

ACAD. ELIE CARAFOLI

AERODINAMICA



EDITURA TEHNICĂ

1 9 5 1

C. 66.652.

22736/1951

234735

Acad. E. CARAFOLI: Aerodinamica, Ed. 1. București.
Ed. Tehnică. 1951. 2+508 pag. + 231 fig., ft. 250×175
mm; 600 lei broșat, 700 cartonat. Tipografia „Centrul
Poligrafic Nr. 2, Unitatea B”. Dat în lucru la 19.III.951.
Bun de tipar 15.VIII.951. Hârtie semivelină 65 g/m²,
ft. 70×100/16. Tiraj 1 100. Coli de tipar 32. Coli de
editură 33,25. Comanda 241.

Pentru bibliotecile mici indicele de clasificare este 532.

P R E F A Ț A

Avântul extraordinar pe care aviația l-a luat în ultimul timp se datorește în cea mai mare parte cercetărilor aerodinamice, teoretice și experimentale.

Știința Aerodinamicii, prin amploarea și diversitatea problemelor pe care le pune și mai ales prin caracterul aplicațiilor sale, s'a desprins de Hidrodinamica clasică și tinde să devină o disciplină de sine stătătoare. În aceste condițiuni, Aerodinamica s'a dezvoltat într'un mod considerabil în ultimele decenii și se poate spune că problemele importante dintr'un întins domeniu al ei sunt astăzi rezolvate.

Trebuie să precizăm dela început că cercetarea aerodinamică se desfășoară pe căi diverse, după cum este vorba de viteze mai mici decât viteza sunetului, de viteze apropiate de viteza sunetului sau de viteze mai mari decât aceea a sunetului. Acest interval de viteze necesită metode de cercetări diferite, deoarece în primul caz este vorba de fluide incompresibile, iar în celelalte două domenii, ale viteselor sonice și supersonice, intervin considerații legate de studiul fluidelor compresibile.

În lucrarea de față vom îmbrățișa un singur aspect, acela al viteselor curente și sperăm ca într'o viitoare lucrare să abordăm și domeniul viteselor mari, sonice și supersonice.

Bazele teoretice vor fi date deci de Mecanica fluidelor incompresibile și de aceea lucrarea cuprinde o recapitulare a rezultatelor fundamentale din Hidrodinamica clasică.

În tratarea subiectului propriu zis, punctul de plecare îl constituie teoria lui Jucovschi, despre care scriam următoarele în prefața lucrării noastre anterioare „Théorie et Tracés des profils d'ailes sustentatrices” publicată în 1928 în colaborare cu prof. Albert Toussaint :

„...Celelalte încercări făcute până în prezent pentru a explica rezultanta aerodinamică pe aripile sustentatoare sunt în desacord cu principiile generale ale Mecanicii Rătionale sau cu cele ale Hidrodinamicii. Teoria lui Jucovschi este singura care constituie o soluție aerodinamică acceptabilă și care este susceptibilă în acelaș timp de a fi extinsă la aripi de anvergură finită, ceace s'a făcut dealtfel cu ajutorul teoriei lui Prandtl”.

Dezvoltările făcute pe baza acestor teorii de către o pleiadă de iluștri savanți ca Ceaplăghin, Kármán, Glauert, Cocin, Villat, Betz, Golubev, Mises, Toussaint, Pistolesi, Birnbaum, Millikan, Necrasov, Milne-Thomson, Sedov, Munk, etc., au fixat solid cadrul Aerodinamicii moderne.

Într'un astfel de cadru am expus cele câteva capitole ale lucrării noastre, începând cu teoria aripii de anvergură infinită, unde am tratat, în toată

amploarea și sub toate aspectele ei, problema profilelor aerodinamice, cu aplicații directe în practica aeronautică.

Am dat deasemenea o dezvoltare cu totul deosebită teoriei aripilor de anvergură finită, reușind totdeodată să soluționăm în mod explicit o seamă de probleme legate de aplicațiile curente ale Aeronauticii, lucru ce a fost posibil prin utilizarea unor metode practice și fecunde.

Având în vedere interesul din ce în ce mai mare pe care-l capătă zborul în regim variat, am căutat să prezentăm și unele aspecte ale mișcării variate în jurul aripilor de avion.

În sfârșit, pentru a ține seama de dezvoltarea care s'a dat cercetărilor aerodinamice în laboratoare, datorită cărora asistăm de altfel la progresele uimitoare făcute astăzi în aviație, ultimul capitol tratează despre influența limitării vântului experimentale, prin pereți rigizi sau suprafețe libere, asupra rezultatelor încercărilor aerodinamice ale aripilor. În felul acesta, sperăm că am redat în părțile lor esențiale capitolele importante ale Aerodinamicii. Fără să fi alterat cu nimic rigoarea științifică, am încercat să aducem în fiecare problemă soluția corespunzătoare în vederea aplicațiilor practice și credem că am izbutit în mare măsură să atingem acest scop.

În dorința de a antrena cât mai multe elemente tinere în cercetarea științifică, atât dintre cei care cultivă matematicile aplicate, cât și dintre cei care vor cerceta mai departe aplicarea rezultatelor obținute, am căutat să adâncim analiza fenomenelor aerodinamice sub toate aspectele, utilizând în fiecare caz și metode corespunzătoare.

Sperăm să fi adus o contribuție reală în acest sens, în vederea promovării unor studii de utilitate indiscutabilă, atât din punct de vedere teoretic cât și din cel al aplicațiilor practice.

Înainte de a termina, țin să mulțumesc colaboratorilor mei, T. Oroveanu, St. Săvulescu, B. Horovitz și în mod special acestuia din urmă, pentru concursul pe care mi l-au dat la redactarea lucrării și la corectarea probelor.

E. Carafoli

CAPITOLUL I

RECAPITULAREA PRINCIPILOR ȘI TEOREMELOR FUNDAMENTALE ALE HIDRODINAMICII CLASICE

Înainte de a trece la Teoria aripilor sustentatoare vom face o scurtă expunere asupra principalelor rezultate ale Hidrodinamicii clasice și vom stabili formulele uzuale care au o aplicație imediată în problemele de Aerodinamică.

1. ECUAȚII ȘI TEOREME FUNDAMENTALE

1.1. Considerații preliminare

Mecanica fluidelor este știința care se ocupă cu echilibrul și mișcarea fluidelor, precum și cu acțiunea acestora asupra pereților înconjurători sau asupra corpurilor cufundate în ele.

Sub denumirea de fluide cuprindem lichidele și gazele. Cu toate că acestea prezintă caracteristici deosebite, condițiile generale ale mișcării sunt identice, cu singura rezervă că pentru gaze trebuie să se țină seama de compresibilitatea lor, atunci când vitezele curentului sau ale corpurilor cufundate depășesc anumite limite. Se dau adesea Mecanicii Fluidelor denumiri distincte. Astfel, de exemplu, Hidrodinamica privește fluidele incompresibile; Hidraulica este o denumire și mai restrânsă și privește în special apa și aplicațiile în legătură cu aceasta; Aerodinamica tratează fenomenele aerului și acțiunea acestuia asupra corpurilor care evoluează în aer.

Lichidele nu se opun deformației și iau forma vasului care le conține. Ele sunt practic incompresibile, nu au coeziune și în interiorul lor nu există decât eforturi de compresiune.

Gazele nu au nici o coeziune, sunt perfect compresibile și umplu întotdeauna rezervorul în care sunt conținute. În anumite condiții, când vitezele sunt destul de mici, se poate neglija compresibilitatea și, în acest caz, gazele în mișcare se comportă ca și lichidele.

1.1.1. Caracteristicile comune fluidelor. Fluidele au următoarele proprietăți comune, în ceea ce privește influența lor asupra mișcării :

1. Eforturile interioare sunt compresioni.

2. Eforturile asupra unei suprafețe de separație sunt perfect normale dacă fluidul este în repaus și sensibil normale dacă fluidul este în mișcare. În acest din urmă caz, într'adevăr, trebuie să se țină seamă de rezistența la alunecare datorită viscozității.

Ca urmare a acestor caracteristici, acțiunea reciprocă a celor două părți M_1 și M_2 ale unei mase M (fig. 1.1), separate prin suprafața σ , este o forță de compresie; prin urmare se poate face abstracție de masa M_1

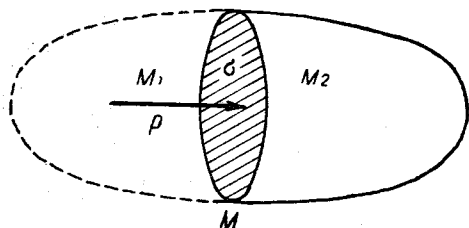


Fig. 1.1.

față de masa M_2 , dacă se înlocuiește acțiunea celei dintâi cu un sistem de presiuni p , sensibil normale pe σ și îndreptate către interiorul masei M_2 .

Dacă presiunile sunt perfect normale, adică dacă acțiunea tangențială la suprafață este nulă, fluidul este perfect sau ideal. Fluidele reale însă prezintă frecări interne datorite viscozității și acțiunile asupra supra-

feței σ au componente tangențiale, care în general nu sunt neglijabile.

În ceea ce urmează ne vom ocupa de fluidele perfecte și incompresibile precum și de fenomenele reale, legate de ele, care își găsesc explicația în legile mișcării acestor fluide.

1.1.2. Densitatea. Densitatea sau masa specifică este masa conținută în unitatea de volum. Densitatea variază în mod continuu și această proprietate ne conduce la principiul continuității masei. Totuși, în cazuri speciale, în anumite puncte ale lichidului apar discontinuități care dau naștere la cavitațiuni.

Densitatea se notează în general cu litera grecească ρ .

O altă noțiune, legată de densitate, este greutatea specifică, pe care o vom nota cu litera grecească γ și care este greutatea masei conținută în unitatea de volum. Dacă g este accelerația gravitației, există relația :

$$\gamma = \rho \cdot g.$$

Pentru lichide, densitatea și greutatea specifică sunt practic constante; pentru gaze, trebuie să se țină seama de variația lor în funcție de presiune, dacă aceasta prezintă variațiuni apreciabile.

1.1.3. Unități de măsură. În Mecanica Fluidelor se întrebuințează în general următoarele unități :

m = metrul, pentru lungimi,
kg = kilogramul, pentru forță,
s = secunda, pentru timp.

Densitatea și greutatea specifică vor fi reprezentate în funcție de aceste unități. Astfel, de exemplu, pentru apă la 4°C și pentru aer la 15°C și la presiunea atmosferică, vom avea respectiv :

$$a) \text{ pentru apă, } \gamma = 1000 \text{ kg/m}^3, \quad \rho = \frac{1000}{9,81} \approx 102 \text{ kg} \cdot \text{s}^2/\text{m}^4;$$

$$b) \text{ pentru aer, } \gamma = 1,229 \text{ kg/m}^3, \quad \rho = \frac{1,229}{9,81} \approx 0,125 \text{ kg} \cdot \text{s}^2/\text{m}^4.$$

1.1.4. Viscositatea. Acțiunea reciprocă a moleculelor fluide, care alunecă unele față de celelalte, este o forță tangențială, care se numește forță de frecare. Această proprietate a fluidelor reale se numește viscozitate.

Toate fluidele reale sunt mai mult sau mai puțin vâscoase. Fluidele lipsite de viscozitate sunt fictive: din această cauză ele se numesc fluide ideale sau perfecte, așa cum am arătat și mai sus.

1.1.5. Stare de mișcare. Se spune că un fluid se găsește în stare de mișcare dacă, la un moment dat, fiecare particulă posedă o viteză. Pentru a se defini mișcarea, trebuie să se identifice și să se urmărească aceste particule în lungul traiectoriilor lor: aceasta este metoda lui LAGRANGE. Totuși, adesea este mai comod să se reprezinte mișcarea determinându-se vitezele particulelor care trec în fiecare clipă printr'un punct determinat: aceasta este metoda lui EULER. În afară de cazul când se va face mențiune specială, vom întrebuința în cele ce urmează această metodă din urmă.

1.2. Ecuațiile generale

Fie \bar{V} viteza unei particule fluide, p și ρ presiunea și densitatea care domnesc în jurul acestei particule și \bar{f} forța exterioară raportată la unitatea de masă (fig. 1.2). Considerând mai departe un volum τ , limitat prin suprafața σ , acest volum se găsește în echilibru dinamic sub acțiunea forțelor următoare :

a) rezultanta forțelor de inerție,

$$(1.1) \quad \int_{\tau} \rho \frac{d\bar{V}}{dt} d\tau,$$

b) rezultanta forțelor exterioare,

$$(1.2) \quad \int_{\tau} \rho \bar{f} d\tau,$$

c) rezultanta presiunilor, care se poate scrie, ținând seamă de formula lui GAUSS,

$$(1.3) \quad \int_{\sigma} p \bar{n} d\sigma = - \int_{\tau} \text{grad } p d\tau,$$

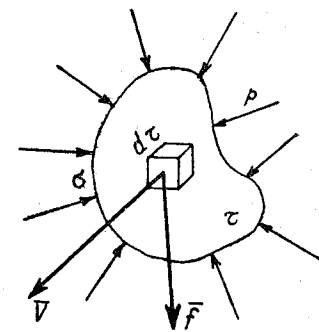


Fig. 1.2.

unde \bar{n} este vectorul unitar normal pe elementul $d\sigma$ al suprafeței, îndreptat spre interiorul fluidului.

Pentru echilibru, trebuie să scriem,

$$(1.4) \quad \int_{\tau} \rho \frac{d\bar{V}}{dt} d\tau = \int_{\tau} \rho \bar{f} d\tau - \int_{\tau} \text{grad } p d\tau,$$

de unde rezultă ecuația de mișcare:

$$(1.5) \quad \frac{d\bar{V}}{dt} = \bar{f} - \frac{1}{\rho} \text{grad } p.$$

Luând proiecțiile fiecărui vector pe cele trei axe de coordonate Ox , Oy , Oz , se obțin trei ecuații de forma următoare:

$$(1.6) \quad \begin{cases} \frac{du}{dt} = f_x - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x}, \\ \frac{dv}{dt} = f_y - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y}, \\ \frac{dw}{dt} = f_z - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z}, \end{cases}$$

unde u , v , w sunt componentele vitesei după aceleași axe și f_x , f_y , f_z respectiv componentele forței exterioare.

Vom avea deasemenea, remarcând că variația masei în unitatea de timp este egală cu fluxul de masă care traversează suprafața σ și întrebunțând relația bine cunoscută a lui GAUSS:

$$(1.7) \quad \int_{\tau} \frac{\partial \rho}{\partial t} d\tau = \int_{\sigma} \rho \bar{V} \times \bar{n} d\sigma = - \int_{\tau} \text{div} (\rho \bar{V}) d\tau,$$

de unde rezultă ecuația de continuitate:

$$(1.8) \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div} (\rho \bar{V}) = 0$$

sau mai departe, în notația carteziană:

$$(1.9) \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} = 0.$$

Dacă densitatea este constantă, se obține o expresie mai simplă:

$$(1.10) \quad \text{div } \bar{V} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0.$$

Pentru lichide compresibilitatea este neglijabilă și densitatea este prin urmare constantă. Pentru gaze, deasemenea, până la o anumită

limită a vitezei, se poate considera densitatea constantă; prin urmare, în acest caz se poate pune

$$(1.11) \quad \rho = \text{ct.}$$

Dacă vitezele devin mari, presiunile diferă sensibil dintr'un punct într'altul și densitatea variază deasemenea. Mișcările fiind rapide, legea de transformare este adiabatică:

$$(1.12) \quad \frac{p}{\rho^\kappa} = \text{ct.}$$

Această ecuație, ca și (1.11), se numește ecuația caracteristică sau ecuația fizică.

1.2.1. Transformarea ecuațiilor. Să considerăm viteza în fiecare punct, ea depinde de timp și de coordonatele punctului respectiv; prin urmare, se pot scrie pentru componentele u , v , w ale vitezei relațiile următoare:

$$(1.13) \quad \begin{cases} u = \frac{dx}{dt} = u(x, y, z, t), \\ v = \frac{dy}{dt} = v(x, y, z, t), \\ w = \frac{dz}{dt} = w(x, y, z, t). \end{cases}$$

În timpul deplasării pe traiectorie viteza particulei variază, pe de o parte în funcție de timp, iar pe de altă parte în funcție de noua poziție în care se găsește, după trecerea timpului elementar dt ; componentele accelerației se vor putea deci scrie succesiv, după cum urmează:

$$(1.14) \quad \begin{aligned} \frac{du}{dt} &= \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} u + \frac{\partial u}{\partial y} v + \frac{\partial u}{\partial z} w = \\ &= \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{u^2 + v^2 + w^2}{2} \right) + w \left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \right) - v \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) \end{aligned}$$

și alte două expresii analoge privind pe v și w .

Fie \bar{i} , \bar{j} , \bar{k} , vectorii unitari după Ox , Oy , Oz și să notăm cu $\bar{\Omega}$ rotorul lui \bar{V} ; se va putea scrie relația cunoscută:

$$(1.15) \quad \bar{\Omega} = \text{rot } \bar{V} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ u & v & w \end{vmatrix} = \\ = \bar{i} \left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \right) + \bar{j} \left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \right) + \bar{k} \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right).$$

Remarcând mai departe că ultimii doi termeni din membrul al doilea al expresiei (1.14) reprezintă proiecția pe Ox a produsului vectorial $\overline{\Omega} \wedge \overline{V}$ se poate deduce ușor expresia vectorială a accelerației:

$$(1.16) \quad \frac{d\overline{V}}{dt} = \frac{\partial \overline{V}}{\partial t} + \text{grad} \left(\frac{1}{2} V^2 \right) + \overline{\Omega} \wedge \overline{V}.$$

Se numește vârtej un vector $\overline{\omega}$, care reprezintă rotația instantanee a particulei în punctul considerat (după STOKES și HELMHOLTZ) și care este egal cu jumătate din rot \overline{V} ($\overline{\omega} = \frac{1}{2} \text{rot } \overline{V}$); dar pentru a simplifica scrierea, în afară de vreo mențiune specială, vom da aceeași denumire vectorului $\overline{\Omega} = \text{rot } \overline{V}$.

Presupunând mai departe că forțele exterioare derivă dintr'o funcțiune de forțe:

$$(1.17) \quad \overline{f} = \text{grad } U$$

și punând pe de altă parte, după relația (1.12),

$$(1.17 \text{ bis}) \quad P = \int \frac{dp}{\rho} = \frac{\kappa}{\kappa-1} \cdot \frac{p}{\rho},$$

se poate scrie, în cele din urmă, în locul ecuației de mișcare sub forma (1.5), următoarea expresie:

$$(1.18) \quad \frac{\partial \overline{V}}{\partial t} + \overline{\Omega} \wedge \overline{V} + \text{grad} \left(P + \frac{1}{2} V^2 - U \right) = 0,$$

care devine în cazul mișcării permanente:

$$(1.18 \text{ bis}) \quad \overline{\Omega} \wedge \overline{V} + \text{grad} \left(P + \frac{1}{2} V^2 - U \right) = 0.$$

1.2.2. Linie de curent. Linie de vârtej. Linia, a cărei tangentă într'un punct oarecare este paralelă cu viteza în acelaș punct, se numește linie de curent. Ecuațiile diferențiale ale liniilor de curent se deduc direct din definiția lor:

$$(1.19) \quad \frac{dx}{u} = \frac{dy}{v} = \frac{dz}{w}.$$

În mod analog se numește linie de vârtej, linia care este tangentă în toate punctele sale la vârtejurile corespunzătoare. Notând cu λ, μ, γ proiecțiile vectorului $\overline{\Omega}$, se pot scrie pentru ecuațiile diferențiale ale liniilor de vârtej următoarele relații:

$$(1.20) \quad \frac{dx}{\lambda} = \frac{dy}{\mu} = \frac{dz}{\gamma}.$$

Fie σ_c o secțiune oarecare; liniile de curent care trec prin această secțiune formează un tub de curent (fig. 1.3 a). Deasemenea, vârtejurile care trec printr'o secțiune σ_t formează un tub de vârtejuri (fig. 1.3 b).

1.2.3. Mișcare variată și mișcare permanentă. Viteza într'un punct oarecare poate varia în funcție de timp sau poate fi constantă: în primul caz mișcarea este variată sau nepermanentă, în al doilea caz mișcarea este permanentă sau staționară.

1.2.4. Mișcare irotatională. Potențial de viteze. Să presupunem că, în fiecare punct al spațiului fluid, vârtejul este nul: mișcarea se numește în acest caz irotatională și expresia (1.15) a vârtejului este egală cu zero.

Vom putea scrie prin urmare:

$$(1.21) \quad \frac{\partial w}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial z},$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\partial w}{\partial x}, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial y},$$

de unde rezultă, notând cu $\varphi(x, y, z, t)$ o funcție oarecare de x, y, z și t (care se numește potențialul de viteze), relațiile următoare:

$$(1.22) \quad u = \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad v = \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \quad w = \frac{\partial \varphi}{\partial z}$$

sau mai departe, în notații vectoriale

$$(1.22 \text{ bis}) \quad \overline{V} = \text{grad } \varphi.$$

Aplicând ecuația de continuitate, se găsește:

$$(1.23) \quad \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = \Delta \varphi = 0;$$

urmează că funcția φ este o funcție armonică.

Să considerăm mai departe o linie închisă s cuprinsă în domeniul fluid; parcurgând această linie în acelaș sens, funcția φ poate lua, într'un punct oarecare, aceeași valoare, la plecare și la sosire: în acest caz, φ este o funcție uniformă. Dacă, dimpotrivă, valorile sunt diferite, funcția φ se numește multiformă sau politropă.

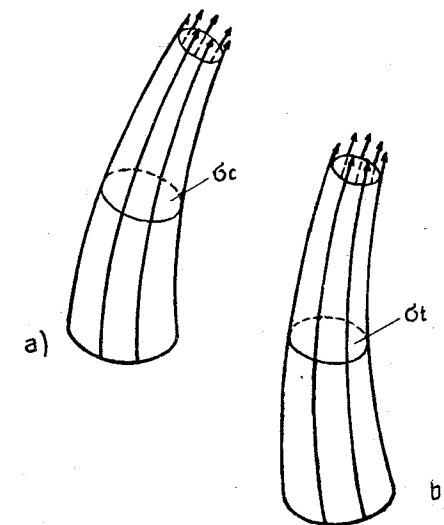


Fig. 1.3 a și 1.3 b.

1.2.5. Condițiile la limite. În apropierea pereților rigizi, care limitează fluidul, sau la suprafața corpurilor cufundate imobile, fluidul se scurge tangențial, pereții sau suprafața formând astfel o rețea de linii de curent. Aceste condiții de scurgere, în apropierea pereților sau la suprafața unui corp cufundat, se numesc condițiile la limite. Dacă corpul este în mișcare într'un fluid mobil, viteza particulei în contact cu un element al suprafeței are aceeași componentă după normală (notată cu V_n), ca și aceea a elementului însăși, după aceeași normală, fie v_n ; există deci relația:

$$(1.24) \quad V_n = v_n .$$

În cazul unei mișcări cu potențial de viteze, această condiție se exprimă printr'o relație analoagă,

$$(1.25) \quad \frac{\partial \varphi}{\partial n} = v_n .$$

Dacă, așa cum am presupus la început, corpul este imobil, relația (1.25) devine:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial n} = 0 .$$

1.2.6. Conexiune. Un volum se numește simplu conex atunci când o linie închisă trasată în interior se poate reduce la un punct prin deformare continuă, fără a ieși din interiorul volumului. Astfel de exemplu, volumul unui rezervor oarecare, fără obstacole în interior, este cu conexiune simplă, în timp ce volumul care conține o coloană ce se întinde de la un perete la celălalt, este cu conexiune dublă, deoarece linie închisă care înconjoară coloana nu se poate reduce la un punct fără a o tăia. Dacă există mai multe coloane, volumul va fi cu conexiune multiplă.

1.3. Ecuația presiunii

Să revenim la ecuația de mișcare sub forma (1.18) și să efectuăm produsul scalar al fiecărui termen printr'o deplasare elementară $d\bar{r}$, unde r este raza vectorie a punctului considerat față de origine; vom avea:

$$(1.26) \quad \frac{\partial \bar{V}}{\partial t} \times d\bar{r} + (\bar{\Omega} \wedge \bar{V}) \times d\bar{r} + \text{grad} \left(P + \frac{1}{2} V^2 - U \right) \times d\bar{r} = 0 .$$

Să presupunem mai departe că deplasarea $d\bar{r}$ este luată dealungul unei linii de curent sau dealungul unei linii de vârtej și că mișcarea este permanentă ($\frac{\partial \bar{V}}{\partial t} = 0$); remarcând că vectorul $(\bar{\Omega} \wedge \bar{V})$ este normal pe vitesă și pe vârtej în același timp, se găsește în acest caz formula lui BERNOULLI:

$$(1.27) \quad P + \frac{1}{2} V^2 - U = C ,$$

unde constanta C este aceeași pe o linie de curent sau pe o linie de vârtej. Sub această formă formula nu are aplicație decât dacă liniile de curent sosesc dintr'o regiune unde constanta C este aceeași.

În practică se utilizează frecvent această formulă pentru mișcările irotaționale ($\bar{\Omega} = 0$). În acest caz, există un potențial de viteze φ și, dacă remarcăm că membrul al doilea al relației (1.26) este nul și că avem pe de altă parte:

$$(1.28) \quad \frac{\partial \bar{V}}{\partial t} \times d\bar{r} = \text{grad} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} \right) \times d\bar{r} = d \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} \right) ,$$

se obține formula lui LAGRANGE:

$$(1.29) \quad \frac{\partial \varphi}{\partial t} + P + \frac{1}{2} V^2 - U = C ,$$

care se aplică la mișcările nepermanente și în care constanta C este variabilă cu timpul. Ea ar putea fi înglobată de altfel în primul termen al membrului întâi.

După felul aplicațiilor, formula precedentă va fi pusă sub diferite forme:

a) Pentru lichide, punând pentru funcția de forțe

$$(1.30) \quad U = -gz$$

și remarcând că densitatea este constantă, se poate scrie

$$(1.31) \quad \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{p}{\rho} + \frac{1}{2} V^2 + gz = \text{ct.} ,$$

pentru mișcarea nepermanentă și

$$(1.32) \quad \frac{p}{\rho} + \frac{1}{2} V^2 + gz = \text{ct.} ,$$

pentru mișcarea permanentă.

b) Pentru gaze, se poate neglija greutatea proprie și în cazul mișcărilor lente se poate considera și densitatea constantă; în acest caz ecuațiile precedente devin respectiv:

$$(1.33) \quad \begin{aligned} \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{p}{\rho} + \frac{1}{2} V^2 &= \text{ct.} , \\ \frac{p}{\rho} + \frac{1}{2} V^2 &= \text{ct.} \end{aligned}$$

c) În fine, pentru mișcările rapide ale gazelor, trebuie să scriem deasemenea, ținând seamă de (1.17 bis):

$$(1.34) \quad \begin{aligned} \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{\kappa}{\kappa-1} \cdot \frac{p}{\rho} + \frac{1}{2} V^2 &= \text{ct.} , \\ \frac{\kappa}{\kappa-1} \cdot \frac{p}{\rho} + \frac{1}{2} V^2 &= \text{ct.} \end{aligned}$$

Pentru aplicațiile viitoare vom utiliza în special formulele (1.33).

