Observație. În general, numărul $(m-r)(n-r)$ al minorilor de ordin $r+1$ ce trebuie calculați pentru a stabili că o matrice are rangul r nu mai poate fi micșorat. Totuși numărul de calcule necesar pentru a afla rangul unei matrice se poate reduce în diverse cazuri particulare.

Exemplu. Să calculăm rangul matricei

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 3 & 4 \\ 2 & -1 & 2 & 1 & -2 \\ 2 & -3 & 1 & 2 & -2 \\ 0 & 2 & 2 & -3 & -6 \end{pmatrix}.$$

Minorul de ordinul 2, care se găsește la intersecția primelor două linii și a primelor două coloane, este nul.

Totuși, matricea A are minori de ordinul 2 nenuli, de exemplu:

$$d = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = -1 \neq 0.$$

Minorul de ordinul 3

$$d' = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & -3 & 1 \end{vmatrix} = 4 \neq 0,$$

care încadrează minorul d este nenul. Dar cei doi minori de ordinul 4 care încadrează pe d' sînt nuli:

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & -3 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 2 & -3 \end{vmatrix} = 0, \qquad \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 & 4 \\ 2 & -1 & 2 & -2 \\ 2 & -3 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & 2 & -6 \end{vmatrix} = 0.$$

Deci rangul matricei A este 3.

4. **Sisteme de ecuaţii liniare.** Ne vom ocupa în acest paragraf de studiul unui sistem oarecare de ecuaţii liniare, fără a impune ca numărul necunoscutelor să fie egal cu numărul ecuaţiilor. Rezultatele obţinute vor fi valabile şi în cazul în care numărul ecuaţiilor este egal cu numărul necunoscutelor, iar determinantul sistemului este nul, caz care nu a fost studiat pînă acum.

Fie un sistem de ecuaţii liniare, cu m ecuaţii şi n necunoscute:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases} \tag{1}$$

Ne punem mai întîi problema compatibilităţii sistemului (1). Pentru aceasta, să analizăm matricea A a coeficienţilor sistemului şi matricea extinsă $\bar{A}$, care se obţine din A completînd coloanele sale cu coloana termenilor liberi ai sistemului (1),

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad \bar{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}.$$

Este evident că rang $(A) \leq$ rang $(\bar{A})$, deoarece minorii matricei A se găsesc printre minorii matricei $\bar{A}$.

Problema compatibilităţii sistemelor de ecuaţii liniare este rezolvată de următoarea teoremă:

Teorema lui Kronecker-Cappelli. **Un sistem de ecuaţii liniare (1) este compatibil dacă şi numai dacă rangul matricei sistemului A este egal cu rangul matricei extinse $\bar{A}$.**

Demonstraţie. Să presupunem, mai întîi, că sistemul (1) este compatibil; fie $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ o soluţie a sa. Deci avem relaţiile:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\alpha_j = b_i, \ 1 \leq i \leq m. \tag{2}$$

Dacă rang $A = r$, am observat mai înainte că $r \leq$ rang $\bar{A}$. Pentru a demonstra că avem egalitatea rangurilor, este suficient să arătăm că orice minor $\bar{d}_{r+1}$, de ordin $r + 1$, al matricei $\bar{A}$ este nul. Dacă $\bar{d}_{r+1}$ nu conţine coloana termenilor liberi, atunci este un minor al matricei A şi prin urmare este nul, deoarece rang $A = r$. Dacă, însă, $\bar{d}_{r+1}$ conţine coloana termenilor liberi, atunci este de forma:

$$\bar{d}_{r+1} = \begin{vmatrix} a_{i_1 j_1} & a_{i_1 j_2} & \dots & a_{i_1 j_r} & b_{i_1} \\ a_{i_2 j_1} & a_{i_2 j_2} & \dots & a_{i_2 j_r} & b_{i_2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i_{r+1} j_1} & a_{i_{r+1} j_2} & \dots & a_{i_{r+1} j_r} & b_{i_{r+1}} \end{vmatrix}.$$

Din relaţiile (2) obţinem:

$$b_{i_k} = \sum_{j=1}^{n} a_{i_k j}\alpha_j, \ 1 \leqslant k \leqslant r+1. \tag{3}$$

Înlocuind pe b_{i_k}, $1 \leqslant k \leqslant r+1$, în $\bar{d}_{r+1}$, se observă că d_{r+1} se poate scrie ca o sumă de n minori de forma:

$$\begin{vmatrix} a_{i_1 j_1} & a_{i_1 j_2} & \dots & a_{i_1 j_r} & a_{i_1 j}\alpha_j \\ a_{i_2 j_1} & a_{i_2 j_2} & \dots & a_{i_2 j_r} & a_{i_2 j}\alpha_j \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i_{r+1} j_1} & a_{i_{r+1} j_2} & \dots & a_{i_{r+1} j_r} & a_{i_{r+1} j}\alpha_j \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{i_1 j_1} & a_{i_1 j_2} & \dots & a_{i_1 j_r} & a_{i_1 j} \\ a_{i_2 j_1} & a_{i_2 j_2} & \dots & a_{i_2 j_r} & a_{i_2 j} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i_{r+1} j_1} & a_{i_{r+1} j_2} & \dots & a_{i_{r+1} j_r} & a_{i_{r+1} j} \end{vmatrix} \alpha_j.$$

Dar aceşti minori de ordin $r+1$ ai lui A sînt toţi nuli, deoarece rang $A = r$, şi deci suma lor este zero, adică $\bar{d}_{r+1} = 0$.

Reciproc, fie rang A = rang $\bar{A} = r$. Există deci un minor de rang r, nenul, al matricei A astfel încît toţi minorii de rang $r+1$ sînt nuli. Putem presupune că acesta este la intersecţia primelor r linii şi primelor r coloane ale matricei A, adică

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1r} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2r} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{r1} & a_{r2} & \dots & a_{rr} \end{vmatrix} \neq 0$$

(această situaţie este totdeauna realizabilă, deoarece putem renumerota convenabil ecuaţiile şi necunoscutele).

Deoarece rang $A = r$, rezultă că orice minor de ordin $r+1$ care se obţine din acesta prin bordarea sa cu elementele corespunzătoare ale coloanei termenilor liberi şi cele ale uneia dintre liniile rămase este nul. Procedînd ca la calculul rangului unei matrice (vezi pct. 2), rezultă că există $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$ astfel încît coloana termenilor liberi a matricei $\bar{A}$ să fie combinaţie liniară de coloanele matricei corespunzătoare minorului ales, cu coeficienţii $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$. Deci au loc relaţiile:

$$\sum_{k=1}^{r} a_{ik}\alpha_k = b_i, \ 1 \leqslant i \leqslant m. \tag{4}$$

Relaţiile (4) arată că $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r, 0, \dots, 0$ este o soluţie a sistemului (1), adică sistemul este compatibil.