1.4. Teoremele circulației

Se numește circulație travaliul vitesei dealungul unei linii închise (fig. 1.4):

$$(1.35) \quad \Gamma = \int_s \bar{V} \times d\bar{r} = \int_s u dx + v dy + w dz.$$

Dacă mișcarea derivă dintr'un potențial de viteze, vom avea

$$(1.36) \quad \Gamma = \int_s \frac{\partial \varphi}{\partial x} dx + \frac{\partial \varphi}{\partial y} dy + \frac{\partial \varphi}{\partial z} dz = (\varphi)_s,$$

de unde se vede că circulația este nulă când potențialul φ este uniform.

1.4.1. Teorema lui Stokes. Circulația dealungul unei linii închise s este egală cu fluxul de vârtejuri ce traversează o suprafață oarecare care se sprijină pe s (fig. 1.4); avem adică:

$$(1.37) \quad \Gamma = \int_s \bar{V} \times d\bar{r} = \int_\sigma \bar{\Omega} \times \bar{n} d\sigma,$$

unde \bar{n} este vectorul unitar normal pe suprafață. Pentru a demonstra această

teoremă să descompunem suprafața arbitrară σ într'o infinitate de suprafețe triunghiulare $d\sigma$, având cele trei laturi, respectiv, paralele cu cele trei plane ortogonale ale triedrului de referință $OXYZ$ (fig. 1.5). Intersecțiile planelor care trec prin fiecare latură și sunt paralele cu planele XOY , YOZ , ZOY formează un nou triedru $0xyz$ paralel cu primul. În punctul 0 viteza este \bar{V} și în mijlocul fiecărei laturi a triunghiului elementar, în 1, 2, 3, vom considera vitezele medii \bar{V}_1 , \bar{V}_2 , \bar{V}_3 :

$$(1.38) \quad \begin{cases} \bar{V}_1 = \bar{V} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \bar{V}}{\partial x} dx + \frac{\partial \bar{V}}{\partial y} dy \right) \\ \bar{V}_2 = \bar{V} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \bar{V}}{\partial y} dy + \frac{\partial \bar{V}}{\partial z} dz \right) \\ \bar{V}_3 = \bar{V} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \bar{V}}{\partial z} dz + \frac{\partial \bar{V}}{\partial x} dx \right) \end{cases}$$

Dacă se ia circulația dealungul laturilor triunghiului în acelaș sens pozitiv, vom avea, înlocuind în (1.38) vectorii \bar{V}_i prin cele trei proiecții ale

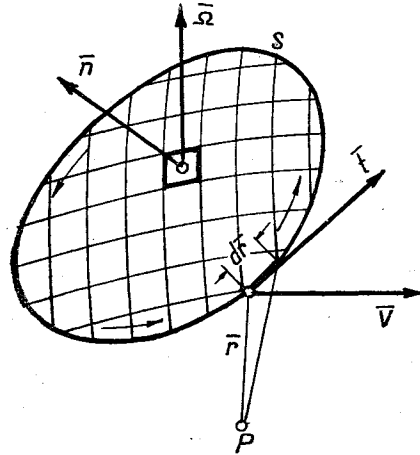


Fig. 1.4.

lor, u_i , v_i , w_i :

$$(1.39) \quad d\Gamma = -u_1 dx + v_1 dy - v_2 dy + w_2 dz - w_3 dz + u_3 dx = \\ = \left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \right) \frac{dy dz}{2} + \left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \right) \frac{dz dx}{2} + \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) \frac{dx dy}{2} = \\ = (\lambda \alpha + \mu \beta + \nu \gamma) d\sigma = \bar{\Omega} \times \bar{n} d\sigma,$$

unde α , β , γ sunt cosinusurile directoare ale vectorului unitar \bar{n} . Făcând suma circulațiilor elementare, influența laturilor interioare se anulează reciproc și nu rămân decât laturile exterioare care formează linia s (fig. 1.4); rezultă formula (1.37) care se poate scrie deasemenea în notații carteziene:

$$(1.39 \text{ bis}) \quad \Gamma = \\ = \int_s u dx + v dy + w dz = \\ = \int_\sigma (\lambda \alpha + \mu \beta + \nu \gamma) d\sigma.$$

1.4.2. Teorema lui Kelvin. Circulația dealungul unei linii închise nu variază cu timpul, vom avea

$$(1.40) \quad \frac{d\Gamma}{dt} = 0.$$

Pentru a demonstra această teoremă, se pornește dela ecuația mișcării sub forma (1.5) și se înmulțește fiecare membru cu un element $d\bar{r}$ al liniei închise s ; presupunând mai departe că forțele exterioare derivă dintr'un potențial U , așa cum am admis mai înainte, se poate scrie:

$$(1.41) \quad \frac{d\bar{V}}{dt} \times d\bar{r} = \frac{d}{dt} (\bar{V} \times d\bar{r}) - \bar{V} \frac{d}{dt} (d\bar{r}) = \frac{d}{dt} (d\Gamma) - \bar{V} \times d\bar{V} = \\ = \text{grad} (U - P) \times d\bar{r}^* ,$$

*) Este ușor de văzut că avem succesiv:

$$(1.41 \text{ bis}) \quad \frac{d}{dt} (\bar{r} + d\bar{r}) - \frac{d}{dt} (\bar{r}) = \frac{d}{dt} (d\bar{r}) = \bar{V} + d\bar{V} - \bar{V} = d\bar{V}.$$

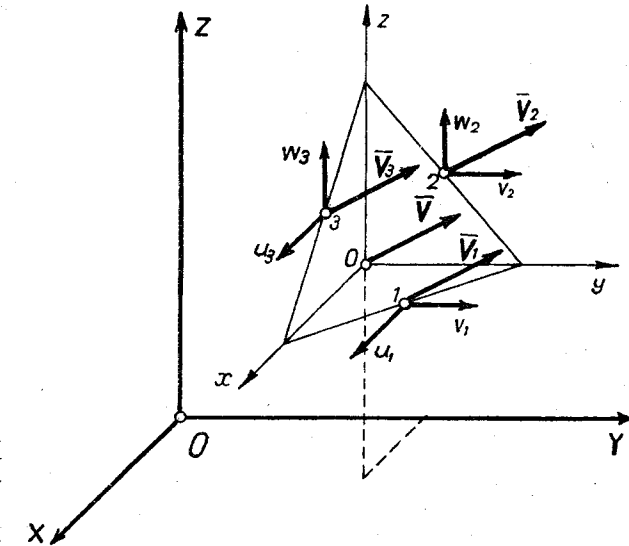


Fig. 1.5.

de unde rezultă, prin integrare, ținându-se seama de faptul că funcțiile U, P, V^2 sunt uniforme, relația căutată :

$$(1.42) \quad \frac{d\Gamma}{dt} = \int_s \text{grad} (U - P) \times d\bar{r} + \int_s \bar{V} \times d\bar{V} = \left(U - P + \frac{1}{2} V^2 \right)_s = 0.$$

De aci se deduc imediat câteva consecințe importante : dacă la un moment dat există un potențial de viteze, vârtejul este nul în toate punctele fluidului și circulația în jurul unui contur închis va fi deasemenea nulă și va rămâne astfel nulă un timp indefinit, precum și vârtejul. Din această cauză mișcarea va fi determinată în orice clipă de un potențial de viteze. Și mai departe : orice mișcare pornită din repaos va fi determinată întotdeauna de un potențial de viteze.

1.5. Teorema mișcării impulsive

Să presupunem că un corp cufundat într'un fluid oarecare capătă o mișcare bruscă, ce se efectuează într'un timp foarte scurt $\Delta t = t_1 - t_0$; dacă integrăm ecuația de mișcare în intervalul acesta de timp remarcând, de altfel că forța exterioară fiind finită termenul respectiv este neglijabil, rezultă :

$$(1.43) \quad \int_0^1 \frac{d\bar{V}}{dt} dt = \bar{V}_1 - \bar{V}_0 = \Delta \bar{V} = \int_0^1 \bar{f} dt - \int_0^1 \frac{1}{\rho} \text{grad} p dt = \\ = - \int_0^1 \text{grad} P dt = - \text{grad} P',$$

de unde se vede că și creșterea $\Delta \bar{V}$ a vitezei derivă dintr'un potențial de viteze. Se poate explica în felul acesta nașterea mișcării pornită din repaos. Intr'adevăr, în fiecare interval de timp Δt , viteza suplimentară care se naște în urma mișcării unui corp cufundat, derivă dintr'un potențial de viteze și fluidul trece, succesiv, din starea de repaos în starea de mișcare potențială.

1.6. Teorema energiei cinetice

Să considerăm o mișcare determinată de potențialul φ ($\bar{V} = \text{grad} \varphi$) și să remarcăm că se poate scrie în cazul unui fluid incompresibil (1.10) :

$$(1.44) \quad \text{div} (\varphi \bar{V}) = \varphi \text{div} \bar{V} + \text{grad} \varphi \times \bar{V} = V^2.$$

Să calculăm acum energia cinetică a fluidului conținut în volumul τ ; vom avea, notând cu σ suprafața care limitează fluidul la exterior (pereții rezervorului) sau la interior (suprafața corpurilor cufundate) :

$$(1.45) \quad E = \frac{\rho}{2} \int_{\tau} V^2 d\tau = \frac{\rho}{2} \int_{\tau} \text{div} (\varphi \bar{V}) d\tau = - \frac{\rho}{2} \int_{\sigma} \varphi \bar{V} \times \bar{n} d\sigma.$$

Dacă mișcarea derivă dintr'un potențial uniform, vom avea :

$$(1.46) \quad \bar{V} \times \bar{n} = V_n = \frac{\partial \varphi}{\partial n}.$$

unde V_n este componenta normală pe suprafață, care este nulă când pereții rezervorului sunt fiși sau corpurile cufundate imobile. Ținând seama de această relație, putem scrie în cele din urmă, în cazul când corpurile cufundate sunt în mișcare, expresia energiei cinetice sub o formă simplă :

$$(1.47) \quad E = - \frac{\rho}{2} \int_{\sigma} \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial n} d\sigma.$$

Pentru mișcarea născută dintr'o simplă translație a corpului cufundat, această formulă are o interpretare interesantă. Intr'adevăr, fie V_0 viteza de translație; este evident că se poate pune

$$(1.48) \quad \varphi = V_0 \varphi_0, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial n} = V_0 \frac{\partial \varphi_0}{\partial n}$$

și prin urmare,

$$(1.49) \quad E = - \frac{\rho}{2} V_0^2 \int_{\sigma} \varphi_0 \frac{\partial \varphi_0}{\partial n} d\sigma.$$

Se vede că energia cinetică în acest caz este egală cu aceea produsă de un corp de masă

$$(1.50) \quad m = - \rho \int_{\sigma} \varphi_0 \frac{\partial \varphi_0}{\partial n} d\sigma,$$

care se deplasează în spațiu cu o viteză V_0 . Pentru acest motiv valoarea exprimată de integrala (1.50) se numește *masă aparentă*.

În afară de mișcarea cu potențial uniform născută de un corp care se deplasează într'un fluid, poate să existe o altă mișcare potențială, pentru care componenta vitezei după normala la suprafață să fie nulă. Acest potențial nu poate fi decât multiform, deoarece alt potențial uniform satisface condiția (1.25) și este, prin urmare, unic.

Dacă χ este potențialul multiform, vom avea la suprafața corpului condiția :

$$(1.51) \quad \frac{\partial \chi}{\partial n} = 0$$

și integrala (1.47) efectuată pe suprafața σ ar fi nulă, cu toate că în fluid există mișcare. Pentru a scăpa de acest paradox, să trasăm o suprafață σ' între corp și pereții rezervorului, astfel ca în fluidul cuprins între suprafețele σ și σ' , potențialul χ să fie uniform (fig. 1.6). Într'un punct pe suprafața σ' , potențialul χ are două valori diferite după cum punctul este așezat pe o față (P_1) sau pe cealaltă (P_2). Formula (1.47) a energiei cinetice este încă valabilă dar trebuie să se adauge la pereții rezervorului și cele două fețe ale suprafeței σ' (σ'_1 și σ'_2); cum pe de altă parte integrala (1.47) este nulă pe σ , nu rămâne decât

$$(1.52) \quad E' = - \frac{\rho}{2} \int_{\sigma'_1 + \sigma'_2} \chi \frac{\partial \chi}{\partial n} d\sigma.$$

Ne putem da ușor seamă că această integrală nu este nulă. Într'adevăr, admitând că perioada potențialului multiform este Γ adică valoarea lui χ se mărește cu Γ ori de câte ori se traversează σ' urmându-se linia s în acelaș sens, expresia precedentă ia forma

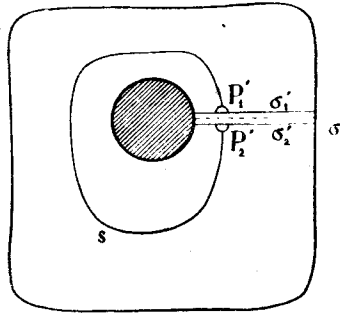


Fig. 1.6.

$$(1.53) \quad E' = -\frac{\rho}{2} \Gamma \int_{\sigma_1' + \sigma_2'} \frac{\partial \chi}{\partial n} d\sigma,$$

care este diferită de zero.

1.7. Teorema impulsului

Să integrăm ecuația (1.5) a mișcării, după ce am înmulțit cei doi membri cu ρ :

$$(1.54) \quad \int_{\tau} \rho \frac{d\bar{V}}{dt} d\tau = \int_{\tau} \rho \bar{f} d\tau - \int_{\tau} \text{grad } p d\tau$$

și să notăm cu \bar{I} , \bar{F} și \bar{P} respectiv impulsul, rezultanta forțelor exterioare și rezultanta presiunilor:

$$(1.55) \quad \bar{I} = \int_{\tau} \bar{V} \rho d\tau, \quad \bar{F} = \int_{\tau} \rho \bar{f} d\tau, \quad -\bar{P} = \int_{\tau} \text{grad } p d\tau = - \int_{\sigma} p \bar{n} d\sigma;$$

vom avea:

$$(1.56) \quad \frac{d\bar{I}}{dt} = \bar{F} + \bar{P}.$$

Pentru a calcula derivata impulsului, care este egală cu rezultanta forțelor de inerție, să considerăm, pentru simplificare, mișcarea permanentă a unui fluid incompresibil; vom putea scrie, ținând seama de ecuația de continuitate,

$$(1.57) \quad \rho \frac{d\bar{V}}{dt} = \rho \left(\frac{\partial \bar{V}}{\partial x} u + \frac{\partial \bar{V}}{\partial y} v + \frac{\partial \bar{V}}{\partial z} w \right) = \rho \left[\frac{\partial (\bar{V}u)}{\partial x} + \frac{\partial (\bar{V}v)}{\partial y} + \frac{\partial (\bar{V}w)}{\partial z} \right],$$

de unde rezultă:

$$(1.58) \quad \frac{d\bar{I}}{dt} = \rho \int_{\tau} \frac{d\bar{V}}{dt} d\tau = \rho \int_{\tau} \left[\frac{\partial (\bar{V}u)}{\partial x} + \frac{\partial (\bar{V}v)}{\partial y} + \frac{\partial (\bar{V}w)}{\partial z} \right] d\tau = -\rho \int_{\sigma} \bar{V} (\bar{V} \times \bar{n}) d\sigma.$$

Notând mai departe cu dQ debitul elementar de volum,

$$(1.59) \quad dQ = (\bar{V} \times \bar{n}) d\sigma,$$

se obține în cele din urmă formula lui EULER:

$$(1.60) \quad \frac{d\bar{I}}{dt} = -\rho \int_{\sigma} \bar{V} dQ = \bar{F} + \bar{P}.$$

În notații carteziene se va putea scrie deasemenea, notând cu α, β, γ cosinusurile directoare ale normalei și înlocuind dQ prin

$$(1.61) \quad dQ = (u\alpha + v\beta + w\gamma) d\sigma,$$

expresia derivatei impulsului după axa Ox :

$$(1.62) \quad \frac{dI_x}{dt} = -\rho \int_{\sigma} u dQ = -\rho \int_{\sigma} u (u\alpha + v\beta + w\gamma) d\sigma = F_x + P_x$$

și încă două, după axele Oy și Oz , care se obțin foarte ușor:

$$(1.62 \text{ bis}) \quad \frac{dI_y}{dt} = -\rho \int_{\sigma} v dQ = F_y + P_y, \quad \frac{dI_z}{dt} = -\rho \int_{\sigma} w dQ = F_z + P_z.$$

1.7.1. Momentul impulsului. Fie \bar{r} distanța volumului elementar $d\tau$ față de origine, pe care o vom nota cu O ; impulsul elementar fiind

$$(1.63) \quad d\bar{I} = \bar{V} \rho d\tau,$$

este ușor de văzut că momentul elementar al impulsului va fi

$$(1.64) \quad d\bar{\omega} = \bar{r} \wedge d\bar{I} = \bar{r} \wedge \bar{V} \rho d\tau$$

și prin urmare, considerând densitatea constantă

$$(1.65) \quad \bar{\omega} = \int_{\tau} \bar{r} \wedge d\bar{I} = \rho \int_{\tau} \bar{r} \wedge \bar{V} d\tau.$$

Momentul forțelor de inerție este egal cu momentul forțelor exterioare \bar{K}_F și cu acel datorit presiunilor care se exercită pe suprafața σ , \bar{K}_P ; vom scrie, prin urmare,

$$(1.66) \quad \rho \int_{\tau} \bar{r} \wedge \frac{d\bar{V}}{dt} d\tau = \frac{d\bar{\omega}}{dt} = \bar{K}_F + \bar{K}_P.$$

Pentru a calcula primul membru, vom scrie observând că \bar{r} nu variază cu timpul:

$$(1.67) \quad \bar{r} \wedge \frac{d\bar{V}}{dt} \rho d\tau = \frac{d(\bar{r} \wedge \bar{V})}{dt} \rho d\tau = \frac{d\bar{m}}{dt} \rho d\tau,$$

unde am notat cu \bar{m} , pentru a simplifica scrierea, momentul vitesei față de origine :

$$(1.68) \quad \bar{m} = \bar{r} \wedge \bar{V}.$$

Ținând seama de ecuația de continuitate, putem scrie mai departe

$$(1.69) \quad \frac{d\bar{m}}{dt} = \frac{\partial \bar{m}}{\partial x} u + \frac{\partial \bar{m}}{\partial y} v + \frac{\partial \bar{m}}{\partial z} w = \frac{\partial (\bar{m}u)}{\partial x} + \frac{\partial (\bar{m}v)}{\partial y} + \frac{\partial (\bar{m}w)}{\partial z}$$

și prin analogie cu cazul precedent, vom putea scrie succesiv

$$(1.70) \quad \frac{d\bar{\omega}}{dt} = \rho \int_{\tau} \bar{r} \wedge \frac{d\bar{V}}{dt} d\tau = \rho \int_{\tau} \left[\frac{\partial (\bar{m}u)}{\partial x} + \frac{\partial (\bar{m}v)}{\partial y} + \frac{\partial (\bar{m}w)}{\partial z} \right] d\tau = \\ = - \rho \int_{\sigma} \bar{m} (\bar{V} \times \bar{n}) d\sigma,$$

de unde rezultă în cele din urmă, notând din nou $(\bar{V} \times \bar{n}) d\sigma = dQ$, ecuația momentului impulsului :

$$(1.71) \quad \frac{d\bar{\omega}}{dt} = - \rho \int_{\sigma} \bar{r} \wedge \bar{V} dQ = \bar{K}_F + \bar{K}_P.$$

Să descompunem momentele \bar{K}_F și \bar{K}_P după cele trei axe :

$$(1.72) \quad \begin{cases} \bar{K}_F = \bar{i} L_F + \bar{j} M_F + \bar{k} N_F, \\ \bar{K}_P = \bar{i} L_P + \bar{j} M_P + \bar{k} N_P, \end{cases}$$

expresia (1.71) se va scrie în notații carteziene, după axa Ox , sub forma

$$(1.73) \quad \frac{d\bar{\omega}_x}{dt} = - \rho \int_{\sigma} (yw - zw) dQ = L_F + L_P$$

și alte două asemănătoare, care se obțin prin permutări circulare.

2. ELEMENTE DIN TEORIA VÂRTEJURILOR

Aerodinamica aripilor de avion se bazează pe teoria vârtejurilor. Din această cauză, este necesar să expunem mai jos proprietățile principale ale vârtejurilor și să punem în evidență rezultatele cele mai însemnate care au o aplicație imediată la studiul suprafețelor portante.

2.1. Considerațiuni generale

Am definit în paragraful precedent un vector $\bar{\Omega} = \text{rot } \bar{V}$, ale cărui proiecțiuni pe axele de referință Ox , Oy , Oz sunt respectiv :

$$(2.1) \quad \lambda = \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}, \quad \mu = \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}, \quad \nu = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}.$$

Se demonstrează că acest vector este egal cu dublul rotației instantanee a unei particule constituite, în jurul unui punct considerat. Această rotație instantanee se numește (вихрь în rusă, tourbillon în franceză, Wirbel în germană, vortex în engleză) și se notează cu $\bar{\omega}$:

$$(2.2) \quad \bar{\omega} = \frac{1}{2} \bar{\Omega}.$$

Totuși, pentru a evita coeficientul $1/2$ și pentru a simplifica astfel formulele, vom numi vârtej vectorul $\bar{\Omega}$ însuși, afară de cazurile special menționate.

Este ușor de văzut că, după relațiile (2.1), divergența vârtejurii este nulă :

$$(2.3) \quad \text{div } \bar{\Omega} = \frac{\partial \lambda}{\partial x} + \frac{\partial \mu}{\partial y} + \frac{\partial \nu}{\partial z} = 0.$$

Fie σ secțiunea unui tub de vârtej; fluxul de vârtejuri care traversează suprafața σ se numește intensitatea tubului de vârtej :

$$(2.4) \quad \Gamma = \int_{\sigma} \bar{\Omega} \times \bar{n} d\sigma.$$

Această intensitate este constantă în lungul tubului. Într'adevăr, vârtejurile fiind tangente la suprafață, circulația pe o linie închisă $s_2 s' s_1 s''$ este nulă (fig. 2.1); de aci rezultă, dacă remarcăm că pe s' și s'' travaliul vitesei se anulează reciproc, că circulațiile în lungul liniilor s_1 și s_2 sunt egale :

$$(2.5) \quad \Gamma_1 = \Gamma_2 = \Gamma.$$

Se deduce mai departe că tubul de vârtej nu se termină brusc ci se închide pe el însuși, sub formă de inel de vârtej, sau se întinde la infinit, sau în sfârșit se reazemă cu extremitățile sale pe o suprafață oarecare.

Se numește tub infinit de subțire un tub de vârtej de secțiune infinit mică $d\sigma$ a cărui intensitate este :

$$(2.6) \quad \Gamma = \Omega d\sigma.$$

2.2. Câmpul de viteze datorit unui sistem de vârtejuri

Dacă se cunoaște distribuția de viteze pe toată întinderea unui fluid în mișcare, se poate ușor determina vectorul vârtej, în fiecare punct, după relațiile (2.1).

Invers, dacă se dă distribuția de vârtejuri, se poate deduce câmpul de viteze.

Fie, pentru aceasta, un vector \bar{W} astfel ca

$$(2.7) \quad \text{div } \bar{W} = 0,$$

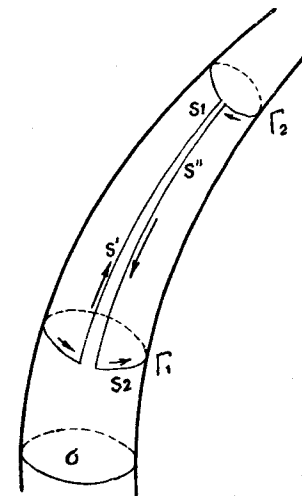


Fig. 2.1.

se poate scrie totdeauna

$$(2.8) \quad \bar{V} = \text{rot } \bar{W}$$

și, după (2.3),

$$(2.9) \quad \text{div } \bar{V} = \text{div} (\text{rot } \bar{W}) = 0.$$

După o formulă din calculul vectorial, vom avea mai departe :

$$(2.10) \quad \nabla^2 \bar{W} = \frac{\partial^2 \bar{W}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \bar{W}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \bar{W}}{\partial z^2} = \text{grad div } \bar{W} - \text{rot} (\text{rot } \bar{W}),$$

de unde rezultă, în cele din urmă,

$$(2.11) \quad \nabla^2 \bar{W} = -\bar{\Omega}.$$

Această ecuație diferențială are o analogie perfectă cu ecuația potențialului maselor atractive :

$$(2.12) \quad \nabla^2 U = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = 4\pi\rho,$$

unde U este potențialul și ρ densitatea masei atractive.

Soluția acestei ultime ecuații este bine cunoscută; într'adevăr, într'un punct oarecare, expresia potențialului va avea o formă simplă :

$$(2.13) \quad U = \int_{\tau} \frac{\rho}{r} d\tau,$$

unde r este distanța volumului elementar $d\tau$ față de punctul considerat.

Prin analogie, se va putea scrie ușor, dacă τ reprezintă spațiul de vârtejuri,

$$(2.14) \quad \bar{W} = -\frac{1}{4\pi} \int_{\tau} \frac{\bar{\Omega}}{r} d\tau,$$

de unde rezultă :

$$(2.15) \quad \bar{V} = \text{rot } \bar{W} = -\frac{1}{4\pi} \text{rot} \left(\int_{\tau} \frac{\bar{\Omega}}{r} d\tau \right).$$

Să remarcăm acum că spațiul de vârtejuri se poate descompune în inele de vârtej infinit de subțiri; pe un astfel de inel de lungime s vom avea (fig. 2.2) :

$$(2.16) \quad \bar{\Omega} d\tau = \bar{\Omega} d\sigma ds = \bar{\Omega} d\sigma \cdot d\bar{r} = d\Gamma \cdot d\bar{r}$$

De aci se deduce

$$(2.17) \quad \bar{W} = -\frac{1}{4\pi} \sum d\Gamma \int_s \frac{d\bar{r}}{r},$$

în care suma se extinde asupra tuturor inelelor de vârtej astfel descompuse; prin urmare, remarcând mai departe că avem succesiv :

$$(2.18) \quad \text{rot} \frac{d\bar{r}}{r} = \frac{1}{r} \text{rot} (d\bar{r}) + \text{grad} \frac{1}{r} \wedge d\bar{r} = -\frac{\bar{r} \wedge d\bar{r}}{r^3}$$

se poate scrie

$$(2.19) \quad \bar{V} = \text{rot } \bar{W} = -\frac{1}{4\pi} \sum d\Gamma \int_s \text{rot} \left(\frac{d\bar{r}}{r} \right) = \frac{1}{4\pi} \sum d\Gamma \int_s \frac{\bar{r} \wedge d\bar{r}}{r^3}$$

sau mai departe, notând din nou $d\Gamma \cdot d\bar{r} = \bar{\Omega} d\tau$, după (2.16), se obține formula lui BIOT - SAVART generalizată :

$$(2.20) \quad \bar{V} = \frac{1}{4\pi} \int_{\tau} \frac{\bar{r} \wedge \bar{\Omega}}{r^3} d\tau.$$

Să aplicăm formula (2.19) la un singur tub de vârtej infinit de subțire de intensitate Γ ; se obține

$$(2.21) \quad \bar{V} = \frac{\Gamma}{4\pi} \int_s \frac{\bar{r} \wedge d\bar{r}}{r^3}$$

și viteza contributivă a unui element ds al tubului, normală pe planul format de \bar{r} și $d\bar{r}$, va fi

$$(2.22) \quad d\bar{V} = \frac{\Gamma}{4\pi} \cdot \frac{\bar{r} \wedge d\bar{r}}{r^3}.$$

Să punem (fig. 2.2)

$$(2.23) \quad |\bar{r} \wedge d\bar{r}| = r \sin \theta ds,$$

se obține în cele din urmă formula lui BIOT - SAVART :

$$(2.24) \quad |d\bar{V}| = \frac{\Gamma}{4\pi} \cdot \frac{\sin \theta ds}{r^2}.$$

Avându-se în vedere dese aplicații ale formulei (2.21), sub diferite forme, dăm mai jos proiecțiile vitezei în notații carteziene. Într'adevăr, dacă remarcăm că se poate scrie

$$(2.25) \quad \bar{r} \wedge d\bar{r} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ x - \xi & y - \eta & z - \zeta \\ dx & dy & dz \end{vmatrix},$$

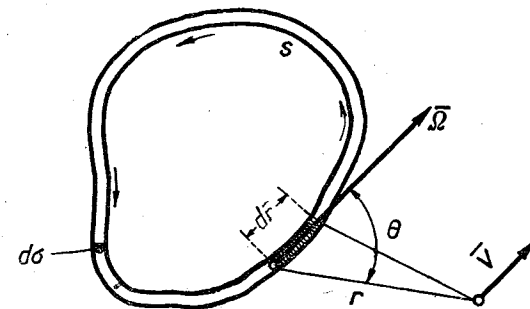


Fig. 2.2.

unde x, y, z sunt coordonatele unui element al tubului de vârtej infinit de subțire și ξ, η, ζ , coordonatele punctului P , se obțin ușor viteșele induse ale tubului de vârtej în acest punct :

$$(2.26) \quad \begin{cases} u = \frac{\Gamma}{4\pi} \int_s \frac{(y - \eta) dz - (z - \zeta) dy}{[(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 + (z - \zeta)^2]^{3/2}}, \\ v = \frac{\Gamma}{4\pi} \int_s \frac{(z - \zeta) dx - (x - \xi) dz}{[(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 + (z - \zeta)^2]^{3/2}}, \\ w = \frac{\Gamma}{4\pi} \int_s \frac{(x - \xi) dy - (y - \eta) dx}{[(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 + (z - \zeta)^2]^{3/2}}. \end{cases}$$

2.3. Viteza indusă de un segment rectiliniu al tubului de vârtej

Fie AB segmentul rectiliniu și d distanța dela punctul P la linia de vârtej; viteza indusă de acest segment va fi normală pe planul format de AB și punctul P și îndreptată în sens pozitiv față de $\bar{\Omega}$ (fig. 2.3). Valoarea acestei viteze se deduce ușor din formula (2.24) punând :

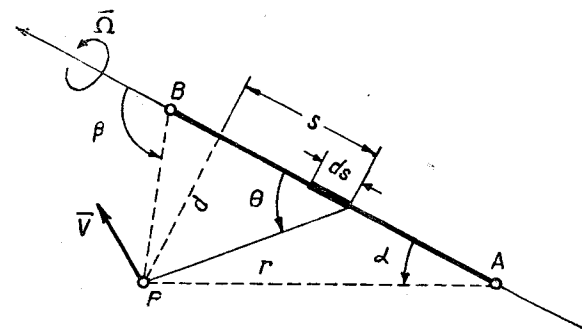


Fig. 2.3.

$$(2.27) \quad r = \frac{d}{\sin \theta}, \\ s = d \cot \theta$$

și integrând; se obține astfel formula :

$$(2.28) \quad V = -\frac{\Gamma}{4\pi d} \int_A^B \sin \theta d\theta = \frac{\Gamma}{4\pi d} (\cos \alpha - \cos \beta),$$

care devine în cazul când cele două extremități se întind până la infinit :

$$(2.29) \quad V = \frac{\Gamma}{2\pi d}.$$

2.4. Strat de vârtejuri

Să considerăm o suprafață oarecare σ și să presupunem că la traversarea acestei suprafețe viteșele sunt discontinue. În realitate, această variație bruscă a viteșelor se produce în interiorul unui strat subțire de grosime δ , astfel încât suprafața σ ar trebui să fie înlocuită prin alte două paralele, σ_1 și σ_2 , a căror distanță să fie destul de mică pentru ca să se poată considera aceeași normală n pe cele două fețe (fig. 2.4). Fie \bar{V}_1 și \bar{V}_2 viteșele paralele cu aceste două fețe și situate respectiv pe σ_1 și σ_2 ; să punem

$$(2.30) \quad \bar{W} = \bar{V}_2 - \bar{V}_1$$

și să luăm în considerare o variație lineară a vitesei la traversarea stratului subțire; viteza într'un punct oarecare η în interiorul stratului va avea ca expresie :

$$(2.31) \quad \bar{V} = \bar{V}_1 + \frac{\eta}{\delta} \bar{W}.$$

Inafara acestui strat subțire mișcarea este presupusă irotatională, dar în interiorul stratului vârtejul nu este nul; într'adevăr, avem

$$(2.32) \quad \text{rot } \bar{V} = \bar{\Omega} = \frac{1}{\delta} \text{grad } \eta \wedge \bar{W} = \frac{1}{\delta} n \wedge \bar{W},$$

de unde rezultă că stratul subțire este sediul unor vârtejuri perpendiculare pe \bar{W} și pe n , deci paralele cu suprafața σ . Acest strat se numește strat de vârtejuri.

Vom considera mai jos câteva cazuri interesante.

2.4.1. Suprafețe de discontinuitate în spatele obstacolelor.

În teoria suprafețelor de discontinuitate (mișcare plană), viteza variază dela zero ($V_1 = 0$) în interiorul apei moarte până la $V_2 = V_0 = ct.$ pe fața superioară a suprafeței de discontinuitate. Vârtejul este normal pe V_0 și prin urmare normal pe planul mișcării.

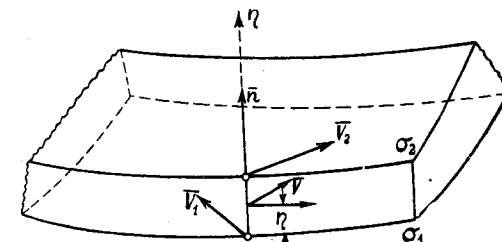


Fig. 2.4.

2.4.2. Pereți fluizi. Să presupunem că interiorul unui corp cufundat este plin cu fluid în stare de repaos și că pereții sunt înlocuiți cu un strat subțire în interiorul căruia viteza variază dela zero ($\bar{V}_1 = 0$) la $\bar{V}_2 = \bar{W}$, aceasta din urmă fiind viteza potențială la suprafața corpului (fig. 2.5).

Presupunând că variația vitesei este lineară pe toată înălțimea stratului, vârtejul se va obține din relația (2.32), de unde se observă că este constant și egal, în valoare absolută, cu

$$(2.33) \quad \Omega = \frac{W}{\delta}.$$

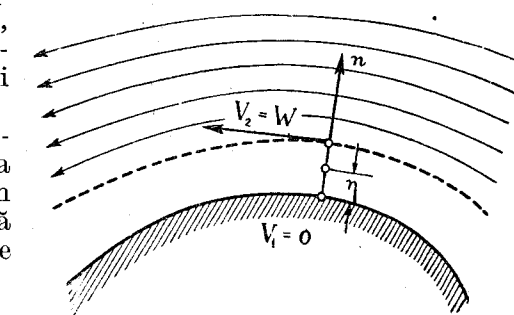


Fig. 2.5.

Pereții sunt astfel înlocuiți printr'un strat de vârtejuri. De altfel, suprimând pereții, întreg spațiul este plin cu fluid și putem admite că în tot acest spațiu constanta lui BERNOULLI este aceeași. Rezultă

de aci că presiunea ar varia la străbaterea stratului de vârtejuri și echilibrul s'ar strica. Pentru a stabili acest echilibru, este necesar să introducem forțe corespunzătoare care să poată fixa stratul în poziția sa. Fie \bar{q} această forță, raportată la unitatea de volum; ea acționează asupra fluidului ca o forță exterioară. Relația (1.18 bis), care reprezintă ecuația mișcării permanente, nu este valabilă sub această formă, decât dacă se introduce noua forță exterioară acționând asupra fluidului. Acesta nu mai are constrângeri în privința corpurilor cufundate, întrucât pereții au fost suprimați. Rezultă de aci o nouă ecuație care ține seama de \bar{q} :

$$(2.34) \quad \bar{\Omega} \wedge \bar{V} + \text{grad} \left(P + \frac{1}{2} V^2 - U \right) = \frac{1}{\rho} \bar{q}.$$

Cum de altfel constanta lui BERNOULLI este aceeași pe toată întinderea fluidului, se găsește în cele din urmă:

$$(2.35) \quad \bar{q} = \rho \bar{\Omega} \wedge \bar{V} = \rho \frac{\eta}{\delta^2} (\bar{n} \wedge \bar{W}) \wedge \bar{W}.$$

Din această expresie se vede că \bar{q} este normal pe perete și are ca valoare absolută,

$$(2.36) \quad q = \rho \frac{\eta}{\delta^2} W^2.$$

Pe un element de volum $d\tau$ efortul elementar va fi $q d\tau$ îndreptat tot în direcția normalei. Forța pe unitatea de suprafață a stratului de vârtejuri va fi deasemenea îndreptată în direcția normalei și va avea ca expresie, dacă notăm cu γ intensitatea de vârtej pe unitatea de suprafață ($\gamma = \Omega \delta$):

$$(2.37) \quad p = \int_{\tau_j} q d\tau = \int_0^\delta q \cdot 1 \times d\eta = \frac{1}{2} \rho W^2,$$

ceea ce corespunde tocmai cu presiunea pe peretele unui corp cufundat, cum era de altfel de așteptat. Se poate scrie relația precedentă și sub altă formă, susceptibilă de a fi utilizată pe urmă mai comod. Pentru aceasta, să notăm cu $\bar{\gamma}$ intensitatea de vârtej pe unitatea de suprafață:

$$(2.38) \quad \bar{\gamma} = \bar{\Omega} \delta = \bar{W}$$

și notând mai departe cu \bar{p} forța tot pe unitatea de suprafață, vom avea:

$$(2.39) \quad \bar{p} = \rho \bar{\gamma} \wedge \bar{V}.$$

2.4.3. Curenți paraleli cu viteze diferite. Diferența $\bar{V}_2 - \bar{V}_1$ este paralelă cu aceeași direcție generală și vârtejul este prin urmare normal pe această direcție și paralel cu suprafața de separație. Presiunile sunt egale pe cele două fețe ale acestei suprafețe și pe toată înălțimea stratului, de unde rezultă că valoarea constantei lui BERNOULLI este diferită și că nu se produce nici o acțiune asupra stratului de vârtejuri.

Dacă \bar{V}_2 și \bar{V}_1 sunt egale și de semne contrarii, valoarea vârtejurii, precum și intensitatea pe unitatea de lățime a unei fâșii de vârtejuri vor fi respectiv:

$$(2.40) \quad \Omega = \left| \frac{\bar{V}_2 - \bar{V}_1}{\delta} \right| = \frac{2V_2}{\delta}, \quad \gamma = \Omega \delta = 2V_2.$$

2.4.4. Viteze egale și de direcții diferite. Să presupunem că pe cele două fețe ale stratului vitezele sunt egale, dar direcțiunile lor diferite; diferența lor $\bar{W} = \bar{V}_2 - \bar{V}_1$ este normală pe bisectoarea unghiului format de cele două viteze și prin urmare vârtejul este paralel cu această bisectoare (fig. 2.6). Direcția medie a curentului este paralelă cu viteza care corespunde mijlocului înălțimii stratului de vârtejuri:

$$(2.41) \quad \bar{V} = \bar{V}_1 + \frac{1}{2} \bar{W}$$

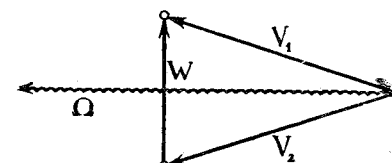


Fig. 2.6.

și este paralelă la rândul ei tot cu această bisectoare. Prin urmare aceste vârtejuri sunt culcate pe direcția vântului și formează o pânză de vârtejuri libere paralelă cu curentul general.

Acest gen de strat de vârtejuri se formează în realitate în spatele unei aripi de avion și are o influență considerabilă asupra mișcării în jurul aripei după cum vom vedea mai târziu.

3. MIȘCAREA PLANĂ

Desigur că problemele de Aerodinamică aparțin în general mișcării în trei dimensiuni. Dar, printr'o analiză adecuată și prin ipoteze simplificatoare, majoritatea acestor probleme, chiar cele mai importante, pot fi rezolvate prin aplicarea rezultatelor și metodelor mișcării plane. Din această cauză, vom face în acest paragraf o expunere succintă a formulilor și rezultatelor caracteristice ale mișcării plane. Se spune că o mișcare este plană atunci când vitezele sunt continuu paralele cu un plan, numit plan director și atunci când particulele situate pe o normală la planul director au aceleași viteze în fiecare moment.

3.1. Reprezentarea mișcării plane printr'o funcție de variabilă complexă

Fie xOy planul mișcării; componentele vitezei vor fi respectiv u , după axa Ox și v , după Oy .

Vârtejul este normal pe planul director și valoarea sa se deduce ușor din relațiile (1.15) sau (2.1):

$$(3.1) \quad \Omega_z = \gamma = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}.$$

Dacă luăm în considerare o mișcare irotațională, vârtejul este nul și scurgerea este determinată de un potențial de viteză $\varphi(x, y)$ și deci

$$(3.2) \quad u = \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad v = \frac{\partial \varphi}{\partial y}.$$

Am văzut că ecuația de continuitate ne conduce la relația:

$$(3.3) \quad \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = \Delta \varphi = 0,$$

de unde rezultă că funcția φ este o funcție armonică, așa cum am menționat și mai înainte.

Pe de altă parte, dacă remarcăm că ecuația liniilor de curent

$$(3.4) \quad u \, dy - v \, dx = 0$$

satisfăce condiției unei diferențiale totale exacte, prin ecuația de continuitate (3.3):

$$(3.5) \quad \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial(-v)}{\partial y},$$

găsim o altă funcție ψ , numită funcție de curent, a cărei diferențială este

$$(3.6) \quad d\psi = u \, dy - v \, dx = \frac{\partial \psi}{\partial y} \, dy + \frac{\partial \psi}{\partial x} \, dx.$$

Din această ecuație rezultă următoarele relații:

$$(3.7) \quad u = \frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad v = \frac{\partial \varphi}{\partial y} = -\frac{\partial \psi}{\partial x}.$$

Avem, deasemenea,

$$(3.8) \quad \Delta \psi = \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = -\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y \partial x} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} = 0,$$

de unde se vede că ψ este tot o funcție armonică.

Cele două funcții armonice φ și ψ sunt în același timp asociate: ele satisfac relațiile (3.7), care sunt identice cu condițiile de armonicitate ale lui CAUCHY; rezultă astfel că φ și ψ reprezintă respectiv partea reală și partea imaginară a unei funcții analitice $f(z)$ de variabila complexă

$$(3.9) \quad z = x + iy.$$

Această funcție se numește potențialul complex al mișcării și va fi pusă sub forma:

$$(3.10) \quad f(z) = \varphi(x, y) + i\psi(x, y).$$

Derivata acestei funcții se numește viteza complexă:

$$(3.11) \quad w = \frac{df}{dz} = \frac{\partial \varphi}{\partial x} + i \frac{\partial \psi}{\partial x} = u - iv,$$

a cărei parte reală este proiecția vitezei pe axa Ox , iar coeficientul părții imaginare este proiecția vitezei pe axa Oy , luată în sens negativ.

În concluzie, rezultă că orice mișcare irotațională plană va fi reprezentată printr-o funcție analitică de variabila complexă z (potențialul complex), a cărei parte reală este potențialul propriu zis, iar coeficientul părții imaginare este funcția de curent. Și invers, orice funcție analitică de z va reprezenta o mișcare irotațională plană. Acest rezultat este remarcabil și va fi aplicat la rezolvarea problemelor mișcării plane. Să punem

$$(3.12) \quad \varphi = c, \quad \psi = k.$$

și să dăm lui c și lui k toate valorile dela $-\infty$ la $+\infty$; se obțin liniile echipotențiale și liniile de curent, acestea din urmă reprezentând spectrul hidrodinamic al scurgerii.

Este ușor de văzut mai departe că $\varphi = c$ și $\psi = k$ formează o rețea ortogonală. Într'adevăr, eosinusurile direcțoare ale tangentelor satisfac relația

$$(3.13) \quad \frac{\partial \varphi}{\partial x} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial y} = -u \cdot v + v \cdot u = 0,$$

de unde rezultă că tangentele sunt perpendiculare.

3.2. Mișcarea în jurul vârtejurilor

Să presupunem că originea O este urma unui tub de vârtעי infinit de subțire, de intensitate egală cu Γ , normal pe planul mișcării; viteza indusă la o distanță r va fi normală pe raza vectorială și va fi dată de expresia (2.29), în care d va fi înlocuit cu r (fig. 3.1):

$$(3.13 \text{ bis}) \quad V = \frac{\Gamma}{2\pi r}.$$

Potențialul complex se deduce succesiv din relația (3.11), înlocuind pe urmă $r e^{i\theta}$ cu z :

$$(3.14) \quad w = \frac{df}{dz} = u - iv = -\frac{\Gamma}{2\pi r} (\sin \theta + i \cos \theta) = -\frac{i\Gamma}{2\pi} \cdot \frac{1}{z};$$

mai departe, integrând, vom avea într'adevăr,

$$(3.15) \quad f(z) = -\frac{i\Gamma}{2\pi} \ln z = \frac{\Gamma}{2\pi} \theta - \frac{i\Gamma}{2\pi} \ln r = \varphi + i\psi.$$

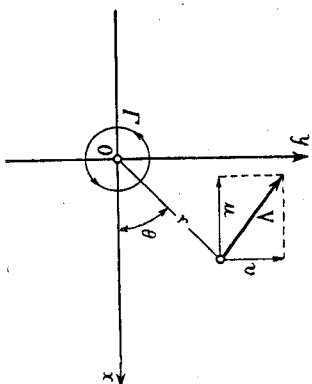


Fig. 3.1.

Se vede că liniile echipotențiale sunt raze pornite din origine și liniile de curent sunt cercuri concentrice (fig. 3.2).

Să înlocuim Γ cu Q și să înmulțim cei doi membri cu i ; se obține:

$$(3.16) \quad \frac{Q}{2\pi} \ln z = \\ = \frac{Q}{2\pi} \ln r + \frac{iQ}{2\pi} \theta.$$

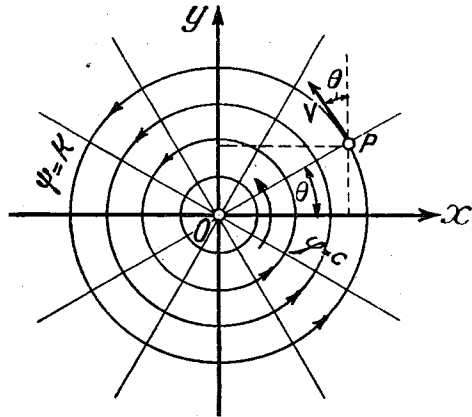


Fig. 3.2.

Liniile echipotențiale sunt în acest caz cercuri concentrice și liniile de curent sunt raze pornite din origine; funcțiile φ și ψ s'au inversat deci. Această ultimă mișcare reprezintă o sursă având un debit egal cu Q (fig. 3.3).

Să revenim la vârtej și să remarcăm că un singur vârtej, așezat într'un fluid în repaus, rămâne nemșcat, din motive de simetrie. Se spune că viteza vârtejurii este nulă.

Să presupunem că avem un număr n de tuburi de vârtej, de intensități $\Gamma_1, \dots, \Gamma_n$, așezate respectiv în punctele x_1, \dots, x_n ; potențialul mișcării va fi:

$$(3.17) \quad f(z) = -\frac{i}{2\pi} \sum_1^n \Gamma_n \ln(z - x_n)$$

și viteza complexă

$$(3.18) \quad w = \frac{df}{dz} = -\frac{i}{2\pi} \sum_1^n \frac{\Gamma_n}{z - x_n}$$

Această expresie este valabilă pentru toate particulele fluide ale spațiului, înafara punctelor x_1, \dots, x_n , unde viteza ar fi infinită.

Să notăm cu w_j viteza complexă a unui vârtej Γ_j așezat în punctul x_j ; am arătat mai sus că viteza datorită vârtejurii însuși este nulă, astfel că viteza w_j este aceea i n d u s ă de celelalte vârtejuri:

$$(3.19) \quad w_j = -\frac{1}{2\pi} \sum_1^n \frac{\Gamma_n}{z - x_n} + \frac{i\Gamma_j}{2\pi} \cdot \frac{1}{z - x_j}$$

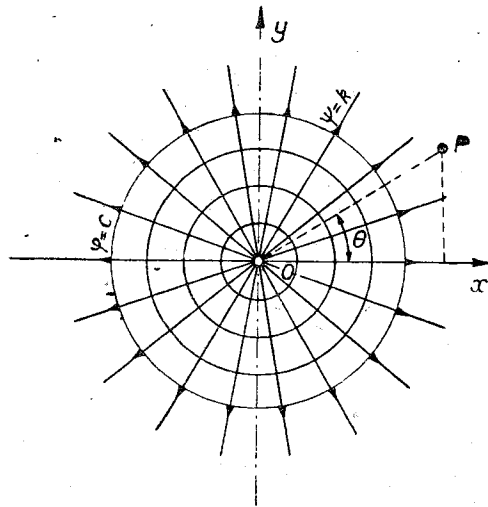


Fig. 3.3.

Generalizând problema, se găsește că viteza unui vârtej este egală cu aceea datorită scurgerii generale în jurul vârtejurii însuși, abstracție făcând de influența acestuia. Centrul vârtejurii apare astfel ca un punct material transportat de curent. Practic vorbind, nu există un punct de vârtej ci o secțiune foarte redusă (secțiunea tubului de vârtej), în care vârtejurii propriu zis este repartizat după o lege oarecare. Vom numi această secțiune un nucleu de vârtej și fenomenele care privesc vârtejurii se exercită în realitate asupra acestui nucleu.

3.2.1. Acțiunea unui curent asupra unui vârtej. Am văzut mai sus că nucleul de vârtej plutește liber în fluid: nu există deci o acțiune a acestuia din urmă asupra vârtejurii. Să presupunem acum că nucleul de vârtej este constrâns să-și păstreze poziția; pentru aceasta trebuie să introducem o forță care va reprezenta acțiunea fluidului asupra vârtejurii. Fie \bar{q} această forță raportată la unitatea de volum; ea joacă rolul unei forțe exterioare și va fi dedusă din ecuația de mișcare (1.18 bis):

$$(3.20) \quad \bar{q} = \rho \bar{\Omega} \wedge \bar{V} + \rho \text{grad} (P + \frac{1}{2} V^2 - U).$$

Înafara nucleurilor de vârtej, constanta lui BERNOLLI este aceeași și prin urmare gradientul expresiei dintre paranteze este nul. Dacă notăm cu $\Delta\sigma$ secțiunea nucleului și cu \bar{F} acțiunea totală a curentului asupra vârtejurii, remarcând pe de altă parte că volumul de vârtejuri al unei porțiuni egale cu unitatea de lungime este $\Delta\tau = 1 \times \Delta\sigma$, se poate scrie:

$$(3.21) \quad \bar{F} = \bar{q} \Delta\sigma = \rho \Delta\sigma \bar{\Omega} \wedge \bar{V} = \rho \bar{\Gamma} \wedge \bar{V},$$

unde $\bar{\Gamma}$ este intensitatea de vârtej, pe care convenim să o luăm în direcția vârtejurii, normală deci pe planul mișcării și \bar{V} viteza în dreptul vârtejurii însuși.

Aceasta este teorema lui KUTTA-JUCOVSKI pe care o vom regăsi adesea în teoria aripilor de avion.

3.2.2. Vârtej în prezența unui cerc. Să considerăm două vârtejuri egale și de semne contrarii, Γ și $-\Gamma$, așezate pe axa absciselor, în $O_2 (+a)$ și $O_1 (-a)$; pentru potențialul mișcării vom avea:

$$(3.22) \quad f(z) = -\frac{i\Gamma}{2\pi} \ln \frac{z-a}{z+a} = \frac{\Gamma}{2\pi} (\theta_2 - \theta_1) - \frac{i\Gamma}{2\pi} \ln \frac{r_2}{r_1},$$

de unde se vede că liniile echipotențiale $\varphi = c$ sunt cercuri care trec prin O_1 și prin O_2 , iar liniile de curent definite de relația

$$(3.23) \quad \frac{r_2}{r_1} = k,$$

sunt cercuri ale lui APPOLLONIUS (fig. 3.4), ale căror raze și centre vor fi determinate prin formulele următoare :

$$(3.24) \quad R_k = a \frac{2k}{1-k^2}, \quad x_k = a \frac{1+k^2}{1-k^2}$$

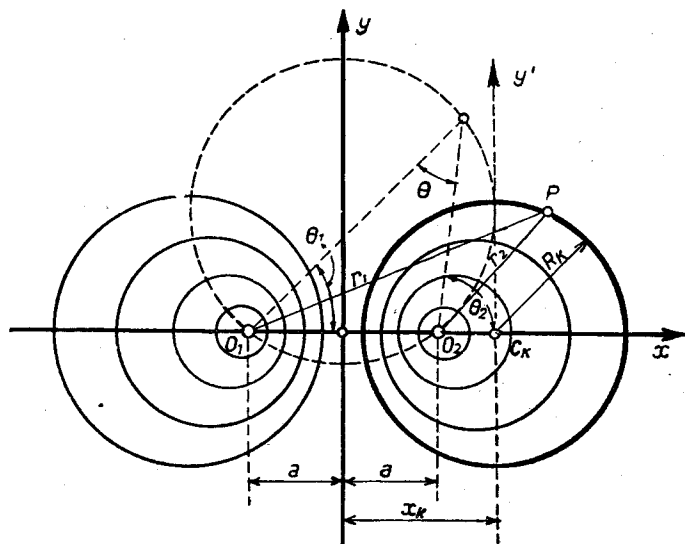


Fig. 3.4.