Utilizarea acestei teoreme, în exemple concrete, necesită, înainte de toate, calculul rangului matricei A. Pentru aceasta trebuie să găsim un minor nenul al lui A, fie acesta d, astfel încît toţi minorii care conţin pe d să fie nuli. Orice minor de acest fel îl vom numi *minor principal.* Apoi, este suficient să verificăm că orice minor al matricei $\bar{A}$, care conţine pe d şi care nu este minor al lui A, este de asemenea nul. Orice astfel de minor de ordin $r+1$, obţinut prin bordarea unui minor principal cu elementele corespunzătoare ale coloanei termenilor liberi, precum şi cu cele ale uneia dintre liniile rămase, se numeşte *minor caracteristic.*

Astfel, teorema lui Kronecker-Capelli se poate enunţa şi sub forma următoare:

Teorema lui Rouché. **Un sistem de ecuaţii (1) este compatibil dacă şi numai dacă toţi minorii caracteristici sînt nuli.**

Observație. Pentru un sistem de m ecuații cu n necunoscute, cu matricea sistemului de rang r, există minori caracteristici numai dacă $m > r$, iar numărul lor este egal cu $m - r$.

Să presupunem acum că sistemul (1) este compatibil. Teorema lui Kronecker-Capelli ne permite să decidem dacă sistemul este compatibil sau nu, dar nu ne dă un mijloc practic de aflare a tuturor soluțiilor sistemului dat. De această problemă ne vom ocupa în continuare.

Fie deci un sistem de ecuații liniare (1) compatibil. Să presupunem că rang $A =$ rang $\bar{A} = r$ și că un minor principal al sistemului se găsește la intersecția primelor linii și a primelor r coloane, adică

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1r} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2r} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{r1} & a_{r2} & \dots & a_{rr} \end{vmatrix} \neq 0.$$

După cum am observat la pct. 2 (consecința 2) orice linie a matricelor A și $\bar{A}$ este combinație liniară de primele r linii. De aici rezultă că orice ecuație a sistemului (1) este o combinație liniară de primele r ecuații ale sistemului (1), cu anumiți coeficienți. De aceea, orice soluție a primelor r ecuații satisface toate ecuațiile sistemului (1). Este suficient deci să rezolvăm sistemul

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{r1}x_1 + a_{r2}x_2 + \dots + a_{rn}x_n = b_r \end{cases} \tag{5}$$

care este echivalent cu sistemul (1).

Matricea coeficienților sistemului (5) are un minor nenul de ordin r (format din primele r coloane) și deci are rangul egal cu r, unde $r \leqslant n$. Distingem două cazuri:

1. Dacă $r = n$, sistemul (5) are același număr de ecuații și de necunoscute, iar determinantul său este nenul. În acest caz, acest sistem are o unică soluție, pe care o putem calcula cu formulele lui Cramer. Aceasta este și soluția sistemului (1).

2. Fie $r < n$. Pentru a fixa ideile, vom presupune ca mai înainte, că minorul format din coeficienții primelor r necunoscute este nenul, adică principal. Necunoscutele $x_1, x_2, \dots, x_r$ se numesc principale. Trecem în membrul drept al ecuațiilor (5) toți termenii care conțin necunoscutele (secundare): $x_{r+1}, \dots, x_n$; le atribuim valori arbitrare, respectiv $\lambda_{r+1}, \dots, \lambda_n$. Obținem un sistem de r ecuații cu r necunoscute: $x_1, x_2, \dots, x_r$.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1r}x_r = b_1 - a_{1,\,r+1}\lambda_{r+1} - \dots - a_{1n}\lambda_n, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2r}x_r = b_2 - a_{2,\,r+1}\lambda_{r+1} - \dots - a_{2n}\lambda_n, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{r1}x_1 + a_{r2}x_2 + \dots + a_{rr}x_r = b_r - a_{r,\,r+1}\lambda_{r+1} - \dots - a_{rn}\lambda_n. \end{cases} \tag{6}$$

Se rezolvă acest sistem cu formulele lui Cramer; el are o soluţie unică λ_1, $\lambda_2, \ldots, \lambda_r$. Numerele $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r, \lambda_{r+1}, \ldots, \lambda_n$ formează o soluţie a sistemului (5), care este şi soluţie a sistemului (1). Cum valorile $\lambda_{r+1}, \ldots, \lambda_n$ ale necunoscutelor secundare $x_{r+1}, \ldots, x_n$ sînt alese arbitrar, obţinem în acest mod o infinitate de soluţii distincte ale sistemului (5), care constituie mulţimea soluţiilor sistemului (1).

Pe de altă parte, orice soluţie a sistemului (5) poate fi obţinută prin acest procedeu.

În concluzie, fiind dat un sistem de ecuaţii liniare (1) a cărui rezolvare se cere, procedăm în modul următor:

1. *Studiem dacă sistemul este compatibil. Pentru aceasta găsim un minor principal al matricei A a sistemului, apoi calculăm minorii caracteristici.*

1° *Dacă există cel puţin un minor caracteristic nenul, atunci sistemul este incompatibil.*

2° *Dacă toţi minorii caracteristici sînt nuli, atunci sistemul este compatibil.*

2. *Pentru găsirea soluţiilor unui sistem compatibil (1), procedăm astfel: Păstrăm din sistemul (1) ecuaţiile care corespund liniilor minorului principal. În aceste ecuaţii, trecem în membrul drept termenii care conţin necunoscutele secundare, în membrul stîng păstrînd numai termenii care conţin necunoscutele principale. Atribuim necunoscutelor secundare valori arbitrare, apoi calculăm cu ajutorul formulelor lui Cramer valorile necunoscutelor principale, obţinînd astfel toate soluţiile sistemului (1).*

Pentru ca sistemul compatibil (1) să aibă soluţie unică, este necesar şi suficient ca rangul matricei sistemului să fie egal cu numărul necunoscutelor.

Exemple. 1) Să rezolvăm sistemul:

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 = 1, \\ x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 = -1, \\ x_1 - 2x_2 + x_3 + 5x_4 = 6. \end{cases}$$

Să scriem matricele:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 1 & 5 \end{pmatrix} \text{ şi } \bar{A} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -2 & 1 & 5 & 6 \end{pmatrix}.$$

Deoarece avem $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0$, iar $\begin{vmatrix} -2 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & -1 \\ -2 & 1 & 5 \end{vmatrix} = 0$

şi $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 5 \end{vmatrix} = 0$, rezultă că rangul matricei A este 2, iar minorul $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}$ este principal.

Calculăm minorii caracteristici. Avem doar un singur minor caracteristic şi anume:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & 5 & 6 \end{vmatrix} = -2 \neq 0.$$

Deoarece acesta este nenul, sistemul este incompatibil.

2) Să rezolvăm sistemul:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 1, \\ 6x_1 - 8x_2 = 1, \\ 5x_1 + 2x_2 = 3. \end{cases}$$

Matricea coeficienţilor are rangul 2, un minor principal al său fiind, de exemplu:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 6 & -8 \end{vmatrix} = -20 \neq 0.$$

Există un singur minor caracteristic şi anume

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 6 & -8 & 1 \\ 5 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 0.$$

Acesta fiind nul, sistemul este compatibil şi are soluţie unică. Pentru găsirea soluţiei, rezolvăm sistemul:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 1, \\ 6x_1 - 8x_2 = 1. \end{cases}$$

Obţinem soluţia: $x_1 = \frac{1}{2}$, $x_2 = \frac{1}{4}$.

Se verifică cu uşurinţă că aceste valori satisfac şi ecuaţia a treia a sistemului iniţial.

3) Să rezolvăm sistemul:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 - x_4 + x_5 = 1, \\ x_1 - x_2 + x_3 + x_4 - 2x_5 = 0, \\ 3x_1 + 3x_2 - 3x_3 - 3x_4 + 4x_5 = 2. \end{cases}$$

Matricea coeficienţilor are rangul 2, un minor principal al său fiind

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -3 \neq 0.$$

Există doar un singur minor caracteristic

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 3 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

care fiind nul, sistemul este compatibil.