Să notăm cu C_k centrul cercului și să considerăm segmentele

$$(3.25) \quad \overline{C_k O_2} = x_k - a = a \frac{2k^2}{1-k^2}, \quad \overline{C_k O_1} = x_k + a = a \frac{2}{1-k^2};$$

este ușor de văzut că se obține relația următoare :

$$(3.26) \quad \overline{C_k O_2} \times \overline{C_k O_1} = a^2 \left(\frac{2k}{1-k^2} \right)^2 = R_k^2.$$

Admițând acum că linia de curent reprezentată de conturul cercului, se solidifică brusc, nu se schimbă nimic în mișcarea în jurul cercului considerat. Se poate trage concluzia că expresia (3.22) a potențialului reprezintă în același timp mișcarea în jurul unui vârtej în prezența unui cerc.

Luând ca origine centrul C_k al cercului, notând în general raza sa cu R , scriind, după (3.26),

$$(3.27) \quad \overline{C_k O_1} = b, \quad \overline{C_k O_2} = \frac{R^2}{b}$$

și presupunând că vârtejul exterior așezat în O_1 este pozitiv ($+\Gamma$), se poate scrie, pentru potențial,

$$(3.28) \quad f(z) = -\frac{i\Gamma}{2\pi} \ln \frac{z' + b}{z' + \frac{R^2}{b}},$$

unde $z' = z - x_k$ este variabila complexă față de noul sistem de axe.

Dacă dorim ca circulația în jurul cercului să fie nulă, trebuie să adăugăm în centrul său un vârtej Γ ; vom avea în cele din urmă

$$(3.29) \quad f(z') = -\frac{i\Gamma}{2\pi} \ln \frac{z'(z' + b)}{z' + \frac{R^2}{b}}.$$

Sub această formă potențialul va fi întrebuințat mai târziu în diverse aplicații.

Să presupunem, mai departe, că viteza indusă în centrul cercului de către vârtejul așezat în O_1 , rămâne mereu constantă

$$(3.30) \quad v = \frac{\Gamma}{2\pi b} = \text{ct.}$$

și că distanța b crește indefinit; expresia (3.29) devine succesiv, înlocuind z' cu variabila curentă z :

$$(3.31) \quad f(z) = -\frac{i\Gamma}{2\pi} \left[\ln \left(1 + \frac{z}{b} \right) - \ln \left(1 + \frac{R^2}{bz} \right) + \ln b \right]_{b \rightarrow \infty} = \\ = -\frac{i\Gamma}{2\pi b} \left(z - \frac{R^2}{z} \right) + \text{ct.} = -iv \left(z - \frac{R^2}{z} \right).$$

La limită, cercul se găsește într'un curent paralel cu axa Oy , de viteză v și ultima formă a expresiei (3.31) reprezintă prin urmare potențialul scurgerii în jurul unui cerc așezat într'un curent vertical.

3.3. Dublet

Să presupunem că cele două vârtejuri (fig. 3.4) se apropie indefinit, dar că produsul

$$(3.32) \quad m = 2a\Gamma,$$

pe care îl vom numi *m o m e n t*, rămâne constant; în acest caz, obținem un *d u b l e t* și expresia (3.22) devine succesiv :

$$(3.33) \quad f(z) = -\frac{i\Gamma}{2\pi} \left[\ln \left(1 - \frac{a}{z} \right) - \ln \left(1 + \frac{a}{z} \right) \right]_{a \rightarrow 0} = \\ = \frac{i\Gamma}{2\pi} \cdot \frac{2a}{z} = \frac{im}{2\pi} \cdot \frac{1}{z} = i \frac{B}{z},$$

unde B este o constantă reală.

Dacă cele două vârtejuri sunt așezate pe axa ordonatelor, trebuie să înlocuim a cu ih în expresia precedentă și obținem în cele din urmă

$$(3.34) \quad f(z) = -\frac{A}{z}$$

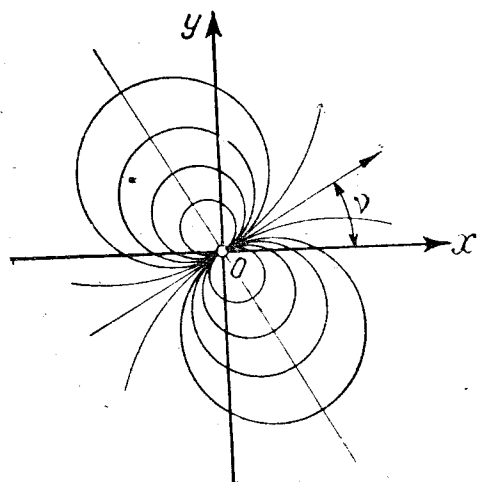


Fig. 3.5.

În primul caz, axa dubletului este îndreptată în direcția negativă a axei Oy ; în cazul al doilea, în direcția pozitivă a axei Ox .

Dacă direcția axei este arbitrară, să presupunem de exemplu că se găsește în primul cadran (fig. 3.5), se poate scrie

$$(3.35) \quad f(z) = -\frac{A + iB}{z}$$

Să revenim la dubletul îndreptat după axa Ox (3.34) și să presupunem că este așezat într'un curent paralel tot cu axa Ox , de

viteasă u ; potențialul mișcării devine succesiv, dacă punem și aici $z = re^{i\theta}$

$$(3.36) \quad \begin{aligned} f(z) &= -u \left(z + \frac{A}{u} \cdot \frac{1}{z} \right) = -u \left(z + \frac{R^2}{z} \right) = \\ &= -u \cos \theta \left(r + \frac{R^2}{r} \right) - iu \sin \theta \left(r - \frac{R^2}{r} \right), \end{aligned}$$

de unde rezultă că cercul $r = R$ este o linie de curent și prin urmare această expresie reprezintă mișcarea în jurul unui cerc. Regăsim astfel aceeași scurgere ca în (3.31) rotită cu 90° .

3.3.1. Dublet în prezența unui cerc. Pentru aplicațiile viitoare este interesant să stabilim scurgerea în jurul unui dublet în prezența unui cerc. Să considerăm în B , la distanța b de origine, un dublet a cărui axă face unghiul ν cu Ox . Se poate presupune că acest dublet este limita sistemului format de două vârtejuri egale și de semne contrarii, așezate respectiv în B' și B'' (fig. 3.6). Imaginile lor față de cerc se găsesc în A' și A'' . La limită, se obține un dublet în A , care va fi imaginea primului față de cerc. Dreptele $B''B'$ și $A''A'$ sunt antiparalele și triunghiurile OAA' și $OB'B$ sunt asemenea, de unde rezultă

$$(3.37) \quad \overline{A'A''} \approx 2\overline{AA'} = \frac{\overline{OA}}{b} \cdot 2\overline{B'B} = \frac{R^2}{b^2} \cdot \overline{B'B''}.$$

Dacă m este momentul dubletului real așezat în B , vom putea scrie pentru momentul dubletului-imaginie:

$$(3.38) \quad \overline{A'A''} \cdot \Gamma = \frac{R^2}{b^2} \cdot \overline{B'B''} \cdot \Gamma = \frac{R^2}{b^2} m = \frac{a^2}{R^2} m.$$

Rezultă în cele din urmă, pentru potențialul mișcării în jurul dubletului în prezența cercului, expresia următoare:

$$(3.39) \quad f(z) = -\frac{m}{2\pi} \left(\frac{e^{i\nu}}{z-b} - \frac{\frac{R^2}{b^2} e^{-i\nu}}{z-\frac{R^2}{b}} \right)$$

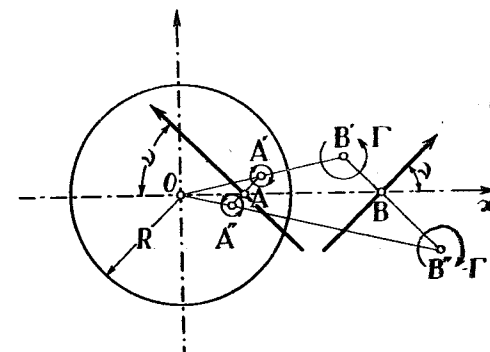


Fig. 3.6.

3.4. Șir de vârtejuri

Se întrebunțează adesea șiruri de vârtejuri dispuse convenabil pentru a se rezolva anumite probleme importante ale Aerodinamicii.

În acest scop, având în vedere aplicațiile viitoare, vom stabili mai jos potențialul mișcării în cazul simplu

al unui șir de vârtejuri egale, așezate la intervale constante pe axa Ox . Fie Γ intensitatea de vârtej și a distanța mutuală între două vârtejuri ale șirului (fig. 3.7). Vârtejul de ordin n induce într'un punct z viteasa

$$(3.40) \quad w_n = -\frac{i\Gamma}{2\pi} \cdot \frac{1}{z-na}$$

și șirul întreg induce în acelaș punct o viteză totală

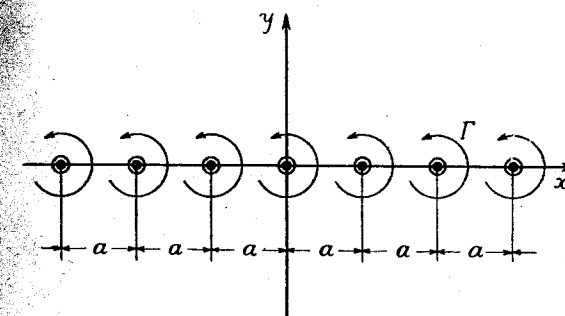


Fig. 3.7.

$$(3.41) \quad w = \frac{df}{dz} = -\frac{i\Gamma}{2\pi} \sum_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{z-na} = -\frac{i\Gamma}{2a} \cot \pi \frac{z}{a},$$

care se obține ținând seama de relația bine cunoscută:

$$(3.42) \quad \cot \pi \frac{z}{a} = \sum_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\pi \frac{z}{a} - n\pi}$$

Integrarea lui (3.41) ne dă potențialul mișcării :

$$(3.43) \quad f(z) = -\frac{i\Gamma}{2\pi} \cdot \ln \sin \pi \frac{z}{a}.$$

Această mișcare este reprezentată pe figura 3.8.

Expresiile (3.41) și (3.43) ne vor servi pentru a găsi ușor vitezele și potențialele oricărei alte dispoziții de vârtejuri într'unul sau mai multe șiruri liniare, cum va fi vorba mai târziu.

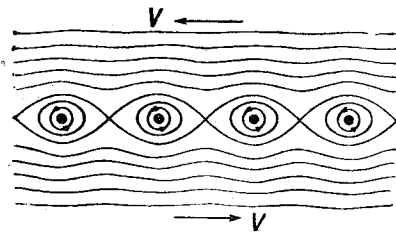


Fig. 3.8.

3.5. Strat de vârtejuri plan

Să considerăm un strat de vârtejuri plan AB , a cărui intensitate pe unitatea de lungime într'un punct x să fie γ (fig. 3.9). Să notăm cu u_s și u_i vitezele orizontale, respectiv pe fața superioară și inferioară a stratului, în același punct x ; vom putea scrie :

$$(3.44) \quad \gamma dx = (u_i - u_s) dx.$$

Cum de altfel mișcarea este irotațională înafara stratului de vârtejuri, notând cu φ potențialul respectiv, mai putem scrie :

$$(3.45) \quad \gamma = \frac{\partial \varphi_i}{\partial x} - \frac{\partial \varphi_s}{\partial x}.$$

în care φ_i este valoarea potențialului pe fața inferioară și φ_s aceea pe fața superioară.

Circulația Γ , din punctul x până la extremitatea B , va fi dată de expresia

$$(3.46) \quad \Gamma = \int_x^B \gamma dx = \varphi_i - \varphi_s.$$

Fie v vitesă verticală în punctul x datorită stratului de vârtejuri; partea contributivă a unui element $\gamma d\xi$ al acestui strat va fi

$$(3.47) \quad dv = -\frac{1}{2\pi} \cdot \frac{\gamma d\xi}{\xi - x}$$

și prin urmare vitesa totală va avea ca expresie :

$$(3.48) \quad v = -\frac{1}{2\pi} \int_A^B \frac{\gamma d\xi}{\xi - x}.$$

Această expresie va fi întrebuințată foarte des mai târziu.

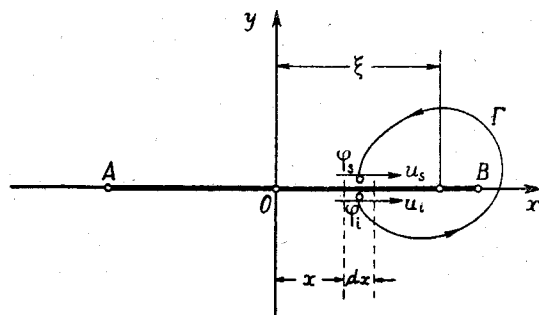


Fig. 3.9.

3.6. Nuclee de vârtejuri

Stratul de vârtejuri nu este în general stabil; el se destramă, se înfășoară pe el însuși și se transformă în nuclee de vârtejuri.

Un nucleu de vârtej poate fi conceput ca o masă cilindrică de secțiune circulară care se rotește în jurul axei cilindricului ca un solid. Înafara cilindricului, mișcarea este irotațională și corespunde cu aceea a unui vârtej așezat chiar în axa cilindricului; în interior, conform cu ipoteza făcută, viteza variază linear delă zero, în centru, la

$$(3.49) \quad V_0 = r_0 \omega = \frac{\Gamma}{2\pi r_0}$$

la periferie, dacă notăm cu ω viteza de rotație a nucleului cilindric, cu r_0 raza sa și cu Γ circulația în jurul cilindricului. Pe întreaga secțiune a nucleului vârtejul este constant; într'adevăr, la distanța r de centru, care se ia ca origine, viteza, care este normală pe raza vectorială și egală cu $V = \omega r$, are următoarele componente după Ox și Oy :

$$(3.50) \quad u = -\omega y, \quad v = \omega x,$$

de unde rezultă valoarea vârtejului,

$$(3.51) \quad \Omega = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = 2\omega = \text{ct.}$$

În realitate distribuția vârtejului este reprezentată de o curbă și raza nucleului nu este definită în mod precis, deci ipoteza făcută este o aproximație care reprezintă fenomenul mediu (fig. 3.10). Tot astfel, repartiția reală a viteselor nu este riguros lineară în interior; ea este reprezentată printr'o curbă destul de apropiată de linia dreaptă.

În concluzie vom admite pentru viteza totală V o distribuție lineară în interior

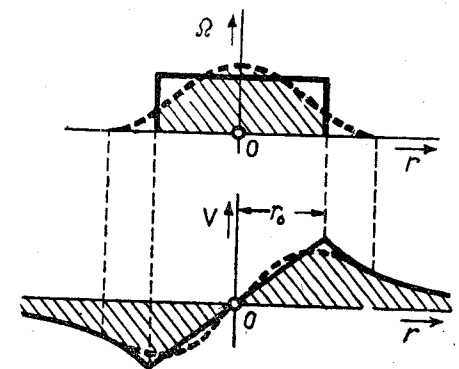
$$(3.52) \quad V = r\omega = \frac{r\Gamma}{2\pi r_0^2}, \quad r < r_0$$

iar în exterior, după relația obișnuită,

$$(3.53) \quad V = \frac{\Gamma}{2\pi r}, \quad r > r_0.$$

Energia cinetică a nucleului va fi ușor dedusă din ipoteza făcută; într'adevăr, un calcul elementar ne dă

$$(3.54) \quad E_i = \frac{\rho \Gamma^2}{16\pi}$$



— curba teoretică

- - - curba reală

Fig. 3.10.

Deasemenea, pentru domeniul exterior, conținut într'un cilindru de rază R , vom avea

$$(3.55) \quad E_e = \frac{\rho \Gamma^2}{4\pi} \ln \frac{R}{r_0},$$

de unde se vede că această energie crește neconținut cu R .

3.6.1. Energia cinetică a două nuclee de vârtejuri egale și de semne contrare. Pentru aplicațiile viitoare privitoare la nucleele de vârtej, care iau naștere îndărătul aripilor avionului, este important să se stabilească energia cinetică a două nuclee de felul acesta, egale și de semne contrare. Presupunând că raza r_0 a nucleului este foarte mică în raport cu distanța b dintre centrele lor, se poate neglija influența reciprocă și deformarea nucleelor care rezultă din acest fapt și se poate scrie pentru potențialul mișcării în exteriorul acestora, după (3.22):

$$(3.56) \quad f(z) = -\frac{i\Gamma}{2\pi} \ln \frac{z - \frac{b}{2}}{z + \frac{b}{2}} = \frac{\Gamma}{2\pi} (\theta_2 - \theta_1) - \frac{i\Gamma}{2\pi} \ln \frac{r_2}{r_1} = \varphi + i\psi.$$

Pentru a calcula energia cinetică pe toată suprafața, în exteriorul nucleelor, vom utiliza formula (1.52) unde potențialul χ va fi notat prin φ și suprafața dublă σ' prin cele două fețe B_1B_2 și $B_1'B_2'$;

$$(3.57) \quad E_e = -\frac{\rho}{2} \int_C \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial n} ds.$$

Integrala trebuie efectuată în sensul pozitiv, dealungul unui contur C format de cercul (1), dealungul căruia integrala este nulă ($\frac{\partial \varphi}{\partial n} = 0$), segmentul B_1B_2 , cercul (2), dealungul căruia integrala este deasemenea nulă ($\frac{\partial \varphi}{\partial n} = 0$)

și în sfârșit $B_2'B_1'$.

Pe fața superioară avem $\varphi = \frac{\Gamma}{2\pi} \pi$, pe fața inferioară, $\varphi = -\frac{\Gamma}{2\pi} \pi$;

pe de altă parte punând $\frac{\partial \varphi}{\partial n} = -\frac{\partial \psi}{\partial s}$ se poate scrie

$$(3.58) \quad E_e = -\rho \frac{\Gamma}{2} \int_{B_1}^{B_2} d\psi = -\rho \frac{\Gamma}{2} (\psi)_1 = \rho \frac{\Gamma^2}{2\pi} \ln \frac{b-r_0}{r_0}.$$

Dacă se adaugă energia celor două nuclee de vârtej, după (3.54), vom avea pentru energia totală:

$$(3.59) \quad E = E_e + 2E_l = \rho \frac{\Gamma^2}{2\pi} \left(\ln \frac{b-r_0}{r_0} + \frac{1}{4} \right).$$

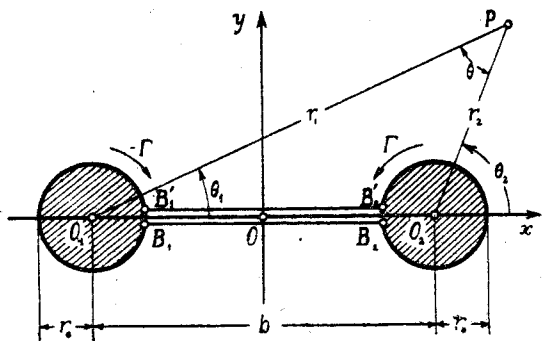


Fig. 3.11.

Această formulă va fi folosită mai departe pentru a determina raza nucleelor de vârtej care se formează îndărătul aripilor de avion.

3.6.2. Distribuția de viteze în jurul nucleelor de vârtejuri. Înafara nucleelor, vitezele sunt date de expresia:

$$(3.60) \quad w = \frac{df}{dz} = -\frac{i\Gamma}{2\pi} \left(\frac{1}{z - \frac{b}{2}} - \frac{1}{z + \frac{b}{2}} \right),$$

pe când în interior legea de variație este liniară și nu derivă dintr'un potențial de viteze. Pe axa absciselor repartiția viteselor urmează o lege ca aceea indicată în figura 3.12. Într'adevăr, însemnând prin v_1 și v_2 vitesele date respectiv de nucleele O_1 și O_2 viteza rezultantă v va fi suma lor:

$$(3.61) \quad v = v_1 + v_2.$$

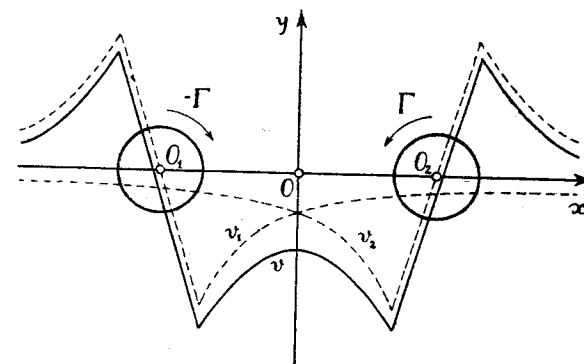


Fig. 3.12.

4. SCURGEREA ÎN JURUL UNUI CONTUR

Fie

$$f(z) = \varphi(x, y) + i\psi(x, y)$$

potențialul complex al mișcării în jurul unui contur închis C , așezat într'un curent de viteză uniformă V_0 ; conturul fiind o linie de curent, se va putea scrie

$$(4.1) \quad (d\psi)_C = p. \text{im.}(df)_C \equiv 0.$$

Problema constă așa dar în a găsi o funcție analitică $f(z)$, astfel încât partea imaginară a diferențialei să fie tot timpul nulă pe contur. Astfel pusă problema nu este mai puțin greu de rezolvat, afară de cazul conturului circular, unde calculele pentru găsirea soluției sunt simple [2.] De altfel, pentru același contur circular se pot utiliza rezultatele obținute în paragraful precedent. În cazul conturilor de formă generală, soluția se obține cu ajutorul transformării conforme.

4.1. Scurgerea în jurul unui cerc

Presupunem că cercul este așezat într'un curent uniform, paralel cu axa absciselor, de viteză $-V_0$, și admitem pe de altă parte, că există o

circulație Γ în jurul cercului; dacă se adaugă expresiei (3.36), unde se pune V_0 în loc de u și se notează cu a raza cercului, potențialul corespunzător unui vârtej, așezat în centru, se obține scurgerea generală în jurul cercului, a cărei expresie, în raport cu un sistem $O\xi\eta$ ($\zeta = \xi + i\eta$), având centrul cercului drept origine, va fi

$$(4.2) \quad f(\zeta) = -V_0 \left(\zeta + \frac{a^2}{\zeta} \right) - \frac{i\Gamma}{2\pi} \ln \zeta.$$

Se deduce ușor potențialul propriu zis și funcția de curent, care vor fi reprezentate în coordonate polare, punând $\zeta = re^{i\theta}$, prin expresiile următoare:

$$(4.3) \quad \begin{cases} \varphi = -V_0 \left(r + \frac{a^2}{r} \right) \cos \theta + \frac{\Gamma}{2\pi} \theta, \\ \psi = -V_0 \left(r - \frac{a^2}{r} \right) \sin \theta - \frac{\Gamma}{2\pi} \ln r. \end{cases}$$

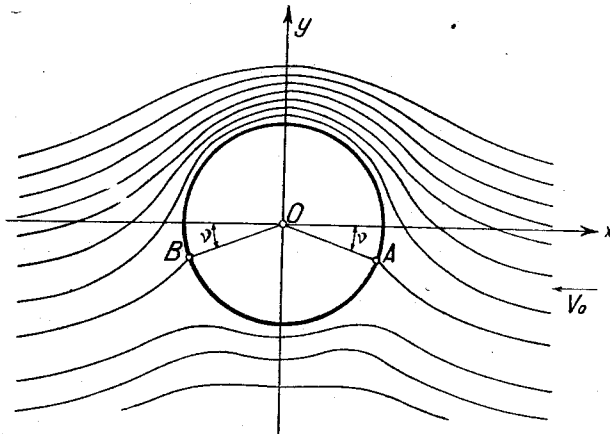


Fig. 4.1.

Pentru viteze, vom avea deasemenea, însemnând prin v_r , viteza după raza vectoare și prin v_θ componenta normală pe raza vectoare,

$$(4.4) \quad \begin{cases} v_r = \frac{\partial \varphi}{\partial r} = -V_0 \left(1 - \frac{a^2}{r^2} \right) \cos \theta, \\ v_\theta = \frac{\partial \varphi}{r \partial \theta} = V_0 \left(1 + \frac{a^2}{r^2} \right) \sin \theta + \frac{\Gamma}{2\pi r}, \end{cases}$$

care devin pe cerc ($r=a$):

$$(4.5) \quad \begin{cases} v_r = 0, \\ v_\theta = 2V_0 \sin \theta + \frac{\Gamma}{2\pi a}. \end{cases}$$

Spectrul hidrodinamic al scurgerii în jurul cercului (fig. 4.1) ne arată că sunt două puncte, A și B , simetrice față de Oy , unde liniile de curent ajung normale la cerc: acestea sunt punctele de viteză nulă.

Unghiurile θ_a și θ_b formate de razele vectoare OA și OB cu Ox sunt respectiv $-\nu$ și $\pi + \nu$, care pot fi deduse, egalând cu zero expresia (4.5) a lui v_θ :

$$(4.6) \quad \sin \nu = \frac{\Gamma}{4\pi a V_0}.$$

Invers, dacă se cunosc punctele de viteză nulă definite prin unghiul ν , se poate determina circulația Γ :

$$(4.7) \quad \Gamma = 4\pi a V_0 \sin \nu.$$

Introducând această valoare a lui Γ în expresia vitezei tangențiale, se obține

$$(4.8) \quad v_\theta = 2V_0 (\sin \theta + \sin \nu).$$

4.1.1. Schimbare de axe. Pentru aplicațiile viitoare este util să raportăm mișcarea la un sistem $O_1\xi_1\eta_1$, a cărui origine să nu fie așezată în centrul cercului.

Presupunem de altfel, că axa $O_1\xi_1$ face unghiul α cu direcția negativă a vitezei (fig. 4.2) și fie $M\xi\eta$ un sistem de axe cu $M\xi$ paralelă la viteza și originea M în centrul cercului. În raport cu acest sistem, potențialul mișcării va fi identic cu expresia (4.2). Dacă μ este afixul centrului, este ușor de văzut mai departe că sistemul $M\xi\eta$ este dedus din sistemul $O_1\xi_1\eta_1$ printr'o translație μ și o rotație $-\alpha$. Rezultă relația următoare care reprezintă această schimbare de axe:

$$(4.9) \quad \zeta = (\zeta_1 - \mu) e^{i\alpha}.$$

Ea va fi înlocuită în expresia (4.2) pentru a obține în sfârșit, abstracție făcând de o constantă, potențialul în raport cu noul sistem:

$$(4.10) \quad f(\zeta_1) = -V_0 \left(\zeta_1 e^{i\alpha} + \frac{a^2 e^{-i\alpha}}{\zeta_1 - \mu} \right) - \frac{i\Gamma}{2\pi} \ln (\zeta_1 - \mu).$$

Considerăm încă un sistem $M\xi'\eta'$ paralel cu $O_1\xi_1\eta_1$ și fie B punctul de viteză nulă din spate și τ unghiul lui BM cu axa $O_1\xi_1$: este ușor de

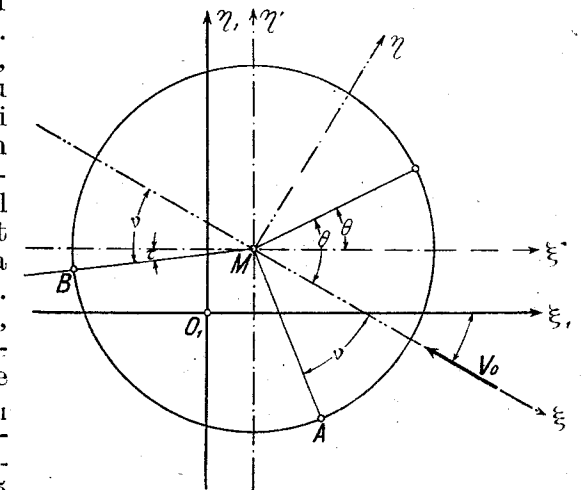


Fig. 4.2.

văzut că unghiul ν din expresia (4.6) după cum și variabila curentă θ din expresia (4.8), vor fi exprimate în raport cu α , τ și noua variabilă curentă θ' prin relațiile următoare:

$$(4.11) \quad \nu = \alpha + \tau, \quad \theta = \theta' + \alpha.$$

Expresia (4.8) a vitezei, într'un punct al cercului, devine în acest caz

$$(4.12) \quad v_0 = 2V_0 [(\sin(\theta' + \alpha) + \sin(\alpha + \tau))]$$

și pentru circulație se poate pune deasemenea:

$$(4.13) \quad \Gamma = 4\pi a V_0 \sin(\alpha + \tau).$$

4.2. Reprezentarea conformă

Am amintit mai sus că pentru, un contur oarecare, studiul scurgerii va fi făcut cu ajutorul transformării sau reprezentării conforme.