Rezolvăm sistemul format de prima şi a doua ecuaţie a sistemului iniţial; trecem în membrul drept necunoscutele secundare x_3, x_4, x_5, atribuindu-le valori numerice: $x_3 = \alpha$, $x_4 = \beta$, $x_5 = \gamma$; (7)

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 = 1 + \alpha + \beta - \gamma, \\ x_1 - x_2 = -\alpha - \beta + 2\gamma. \end{cases}$$

Aplicînd formulele lui Cramer, găsim valorile necunoscutelor principale x_1 şi x_2:

$$x_1 = \frac{1+\gamma}{3},$$
$$x_2 = \frac{1+3\alpha+3\beta-5\gamma}{3}, \tag{8}$$

unde α, β, γ sînt numere oarecare.

Egalităţile (7) şi (8) dau *soluţia generală* a sistemului considerat; necunoscutele secundare putînd lua valori numerice arbitrare, obţinem astfel toate soluţiile sistemului dat.

4) Să rezolvăm sistemul:

$$\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 - 3x_3 - x_4 = -4, \\ x_1 + x_2 - x_3 = -3, \\ -3x_1 + 3x_2 + x_4 = 1, \\ x_1 - 7x_2 + 3x_3 = -3. \end{cases}$$

Calculăm determinantul sistemului şi obţinem:

$$\begin{vmatrix} 4 & 2 & -3 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ -3 & 3 & 0 & 1 \\ 1 & -7 & 3 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Cu toate că numărul de ecuaţii este egal cu numărul de necunoscute, nu se pot folosi direct formulele lui Cramer, deoarece determinantul sistemului este nul. Matricea coeficienţilor este de rang 3 un minor principal fiind, de exemplu:

$$\begin{vmatrix} 2 & -3 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0.$$

Există un singur minor caracteristic:

$$\begin{vmatrix} 2 & -3 & -1 & -4 \\ 1 & -1 & 0 & -3 \\ 3 & 0 & 1 & 1 \\ -7 & 3 & 0 & -3 \end{vmatrix} = 0$$

care fiind nul sistemul este compatibil.

Considerăm primele trei ecuaţii cu necunoscutele principale x_2, x_3, x_4. Dacă $x_1 = \alpha$ fiind necunoscută secundară, găsim:

$$x_2 = 3 + \alpha, \; x_3 = 6 + 2\alpha, \; x_4 = -8.$$

5) Să rezolvăm sistemul:

$$\begin{cases} x_1 + \alpha x_2 + 2x_3 = 1, \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 = -1, \\ x_1 + x_2 - x_3 = \beta. \end{cases} \qquad \alpha, \beta \in C.$$

Discuţie.

Calculăm determinantul sistemului:

$$d = \begin{vmatrix} 1 & \alpha & 2 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 3(\alpha - 1).$$

1. Dacă $\alpha \neq 1$, atunci $d \neq 0$ și sistemul are o unică soluție dată de formulele lui Cramer. Avem $d_1 = \alpha\beta - \alpha - 4\beta - 5$, $d_2 = 3(\beta + 2)$, $d_3 = (1 - \alpha)(2\beta + 1)$ și deci în acest caz:

$$x_1 = \frac{\alpha\beta - \alpha - 4\beta - 5}{3(\alpha - 1)}, \quad x_2 = \frac{\beta + 2}{\alpha - 1}, \quad x_3 = -\frac{2\beta + 1}{3}.$$

2. Dacă $\alpha = 1$, avem $d = 0$ și un minor principal este

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -3 \neq 0.$$

Există un minor caracteristic:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & \beta \end{vmatrix} = -3(\beta + 2).$$

1° Dacă $\beta \neq -2$, minorul caracteristic este nenul, deci sistemul este incompatibil.

2° Dacă $\beta = -2$, minorul caracteristic este nul, deci sistemul este compatibil. Pentru aflarea soluțiilor rezolvăm sistemul:

$$\begin{cases} x_2 + 2x_3 = 1 - x_1, \\ 2x_2 + x_3 = -1 - 2x_1. \end{cases}$$

Dacă $x_1 = \lambda$, avem:

$$x_2 = -1 - \lambda, \; x_3 = 1; \; \lambda \text{ fiind arbitrar.}$$

5. **Sisteme de ecuații liniare omogene.** Un sistem de ecuații liniare se numește *omogen* dacă termenul liber al fiecărei ecuații este nul (adică fiecare ecuație este *omogenă)*. Așadar, forma generală a unui sistem omogen de ecuații liniare este

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = 0. \end{cases} \tag{1}$$

Aplicăm rezultatele paragrafului precedent unui sistem omogen. În legătură cu sistemele omogene, observăm următoarele:

1. Un sistem omogen este întotdeauna compatibil. Într-adevăr, termenii liberi fiind nuli, rezultă că adăugînd la coloanele matricei sistemului coloana nulă a termenilor liberi rangul nu se schimbă. Deci, conform teoremei Kronecker-Capelli, sistemul este compatibil.

De altfel, aceasta se vede direct, întrucît un astfel de sistem admite *soluția nulă*: 0, 0, ..., 0.

Să presupunem că matricea A a coeficienţilor este de rang r.

1. Dacă $r = n$ (numărul necunoscutelor), atunci soluţia nulă este singura soluţie a sistemului (1).

2. Dacă $r < n$ (numărul necunoscutelor), atunci sistemul (1) are şi soluţii nenule. Pentru a găsi soluţiile, se utilizează acelaşi procedeu ca în cazul sistemelor arbitrare.

Observaţii. 1) Remarcăm că un sistem de n ecuaţii liniare omogene cu n necunoscute are soluţii nenule dacă şi numai dacă determinantul său este nul.

2) Dacă un sistem de ecuaţii liniare omogene are numărul ecuaţiilor mai mic decît cel al necunoscutelor, sistemul are soluţii nenule.

Exemple. 1) Să determinăm valorile parametrului λ pentru care sistemul de ecuaţii

$$\begin{cases} \lambda x_1 + 3x_2 = 0, \\ x_1 + \lambda x_2 = 0 \end{cases}$$

are soluţii nenule.

Determinantul sistemului este

$$\begin{vmatrix} \lambda & 3 \\ 1 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 3.$$

Acesta este nul pentru $\lambda = \sqrt{3}$ sau $\lambda = -\sqrt{3}$; în aceste cazuri sistemul are soluţii nenule.

2) Să rezolvăm sistemul omogen:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 4x_3 - 3x_4 = 0, \\ 3x_1 + 5x_2 + 6x_3 - 4x_4 = 0, \\ 4x_1 + 5x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 0, \\ 3x_1 + 8x_2 + 24x_3 - 19x_4 = 0. \end{cases}$$

Calculăm mai întîi, determinantul sistemului, care este nul. Deoarece

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = -1 \neq 0,$$

şi toţi minorii de ordinul trei care se obţin prin bordarea acestuia cu una dintre coloanele şi una dintre liniile rămase sînt nuli, rezultă că acesta este un minor principal.