Pentru a defini această operație, fie două funcții

$$(4.14) \quad x = x(\xi, \eta), \quad y = y(\xi, \eta),$$

uniforme și regulate împreună cu primele lor derivate și să presupunem că ele mai satisfac și condiția următoare:

$$(4.15) \quad \frac{\partial x}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial y}{\partial \eta} - \frac{\partial x}{\partial \eta} \cdot \frac{\partial y}{\partial \xi} \neq 0.$$

Să considerăm cele două plane xOy și $\xi\omega\eta$ (fig. 4.3); unui punct $\pi(\xi, \eta)$ din planul $\xi\omega\eta$, îi corespunde, după relațiile (4.14), un punct $P(x, y)$

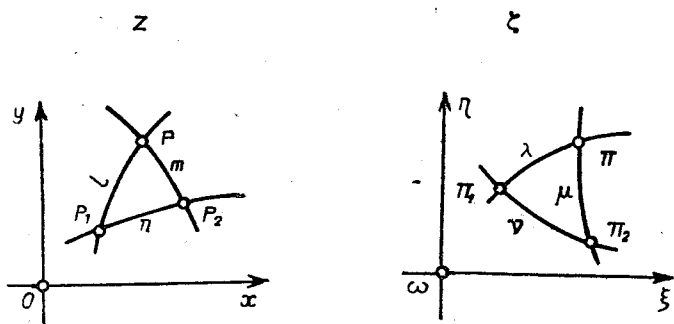


Fig. 4.3.

din planul xOy . Deasemenea, liniilor λ și μ din primul plan le corespund liniile l și m din al doilea, și așa mai departe, unei suprafețe din planul $\xi\omega\eta$ îi corespunde, punct cu punct, o suprafață din planul xOy . Se zice că funcțiile (4.14) reprezintă o transformare a planului $\xi\omega\eta$ pe planul xOy .

Unghiul de intersecție din punctul π al liniilor λ și μ nu este în general egal cu cel format de liniile l și m . Dacă unghiurile sunt egale, transformarea

se zice conformă. Pentru ca să se realizeze aceasta, relațiile (4.14) trebuie să satisfacă anumite condițiuni pe care le vom stabili mai jos. Într'adevăr, pentru ca unghiurile de intersecție să fie egale, un triunghi infinitesimal din planul $\xi\omega\eta$ trebuie să fie asemenea cu cel corespunzător din planul xOy ; trebuie să se scrie prin urmare, însemnând prin $d\sigma$ și ds , două laturi corespunzătoare,

$$(4.16) \quad \left(\frac{ds}{d\sigma}\right)^2 = \nu^2.$$

Punem mai departe

$$(4.17) \quad dx = \frac{\partial x}{\partial \xi} d\xi + \frac{\partial x}{\partial \eta} d\eta, \quad dy = \frac{\partial y}{\partial \xi} d\xi + \frac{\partial y}{\partial \eta} d\eta,$$

și admitând că dx , dy respectiv $d\xi$, $d\eta$, sunt proiecțiile lui ds respectiv $d\sigma$, relația (4.16) devine:

$$(4.18) \quad \left[\left(\frac{\partial x}{\partial \xi}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \xi}\right)^2 \right] d\xi^2 + \left[\left(\frac{\partial x}{\partial \eta}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \eta}\right)^2 \right] d\eta^2 + 2 \left[\frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial x}{\partial \eta} + \frac{\partial y}{\partial \xi} \frac{\partial y}{\partial \eta} \right] d\xi d\eta = \nu^2 (d\xi^2 + d\eta^2).$$

Această nouă relație trebuie să fie verificată oricare ar fi $d\xi$ și $d\eta$; vom avea prin urmare

$$(4.19) \quad \frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial x}{\partial \eta} = - \frac{\partial y}{\partial \xi} \frac{\partial y}{\partial \eta}, \quad \left(\frac{\partial x}{\partial \xi}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \xi}\right)^2 = \left(\frac{\partial x}{\partial \eta}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \eta}\right)^2,$$

de unde se deduc condițiile căutate:

$$(4.20) \quad \frac{\partial x}{\partial \xi} = \frac{\partial y}{\partial \eta}, \quad \frac{\partial x}{\partial \eta} = - \frac{\partial y}{\partial \xi}.$$

Aceste condițiuni arată că valoarea complexă $z = x + iy$ este o funcție analitică de variabilă complexă $\zeta = \xi + i\eta$:

$$(4.21) \quad z = x(\xi, \eta) + iy(\xi, \eta) = z(\zeta).$$

Invers, orice funcție analitică $z = z(\zeta)$, reprezintă o transformare conformă, care face să corespundă, punct cu punct, planele z și ζ .

În particular, un contur oarecare din planul z corespunde unui contur bine determinat din planul ζ și, invers, se poate demonstra că există întotdeauna o funcție $z = z(\zeta)$ care face să corespundă un contur dat în planul z cu un contur deasemenea cunoscut din planul ζ . Vom trata mai jos cazul particular al unui contur circular, care va avea o aplicare directă în studiul profilelor aerodinamice. Pentru un studiu mai profund al transformării conforme, recomandăm cititorului lucrările de specialitate, care se ocupă pe larg de această problemă.

4.2.1. Reprezentarea unui contur pe un cerc. Fie un cerc K în planul ζ și un contur C în planul z ; după o teoremă a lui **R i e m a n n**, există întotdeauna o funcție analitică $z = z(\zeta)$ care realizează reprezentarea conformă a interiorului conturului C pe interiorul cercului K . Corespondența punctelor este biunivocă și funcția este bine determinată, dacă facem să corespundă trei puncte de pe conturul C cu trei puncte date de pe conturul circular; sau, un punct de pe conturul C și un altul din interior, să corespundă respectiv unui punct dat pe cerc și unui altul în interiorul său.

Această propoziție stabilită pentru domeniile interioare ale lui C și K este valabilă deasemenea și pentru domeniile exterioare, căci se poate folosi o inversiune și domeniile exterioare conturilor C și K devin domenii interioare, respectiv pentru conturul C_1 și cercul K_1 , transformările lui C și K în urma acestei inversiuni.

Să considerăm într'adevăr această ultimă ipoteză și să efectuăm inverșiunile

$$(4.22) \quad z_1 = \frac{a}{z'}, \quad \zeta_1 = \frac{\alpha}{\zeta - \mu} = \frac{\alpha}{\zeta'},$$

unde μ reprezintă centrul cercului din planul ζ . Să presupunem pe de altă parte, că originile în cele două plane se găsesc în interiorul conturilor C și K (fig. 4.4) care se transformă după cum am spus mai sus, în C_1 și K_1 prin transformările (4.22). Pentru domeniile interioare ale lui C_1 și K_1 , reprezentarea conformă va fi definită printr'o funcție $z_1 = z_1(\zeta_1)$ care poate fi dezvoltată în serie **MAC-LAURIN**:

$$(4.23) \quad z_1 = c_1 \zeta_1 + c_2 \zeta_1^2 + \dots + c_n \zeta_1^n + \dots$$

Să observăm că z_1 se anulează numai pentru $\zeta_1 = 0$ și ia o valoare finită pentru oricare alt punct din interiorul cercului K_1 ; se poate scrie prin urmare:

$$(4.24) \quad z = \frac{a}{z_1} = \frac{b_{-1}}{\zeta_1} + b_0 + b_1 \zeta_1 + \dots + b_n \zeta_1^n + \dots$$

sau încă, înlocuind ζ_1 prin valoarea sa scoasă din (4.22) și dezvoltând, găsim

$$(4.25) \quad z = q_{-1} \zeta + q_0 + \frac{q_1}{\zeta} + \frac{q_2}{\zeta^2} + \dots + \frac{q_n}{\zeta^n} + \dots$$

Această funcție va fi perfect determinată dacă facem să corespundă unui punct de pe conturul C un punct dat pe cercul K și dacă facem să corespundă deasemenea punctele dela infinit:

$$(4.26) \quad \left(\frac{dz}{d\zeta} \right)_{\zeta \rightarrow \infty} = 1.$$

În aceste condițiuni, funcția de transformare, abstractie făcând de o constantă, ia următoarea formă specială [1]:

$$(4.27) \quad z = \zeta + \frac{q_1}{\zeta} + \frac{q_2}{\zeta^2} + \dots + \frac{q_n}{\zeta^n} + \dots,$$

care va fi folosită mai departe pentru trasarea profilelor aerodinamice.

Invers, printr'un raționament analog, ajungem la o funcție de aceeași formă:

$$(4.27 \text{ bis}) \quad \zeta = z + \frac{c_1}{z} + \frac{c_2}{z^2} + \dots + \frac{c_n}{z^n} + \dots$$

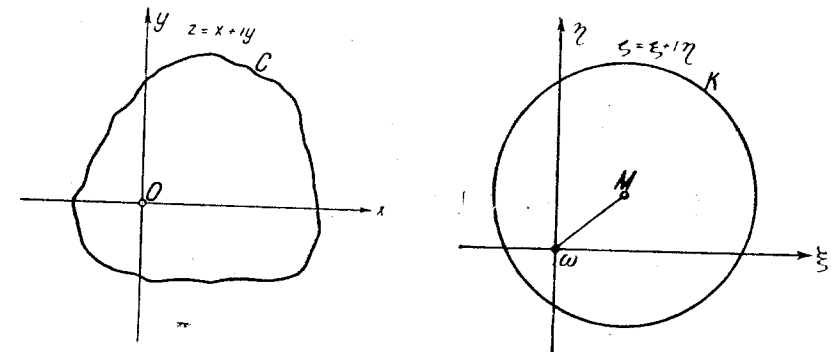


Fig. 4.4.

Funcția $z = z(\zeta)$, respectiv $\zeta = \zeta(z)$, este olomorfa și admite punctul dela infinit ca pol simplu; rezultă că $\frac{dz}{d\zeta}$, respectiv $\frac{d\zeta}{dz}$, nu se anulează și nu devine infinit în nici un punct dinafara cercului. Dacă conturul C este o curbă analitică regulată, adică dacă C nu posedă unghiuri ascuțite, $z = z(\zeta)$ poate fi prelungită analitic în interiorul cercului K și în acest caz dezvoltarea (4.26) este valabilă chiar pe cerc și prin urmare $\frac{dz}{d\zeta}$ nu se anulează și nu devine infinită în niciun punct dinafara cercului sau de pe cerc.

Nu se întâmplă același lucru în cazul unui contur cu unghiuri ascuțite. Într'adevăr, fie z_0 vârful acestui unghi și să transformăm domeniul din jurul punctului z_0 în domeniul din jurul punctului z'_0 , situat în planul z' prin relația:

$$(4.28) \quad z - z_0 = (z' - z'_0) \frac{r}{\pi},$$

Să punem

$$(4.29) \quad z - z_0 = r e^{i\theta}, \quad z' - z'_0 = r' e^{i\theta'},$$

relația precedentă devine :

$$(4.30) \quad re^{i\theta} = r' \frac{\gamma}{\pi} e^{\frac{i\gamma\theta'}{\pi}}.$$

În jurul punctelor z_0 și z'_0 , când θ' variază de la 0 la π , θ variază de la γ (fig. 4.5); arcele regulate mz_0 și z_0n , care formează un unghi ascuțit în punctul z_0 , corespund arcelor $m'z'_0$ și z'_0n' , care sunt de asemenea regulate, chiar în z'_0 , unde tangenta este aceeași.

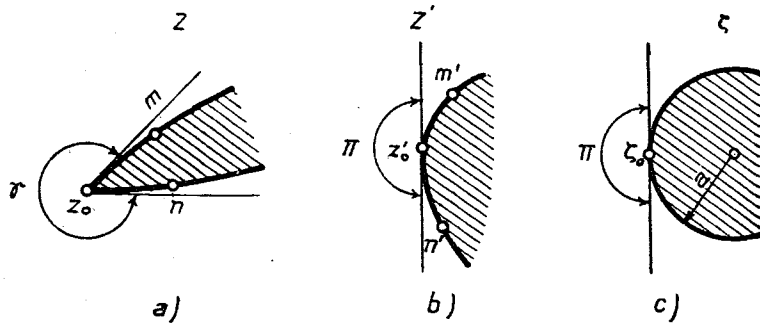


Fig. 4.5.

Noul contur C' , fiind regulat în jurul punctului z'_0 , reprezentarea planului z' pe planul ζ , în jurul punctului ζ_0 (punctul omolog al lui z_0), este continuă și uniformă; rezultă că se poate scrie

$$(4.31) \quad z' - z'_0 = \alpha_1(\zeta - \zeta_0) + \alpha_2(\zeta - \zeta_0)^2 + \dots + \alpha_n(\zeta - \zeta_0)^n + \dots,$$

de unde se vede că $\frac{dz'}{d\zeta}$ este finită și diferită de zero în punctul ζ_0 .

Pe de altă parte avem

$$(4.32) \quad \frac{dz}{d\zeta} = \frac{dz}{dz'} \cdot \frac{dz'}{d\zeta} = \frac{\gamma}{\pi} (z' - z'_0)^{\frac{\gamma}{\pi} - 1} \cdot \frac{dz'}{d\zeta},$$

de unde se deduce că $\frac{dz}{d\zeta}$ este nulă în punctul ζ_0 , dacă $\gamma > \pi$ și infinită, dacă $\gamma < \pi$.

Tragem concluzia deci, că derivata $\frac{dz}{d\zeta}$ nu se anulează și nu devine infinită în nici un punct înafara cercului sau pe cerc, înafară de un număr finit de puncte de pe cerc, care corespund unui același număr de unghiuri ascuțite de pe contur.

Invers, să presupunem că derivata $\frac{dz}{d\zeta}$ se anulează într'un punct ζ_0 de pe cerc: punctul corespunzător de pe contur va fi vârful unui unghi

ascuțit. Într'adevăr, considerând un număr $m \leq 2$, se poate pune expresia (4.27) sub următoarea formă :

$$(4.33) \quad z - z_0 = \left(1 - \frac{\zeta_0}{\zeta}\right)^m \cdot \left(\zeta + \beta_0 + \frac{\beta_1}{\zeta} + \dots + \frac{\beta_n}{\zeta^n} + \dots\right),$$

care, pentru $z - z_0$ și $\zeta - \zeta_0$ destul de mici, devine

$$(4.34) \quad z - z_0 = (\zeta - \zeta_0)^m \left[\zeta_0^{1-m} + \frac{\beta_0}{\zeta_0^m} + \frac{\beta_1}{\zeta_0^{m+1}} + \dots + \frac{\beta_n}{\zeta_0^{m+n}} \right] =$$

$$= (\zeta - \zeta_0)^m g(\zeta_0)$$

unde $g(\zeta_0)$ este o constantă.

Rezultă, punând mai departe,

$$(4.35) \quad z - z_0 = re^{i\tau}, \quad \zeta - \zeta_0 = \rho e^{i\theta}, \quad g(\zeta_0) = R_0 e^{i\theta_0},$$

relația următoare :

$$(4.36) \quad re^{i\tau} = R_0 \rho^m e^{i(m\theta + \theta_0)}$$

de unde se vede că, dacă θ variază de la 0 la π , τ variază de la θ_0 la $\theta_0 + m\pi$ și prin urmare se formează în vârf un diedru de unghi δ dat de relația :

$$(4.37) \quad \delta = (2 - m)\pi.$$

Să notăm prin $\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_j$ rădăcinile derivatei $\frac{dz}{d\zeta}$; toate aceste rădăcini se găsesc în interiorul cercului, în afară de cele corespunzătoare unghiurilor ascuțite de pe contur. Se poate scrie în general

$$(4.38) \quad \frac{dz}{d\zeta} = \left(1 - \frac{\zeta_1}{\zeta}\right) \left(1 - \frac{\zeta_2}{\zeta}\right) \dots \left(1 - \frac{\zeta_j}{\zeta}\right)$$

și deoarece, pe de altă parte, funcția $z = z(\zeta)$ trebuie să fie uniformă, această expresie nu conține termenul în $\frac{1}{\zeta}$, de unde rezultă :

$$(4.39) \quad \sum_1^j \zeta_j = 0.$$

4.2.2. Profile aerodinamice. Se numește profil aerodinamic un contur alungit prevăzut în spate cu un vârf ascuțit, cu un diedru sau cu un vârf rotunjit, contur care este utilizat pentru generarea aripilor de avion sau a elicelor (fig. 5.1).

Se poate obține un astfel de profil prin transformarea cercului cu ajutorul expresiei (4.27), pe care o vom pune sub o formă mai comodă pentru aplicațiile practice. Fie, într'adevăr, z' planul profilului și ζ' planul cercului, vom putea scrie, după (4.27) :

$$(4.40) \quad z' = \zeta' + \frac{q'_1}{\zeta'} + \frac{q'_2}{\zeta'^2} + \dots + \frac{q'_n}{\zeta'^n}.$$

Să punem

$$(4.41) \quad q_i = q^2 e^{2ri},$$

unde q este o cantitate reală și să efectuăm o schimbare de axe în amândouă planele, definită prin relațiile:

$$(4.42) \quad z' = z e^{i\gamma}, \quad \zeta' = \zeta e^{i\gamma};$$

înlocuind aceste expresii în (4.40) și împărțind apoi prin $e^{i\gamma}$ se găsește în cele din urmă forma căutată:

$$(4.43) \quad z = \zeta + \frac{q^2}{\zeta} + \frac{q_2}{\zeta^2} + \dots + \frac{q_n}{\zeta^n},$$

unde coeficientul lui $\frac{1}{\zeta}$ este real. Sub această formă, expresia (4.43) va fi folosită pentru trasarea profilelor aerodinamice, după cum vom vedea în cele ce urmează.

4.3. Scurgerea în jurul unui profil aerodinamic

Fie $f(z)$ potențialul viteselor în jurul unui profil aerodinamic c u l c a t într'un curent de viteză uniformă V_0 . Această mișcare trebuie să satisfacă pe contur condiția (4.1) și să admită viteza V_0 la infinit, în valoare, sens și direcție. Să considerăm mai departe o funcție $z = z(\zeta)$ de forma (4.27), care transformă domeniul exterior profilului și însuși profilul în domeniul exterior cercului și în însuși cercul.

Punctele dela infinit se corespund; dacă, pe de altă parte, obligăm ca un punct de pe contur să corespundă unui punct dat de pe cerc, funcția este bine determinată.

Condiția (4.1) pe care potențialul $f(z)$ trebuie să o îndeplinească pe contur, devine succesiv:

$$(4.44) \quad p \cdot \text{im} \cdot [df(z)]_c = p \cdot \text{im} \cdot \{df[z(\zeta)]\}_c = p \cdot \text{im} \cdot [dF(\zeta)]_c = 0;$$

de unde se vede că această condiție este identică aceleia pe care funcția transformată $F(\zeta)$ trebuie să o satisfacă pe cerc.

După forma transformării, condițiile la infinit în cele două plane rămân aceleași, prin urmare funcția $F(\zeta)$ satisface condițiile scurgerii în jurul unui cerc așezat într'un curent de viteză V_0 , identică în valoare, sens și direcție cu a vitezei curentului în planul real al profilului.

Așadar, prin reprezentarea conformă a unui plan pe un altul (z pe ζ), scurgerea în jurul unui profil este reprezentată în planul ζ , prin mișcarea în jurul cercului.

Forma generală a potențialului în jurul cercului este dată de expresia (4.10), unde este mai comod de pus variabila curentă ζ în loc de ζ_1 :

$$(4.45) \quad F(\zeta) = -V_0 \left(\zeta e^{i\alpha} + \frac{a^2 e^{-i\alpha}}{\zeta - \mu} \right) - \frac{i\Gamma}{2\pi} \ln(\zeta - \mu).$$

Dacă, pe de altă parte, putem avea ζ ca funcție explicită de z [$\zeta = \zeta(z)$] înlocuind ζ prin $\zeta(z)$ în expresia potențialului din jurul cercului, se găsește o funcție de z , fie $f(z)$, care va fi potențialul scurgerii în jurul profilului.

Să considerăm liniile echipotențiale și liniile de curent,

$$(4.46) \quad \varphi(x, y) = c, \quad \psi(x, y) = k;$$

ele devin, după transformare:

$$(4.46 \text{ bis}) \quad \Phi(\zeta, \eta) = c, \quad \Psi(\zeta, \eta) = k$$

care, este ușor de demonstrat, sunt tocmai liniile echipotențiale și liniile de curent în jurul cercului. Intr'adevăr, avem succesiv:

$$(4.47) \quad f(z) = \varphi + i\psi = f[z(\zeta)] = F(\zeta) = \Phi + i\Psi$$

și demonstrația este evidentă.

În general, nu este necesar să se stabilească explicit potențialul în planul mișcării reale, care este planul profilului; caracteristicile scurgerii (viteze, presiuni, linii de curent etc.) vor fi determinate cu ajutorul funcției de transformare.

Intr'adevăr, punând aceasta sub forma

$$(4.48) \quad z = x + iy = z(\zeta) = x(\zeta, \eta) + iy(\zeta, \eta),$$

se vede că unui punct $\zeta = \xi + i\eta$, al unei linii oarecare $\Psi(\zeta, \eta) = k$ din planul cercului, îi corespunde un punct $z = x + iy$ al liniei respective $\psi(x, y)$ din planul profilului, și așa mai departe pentru toate punctele celor două linii φ și ψ .

Pentru viteze se poate scrie, succesiv

$$(4.48 \text{ bis}) \quad w = \frac{df}{d\zeta} = \frac{dF}{d\zeta} \cdot \frac{d\zeta}{dz} = W \frac{1}{\frac{dz}{d\zeta}},$$

unde am notat cu $w = u - iv$, viteza complexă din planul profilului și prin $W = U - iV$, viteza complexă din planul cercului. Pe profilul însuși, viteza totală w_p va fi egală în valoare absolută cu

$$(4.49) \quad w_p = \left| \frac{W_K}{\frac{dz}{d\zeta}} \right|$$

unde W_K este viteza absolută a punctului omolog de pe cerc.

4.4. Transformarea mișcării în jurul unei surse, unui vârtej sau unui dublet

Să scriem, succesiv,

$$(4.50) \quad \begin{cases} w dz = u dx + v dy + i(u dy - v dx) = df = d\varphi + i d\psi \\ W d\zeta = U d\xi + V d\eta + i(U d\eta - V d\xi) = dF = d\Phi + i d\Psi; \end{cases}$$

partea reală a acestor expresiuni reprezintă lucrul mecanic al vitezei în lungul segmentului elementar ds , în planul z și în lungul segmentului corespunzător $d\sigma$, în planul ζ în timp ce partea imaginară reprezintă fluxul (sau debitul) care trece prin aceleași segmente ds și $d\sigma$.

Ținând seama de relația (4.48), se observă că lucrul mecanic elementar al vitezei, precum și fluxul elementar, se conservă și după transformare:

$$(4.51) \quad d\varphi = d\Phi, \quad d\psi = d\Psi.$$

Să considerăm acum un contur închis C în planul z și corespondentul său K în planul ζ ; integrarea după aceste contururi ne dă respectiv, circulația Γ în lungul conturilor și debitul Q care le traversează:

$$(4.52) \quad (\varphi)_C = (\Phi)_K = \Gamma, \quad (\psi)_C = (\Psi)_K = Q.$$

Dacă C și K reprezintă conturile care înconjoară respectiv două puncte corespondente în planele z și ζ , aceste relații arată că circulația și debitul din planul ζ se reproduc identic în punctele corespunzătoare (puncte omologe) din planul z .

Nu tot astfel se întâmplă și pentru un dublet; într'adevăr, un dublet este echivalent cu două surse sau cu două vârtejuri egale și de semne contrare, infinit apropiate. Fie dz și $d\zeta$ distanțele corespunzătoare infinit mici; am văzut că circulația și fluxul se conservă în urma unei transformări, însă momentul unui dublet fiind proporțional cu lungimile dz și $d\zeta$, care se corespund, avem relațiile:

$$(4.53) \quad \Gamma d\zeta = \mu, \quad \Gamma dz = m,$$

unde μ este momentul dubletului în valoare complexă în planul ζ și m momentul dubletului în valoare complexă în planul transformat z ; la limită se va putea scrie:

$$(4.54) \quad m = \mu \frac{dz}{d\zeta}.$$

Prin urmare, momentul dubletului situat într'un punct oarecare din planul z este egal cu momentul dubletului situat în punctul omolog din planul ζ , înmulțit cu derivata $\frac{dz}{d\zeta}$ din același punct.

4.5. Rezultanta presiunilor

Fie ds un arc elementar și p presiunea normală la acest element, îndreptată spre interiorul conturului. Forțele elementare după Ox și Oy vor fi respectiv (fig. 4.6):

$$(4.55) \quad \begin{cases} dR_x = -p ds \sin \alpha = -p dy, \\ dR_y = p ds \cos \alpha = p dx, \end{cases}$$

care se pot pune sub următoarea formă complexă:

$$(4.56) \quad dR = dR_x - i dR_y = -ip(dx - i dy) = -ip dz,$$

unde \bar{z} este valoarea conjugată a lui z ($\bar{z} = x - iy$).