Pentru a obţine soluţiile, dăm necunoscutelor x_3 şi x_4 valori arbitrare α, respectiv β, şi deducem valorile necunoscutelor x_1 şi x_2 din sistemul:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = -4\alpha + 3\beta, \\ 3x_1 + 5x_2 = -6\alpha + 4\beta. \end{cases}$$

Rezultă: $x_1 = 8\alpha - 7\beta$, $x_2 = -6\alpha + 5\beta$, $x_3 = \alpha$, $x_4 = \beta$; α şi β fiind numere oarecare.

Exerciţii

Să se rezolve următoarele sisteme de ecuaţii cu ajutorul regulii lui Cramer:

1. $$\begin{cases} 2x_1 - x_2 - x_3 = 2, \\ x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 10, \\ x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 10. \end{cases}$$

2. $$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 0, \\ 3x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 5, \\ 2x_1 + \text{[redacted]} - 2x_3 = 2. \end{cases}$$

$+3X_2$

3. $$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 9, \\ x_1 + 2x_2 - 4x_3 = -2, \\ -3x_1 + 4x_2 + x_3 = 13. \end{cases}$$

4. $$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 1, \\ -4x_1 + x_2 + 2x_3 = 2, \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 3. \end{cases}$$

5. $$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 - x_4 = 0, \\ 4x_1 + 3x_2 + 2x_3 - 2x_4 = 0, \\ 8x_1 + 5x_2 + 6x_3 - 4x_4 = 0, \\ 3x_1 + 3x_2 + 4x_3 - 2x_4 = 0. \end{cases}$$

6. $$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 22, \\ -4x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 6, \\ 3x_1 + 4x_2 - x_3 + 2x_4 = -4, \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 - x_4 = 6. \end{cases}$$

7. $$\begin{cases} 6x + 4y + z + 2t = 3, \\ 6x + 5y + 3z + 5t = 6, \\ 12x + 8y + z + 5t = 8, \\ 6x + 5y + 3z + 7t = 8. \end{cases}$$

8. $$\begin{cases} x + 2y + 3z + 4t = 0, \\ x + y + 2z + 3t = 0, \\ x + 3y + z + 2t = 0, \\ x + 3y + 3z + 2t = 0. \end{cases}$$

9. $$\begin{cases} 2x + y + z + t = 1, \\ 3x - 2y - 5z + 4t = -30, \\ x + 3y + 2z - 3t = 17, \\ x - y + z - t = 2. \end{cases}$$

10. $$\begin{cases} x + y + z + t = 2\alpha, \\ 2x + 2z + t = 2\alpha, \\ -2x + 2y - t = 2\alpha, \\ 3x + y - z = 0. \end{cases} \quad (\alpha \in \mathbf{R}).$$

11. Să se rezolve sistemul:

$$\begin{cases} ax + by + cz + dt = 0, \\ bx - ay + dz - ct = 0, \\ cx - dy - az + bt = 0, \\ dx + cy - bz - at = 0, \end{cases}$$

unde a, b, c, d sînt numere reale, cel puţin unul dintre ele fiind nenul.

12. Să se rezolve sistemul:

$$\begin{cases} x + y + z + t = 1, \\ ax + by + cz + dt = m, \\ a^2x + b^2y + c^2z + d^2t = m^2, \\ a^3x + b^3y + c^3z + d^3t = m^3, \end{cases}$$

unde a, b, c, d sînt numere diferite între ele, două cîte două.

13. Să se determine rangurile matricelor:

a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 4 & 5 & 3 & -1 \\ 2 & 1 & -3 & 1 \end{pmatrix}$; b) $\begin{pmatrix} 6 & 2 & 3 & -2 \\ 5 & 3 & 7 & -6 \\ 8 & 0 & -5 & 6 \\ 4 & -2 & -7 & 5 \end{pmatrix}$; c) $\begin{pmatrix} 2 & \alpha & -5 \\ \beta & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$.

Să se rezolve sistemele:

14. $\begin{cases} 2x - 3y + z = 1, \\ -4x + 6y + 2z = 3. \end{cases}$

15. $\begin{cases} x + 2y + 3z = 1, \\ 2x + 3y + 6z = 2. \end{cases}$

16. $\begin{cases} x + y + z + t = 1, \\ x + y + z - t = 0, \\ x + y - z + t = 2. \end{cases}$

17. $\begin{cases} x + y + z - 2t = 5, \\ 2x + y - 2z + t = 1, \\ 2x - 3y + z + 2t = 3. \end{cases}$

18. $\begin{cases} 2x - y + z + 2t = 1, \\ x + y + 2z + t = 2, \\ 3x - 2y + z + 3t = 1. \end{cases}$

19. $\begin{cases} x - 3y + z + t = 1, \\ x - 3y + z - 2t = -1, \\ x - 3y + z + 5t = 6. \end{cases}$

20. $\begin{cases} 2x - 3y + z = -1, \\ x + 2y - 3z = 0, \\ x - 12y + 11z = -1, \\ 4x - 15y + 9z = 0. \end{cases}$

21. $\begin{cases} x + y + z = 2, \\ 2x - y - 2z = -2, \\ x + 4y + 5z = 8, \\ 2x - 5y + 6z = 10. \end{cases}$

22. $\begin{cases} 5x + 3y - 11z = 13, \\ 4x - 5y + 4z = 18, \\ 3x - 13y + 19z = 22. \end{cases}$

23. $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 + x_4 = 5, \\ x_1 - x_2 + 2x_3 - 2x_4 = -5, \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 - 2x_4 = -3, \\ -3x_1 - x_2 - 2x_3 + 2x_4 = 3. \end{cases}$

24. $\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 7, \\ 3x_1 - 2x_2 + x_3 = 2, \\ 4x_1 - 2x_2 - x_3 = -3, \\ x_1 + x_2 + x_3 = 6, \\ x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 1. \end{cases}$

25. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 = 1, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 = 1, \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 + x_4 = 1, \\ 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 - x_4 = 1, \\ 5x_1 + 5x_2 + 2x_3 = 2. \end{cases}$

26. Să se arate că sistemul

$$\begin{cases} \beta x + \alpha y = \gamma, \\ \gamma x + \alpha z = \beta, \\ \gamma y + \beta z = \alpha \end{cases}$$

are soluţie unică, dacă şi numai dacă $\alpha\beta\gamma \neq 0$. În acest caz să se rezolve sistemul.

27. Să se determine α și β astfel încît sistemele următoare să fie compatibile

a) $$\begin{cases} 2x - y + z + 2t = 1, \\ 2x + 2y + 4z + 2t = \alpha, \\ 3x - 2y + z + 3t = 1; \end{cases}$$

b) $$\begin{cases} x - 3y = -2, \\ x + 2y = 3, \\ 3x - y = \alpha, \\ 2x + y = \beta. \end{cases}$$

28. Să se determine α, β şi γ astfel încît sistemele următoare să fie compatibile, iar matricea sistemului să aibă rangul 2:

a) $$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 1, \\ x_1 + x_2 + \alpha x_3 + x_4 = -1, \\ x_1 - x_2 + x_3 + \beta x_4 = \gamma; \end{cases}$$

b) $$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 - x_4 = -1, \\ x_1 + 9x_2 + \alpha x_3 + 3x_4 = 3, \\ 5x_1 - 6x_2 + 10x_3 + \beta x_4 = \gamma. \end{cases}$$

Să se rezolve sistemele următoare. Discuţie, după parametrii reali α, β, γ, λ.