Înlocuind p prin valoarea sa scoasă din formula lui BERNOULLI,

$$(4.57) \quad p + \frac{1}{2} \rho V^2 = p + \frac{1}{2} \rho (u^2 + v^2) = \text{ct.}$$

și integrând dealungul conturului, se obține:

$$(4.58) \quad R = \frac{i}{2} \rho \int_C V^2 dz = \frac{i}{2} \rho \int_C (u + iv)(u - iv) dz.$$

Conturul este o linie de curent și satisface prin urmare ecuația:

$$(4.59) \quad v dx - u dy = 0;$$

în acest caz, rezultă pentru punctele de pe contur, relația următoare:

$$(4.60) \quad \begin{aligned} (u + iv)(dx - idy) \\ = (u - iv)(dx + idy) \\ = \frac{df}{dz} dz, \end{aligned}$$

care va fi introdusă în (4.58), obținându-se astfel formula lui BLASIUS-CIAPLĂGHIN:

$$(4.61) \quad R = R_x - i R_y = \frac{i}{2} \rho \int_C \left(\frac{df}{dz} \right)^2 dz.$$

Dacă $f(z)$ nu este exprimată explicit în funcție de z , însă se cunoaște funcția de transformare $z = z(\zeta)$ precum și potențialul $F(\zeta)$ în planul ζ , formula precedentă devine:

$$(4.62) \quad R = \frac{i}{2} \rho \int_K \left(\frac{dF}{d\zeta} \right)^2 \frac{d\zeta}{dz} d\zeta,$$

unde integrala este luată dealungul conturului corespunzător K , transformatul lui C . De altfel, după teoria funcțiilor analitice, se poate extinde această integrală în jurul oricărui contur ce înfășoară pe K .

Să aplicăm expresia precedentă în cazul unui profil aerodinamic, unde mișcarea corespunzătoare din planul cercului va fi reprezentată prin

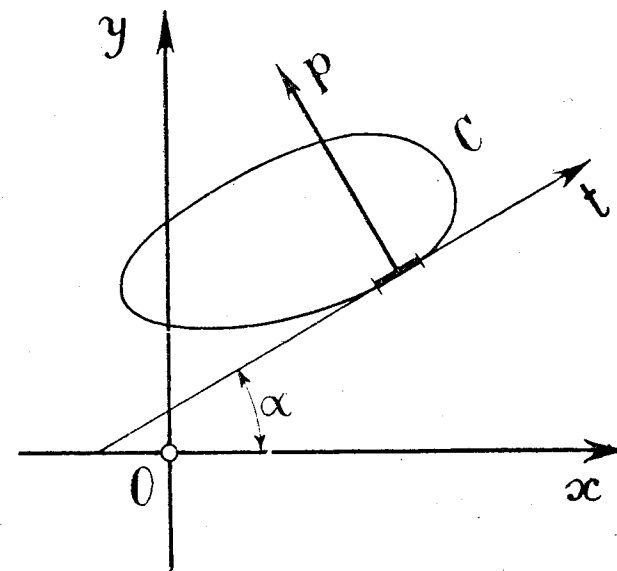


Fig. 4.6.

potențialul (4.45) și funcția de transformare prin expresia (4.43); termenii de sub semnul integralei vor fi înlocuiți așa dar, prin

$$(4.63) \quad \frac{d\zeta}{dz} = \frac{1}{1 - \frac{q^2}{\zeta^2} - 2\frac{q^2}{\zeta^3} - \dots - n\frac{q^n}{\zeta^{n+1}}} = 1 + \frac{q^2}{\zeta^2} + \frac{q^3}{\zeta^3} + \dots + \frac{q^n}{\zeta^n} + \dots$$

și

$$(4.64) \quad \frac{dF}{d\zeta} = -V_0 e^{i\alpha} + \frac{V_0 a^2 e^{-i\alpha}}{(\zeta - \mu)^2} - \frac{i\Gamma}{2\pi} \cdot \frac{1}{\zeta - \mu}$$

și, ținând seama de reziduul lui CAUCHY, această integrală devine în cele din urmă :

$$(4.65) \quad R = R_x - iR_y = \frac{i\rho}{2} \cdot \frac{2V_0 i\Gamma e^{i\alpha}}{2\pi} \cdot 2\pi i = -i\rho\Gamma V_0 e^{i\alpha}.$$

Acest rezultat este identic cu teorema lui KUTTA-JUCOVSKI pe care am găsit-o deja în paragraful precedent (3.21).

Prin urmare, rezultanta generală este proporțională cu densitatea, cu viteza și cu circulația; ea este normală pe direcția curentului la infinit și prin aceasta, ea este o forță deviatrice. Nu există deci o componentă paralelă cu viteza, ceea ce este de altfel conform cu paradoxul lui d'ALEMBERT; există totuși o forță paralelă cu viteza datorită frecării superficiale și mișcărilor perturbatoare și desordonate din spate, de care nu se ține seama pentru moment în ecuațiile generale ale mișcării.

Această forță pasivă, pe care o vom numi rezistența de formă va fi indicată prin R_0 .

În concluzie deci, prin aplicarea ecuațiilor generale ale mișcării, se găsește o singură forță, normală pe vitesă, care se numește portanță sau susținătoare și care va fi notată deseori prin P ; însă frecarea superficială și mișcărilor perturbatoare din spatele profilului dau naștere încă unei alte forțe, paralelă cu viteza, care este numită rezistență de formă.

4.6. Moment rezultat

Momentul elementar în raport cu originea (fig. 4.6) poate fi scris

$$(4.66) \quad dM = p(x dx + y dy) = \text{p.r.} (\bar{p}z \bar{d}z) = \text{p.r.} (iz dR),$$

de unde rezultă, integrând și ținând seama de rezultatele precedente, a doua formulă a lui BLASIUS-CIAPLĂGHIN :

$$(4.67) \quad M = \text{p.r.} \left(i \int_C z dR \right) = - \text{p.r.} \left[\frac{\rho}{2} \int_C z \left(\frac{df}{dz} \right)^2 dz \right].$$

La fel ca și pentru rezultanta generală, în cazul când mișcarea nu este cunoscută explicit în z , însă în schimb se cunoaște funcția de transformare $z = z(\zeta)$ și potențialul mișcării din planul ζ , expresia (4.67) devine :

$$(4.68) \quad M = - \text{p.r.} \left[\frac{\rho}{2} \int_K z(\zeta) \left(\frac{dF}{d\zeta} \right)^2 \frac{d\zeta}{dz} d\zeta \right].$$

Aceste formule, precum și cele ale rezultantei generale, au marele avantaj de a fi calculate prin metoda reziduurilor și prin urmare expresia de sub semnul integralei va fi redusă la termenii în $\frac{1}{\zeta}$.

Pentru un profil aerodinamic, generat din cerc prin transformarea (4.43), calculele ne conduc la următoarele rezultate succesive :

$$(4.69) \quad M = - \text{p.r.} \left[\frac{\rho}{2} \left(2V_0^2 q^2 e^{2i\alpha} - 2V_0^2 a^2 - \frac{\Gamma^2}{4\pi^2} + 2iV_0 \frac{\Gamma}{2\pi} \mu e^{i\alpha} \right) 2\pi i \right] \\ = 2\pi\rho V_0^2 q^2 \sin 2\alpha + \rho V_0 \Gamma m \cos(\alpha + \delta),$$

unde m și δ sunt respectiv modulul și argumentul lui μ , afixul centrului :

$$(4.70) \quad \mu = m e^{i\delta}.$$

4.7. Forța de aspirație în jurul unui vârf ascuțit

Fie ζ_0 punctul de pe cerc care corespunde unui unghi ascuțit α_0 pe contur. Considerând un număr $m \leq 2$, dat prin formula (4.37) în funcție de diedrul δ , și notând prin $h(\zeta)$ o funcție oarecare, se poate scrie, după (4.33),

$$(4.71) \quad \frac{dz}{d\zeta} = (\zeta - \zeta_0)^{m-1} h(\zeta),$$

care devine pentru valori mici ale lui $(\zeta - \zeta_0)$:

$$(4.72) \quad \frac{dz}{d\zeta} = (\zeta - \zeta_0)^{m-1} h(\zeta_0) = \\ = (\zeta - \zeta_0)^p h(\zeta_0)$$

cu $p = m - 1$. Să calculăm acum integrala (4.62) pentru un contur cu vârf ascuțit; pentru aceasta să trasăm în jurul punctului ζ_0 (fig. 4.7) un cerc mic de rază ρ_0 , cât mai mică posibilă și fie α_0 semicercul exterior. Să efectuăm integrala menționată, dealungul conturului circular $K - \alpha_0$ și α_0 ; după teorema lui CAUCHY, această integrală este egală cu integrala în jurul oricărui alt contur K_1 , înconjurând $K - \alpha_0$ și α_0 , dacă între aceste două contururi, nu există puncte singulare, după cum se întâmplă în cazul nostru. Se poate scrie deci, aplicând formula lui BLASIUS-CIAPLĂGHIN și ținând seama de (4.65) :

$$(4.73) \quad R = \int_{K-\alpha_0} + \int_{\alpha_0} = \int_{K_1} = -i\rho\Gamma V_0 e^{i\alpha}.$$

Să notăm prin $R' = R'_x - iR'_y$ rezultanta presiunilor pe contur, în afara regiunii infinit mică din jurul vârfului; să remarcăm pe de altă parte

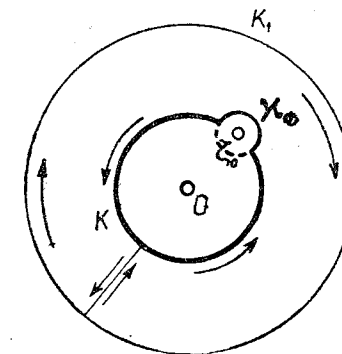


Fig. 4.7.

că integrala în jurul semicercului z_0 , pe care o vom nota cu S , înlocuind ζ prin valoarea sa mijlocie ζ_0 și ținând seama de (4.72), va fi:

$$(4.74) \quad S = i \frac{\rho}{2} \int_{z_0} \frac{(dF)^2}{(d\zeta)_{\zeta=\zeta_0}} \cdot \frac{1}{h(\zeta_0)} \cdot \frac{d\zeta}{(\zeta-\zeta_0)^p} = \\ = i \frac{\rho}{2} \left(\frac{dF}{d\zeta} \right)_{\zeta=\zeta_0}^2 \cdot \frac{1}{h(\zeta_0)} \left[\frac{(\zeta-\zeta_0)^{1-p}}{1-p} \right]_{z_0} = A \frac{\rho_0^{1-p}}{1-p},$$

de unde se vede că pentru $p < 1$ ($m < 2$) și pentru $\rho_0 \rightarrow 0$, această integrală este nulă. Deci, în acest caz, diedrul din vârf diferit de zero, integrala în lungul conturului circular K are un sens și formulele lui BLASIUS-CIAPLĂGHIN sunt valabile, cu toate că există un punct singular în ζ_0 .

Dacă $p = 1$ ($m = 2$), adică în cazul unui vârf ascuțit obținem în vârf o forță de aspirație egală cu

$$(4.75) \quad S = i \frac{\rho}{2} \int_{z_0} \frac{(dF)^2}{(d\zeta)_{\zeta=\zeta_0}} \cdot \frac{i\pi}{h(\zeta_0)} = \\ = -\rho \frac{\pi}{2h(\zeta_0)} \left[V_0 e^{i\alpha} - V_0 \frac{a^2 e^{-i\alpha}}{(\zeta_0 - \mu)^2} + \frac{i\Gamma}{2\pi(\zeta_0 - \mu)} \right]^2$$

și prin urmare rezultanta presiunilor pe contur, în afară de această forță de aspirație, va fi

$$(4.76) \quad R' = -i\rho\Gamma V_0 e^{i\alpha} - S.$$

Vom aplica aceste rezultate mai departe, în cazul mișcării în jurul unei plăci subțiri.

BIBLIOGRAFIA CAP. I

- 1) BIEBERBACH L.: Ueber die Konforme Kreisabbildung nahe zu Kreisförmigen Bereiche Sitzungsber. der Pr. Akad. d. W. 1924,
- 2) CARAFOLI E.: Aérodynamique des ailes d'avion. Chiron Editeur, Paris 1928
- 3) CIAPLĂGHIN S. A.: Culegere de opere, vol. II 1933.
- 4) COCIN N. E., CHIBEL I. A., ROZE N. V.: Hidrodinamica teoretică, vol. I, GTTI, 1948
- 5) FABRIKANT N. I.: Curs de Aerodinamică, 1938, Moscova.
- 6) GLAUERT H.: The Elements of Aerofoil and Airscrew Theory, Cambridge University Press, 2-e ed. London, 1930.
- 7) GOLUBEV V. V.: Lecțiuni din teoria aripei, Gosudarstvennii izdatel'stvo, tehnico-teoretic-scoi literatură, Moscova, Leningrad, 1949.
- 8) JUCOVSKI N. E.: Aérodynamique, 2-e édition. Gauthier-Villars Paris 1931.
- 9) JUCOVSKI N. E.: Lecțiuni de Hidrodinamică (culegere de opere, vol. II) Moscova, Leningrad.
- 10) MILNE-THOMSON L. M.: Theoretical Aerodynamics, Mac Millan, London 1948.
- 11) PERES J.: Cours de Mécanique des fluides, Gauthier-Villars, Paris 1936.
- 12) PISTOLESI E.: Aerodinamica, Unione-tipografica Editrice, Torino, 1942.
- 13) PRANDTL-TIETJENS: Hydro und Aeromechanik, Julius Springer, Berlin 1931.
- 14) VILLAT H.: Mécanique des Fluides, 2-e édition Paris, 1938.

CAPITOLUL II

TEORIA ARIPILOR MONOPLANE DE ANVERGURĂ INFINITĂ

Aripa de anvergură infinită este o suprafață cilindrică nelimitată a cărei deplasare, după direcția normală la generatoarea sa, impune fluidului înconjurător o mișcare plană paralelă pe care am studiat-o în primul capitol al acestei lucrări. Aripa reală este de anvergură limitată sau finită și nu este în general cilindrică; astfel că aripa de anvergură infinită trebuie concepută drept un caz ideal, al cărui studiu riguros și totuși ușor ne duce la soluții exacte, direct aplicabile și aripilor reale, în anumite ipoteze simplificatoare și abstracție făcând de câteva modificări ușoare. Vom face în cele ce urmează un studiu aprofundat al scurgerii plane în jurul unui contur rezultat din secțiunea normală făcută într-o astfel de aripă, studiu care este indicat de obicei sub denumirea: Teoria aripilor de anvergură infinită.

5. TEORIA PROFILELOR AERODINAMICE

5.1. Caracteristicile geometrice

Să presupunem că un contur oarecare se prezintă sub o formă alungită în raport cu direcția curențului, cu un vârf în spate, numit bord de ieșire, și o formă rotunjită în față, numită bord de atac. Acest contur, care este utilizat la generarea aripilor de avion sau a palelor unei elici, se numește, după cum am menționat deja mai sus, un profil aerodinamic (fig. 5.1).

Partea superioară a profilului se numește extrados, partea inferioară, intrados.

Bordul de ieșire joacă un rol primordial în explicarea susțentației; de aceea este necesar de precizat forma geometrică a vârfului dela bordul de ieșire. După această formă, se disting trei categorii de profile:

a) profile cu vârf ascuțit, dacă tangentele la intrados și la extrados se confundă, (profile JUCOVSKI, fig. 5.1 a).

b) profile cu vârf în diedru, dacă tangentele fac un unghi δ , diferit de zero (profile KÄRMÁN-TREFFTZ, MISES, fig. 5.1 b).

c) profile cu vârf rotunjit, dacă bordul de ieșire se termină printr'un contur rotunjit, având raza minimă de curbură extrem de redusă (profile CARAFOLI*) fig. 5.1.c).

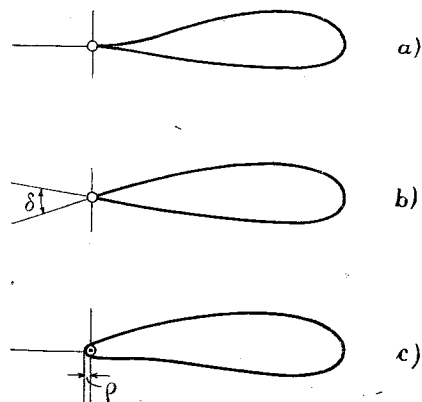


Fig. 5.1. a, b, c.

Axa profilului este dreapta care trece prin vârf și este dirijată în sensul lungimii maxime. Se poate considera drept axă, de exemplu dreapta BA , care indică lungimea maximă, sau chiar BA' , care este tangentă la intrados, sau oricare altă dreaptă care este apropiată ca direcție de aceste două axe astfel definite.

Grosimea profilului este măsurată pe normala la axă și va fi notată cu e . Această grosime variază în lungul coardei și atinge un maximum într'o secțiune, care se numește secțiunea maximă, situată la o distanță l de bordul de atac (fig. 5.3).

Grosimea relativă, grosimea relativă maximă, precum și poziția secțiunii maxime vor fi măsurate luând coarda drept unitate, sau vor fi indicate prin rapoartele următoare :

$$(5.1) \quad \varepsilon = \frac{e}{c}, \quad \varepsilon_m = \frac{e_m}{c}, \quad \lambda = \frac{l}{c}.$$

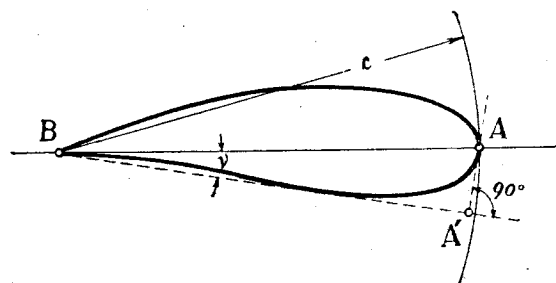


Fig. 5.2.

Celelalte caracteristici geometrice principale vor fi definite precum urmează.

Coarda sau profunzimea este raza cercului având vârful drept centru și fiind tangent în punctul A la profil. Acest punct este tocmai bordul de atac (fig. 5.2).

Este ușor de văzut că se poate lua drept coardă, proiecția profilului pe o axă oarecare trecând prin vârful profilului și având o direcție apropiată de aceea care indică profunzimea maximă. Într'adevăr, unghiul ν fiind foarte mic, lungimile BA și BA' sunt aproximativ egale. Coarda va fi notată în general prin c .

Scheletul unui profil este linia medie a grosimilor (fig. 5.4). Forma acestui schelet este un parametru geometric foarte important și este legat de noțiunea de curbură a profilului. Putem avea un profil cu curbură simplă (fig. 5.4 a) sau cu curbură dublă (fig. 5.4 b). Curbura profilului se măsoară de obicei prin rapoartele

$$(5.2) \quad k = \frac{h}{c}, \quad k_1 = \frac{h_1}{c}, \quad k_2 = \frac{h_2}{c},$$

unde h, h_1, h_2 sunt săgețile scheletului în raport cu axa formată de linia bordurilor de atac și ieșire.

Toate aceste forme diferite de profile pot fi obținute prin transformarea cercului cu ajutorul funcției

$$(5.3) \quad z' = \zeta' + \frac{q_1'}{\zeta'} + \dots + \frac{q_n'}{\zeta'^n}.$$

Am arătat că coeficientul lui $\frac{1}{\zeta}$ ar putea fi făcut real printr'o schimbare de axe, care nu dăunează generalității problemei, dar simplifică calculele momentului aerodinamic și trasarea profilului [3]. Astfel notând prin q^2 o constantă reală, vom scrie

$$(5.4) \quad q_1' = q^2 e^{2i\gamma}, \quad z' = z e^{i\gamma}, \quad \zeta' = \zeta e^{i\gamma}$$

și expresia (5.3) devine :

$$(5.5) \quad z = \zeta + \frac{q^2}{\zeta} + \frac{q_2}{\zeta^2} + \dots + \frac{q_n}{\zeta^n} + \dots$$

În figura 5.5 cele două sisteme de axe, Oxy din planul z și $O\xi\eta$ din planul ζ , sunt suprapuse și s'a ținut seama în reprezentarea profilului de această ultimă expresie (5.5).

5.2. Proprietăți aerodinamice

Am stabilit mai sus că mișcarea corespunzătoare din planul cercului este dată de expresia următoare a potențialului (4.45) :

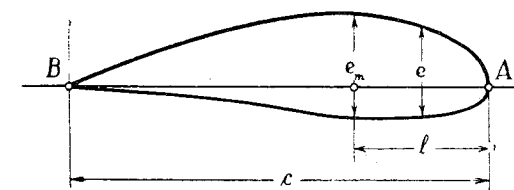


Fig. 5.3.

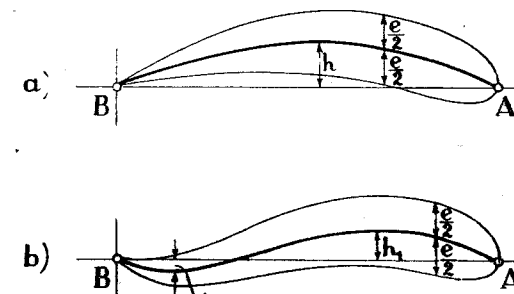


Fig. 5.4. a, b.

*) Această denumire a fost introdusă de diverși autori (19)

$$(5.6) \quad f(\zeta) = -V_0 \left[\zeta e^{i\alpha} + \frac{a^2 e^{-i\alpha}}{(\zeta - \mu)} \right] - \frac{i\Gamma}{2\pi} \ln(\zeta - \mu),$$

unde α este unghiul vitesei cu axa Ox , sau incidența, și μ este afixul lui M , centrul cercului generator (fig. 5.5):

$$(5.7) \quad \mu = me^{i\delta} = \overline{OM} e^{i\delta}.$$

Am văzut că rezultanta aerodinamică este normală pe curent (4.65); ea este numită *portanță* sau *sustentație* și este proporțională cu densitatea (ρ), cu viteza curentului (V_0) și cu circulația (Γ):

$$(5.8) \quad R = R_x - iR_y = -i\rho\Gamma V_0 e^{i\alpha}, \quad P = R_i = \rho V_0 \Gamma.$$

Tot astfel, momentul rezultat în raport cu originea are deasemenea o expresie simplă (4.69):

$$(5.9) \quad M = 2\pi\rho V_0^2 q^2 \sin 2\alpha + \rho V_0 \Gamma m \cos(\alpha + \delta).$$

Expresia momentului în raport cu M , centrul cercului generator, este încă mai simplă:

$$(5.10) \quad M(M) = M - P \cdot \overline{OM} \cos(\alpha + \delta) = 2\pi\rho V_0^2 q^2 \sin 2\alpha,$$

astfel încât presiunile pe profil se reduc la portanța P , normală pe curent și trecând prin M , și la un moment $M(M)$ în jurul acestui punct (fig. 5.5).

5.2.1. Determinarea circulației. Să notăm cu w_P viteza într'un punct de pe profil și W_k viteza în punctul corespunzător de pe cerc; vom avea relația stabilită deja mai sus (4.49):

$$(5.11) \quad w_P = \frac{W_k}{\left| \frac{dz}{d\zeta} \right|}.$$

La vârful profilului $\frac{dz}{d\zeta}$ este zero, prin urmare viteza devine infinită, ceea ce este incompatibil cu condițiile fizice ale scurgerii. Această scurgere teoretică s'ar prezenta ca în fig. 5.6 a. Pentru ca viteza să fie totuși finită la vârf, este necesar, după cum este ușor de văzut din formula precedentă, ca W_k să fie deasemenea nulă în același punct de pe cerc (unde $\frac{dz}{d\zeta}$ este nulă). Rezultă că punctul de pe cerc care corespunde vârfului profilului trebuie să fie un punct de viteză nulă.

Fie B acest punct și B' vârful profilului (fig. 5.5). Viteza într'un punct de pe cerc este dată de formula (4.5):

$$(5.12) \quad W_K = 2V_0 \sin \theta' + \frac{\Gamma}{2\pi} \cdot \frac{1}{a},$$

unde θ' este luat în raport cu un sistem de axe $M\zeta'\eta'$, paralel cu curentul și având drept origine centrul cercului. În punctul B , unde $\theta'_B = \pi + \alpha + \tau$, viteza este nulă; rezultă deci

$$(5.13) \quad \Gamma = -4\pi a V_0 \sin \theta'_B = 4\pi a V_0 \sin(\alpha + \tau)$$

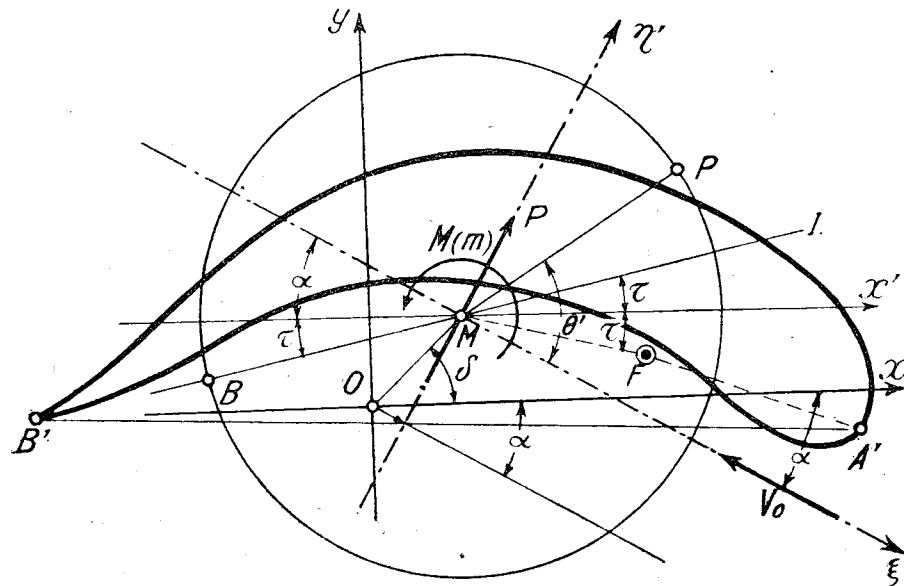


Fig. 5.5.

și prin urmare, circulația este complet determinată. Este tocmai formula lui JUCOVSKI, care, prin ipoteza făcută asupra imposibilității fizice a unei viteze infinite la vârf, ajunge să stabilească expresia circulației în funcție de incidența α a profilului, de viteza V_0 a curentului și de coarda profilului, care este proporțională cu a , după cum vom vedea în cele ce urmează. Noul aspect al curentului nu prezintă un înconjur la vârf (fig. 5.6 b).

Rezultă pentru portanță, expresia următoare:

$$(5.14) \quad P = \rho V_0 \Gamma = 4\pi\rho a V_0^2 \sin(\alpha + \tau).$$

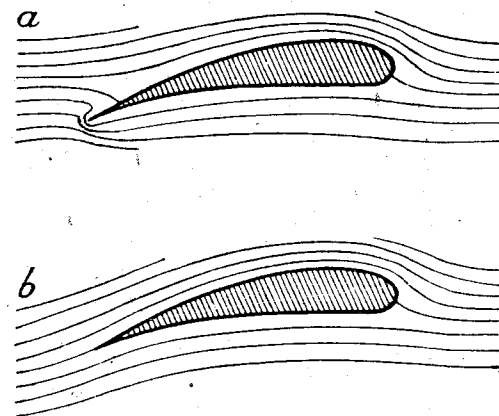


Fig. 5.6. a, b.

Când $\alpha = -\tau$, portanța este nulă. Dreapta BMI paralelă cu această direcție, se numește prima axă a profilului sau axa de portanță nulă.