29. $$\begin{cases} 5x - 3y + 2z + 4t = 3, \\ 4x - 2y + 3z + 7t = 1, \\ 8x - 6y - z - 5t = 9, \\ 7x - 3y + 7z + 17t = \lambda. \end{cases}$$

30. $$\begin{cases} 2x - y + 3z + 4t = 5, \\ 4x - 2y + 5z + 6t = 7, \\ 6x - 3y + 7z + 8t = 9, \\ \lambda x - 4y + 9z + 10t = 11. \end{cases}$$

31. $$\begin{cases} \alpha x + y + z = 1, \\ x + \alpha y + z = 1, \\ x + y + \alpha z = 1. \end{cases}$$

32. $$\begin{cases} (1 + \lambda)x + y + z = 1, \\ x + (1 + \lambda)y + z = \lambda, \\ x + y + (1 + \lambda)z = \lambda^2. \end{cases}$$

33. $$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 1, \\ \alpha x_1 + \beta x_2 + \gamma x_3 = \lambda, \\ \alpha^2 x_1 + \beta^2 x_2 + \gamma^2 x_3 = \lambda^2. \end{cases}$$

34. $$\begin{cases} \alpha x + y + z = 1, \\ x + \beta y + z = 1, \\ x + y + \gamma z = 1. \end{cases}$$

$$\begin{cases} \alpha x + \beta y + 2z = 1, \\ \alpha x + (2\beta - 1)y + 3z = 1, \\ \alpha x + \beta y + (\beta + 3)z = 2\beta - 1. \end{cases}$$

36. $$\begin{cases} \alpha x + (\alpha + 1)y + (\alpha + 2)z = \alpha + 3, \\ \beta x + (\beta + 1)y + (\beta + 2)z = \beta + 3, \\ x + \gamma y + \gamma^2 z = \gamma^3. \end{cases}$$

37. Să se determine α astfel încît sistemul următor să aibă soluţii nenule şi, în acest caz, să se rezolve:

$$\begin{cases} x - 2y + z - t = 0, \\ 2x - y + 3z - 3t = 0, \\ x + y + z + t = 0, \\ 2x + (\alpha - 1)y + 2z + \alpha t = 0. \end{cases}$$

38. Să se rezolve şi să se discute după valorile parametrului λ, sistemul de ecuaţii liniare:

$$\begin{cases} (3+2\lambda)x + (1+3\lambda)y + \lambda z + (\lambda-1)t = 3, \\ 3\lambda x + (3+2\lambda)y + \lambda z + (\lambda-1)t = 1, \\ 3\lambda x + 3\lambda y + 3z + (\lambda-1)t = 1, \\ 3\lambda x + 3\lambda y + \lambda z + (\lambda-1)t = 1. \end{cases}$$

39. Să se afle inversele matricelor de ordin n:

$$\text{a)} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 0 \end{pmatrix}; \quad \text{b)} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

(vezi exerciţiul 14, cap. IV).

40. Să se rezolve ecuaţiile matriceale:

$$\text{a)} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ 0 & 1 & 2 & \dots & n-1 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & n-2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

$$\text{b)} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 2 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 2 \end{pmatrix}$$

(vezi exerciţiul 21, cap. IV).

Indicații. Răspunsuri

Cap. I

1. $\sigma\tau = \begin{pmatrix}1&2&3&4\\3&2&4&1\end{pmatrix}$, $\tau\sigma = \begin{pmatrix}1&2&3&4\\1&3&4&2\end{pmatrix}$. **2.** $\sigma^2 = \begin{pmatrix}1&2&3&4\\4&3&2&1\end{pmatrix}$, $\sigma^3 = \begin{pmatrix}1&2&3&4\\3&1&4&2\end{pmatrix}$, $\sigma^4 = e$. Deci $k = 4$. **3.** Considerăm șirul $\{\sigma, \sigma^2, \dots, \sigma^k, \dots\}$. Cum S_n este o mulțime finită acest șir este finit. Deci există $k \neq l$ astfel încît $\sigma^k = \sigma^l$. Dacă $k > l$ atunci notînd $p = k - l$ obținem $\sigma^p = e$. **5.** $m(\sigma) = 2$, $\varepsilon(\sigma) = +1$; $m(\sigma) = 3$; $\varepsilon(\sigma) = -1$; $m(\sigma) = 3$, $\varepsilon(\sigma) = -1$, $m(\sigma) = 8$, $\varepsilon(\sigma) = +1$, $m(\sigma) = 14$, $\varepsilon(\sigma) = +1$, $m(\sigma) = 13$, $\varepsilon(\sigma) = -1$. **6.** (12); (13); (14); (23); (24); (34). **7.** $H = \{\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_p\}$ și fie $\sigma \in H$. Considerăm produsele $\sigma\sigma_1, \sigma\sigma_2, \dots, \sigma\sigma_p$ care sînt elemente distincte două cîte două. Deci $H = \{\sigma\sigma_1, \sigma\sigma_2, \dots, \sigma\sigma_p\}$. Deci $\sigma \in \{\sigma\sigma_1, \sigma\sigma_2, \dots, \sigma\sigma_p\}$; $\sigma = \sigma\sigma_k \Rightarrow \sigma_k = e$; $e \in H \Rightarrow e = \sigma\sigma_r \Rightarrow \sigma^{-1} = \sigma_r$. **8.** Fie transpoziția $\sigma_1 = (13)$. $\sigma' = \sigma_1\sigma = \begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\1&3&2&5&4\end{pmatrix} = (23)\ (45)$ și deci $\sigma = (13); (23); (45)$, $\tau = (16); (24); (35); (45)$. **9.** $\sigma = \begin{pmatrix}1&2&3&\dots&n\\n&n-1&n-2&\dots&1\end{pmatrix}$. **10.** Pentru $i = 8$, $j = 3$, σ este pară. Pentru $i = 3$, $j = 8$, σ este impară. **11.** $m(\sigma) = \dfrac{(n-1)n}{2}$; σ este pară dacă $n = 4k$ sau $n = 4k + 1$ și σ este impară dacă $n = 4k + 2$ sau $n = 4k + 3$. **12** $m(\sigma) = \dfrac{n(n+1)}{2}$.
13. Presupunem că $\sigma(i) = j$, $i \neq j$. Cum $n \geqslant 3$, există numerele $k, l \in \{1, 2, \dots, n\}$ astfel încît $k \neq l$ și $i \neq k$, $i \neq l$. Din ipoteză avem în particular $(jk)\sigma = \sigma(jk)$ și $(jl)\sigma = \sigma(jl)$. Din aceste două egalități obținem $k = j$ și $l = j$ deci $k = l$ contradicție. Deci $\sigma = e$.

Cap. II

3. Din $AB = BA$ rezultă că $A^rB^s = B^sA^r$ oricare ar fi numerele naturale r și s și apoi se aplică în produsul $(A - B)(A^{k-1} + A^{k-2}B + \dots + AB^{k-2} + B^{k-1})$. **4.** Dacă $X = \begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}$ din egalitatea $AX = XA$ se obține că $c = -2b$, $d = a + 3b$ unde $a, b \in \mathbf{Q}$. **5.** $A^n = \begin{pmatrix}\cos n\varphi & -\sin n\varphi\\ \sin n\varphi & \cos n\varphi\end{pmatrix}$. **7.** $f(A) = \begin{pmatrix}11&-2&14\\7&6&-3\\19&-7&26\end{pmatrix}$. **8.** $A^n = \begin{pmatrix}1&0\\n&1\end{pmatrix}$. **9.** Se arată că suma elementelor de pe diagonala principală a matricei $AB - BA$ este zero.

10. a) $A = \pm I_2$ sau $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix}$, unde $a^2 = 1 - bc$. b) $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix}$, unde $a^2 = -bc$.

11. $x = 1,\ y = -1,\ z = 2,\ u = 3,\ v = -3, w = 1$. **12.** $X = \begin{pmatrix} -1 & 5 \\ 2 & 3 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}$. **13.** $x = 3,\ y = 2$.

14. $$\begin{pmatrix} n & \dfrac{n(n+1)}{2} & \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6} & \dfrac{n^2(n+1)^2}{4} \\ -n & 2n & 3n & \dfrac{n(n+1)(n+2)}{3} \end{pmatrix}.$$

15. $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 3p \\ 3p & 0 & 0 \end{pmatrix}$ dacă $n = 3p$; $\begin{pmatrix} \omega & \omega^2 & 3p+1 \\ 3p+1 & \omega & \omega^2 \end{pmatrix}$ dacă $n = 3p + 1$; $\begin{pmatrix} -1 & -1 & 3p+2 \\ 3p+2 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ dacă $n = 3p + 2$. **16.** $x = \frac{\pi}{4} + k\pi,\ k \in \mathbf{Z}$. **17.** $X = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ şi $X = \begin{pmatrix} -2 & -3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$.

18. $A^n = \begin{pmatrix} \dfrac{[1 + (-1)^n]a^n}{2} & \dfrac{[1 - (-1)^n]a^n}{2} \\ \dfrac{[1 - (-1)^n]a^n}{2} & \dfrac{[1 + (-1)^n]a^n}{2} \end{pmatrix}$. **19.** Dacă $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, din $A^2 = 0$ obţinem

$a^2 + bc = 0$; $b(a + d) = 0$; $c(a + d) = 0$; $cb + d^2 = 0$; dacă $a + d \neq 0$, atunci $b = c = 0$ şi deci $a = d = 0$, contradicţie. Deci $a + d = 0$. **20.** O soluţie este $b = 1$, $c = 1 - a^2$, $d = -a$ unde $a \in \mathbf{Z}$. **22.** Se scrie $a = r \cos \alpha$, $b = r \sin \alpha$, unde $|r| < 1$. Se obţine $a_n = r^n \cos n\alpha$; $b_n = r^n \sin n\alpha$. **23.** Dacă 2 nu divide pe $m - n$ atunci numărul căutat este zero. Dacă 2 divide pe $m - n$ atunci numărul căutat este $2^{(m-1)(n-1)}$.

24. $$\begin{pmatrix} \dfrac{\sin \frac{n\alpha}{2} \cos \frac{(n+1)\alpha}{2}}{\sin \frac{\alpha}{2}} & \dfrac{\sin \frac{n\alpha}{2} \sin \frac{(n+1)\alpha}{2}}{\sin \frac{\alpha}{2}} \\ n + \dfrac{\sin n\alpha \cos (n+1)\alpha}{\sin \alpha} & n - \dfrac{\sin n\alpha \cos (n+1)\alpha}{\sin \alpha} \end{pmatrix}.$$

Cap. III

1. a) -15; b) 7; c) $a^2 + b^2$; d) 1; e) $\sin(\alpha + \beta)$; f) 0; g) 0; h) 0; i) -1; j) $2\omega^2$; k) 0.
2. a) -9; b) -50; c) 2; d) $a^3 + 2b^3 - 3ab^2$; e) $-3 - 6\omega$; f) $(a^3 - b^3)^2$; g) $(a^3 + b^3)^2$.
3. a) Permutarea $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 3 & 1 & 5 & 2 \end{pmatrix}$ are 6 inversiuni. Deci semnul termenului este $+$;

b) Semnul termenului este $(-)$; c) Semnul este $(-)$. **4.** Termenii de la a), b) şi c) nu se găsesc în determinantul de ordinul 4. **5.** Semnul este $(+)$. **6.** Produsul elementelor de pe diagonala secundară este $a_{1n}a_{2n-1}a_{3n-2}\dots a_{n1}$. Acest produs are semnul egal cu semnul permutării $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ n & n-1 & n-2 & \dots & 1 \end{pmatrix}$. Această permutare are semnul egal cu $(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}$. **7.** Trebuie ca $\{k_3, k_5\} = \{3, 6\}$. Deci $k_3 = 3$ şi $k_5 = 6$ sau $k_3 = 6$ şi $k_5 = 3$. **8.** a) $n!$; b) $n!\,(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}$. **9.** Dacă d^* este determinantul matricei transpuse se observă folosind definiţia determinantului că $d^* = \bar{d}$. Cum $d^* = \bar{d}$, atunci $d = \bar{d}$ şi deci d este un număr real. **10.** a) 1; b) 160; c) -231; d) 1; e) 0; f) 5; g) 30; h) $(af - bc + cd)^2$; i) $-1\,069$. **12.** 0, 0, $a^2 + b^2 + c^2$. **13.** Se obţine ecuaţia $(x + 1)(x^2 - x + 1)^2 = 0$. **14.** Se obţine o ecuaţie de gradul 4 care are rădăcinile a, a, a, $-3a$. **15.** Se scade linia 1 din fiecare celelalte linii; apoi se adună la coloana 1 suma celorlalte coloane. Se obţine $(-1-a)^{n-1}(n-1)a - 1$. **16.** $d = 4$. **17.** $d = 0$.

Cap. IV

1. a) 1; b) 2; c) Dacă $\alpha = -6$ rangul este 1, iar dacă $\alpha \neq -6$ rangul este 2. **2.** a) 2; b) 2; c) Pentru $\alpha = -21$ rangul este 2, iar dacă $\alpha \neq -21$, rangul este 3. **3.** a) 4; b) 4; c) 3. **4.** a) 4; b) 4. **5.** m. **6.** 0; 1; 2. **7.** Pentru $\alpha = -45/4$ matricea are rangul minim şi anume 3. **8.** Pentru $\alpha = 3$ rangul este egal cu 2, iar pentru $\alpha \neq 3$ acesta este 3.

9. Se folosesc proprietăţile determinanţilor. **10.** a) $\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$; b) $\begin{pmatrix} -3 & 2 \\ \frac{5}{2} & -\frac{3}{2} \end{pmatrix}$; c) $\begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$. **11.** a) Dacă $ad = bc$, matricea nu este inversabilă, dacă $ad \neq bc$ matricea este inversabilă, inversa sa fiind $\frac{1}{ad - bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$; b) Pentru $a = b = 0$ matricea nu este inversabilă; în caz contrar, matricea este inversabilă, inversa sa fiind $\frac{1}{a^2 + b^2}\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$. **12.** a) $\begin{pmatrix} 3 & -3 & 1 \\ -3 & 5 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$; b) $\frac{1}{10}\begin{pmatrix} 2 & 1 & -5 \\ -4 & 3 & 5 \\ 2 & 1 & 5 \end{pmatrix}$; c) Pentru $\alpha = \frac{3}{4}$ matricea nu este inversabilă; pentru $\alpha \neq \frac{3}{4}$ este inversabilă, inversa sa fiind

$$\frac{1}{3 - 4\alpha}\begin{pmatrix} -\alpha & 2(3-\alpha) & 3 \\ -\alpha & 2\alpha + 3 & 3 \\ 1 & -6 & -4 \end{pmatrix}.$$