Pentru $\alpha = 0$, momentul $M_{(M)}$ în raport cu centrul cercului este nul, după (5.10).

Prin analogie cu portanța, această direcție ($\alpha = 0$) care este evident direcția absciselor ($Ox, O\xi$) se numește axa de moment nul sau a doua axă a profilului.

5.2.2. Focarul profilului. Ca și portanța, momentul variază cu incidența. Există totuși un punct F față de care momentul este independent de incidență; acest punct se numește focarul profilului. Într-adevăr, fie MF o dreaptă simetrică cu MI față de Mx' și să luăm

$$(5.15) \quad \overline{MF} = \frac{q^2}{a},$$

momentul față de F va fi succesiv (fig. 5.5):

$$(5.16) \quad M_{(F)} = M - P \cdot \overline{MF} \cos(\alpha - \tau) = 2\pi\rho q^2 V_0^2 [\sin 2\alpha - 2 \sin(\alpha + \tau) \cos(\alpha - \tau)] = -2\pi\rho q^2 V_0^2 \sin 2\tau,$$

de unde se vede că expresia momentului față de F este independentă de poziția aripei.

Incidența pentru portanța nulă este $\alpha = -\tau$. Pentru această incidență, expresia (5.10) a momentului față de M , are aceeași valoare ca și cel în raport cu F ; din această cauză, momentul față de focar se numește momentul la portanță nulă și este notat de multe ori prin M_0 :

$$(5.17) \quad M_0 = M_{(F)}.$$

În practică, pentru încercările din laborator, momentul se măsoară față de bordul de atac, fie el A' . Rezultă imediat:

$$(5.18) \quad M_{(A')} = M_{(F)} - P \cdot \overline{FA'} \cos(\widehat{FA'}, V_0) \approx M_0 - P \cdot \overline{FA'}.$$

5.2.3. Parabolă metacentrică. Am văzut că rezultanta presiunilor pe profil este normală pe direcția curentului și trece printr-un punct F (focarul profilului); față de care momentul este egal cu $M_0 = -2\pi\rho q^2 V_0^2 \sin 2\tau$. Pentru aceeași poziție a aripei, există întotdeauna o dreaptă D , față de punctele căreia momentul rămâne nul. Această dreaptă este normală la vitesă și situată la o distanță d de F , definită prin relația

$$(5.19) \quad d = \frac{M_0}{P} = \frac{-2\pi\rho q^2 V_0^2 \sin 2\tau}{4\pi\rho a V_0^2 \sin(\alpha + \tau)} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{q^2}{a} \cdot \frac{\sin 2\tau}{\sin(\alpha + \tau)},$$

sau încă

$$(5.20) \quad d = \frac{\overline{MF}}{2} \cdot \frac{\sin 2\tau}{\sin(\alpha + \tau)}.$$

Prin urmare, momentul este nul față de toate punctele dreptei D și presiunile se reduc la portanța (P), care intersectează astfel coarda $B'A'$ a profilului în punctul C . Acest punct se numește centru de împingere. Să revenim la expresia (5.20) și să remarcăm că proiecția lui d pe o normală la axa de portanță nulă, fie NH , este constantă (fig. 5.7):

$$(5.21) \quad d \sin(\alpha + \tau) = \frac{1}{2} \overline{MF} \sin 2\tau = \frac{1}{2} \overline{NF} = \overline{NS} = d_0.$$

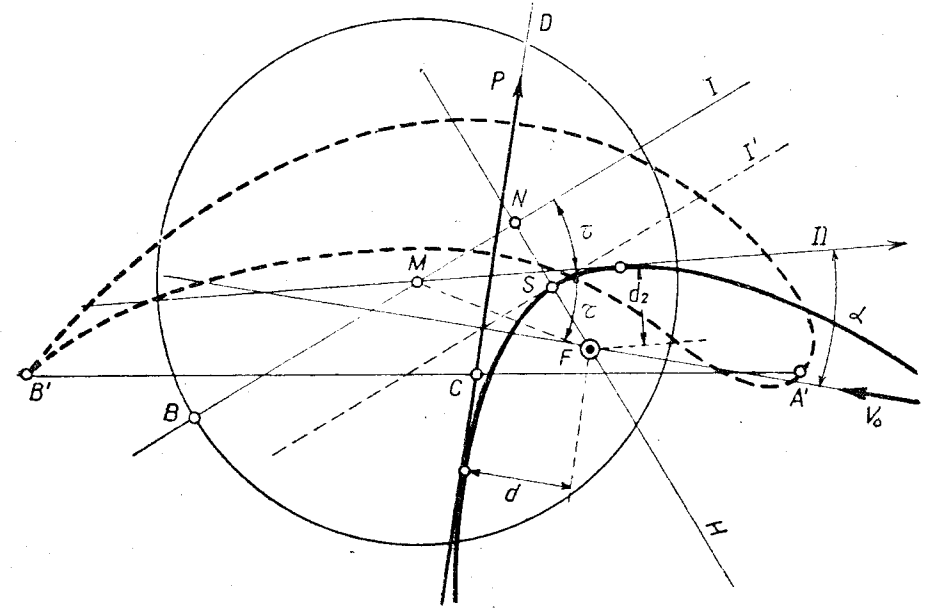


Fig. 5.7.

Această proprietate geometrică a dreptelor D ne arată că înfășurătoarea lor este o parabolă cu focarul în F , având axa de portanță nulă MNI drept directoare și mijlocul lui FN , fie S , drept vârf. Pe de altă parte, axa a doua trecând prin M (MII) este tangentă la această parabolă. Într-adevăr, notând cu $d_2 = \overline{MF} \sin \tau$ distanța de la focar la a doua axă și observând că unghiul de incidență este $\frac{\pi}{2}$, această distanță satisface aceeași condiție (5.20):

$$(5.22) \quad d_2 = \frac{\overline{MF}}{2} \cdot \frac{\sin 2\tau}{\sin\left(\frac{\pi}{2} + \tau\right)} = \overline{MF} \sin \tau.$$

5.3. Coeficienți unitari

Caracteristicile aerodinamice ale profilurilor sunt în general folosite sub forma coeficienților fără dimensiuni, (coeficienți unitari), care vor fi definiți după cum urmează, dacă însemnăm prin c profunzimea sau coarda profilului și prin $c \times 1 = c$ suprafața unei lungimi de aripă egală cu unitatea:

a) Coeficient unitar de portanță,

$$(5.23) \quad C_z = \frac{P}{\frac{\rho}{2} V_0^2 c} = 8\pi \frac{a}{c} \sin(\alpha + \tau).$$

b) Coeficient unitar de rezistență la înaintare. Am găsit că pentru fluidele perfecte, rezistența la înaintare (forță paralelă cu curentul) este nulă. Cu toate acestea, pentru fluidele reale, din cauza frecării pereților și a desprinderilor de pe extradados, în spate, rezultă o rezistență, care e numită rezistență de formă sau rezistență de profil și care este notată cu R_0 . Coeficientul unitar respectiv va fi:

$$(5.24) \quad C_{x_0} = \frac{R_0}{\frac{\rho}{2} V_0^2 c}$$

c) Coeficienții unitari ai momentului:

$$(5.25) \quad \begin{cases} C_{m_0} = \frac{M_0}{\frac{\rho}{2} V_0^2 c \cdot c} = -4\pi \frac{q^2}{c^2} \sin 2\tau, \\ C_{m(A)} = \frac{M(A)}{\frac{\rho}{2} V_0^2 c \cdot c} = -4\pi \frac{q^2}{c^2} \sin 2\tau - \frac{\overline{FA'}}{c} C_z. \end{cases}$$

Aceste expresii pot fi simplificate observând că unghiurile α și τ sunt foarte mici, abia de câteva grade, că profunzimea $c = \overline{A'B'}$ a aripei, după cum vom vedea din cele ce urmează, este aproximativ egală cu $c \approx 4q = 4a(1 - \varepsilon)$, unde ε variază între 0 și 7% pentru profilele curente și că $\overline{FA'} \approx 0,25c$. Introducând aceste simplificări, coeficienții unitari vor avea în cele din urmă următoarele expresii:

$$(5.26) \quad \begin{cases} C_z \approx 2\pi(1 + \varepsilon)(\alpha + \tau), \\ C_{m_0} \approx -\frac{\pi}{2} \tau = -0,0275 \tau^0, \\ C_m \approx C_{m_0} - 0,25 C_z. \end{cases}$$

5.4. Profile cu vârf rotunjit (profile Carafoli)*).

Am văzut mai sus că teoria lui JUCOVSKI cu privire la determinarea circulației în jurul unui profil este bazată pe existența unui vârf propriu zis, la bordul de fugă. Cu toate acestea, existența circulației în jurul oricărui contur alungit, cu sau fără vârf ascuțit, este o proprietate generală și este necesar în practică să determinăm această circulație, cel puțin pentru anumite profile folosite în mod curent.

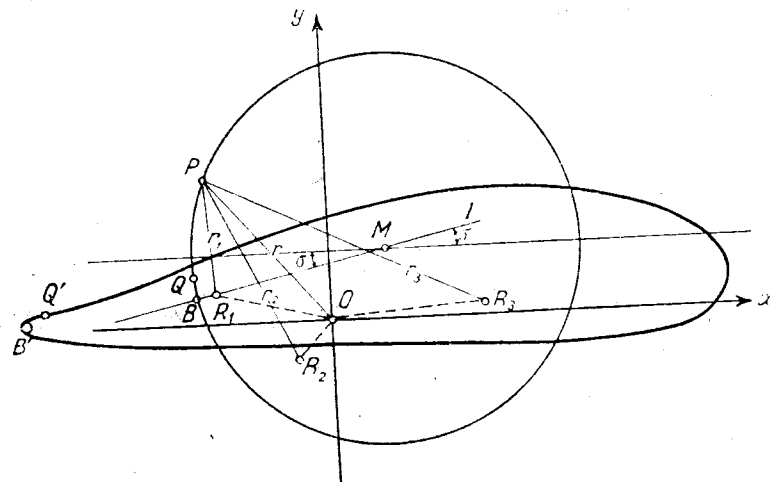


Fig. 5.8.

Astfel, de exemplu, pentru profilele utilizate la construcția palelor elicei (în special pentru elicele de lemn), sau chiar pentru profilele de aripă în anumite puncte ale anvergurei aripei, rațiuni de ordin constructiv impun un vârf rotunjit. Deaceia, apare necesar de analizat mai de aproape caracteristicile scurgerii în jurul unui vârf rotunjit și de dedus condițiile de echilibru pentru a determina punctul de viteză nulă de pe profil și de pe cerc și, prin aceasta însăși circulația. Fie pentru aceasta un profil cu vârf rotunjit, care nu diferă deloc de profilul teoretic al lui JUCOVSKI cu vârf ascuțit, decât prin însuși vârful. Este evident că derivata

$$(5.27) \quad \frac{dz}{d\zeta} = \left(1 - \frac{\zeta_1}{\zeta}\right) \left(1 - \frac{\zeta_2}{\zeta}\right) \dots \left(1 - \frac{\zeta_n}{\zeta}\right)$$

nu se anulează în niciun punct dinafara cercului și că, prin urmare, toate rădăcinile $\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_n$, se găsesc în interior. Pentru ca profilul să aibă totuși un vârf de ieșire subțiat, este necesar ca una din rădăcini, fie ζ_1 , să fie foarte apropiată de conturul circular, distanța R_1B (luată pe prelungirea razei MR_1), trebuind să fie foarte mică în raport cu raza cercului (fig. 5.8).

*) Această denumire a fost introdusă de diverși autori (19)

Viteza pe profil va fi dată tot de $w_p = \frac{W_k}{\left| \frac{dz}{d\zeta} \right|}$ și fie B punctul unde

devine minimum. Notând cu r_1, r_2, \dots, r_n , distanța dela un punct oarecare de pe cerc la rădăcinile R_1, R_2, \dots, R_n și prin r distanța dela acelaș punct la originea axelor, se poate pune

$$(5.28) \quad \left| \frac{dz}{d\zeta} \right| = \frac{r_1 \cdot r_2 \cdot \dots \cdot r_n}{r^n}$$

și deoarece, r_2, \dots, r_n, r păstrează sensibil o valoare constantă în jurul punctului B , se poate admite că minimum expresiei (5.28) are loc pentru r_1 minimum, adică pentru punctul B , intersecția cercului cu raza MR_1B . Punctul corespunzător de pe profil este B' ; acest punct ar reprezenta într'un fel, vârful rotunjit propriu zis, al profilului.

Să presupunem mai departe că punctul de viteză nulă de pe cerc ar fi în Q , corespunzător punctului Q' de pe profil. Viteza trece dela o foarte mare valoare în B' , la valoarea zero în Q' . Această variație bruscă a vitezei determină desprinderea*) curentului și echilibrul nu se stabilește decât atunci când punctul de viteză nulă este chiar în vârf, în B' , și prin urmare în B pe cerc. Prin aceasta, circulația este bine determinată, după cum am arătat în lucrările noastre anterioare [3]:

$$(5.29) \quad \Gamma = 4\pi a V_0 \sin(\alpha + \tau),$$

în așa fel că, pentru un profil rotunjit, problema constă în determinarea punctului B , care se găsește pe axa MR_1 . Celelalte caracteristici sunt aceleași ca acele ale profilelor cu vârf propriu zis.

Aceste profile fiind utilizate curent în practică, vom face mai departe un studiu aprofundat, privind în special trasarea lor.

6. CLASIFICAREA ȘI TRASAREA PROFILELOR

Cu ajutorul transformărilor (4.27) sau (4.43) se pot obține formele de profile susceptibile de a fi utilizate în practică. După forma pe care o are bordul de ieșire, profilele pot fi, cu vârf ascuțit, cu diedru sau cu vârf rotunjit. După numărul termenilor funcției de transformare sau după metoda prin care se determină coeficienții, q_1, q_2, \dots, q_n , vom considera câteva clase mari de profile aerodinamice, studiul acestora fiindu-ne util pentru aplicațiile în aviație.

*) Analiza desprinderii va fi făcută mai dezvoltat în studiul despre STRATUL LIMITĂ, care se formează la peretele corpului, ca urmare a frecării particulelor fluide datorită viscozității.

6.1. Profile Jucovschi

Acestea sunt profilele caracterizate prin transformarea simplă

$$(6.1) \quad z = \zeta + \frac{q^2}{\zeta}, \quad \frac{dz}{d\zeta} = \left(1 - \frac{q}{\zeta}\right) \left(1 + \frac{q}{\zeta}\right),$$

unde q este o constantă reală. Centrul cercului generator este așezat în M , în primul cadran (fig. 6.1). Să presupunem că vârful profilului corespunde pe cerc punctului B , $\zeta = -q$, unde derivata $\frac{dz}{d\zeta}$ se anulează; se vede, prin

aplicarea relațiilor (4.71) și (4.37), că diedrul din vârf este nul. Aceasta este o caracteristică a profilelor JUCOVSCHI. Înainte de a trata acest caz general, să trecem în revistă câteva cazuri particulare interesante, care au devenit clasice.

6.1.1 Placa subțire. Dacă centrul cercului generator este în origine și $q^2 = a^2$, a fiind raza cercului, se obține placa subțire (fig. 6.2). Într'adevăr, pentru punctele cercului ($\zeta = ae^{i\theta}$), vom avea:

$$(6.2) \quad z = \zeta + \frac{a^2}{\zeta} = ae^{i\theta} + ae^{-i\theta} = 2a \cos \theta$$

sau încă

$$(6.2 \text{ bis}) \quad x = 2a \cos \theta, \quad y = 0.$$

Grosimea este nulă. Când θ variază dela 0 la π , x variază dela $2a$ la $-2a$, coarda fiind egală, prin urmare, cu $c = 4a$. Semicercul ACB este reprezentat pe partea superioară a plăcii, $A'B'$, pe când semicercul ADB pe partea inferioară a plăcii. Prima axă se suprapune pe axa Ox ($\tau = 0$), această axă fiind în acelaș timp a doua axă a profilului. Rezultă caracteristicile următoare: focarul este în A , la un sfert din coardă, pornind dela bordul de atac:

$$(6.3) \quad A'A = a = 0,25 c.$$

Avem mai departe:

$$(6.4) \quad \begin{cases} C_z = 2\pi \sin \alpha \approx 2\pi\alpha, \\ C_{m0} = 0, \\ C_{m(A')} = -0,25 C_z. \end{cases}$$

Se vede deci că centrul de împingere este fix în A .

6.1.2. Aspirația dela bordul de atac al plăcii subțiri. În conformitate cu rezultatul general, care se aplică deasemenea și plăcii subțiri, rezultanta este normală pe curent și egală cu $\rho V_0 \Gamma$. Cu toate acestea, conform ipotezelor admise, abstracție făcând de frecare, presiunile sunt normale pe placă și rezultanta ar trebui să fie deasemenea normală pe placă. Nu este însă astfel

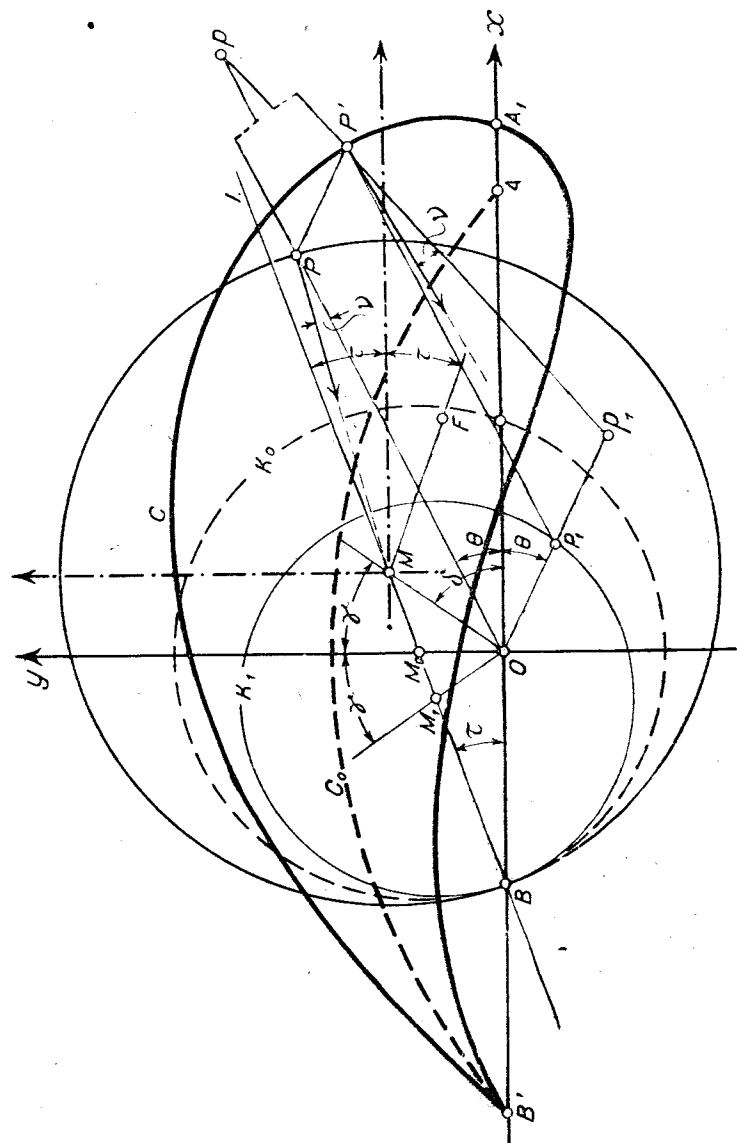


Fig. 6.1.

din cauza aspirației dela bordul de atac. Intr'adevăr, remarcând că avem, după (6.1),

$$(6.5) \quad \frac{dz}{d\zeta} = (\zeta - a) \frac{\zeta + a}{\zeta^2}$$

și că bordul de atac corespunde lui $\zeta_0 = a$ și prin urmare, după (4.72), vom avea deasemenea

$$(6.6) \quad h(\zeta_0) = \frac{\zeta_0 + a}{\zeta_0^2} = \frac{2}{a}$$

și

$$(6.7) \quad \left(\frac{dF}{d\zeta}\right)_{\zeta=a}^2 = -16V_0^2 \sin^2 \alpha,$$

se găsește la vârful din față al plăcii, o forță de aspirație, care are următoarea valoare dedusă din (4.75):

$$(6.8) \quad S = 4\pi\rho V_0^2 a \sin^2 \alpha = \rho V_0 \Gamma \sin \alpha.$$

De aci urmează că rezultanta R' (abstracție făcând de aspirație) este o forță normală pe placă și are următoarea expresie după (4.76):

$$(6.9) \quad R' = R'_x - iR'_y = -i\rho\Gamma V_0 e^{i\alpha} - S = -i\rho V_0 \Gamma \cos \alpha,$$

ceea ce ar corespunde realității fizice dacă placa ar putea fi perfect subțire.

În realitate însă bordul de atac nu este un vârf perfect ascuțit și placa are întotdeauna o grosime finită; pe de altă parte, este posibil să se producă o scurgere asemănătoare celeia reprezentată în fig. 6.3, astfel că placa subțire se poate asemana cu un profil având bordul de atac gros și rotunjit. Desprinderea locală, care ar lua astfel naștere la extradodusul vârfului din față, completează această imagine.

6.1.3. Arc de cerc. Dacă centrul se găsește pe axa ordonatelor, în M , se obține un arc de cerc (fig. 6.4). Fie $m = OM$ și $q = OB$, punctul B ($\zeta = -q$) corespunde vârfului B' al profilului ($z = -2q$); punctul simetric A ($\zeta = q$) corespunde bordului de atac A' ($z = +2q$), care este deasemenea un vârf ascuțit. Profunzimea sau coarda, fie c , este egală cu $4q$. Pentru raza cercului, vom avea

$$(6.10) \quad a = \sqrt{q^2 + m^2} = q \sqrt{1 + \frac{m^2}{q^2}} \approx q \left(1 + \frac{1}{2} \frac{m^2}{q^2}\right).$$

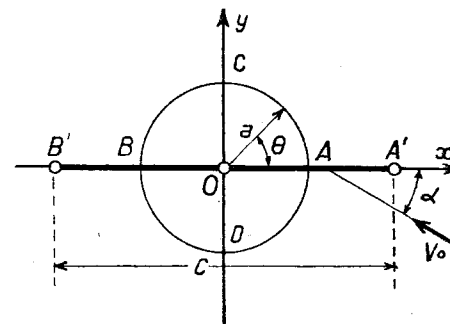


Fig. 6.2.

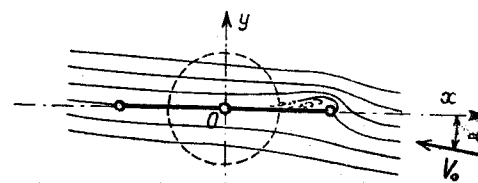


Fig. 6.3.

Deoarece m este mic în raport cu q , se poate considera $a \approx q$. Focarul este aproximativ în A într'adevăr, după (5.15), vom avea succesiv :

$$(6.11) \quad \overline{MF} = \frac{q^2}{a} = \frac{a^2 - m^2}{a} = a \left(1 - \frac{m^2}{a^2} \right) \approx a = \overline{MA}.$$

Pentru a demonstra că profilul este un arc de cerc, vom remarca mai întâi că funcția de transformare (6.1) poate fi pusă sub forma

$$(6.12) \quad \frac{z - 2q}{z + 2q} = \frac{(\zeta - q)^2}{(\zeta + q)^2}.$$

În acest caz, pentru un punct P de pe cerc, corespunzător unui punct P' de pe profil, se va putea scrie

$$(6.13) \quad \frac{r_1 e^{i\sigma_1}}{r_2 e^{i\sigma_2}} = \left(\frac{\rho_1 e^{i\sigma_1}}{\rho_2 e^{i\sigma_2}} \right)^2,$$

de unde rezultă

$$(6.13 \text{ bis}) \quad s_1 - s_2 = 2(\sigma_1 - \sigma_2), \\ s = 2\sigma.$$

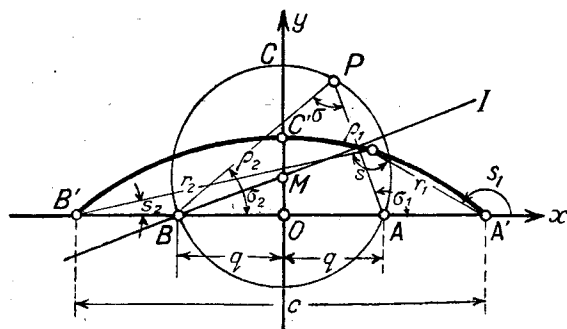


Fig. 6.4.

Prin urmare unghiul s , sub care se vede segmentul $A'B'$, este constant, σ fiind de asemenea constant; rezultă că arcul $A'C'B'$ este un arc de cerc, având $t = \overline{OC'}$ drept săgeată, a cărei valoare va fi dedusă ușor, după cum urmează :

$$(6.14) \quad it = i \cdot \overline{OC'} = i \cdot \overline{OC} + \frac{q^2}{i \cdot \overline{OC}} = i \left(a + m - \frac{a^2 - m^2}{a + m} \right) = 2im.$$

Prima axă a profilului sau axa de portanță nulă face un unghi τ cu coarda $A'B'$ (sau axa Ox), definit prin relația :

$$(6.15) \quad \operatorname{tg} \tau \approx \tau = \frac{m}{q} = \frac{2 \cdot \overline{OC'}}{c} = \frac{2t}{c} = \bar{f}.$$

De asemenea, raza profilului va fi legată de săgeată prin expresia

$$(6.16) \quad R^2 = (R - t)^2 + 4q^2,$$

de unde se poate scoate explicit raza sau săgeata :

$$(6.17) \quad R = \frac{t^2 + 4q^2}{2t}, \quad t = R - R \sqrt{1 - \frac{4q^2}{R^2}} \approx \frac{c^2}{8R}.$$

În sfârșit, putem stabili următoarele caracteristici aerodinamice :

$$(6.18) \quad \begin{cases} C_z = 2\pi \frac{a}{q} \sin(\alpha + \tau) \approx 2\pi(\alpha + \tau), \\ C_{m_0} = -\frac{\pi}{4} \sin 2\tau \approx -\frac{\pi}{2} \tau = -\frac{1}{57,3} \cdot \frac{\pi}{2} \tau^0, \\ C_m = C_{m_0} - 0,25 C_z. \end{cases}$$

6.1.4. Cazul general al profilului Jucovski. Centrul cercului generator se găsește în primul cadran, în M , de afix $me^{i\delta}$, unde $m = \overline{OM}$ (fig.6.1). Dreapta \overline{BM} , care face unghiul τ cu Ox , este axa de portanță nulă. Fie M_0 intersecția lui \overline{BM} cu Oy și să punem $m_0 = \overline{OM_0}$; vom avea

$$(6.19) \quad \operatorname{tg} \tau = \frac{m_0}{q} = f.$$

Aceeași valoare corespunde pentru arcul de cerc $B'A_0$ transformatul cercului K_0 , de rază $a_0 = \overline{BM_0}$. Este interesant de văzut că punctele cuprinse între cercurile K_0 și K corespund punctelor cuprinse între conturul C al profilului și arcul C_0 .