13. a) $\frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$; b) $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 5 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

14. a) $\begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$; b) $\frac{1}{3}\begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$; c) Pentru $\lambda \in \{-2, 1\}$ matricea nu este inversabilă; în caz contrar, matricea este inversabilă, inversa sa fiind

$$\frac{1}{(\lambda-1)(\lambda+2)}\begin{pmatrix} \lambda+1 & -1 & -1 \\ -1 & \lambda+1 & -1 \\ -1 & -1 & \lambda+1 \end{pmatrix}.$$

15. Avem $B^{-1} = \frac{-1}{60}\begin{pmatrix} 15 & 15 & -15 \\ -6 & -6 & -6 \\ -8 & 12 & -8 \end{pmatrix}$.

15. a) Dacă în matricea A se permută între ele liniile i și j, atunci în matricea A^{-1} se permută între ele coloanele i și j; b) Dacă se înmulțește linia i cu $\lambda \neq 0$, atunci în A^{-1} se înmulțește coloana i cu $\frac{1}{\lambda}$; c) Dacă la linia i se adaugă linia j înmulțită cu λ, atunci în A^{-1}, coloana i înmulțită cu λ se scade din coloana j. **18.** a) Înmulțim la stînga ambii membri ai ecuației cu inversa matricei $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ care este $\frac{1}{4}\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$ și obținem $X = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 9 & 10 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$; b) Înmulțim la dreapta ambii termeni ai ecuației cu inversa matricei $\begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 5 & 8 \end{pmatrix}$, adică cu $\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 8 & 2 \\ -5 & -1 \end{pmatrix}$ și obținem $X = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 46 & 12 \\ -49 & -11 \end{pmatrix}$. **19.** Înmulțim la stînga cu inversa matricei $\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -3 & 8 \end{pmatrix}$, adică cu $-\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 8 & -2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$, și la dreapta cu inversa matricei $\begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 5 & 8 \end{pmatrix}$, adică cu $\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 8 & -6 \\ -5 & 4 \end{pmatrix}$, și obținem $X = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} -7 & 20 \\ -3 & 8 \end{pmatrix}$ **20.** Avem

$$X = \begin{pmatrix} -1 & 5 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \\ -3 & 4 & -5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = -\frac{1}{4}\begin{pmatrix} -1 & 5 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \\ -3 & 4 & -5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -3 & 4 & 1 \\ -2 & 4 & -2 \\ 1 & -4 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= -\frac{1}{4}\begin{pmatrix} -4 & 4 & -8 \\ -9 & 16 & -1 \\ -4 & 24 & -16 \end{pmatrix}.$$

21. $X = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

22. Avem $X = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} =$

$$= \begin{pmatrix} 1 & -4 & -3 \\ 1 & -5 & -3 \\ -1 & 6 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -2 & 7 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -5 & 6 \\ 0 & -6 & 6 \\ 0 & 7 & -7 \end{pmatrix}.$$

Cap. V

1. $x_1 = 6$, $x_2 = 4$, $x_3 = 6$. **2.** $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = 3$. **3.** $x_1 = 2$, $x_2 = 4$, $x_3 = 3$. **4.** $x_1 = \frac{5}{11}$, $x_2 = \frac{16}{11}$, $x_3 = \frac{13}{11}$. **5.** $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 0$. **6.** $x_1 = 1$, $x_2 = -2$, $x_3 = 3$, $x_4 = 2$. **7.** $x = -1$, $y = 2$, $z = -1$, $t = 1$. **8.** $x = y = z = t = 0$. **9.** $x = -1$, $y = 2$, $z = 3$, $t = -2$. **10.** $x = -2\alpha$, $y = 2\alpha$, $z = -4\alpha$, $t = 6\alpha$. **11.** Determinantul sistemului este $-(a^2 + b^2 + c^2 + d^2)^2 \neq 0$, deci soluţia este $x = y = z = t = 0$. **12.** Sistemul are soluţia unică:

$$x = \frac{(d-m)(c-m)(b-m)}{(d-a)(c-a)(b-a)}, \quad y = \frac{(d-m)(c-m)(m-a)}{(d-b)(c-b)(b-a)},$$

$$z = \frac{(d-m)(m-a)(m-b)}{(d-c)(c-a)(c-b)}, \quad t = \frac{(m-a)(m-b)(m-c)}{(d-a)(d-b)(d-c)}.$$

13. a) 3; b) 3; c) Pentru $\alpha = 15$ şi $\beta = \frac{2}{5}$ rangul matricei este 1; pentru $\alpha \neq 15$ sau pentru $\beta \neq \frac{2}{5}$ rangul este 2. **14.** $x = \lambda$, $y = \frac{1}{12} + \frac{2\lambda}{3}$, $z = \frac{5}{4}$, unde λ este un număr oarecare. **15.** $x = 1 - 3\lambda$, $y = 0$, $z = \lambda$, λ fiind un număr oarecare. **16.** $x = \lambda$, $y = 1 - \lambda$, $z = -\frac{1}{2}$, $t = \frac{1}{2}$, λ fiind un număr oarecare. **17.** $x = 2$, $y = 1 + \lambda$, $z = 2 + \lambda$, $t = \lambda$, λ fiind un număr oarecare. **18.** $x = 1 - \lambda - \mu$, $y = 1 - \lambda$, $z = \lambda$, $t = \mu$, λ şi μ fiind numere oarecare. **19.** Sistemul este incompatibil. **20.** Sistemul este incompatibil. **21.** $x = \frac{\lambda}{3}$, $y = \frac{6 - 4\lambda}{3}$, $z = \lambda$, λ fiind un număr arbitrar. **22.** Sistemul este incompatibil. **23.** $x_1 = -2 - \alpha - \beta$, $x_2 = 3 + \alpha + \beta$, $x_3 = \alpha$, $x_4 = -\beta$, α şi β fiind numere oarecare. **24.** $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = 3$. **25.** $x_1 = \frac{1 + 5\lambda}{6}$, $x_2 = \frac{1 - 7\lambda}{6}$, $x_3 = \frac{1 + 5\lambda}{6}$, $x_4 = \lambda$ unde λ este un număr oarecare. **26.** Determinantul sistemului este $-2\alpha\beta\gamma$ şi totul rezultă din regula lui Cramer: $x = \frac{\beta^2 + \gamma^2 - \alpha^2}{2\beta\gamma}$, $y = \frac{\alpha^2 + \gamma^2 - \beta^2}{2\alpha\gamma}$, $z = \frac{\alpha^2 + \beta^2 - \gamma^2}{2\alpha\beta}$.
27. a) $\alpha = 4$. b) $\alpha = 2$, $\beta = 3$. **28.** a) $\alpha = -1$, $\beta = -1$, $\gamma = 1$. b) $\alpha = 2$, $\beta = -2$, $\gamma = -2$. **29.** Pentru $\lambda \neq 0$ sistemul este incompatibil; pentru $\lambda = 0$ sistemul este compatibil: $x = \frac{-5\alpha - 13\beta - 3}{2}$, $y = \frac{-7\alpha - 19\beta - 7}{2}$, $z = \alpha$, $t = \beta$, unde α şi β sînt numere oarecare. **30.** Pentru $\lambda = 8$ soluţia sistemului este: $x = \alpha$, $y = 4 + 2\alpha - 2\beta$, $z = 3 - 2\beta$, $t = \beta$, unde α şi β sînt numere oarecare; pentru $\lambda \neq 8$ soluţia sistemului este $x = 0$, $y = 4 - 2\beta$, $z = 3 - 2\beta$, $t = \beta$, unde β este un număr oarecare; **31.** Dacă $\alpha \neq 1$ şi $\alpha \neq -2$ sistemul are soluţie unică $x = y = z = \frac{1}{\alpha + 2}$; dacă $\alpha = 1$ soluţia este $x = 1 - \lambda - \mu$, unde λ şi μ sînt numere oarecare; dacă $\alpha = -2$ sistemul este incompatibil. **32.** Dacă $\lambda \neq 0$ şi $\lambda \neq -3$ sistemul are soluţie unică $x = \frac{2 - \lambda^2}{\lambda(\lambda + 3)}$, $y = \frac{2\lambda - 1}{\lambda(\lambda + 3)}$, $z = \frac{\lambda^3 + 2\lambda^2 - \lambda - 1}{\lambda(\lambda + 3)}$; dacă $\lambda = 0$ sau $\lambda = -3$ sistemul este incom-

patibil. **33.** Dacă α, β, γ sînt diferite între ele două cîte două, atunci sistemul are soluţie unică: $x_1 = \frac{(\beta-\lambda)(\gamma-\lambda)}{(\beta-\alpha)(\gamma-\alpha)}$, $x_2 = \frac{(\alpha-\lambda)(\gamma-\lambda)}{(\alpha-\beta)(\lambda-\beta)}$, $x_3 = \frac{(\alpha-\lambda)(\beta-\lambda)}{(\alpha-\gamma)(\beta-\gamma)}$; dacă $\alpha=\beta$, $\alpha\neq\gamma$, $\lambda=\alpha$ sau $\lambda=\gamma$, soluţiile depind de un număr arbitrar; dacă $\alpha=\gamma$, $\alpha\neq\beta$, $\lambda=\alpha$ sau $\lambda=\beta$, soluţiile depind de un număr arbitrar; dacă $\beta=\gamma$, $\alpha\neq\beta$, $\lambda=\alpha$ sau $\lambda=\beta$, soluţiile depind de un număr arbitrar; în celelalte cazuri, sistemul este incompatibil. **34.** Determinantul sistemului este $d=\alpha\beta\gamma-\alpha-\beta-\gamma+2$. Dacă $d\neq 0$ sistemul are soluţie unică: $x=\frac{(\beta-1)(\gamma-1)}{d}$, $y=\frac{(\alpha-1)(\gamma-1)}{d}$, $z=\frac{(\alpha-1)(\beta-1)}{d}$; dacă $d=0$, atunci distingem situaţiile: 1° două dintre numerele α, β, γ sînt egale cu 1, atunci soluţia sistemului depinde de un număr arbitrar; 2° $\alpha=\beta=\gamma=1$, soluţia sistemului depinde de două numere arbitrare; 3° α, β, γ sînt toate diferite de 1, sistemul este incompatibil. Cazul în care $d=0$ şi unul singur dintre numerele α, β, γ să fie egal cu 1 este imposibil. **35.** Determinantul sistemului este $d=\alpha(\beta^2-1)$. Dacă $\alpha\neq 0$ şi $\beta\neq\pm 1$ sistemul are soluţie unică dată de formulele lui Cramer. Dacă $\alpha=0$, $\beta=5$, avem $x=\lambda$, $y=-\frac{1}{3}$, $z=\frac{4}{3}$, cu λ arbitrar; dacă $\alpha=0$, $\beta\neq 1$ şi $\beta\neq 5$, sistemul este incompatibil; dacă $\beta=1$, avem $x=\lambda$, $y=1-\alpha x$, $z=0$ cu λ arbitrar; dacă $\beta=-1$, sistemul este incompatibil. **36.** Determinantul sistemului este $d=(\gamma-1)^2(\alpha-\beta)$; dacă $\gamma\neq 1$ şi $\alpha\neq\beta$ sistemul are soluţie unică: $x=\gamma$, $y=-2\gamma-1$, $z=\gamma+2$; dacă $\alpha=\beta$ şi $\gamma\neq 1$ sistemul este compatibil nedeterminat; dacă $\alpha=\beta$ şi $\gamma=1$ sistemul este compatibil determinat; dacă $\alpha\neq\beta$ şi $\gamma=1$ sistemul este compatibil nedeterminat. **37.** Sistemul are soluţii nenule pentru $\alpha=0$. **38.** Pentru $\lambda\neq 1$ şi $\lambda\neq 3$, sistemul are o unică soluţie: $x=\frac{2}{3-\lambda}$, $y=z=0$, $t=\frac{3-7\lambda}{(\lambda-1)(3-\lambda)}$; pentru $\lambda=1$, sistemul este incompatibil, iar pentru $\lambda=3$, soluţia este: $x=-\frac{17}{9}-\frac{1}{3}\alpha-\frac{2}{9}\beta$, $y=2$, $z=\alpha$, $t=\beta$, unde α şi β sînt numere oarecare.

39. a) $\begin{pmatrix} 2-n & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & -1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 0 & 0 & \dots & -1 \end{pmatrix}$; b) $\frac{1}{n-1}\begin{pmatrix} 2-n & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 2-n & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 2-n & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 2-n \end{pmatrix}$.

40. a) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$; b) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Bibliografie

1. Fadeev D. K. şi Sominski I. S., *Culegere de probleme de algebră superioară*, Editura Tehnică, 1954.
2. Kuroș A. G., *Curs de algebră superioară*, Editura Tehnică, 1950.
3. Stamate I. şi Stoian I., *Culegere de exerciții şi probleme de algebră*, Editura Didactică şi Pedagogică, 1979.

CUPRINS

Capitolul I. **Permutări** 3

1. Noţiunea de permutare 3
2. Produsul (compunerea) permutărilor 4
3. Transpoziţii 5
4. Inversiunile unei permutări. Signatura (semnul) unei permutări 6
5. Descompunerea unei permutări în produs de transpoziţii 8

   Exerciţii 9

Capitolul II. **Matrice** 10

1. Noţiunea de matrice 11
2. Operaţii cu matrice 12
3. Transpusa unei matrice 18

   Exerciţii 18

Capitolul III. **Determinanţi** 21

1. Determinanţi de ordinul 2 şi 3 21
2. Definiţia determinantului de ordinul *n* 25
3. Proprietăţile determinanţilor 27
4. Interpretarea geometrică a determinantului de ordinul 3 32
5. Calculul determinanţilor 33

   Exerciţii 38

Capitolul IV. **Rangul unei matrice. Matrice inversabile** 41

1. Rangul unei matrice 41
2. Matrice inversabile 44

   Exerciţii 47

Capitolul V. **Sisteme de ecuaţii liniare** 50

1. Noţiuni generale 50
2. Regula lui Cramer 51
3. Calculul rangului unei matrice 56
4. Sisteme de ecuaţii liniare 59
5. Sisteme de ecuaţii liniare omogene 65

   Exerciţii 67

Indicaţii. Răspunsuri 71

Nr. colilor de tipar : 5
Bun de tipar : 11.01.1987

Com. nr. 60 566/33 123
Combinatul Poligrafic
„CASA SCÎNTEII"
București — R.S.R.