Acest arc este numit scheletul profilului JUCOVSKI. Punctele A' și B' , extremitățile coardei, corespund respectiv punctelor A ($\zeta = q + 2m \cos \delta$) și B ($\zeta = -q$) de pe cerc, în așa fel încât coarda totală $c = \overline{A'B'}$ va avea următoarea valoare :

$$(6.20) \quad c = \left(\zeta + \frac{q^2}{\zeta} \right)_B^A = q + 2m \cos \delta + \frac{q^2}{q + 2m \cos \delta} + 2q \approx 4q \left(1 + \frac{m^2}{q^2} \cos^2 \delta \right) \approx 4q.$$

Raza cercului generator se deduce succesiv, precum urmează :

$$(6.21) \quad a = \overline{BM} = \sqrt{q^2 + m^2 + 2qm \cos \delta} = q \sqrt{1 + 2 \frac{m}{q} \cos \delta + \frac{m^2}{q^2}} \approx q + m \cos \delta.$$

Focarul se găsește pe dreapta \overline{MF} , făcând unghiul 2τ cu \overline{BM} , la distanța \overline{MF} de M :

$$(6.22) \quad \overline{MF} = \frac{q^2}{a} \approx q \left(1 - \frac{m}{q} \cos \delta + \frac{m^2}{q^2} \cos^2 \delta \right).$$

În raport cu bordul de ieșire, focarul se găsește la distanța

$$(6.23) \quad \overline{B'F} \approx 2q + m \cos \delta + q - m \cos \delta + q \frac{m^2 \cos^2 \delta}{q^2} \approx \frac{3}{4} c \left(1 - \frac{2m^2}{3q^2} \cos^2 \delta \right).$$

iar în raport cu bordul de atac, la distanța

$$(6.23 \text{ bis}) \quad \overline{A'F} = \frac{c}{4} \left(1 + 2 \frac{m^2}{q^2} \cos^2 \delta \right).$$

Dacă centrul M se găsește pe axa absciselor, este ușor de văzut că profilul ce rezultă este **biconvex simetric**.

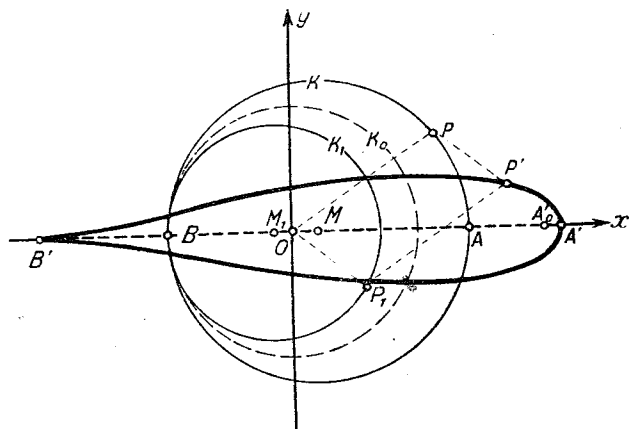


Fig. 6.5.

Să însemnăm mai departe cu μ^* un coeficient definit astfel încât

$$(6.24) \quad \overline{M_0M} = \mu q \approx m \cos \delta;$$

în acest caz, rezultatele precedente vor putea fi puse în funcție de μ :

$$(6.25) \quad \begin{cases} c = 4q(1 + \mu^2) \approx 4q, \\ a \approx q(1 + \mu), \\ \overline{MF} = q(1 - \mu + \mu^2) \approx q(1 - \mu), \\ \overline{A'F} = \frac{c}{4} (1 + 2\mu^2) \approx \frac{c}{4} \end{cases}$$

Despre grosimea maximă a profilului și poziția secțiunii frontale maxime vom vorbi mai târziu, dintr'un punct de vedere mai general.

Vom da totuși rezultatele principale ale acestui studiu. Astfel, de exemplu, grosimea relativă maximă este dată de formula următoare (pe care o vom stabili, de altfel, mai departe (8.19)):

$$(6.26) \quad \varepsilon_m = \frac{e_m}{c} = 1,3 \mu \left(1 - \frac{3}{4} \mu \right),$$

*) Să nu se confunde acest coeficient cu afixul centrului M , pe care noi l-am notat deasemenea cu μ și care a fost introdus în expresia potențialului (5.6).

de unde se scoate μ în funcție de ε_m :

$$(6.27) \quad \mu \approx \frac{0,77 \varepsilon_m}{1 - 0,6 \varepsilon_m}$$

Poziția secțiunii frontale maxime rămâne aproximativ invariabilă, la un sfert de coardă, începând dela bordul de atac. Aceasta este o caracteristică generală a profilelor JUCOVSKI.

În sfârșit, se poate concluce că proprietățile geometrice ale profilului depind de următorii parametri:

$$\frac{\overline{OM_0}}{q} = \operatorname{tg} \tau = f \text{ definește curbura,}$$

$$\frac{\overline{M_0M}}{q} = \mu \text{ definește grosimea maximă relativă.}$$

Rezultă în funcție de acești parametri caracteristicile aerodinamice corespunzătoare:

$$(6.28) \quad \begin{cases} C_z = 2\pi \frac{a}{q} \sin(\alpha + \tau) \approx 2\pi (1 + \mu) (\alpha + \tau), \\ C_{m_0} = -4\pi \frac{q^2}{c^2} \sin 2\tau \approx -\frac{\pi}{2} (1 - 2\mu^2) \tau \approx -\frac{\pi}{2} \tau, \\ C_m = C_{m_0} - 0,25 (1 + 2\mu^2) C_z. \end{cases}$$

6.1.5. Trasarea profilelor Jucovski. Metoda grafică de trasare datorită lui TREFFTZ ne permite să construim foarte ușor profilele JUCOVSKI. Această metodă este bazată pe o transformare intermediară, și anume, aceea a inversiunii cercului.

Intr'adevăr, transformarea

$$(6.29) \quad \zeta_1 = \frac{q^2}{\zeta},$$

care este numită **inversiune**, face să corespundă cercului generator K un alt cerc K_1 , trecând prin punctul B ($\zeta = -q$), cu centrul în M_1 , punct de intersecție al dreptei OM_1 , simetrică dreptei OM față de Oy , cu dreapta BM (fig. 6. 1). Raza $\overline{M_1B}$ a cercului transformat, fie a_1 , va fi dată de formula

$$(6.30) \quad \overline{M_1B} = a_1 = \frac{q^2}{a^2 - m^2} a = \frac{q}{q + 2m \cos \delta} \approx \frac{a}{1 + 2\mu}.$$

Demonstrația va fi făcută mai târziu pentru cazul general (6.69), la care exemplul de față constituie un caz particular.

Unui punct P de pe cercul K îi corespunde un punct P_1 de pe cercul K_1 (fig. 6.1 și 6.5), situat pe o dreaptă OP_1 , simetrică cu dreapta OP față de Ox ; se găsește, într'adevăr:

$$(6.31) \quad \zeta_1 = \frac{q^2}{\zeta} = \frac{q^2}{OP \cdot e^{i\theta}} = \overline{OP_1} \cdot e^{-i\theta}$$

Să revenim la transformarea (6.1) și să remarcăm că punctul P' de pe conturul transformat este suma geometrică OP și OP_1 :

$$(6.32) \quad z = \zeta + \frac{q^2}{\zeta} = \overline{OP} \cdot e^{i\theta} + \overline{OP_1} \cdot e^{-i\theta} = \overline{OP'} \cdot e^{i\theta'}$$

Așa dar, trasarea unui profil JUCOVSKI devine foarte simplă, de îndată ce s'au fixat caracteristicile geometrice ce trebuie obținute:

— curbura definită prin $f = \frac{\overline{OM}_0}{OB} = \frac{m_0}{q}$ și

— grosimea maximă relativă care ne permite să calculăm $\overline{M_0M}$:

$$\frac{\overline{M_0M}}{q} = \frac{0,77 \varepsilon_m}{1 - 0,60 \varepsilon_m}$$

Se ia deci \overline{OM}_0 pe Oy , se duce dreapta BM_0M , se ia M_0M pe această dreaptă și se fixează astfel centrul M al cercului generator.

Se duce apoi dreapta OM_1 , simetrică cu dreapta OM față de Oy , și se găsește centrul M_1 al cercului auxiliar K_1 . Din acest moment, construcția profilului este imediată; se formează paralelogramul POP_1P' și se găsește astfel punctul P' al profilului, omologul punctului P de pe cerc.

Pentru a construi normala în același punct P' , trebuie observat întâi că raza vectorie OP din planul cercului se transformă într'o iperbolă în planul profilului; într'adevăr, pentru un punct oarecare al razei vectorie ($\zeta = re^{i\theta}$), vom avea, aplicând (6.1),

$$(6.33) \quad x + iy = re^{i\theta} + \frac{q^2}{r} e^{-i\theta} = \left(r + \frac{q^2}{r}\right) \cos \theta + i \left(r - \frac{q^2}{r}\right) \sin \theta,$$

de unde rezultă iperbolele omofocale, cu focarele în B' ($\overline{OB'} = -2q$) și A'_0 ($\overline{OA'_0} = 2q$):

$$(6.34) \quad \left(\frac{x}{2q \cos \theta}\right)^2 - \left(\frac{y}{2q \sin \theta}\right)^2 = 1.$$

Normala dusă la cerc în punctul P face unghiul ν cu raza vectorie. Acest unghi se păstrează prin transformare în planul profilului, între normala dusă în P' la profil și iperbola dedusă prin transformarea razei vectorie OP . Normala dusă la iperbolă în același punct este dreapta pp_1 , p și p_1 fiind pe dreptele OP și OP_1 , cu $\overline{Op} = 2\overline{OP}$ și $\overline{Op_1} = 2\overline{OP_1}$.

6.1.6. Distribuția de viteze pe profil. O altă problemă importantă, care se pune tot timpul în practică, este distribuția presiunilor pe profil. Pentru aceasta, este necesar să se cunoască distribuția vitezelor. Am văzut că viteza w_p de pe profil se deduce din viteza W_K de pe cerc după formula (4.49):

$$(6.35) \quad w_p = \frac{W_K}{\left| \frac{dz}{d\zeta} \right|},$$

unde W_K poate fi determinată grafic după cum urmează (fig. 6.6). Într'adevăr, indicând prin V_0 , viteza dela infinit și prin \overline{PN} , distanța dela punctul P (omolog punctului P' de pe profil) la dreapta BN , paralelă cu viteza V_0 , prin aplicarea formulei (4.12), se obține relația următoare:

$$(6.36) \quad W_K = 2V_0 [\sin(\theta' + \alpha) + \sin(\alpha + \tau)] = 2V_0 \frac{\overline{PR} + \overline{RN}}{a} = 2V_0 \frac{\overline{PN}}{a}$$

Se găsește deasemenea și pentru $\frac{dz}{d\zeta}$ o construcție grafică foarte simplă:

$$(6.37) \quad \left| \frac{dz}{d\zeta} \right| = \left| 1 - \frac{q^2}{\zeta^2} \right| = \left| \frac{1}{\zeta} \cdot \left(\zeta - \frac{q^2}{\zeta} \right) \right| = \frac{\overline{P_1P}}{\overline{OP}}$$

Urmează mai departe

$$(6.38) \quad \frac{w_p}{V_0} = 2 \frac{\overline{PN}}{a} \cdot \frac{\overline{OP}}{\overline{PP_1}}$$

de unde rezultă distribuția presiunilor pe profil:

$$(6.39) \quad C_p = \frac{p - p_0}{\frac{\rho}{2} V_0^2} = 1 -$$

$$- \frac{w_p^2}{V_0^2} = 1 - 4 \left(\frac{\overline{PN}}{a} \cdot \frac{\overline{OP}}{\overline{PP_1}} \right)^2$$

6.2. Profile cu diedru la vârf (profile Kàrmàn-Trefftz)

Am văzut mai sus că profilele JUCOVSKI, care pot fi puse sub forma (6.12)

$$\frac{z - 2q}{z + 2q} = \left(\frac{\zeta - q}{\zeta + q} \right)^2,$$

au un diedru nul la vârf.

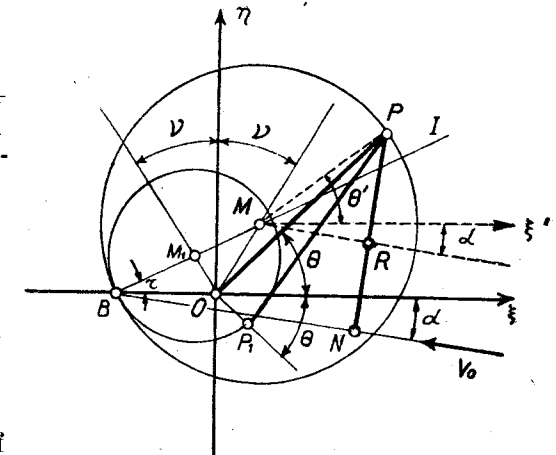


Fig. 6.6.

Să considerăm acum, prin analogie cu această expresie, o transformare puțin modificată :

$$(6.40) \quad \frac{z - \alpha q}{z + \alpha q} = \left(\frac{\zeta - q}{\zeta + q} \right)^k,$$

care trebuie să satisfacă condiția $\left(\frac{dz}{d\zeta} \right)_{\infty} = 1$, pentru ca cele două domenii să se suprapună la infinit și ca transformarea să fie de tipul (5.5). Această condiție este îndeplinită dacă $\alpha = k$; într'adevăr, pentru z , respectiv ζ , destul de mari, se poate scrie succesiv :

$$(6.41) \quad \frac{z}{\alpha q} = \frac{(\zeta + q)^k + (\zeta - q)^k}{(\zeta + q)^k - (\zeta - q)^k} =$$

$$\frac{\zeta^k + \frac{k(k-1)}{1 \cdot 2} \frac{q^2}{\zeta^2} \zeta^k + \dots}{k \frac{q}{\zeta} \zeta^k + \frac{k(k-1)(k-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \frac{q^3}{\zeta^3} \zeta^k + \dots}$$

sau încă :

$$(6.42) \quad z = \frac{\alpha}{k} \left(\zeta + \frac{\alpha^2 - 1}{3} \frac{q^2}{\zeta} + \dots \right),$$

de unde se vede că coeficienții α și k sunt egali. Prin urmare, profilele KAR-MAN-TREFFTZ cu diedru la vârf vor fi reprezentate prin transformarea

$$(6.43) \quad \frac{z - \alpha q}{z + \alpha q} = \left(\frac{\zeta - q}{\zeta + q} \right)^\alpha,$$

pe care o vom aplica mai jos la câteva cazuri particulare.

6.2.1. Profilul în semilună. Să presupunem că transformarea (6.43) se aplică unui cerc, având centrul pe axa Oy , în M . Rezultă ușor relațiile următoare (fig. 6.7) :

$$(6.44) \quad \begin{cases} \frac{r_1 e^{i s_1}}{r_2 e^{i s_2}} = \left(\frac{\rho_1 e^{i \sigma_1}}{\rho_2 e^{i \sigma_2}} \right)^\alpha, & \frac{r_1' e^{i s_1'}}{r_2' e^{i s_2'}} = \left(\frac{\rho_1' e^{i \sigma_1'}}{\rho_2' e^{i \sigma_2'}} \right)^\alpha, \\ s_1 - s_2 = s = \alpha(\sigma_1 - \sigma_2) = \alpha \sigma, \\ s_1' - s_2' = s' - 2\pi = \alpha(\sigma_1' - \sigma_2') = \alpha(-\sigma') = -\alpha(\pi - \sigma). \end{cases}$$

Arcele σ și σ' fiind constante, s și s' sunt de asemenea constante și prin urmare, arcele $A'C'B'$ și $A'D'B'$, corespunzătoare respectiv arcelor ACB

și ADB ale cercului generator, sunt de asemenea arce de cerc care formează la extremități un diedru :

$$(6.45) \quad \delta = s' - s = 2\pi - \alpha(\pi - \sigma) - \alpha\sigma = (2 - \alpha)\pi.$$

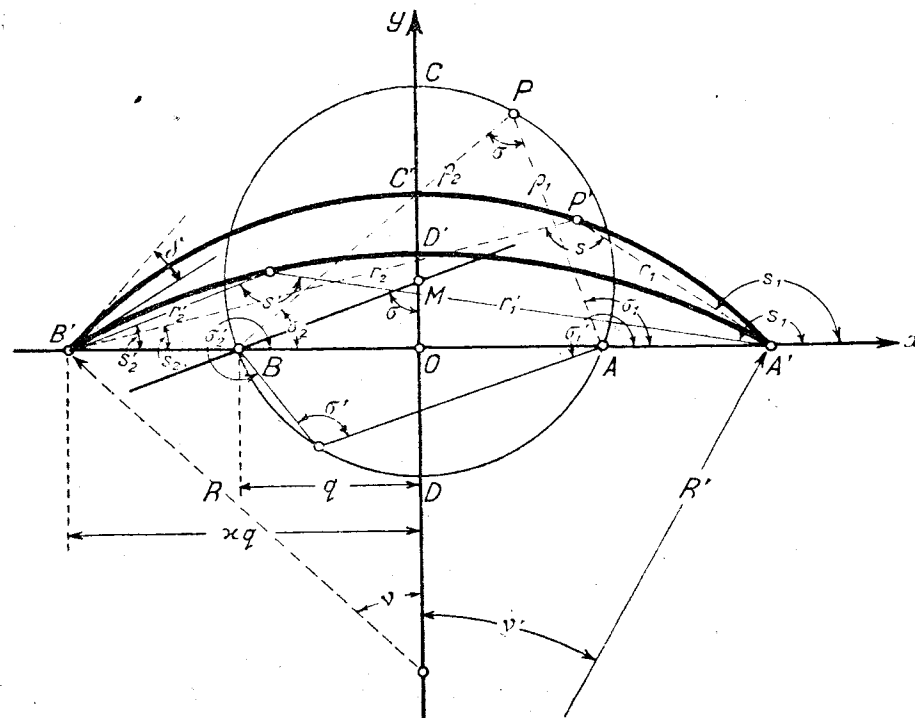


Fig. 6.7.

Se găsește de altfel același rezultat, dezvoltând (6.43) în jurul lui $z = \alpha q$ și $\zeta = q$ și aplicând formulele (4.33), (4.34) și (4.37), unde m este înlocuit aici prin α .

Pentru a trasa arcele care formează profilul în semilună, este suficient să determinăm razele R și R' , după formulele :

$$(6.46) \quad R = \frac{\alpha q}{\sin s} = \frac{\alpha q}{\sin \alpha \sigma}, \quad R' = \frac{\alpha q}{\sin s'} = \frac{\alpha q}{\sin \alpha \sigma'}.$$

Notând mai departe prin ν și ν' unghiurile făcute de arcele semilunii cu coarda și remarcând pe de altă parte că avem

$$(6.47) \quad \begin{cases} \sigma = \frac{\pi}{2} - \tau, \\ \sigma' = \frac{\pi}{2} + \tau, \end{cases}$$

vom putea scrie următoarele relații:

$$(6.48) \quad \begin{cases} v = \pi - s = \pi - \alpha\sigma = 2\tau \left(1 - \frac{\delta}{2\pi}\right) + \frac{\delta}{2}, \\ v' = \pi - s' = -\pi + \alpha\sigma' = 2\tau \left(1 - \frac{\delta}{2\pi}\right) - \frac{\delta}{2} = v - \delta. \end{cases}$$

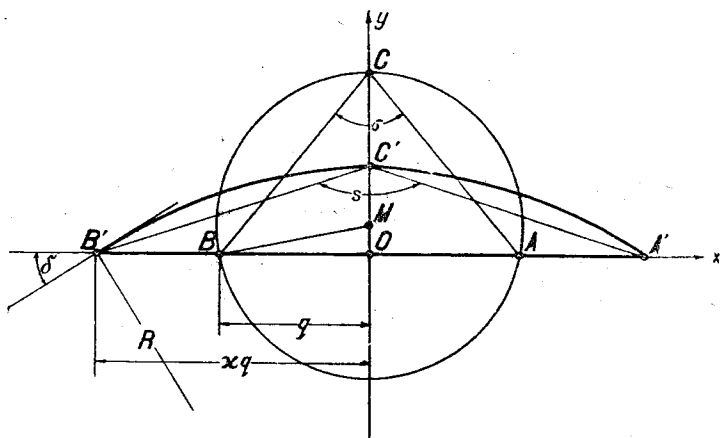


Fig. 6.8.

care, împreună cu (6.42), vor ajuta la determinarea caracteristicilor geometrice ale profilelor în semilună. Se pot obține în același mod diverse alte profile cu diedru făcând să varieze poziția centrului pe Oy , păstrând even-

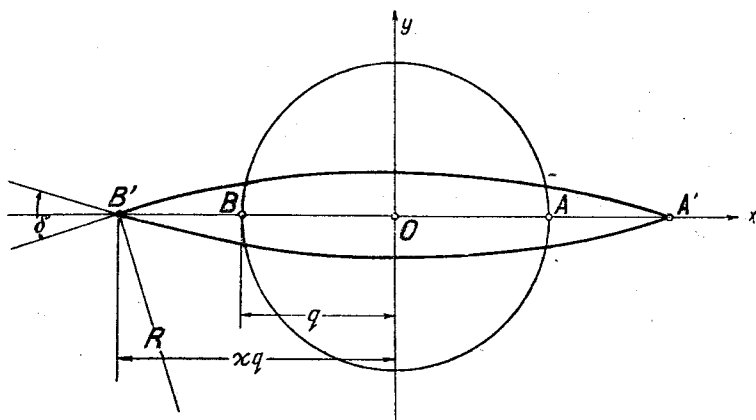


Fig. 6.9.

tual același diedru la vârf. Astfel, de exemplu, arcul inferior ar putea fi redus la o dreaptă (fig. 6. 8).

Pentru a trasa cercul generator, se determină α , după (6.45), se calculează q și se găsește astfel punctul B al cercului generator. Unghiul s este egal cu $\pi - \delta$ și σ este egal cu $\frac{\pi}{2} - \tau$; ținând seama de relația $s = \alpha\sigma$ (6.44) și înlocuind δ prin valoarea scoasă din (6.45), se găsește:

$$(6.49) \quad \tau = \frac{(2 - \alpha)\pi}{2\alpha} = \frac{\delta}{2\alpha},$$

de unde rezultă centrul M al cercului și axa de portanță nulă a profilului.

Figura 6.9 reprezintă un profil lentiform, care este susceptibil de a fi folosit pentru vitezele mari supersonice, pentru avantajele pe care le prezintă în ceea ce privește rezistența la vitezele mari.

6.2.2. Caz general. În cazul general, centrul cercului generator se găsește în M , în primul cadran (fig. 6.10). Vom avea, prin aplicarea transformării (6.43),

$$(6.50) \quad \frac{r_1}{r_2} = k = \left(\frac{\rho_1}{\rho_2}\right)^\alpha, \quad s = \alpha\sigma,$$

nsă trebuie remarcat că σ nu mai este constant și prin urmare nici s . Pentru a trasa profilul, vom pune funcția de transformare sub forma:

$$(6.51) \quad \frac{z}{\alpha q} = \frac{(\zeta + q)^\alpha + (\zeta - q)^\alpha}{(\zeta + q)^\alpha - (\zeta - q)^\alpha} = \frac{1 + \left(\frac{\zeta - q}{\zeta + q}\right)^\alpha}{1 - \left(\frac{\zeta - q}{\zeta + q}\right)^\alpha} = \frac{1 + k e^{i\alpha s}}{1 - k e^{i\alpha s}},$$

de unde rezultă coordonatele profilului:

$$(6.52) \quad \begin{cases} \frac{x}{\alpha q} = \frac{1 - k^2}{1 + k^2 - 2k \cos s}, \\ \frac{y}{\alpha q} = \frac{2k \sin s}{1 + k^2 - 2k \cos s}. \end{cases}$$

Extremitățile B' și A' ale coardei, corespunzătoare punctelor $\zeta = -q$ și $\zeta = q + 2m \cos \delta$ de pe cercul generator, vor fi determinate aplicând relația (6.51); aceasta ne va permite mai departe să calculăm coarda:

$$(6.53) \quad \begin{aligned} c &= \alpha q + \alpha q \frac{\left(1 + \frac{m}{q} \cos \delta\right)^\alpha + \left(\frac{m}{q} \cos \delta\right)^\alpha}{\left(1 + \frac{m}{q} \cos \delta\right)^\alpha - \left(\frac{m}{q} \cos \delta\right)^\alpha} \\ &\approx 2\alpha q \left(1 + \frac{\mu\alpha}{(1 + \mu)^\alpha}\right) \approx 2\alpha q (1 + \mu^2). \end{aligned}$$

Am pus $m \cos \delta = \mu q$ și am considerat în același timp un diedru normal $\delta = (2 - \alpha)\pi$ dela 0° la 18° , ceea ce dă pentru α o valoare variind între 2 și 1,9.

Focarul profilului rezultă din expresia generală, unde coeficientul lui $\frac{1}{\zeta}$ va fi înlocuit prin $\frac{z^2 - 1}{3} q^2$, după (6.42), și în loc de a se va pune $q(1 + \mu)$:

$$(6.54) \quad \begin{cases} \overline{MF} = \frac{z^2 - 1}{3} \cdot \frac{q^2}{a} = \frac{z^2 - 1}{3} q(1 + \mu), \\ \overline{BF} = zq + \frac{z^2 - 1}{3} q(1 + \mu) + \mu q \approx zq + \frac{z^2 - 1}{3} q, \\ \overline{AF} = c - \overline{BF} \approx zq(1 + 2\mu^2) - \frac{z^2 - 1}{3} q. \end{cases}$$

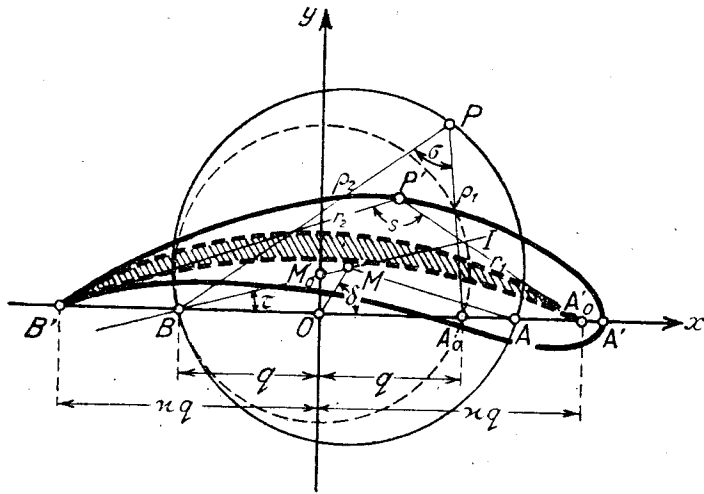


Fig. 6.10.

6.2.3. Caracteristicile aerodinamice. Cu aceste rezultate este ușor de stabilit mai departe caracteristicile aerodinamice ale profilului, ținând seama în același timp de coeficientul $\frac{z^2 - 1}{3} q^2$ al termenului $\frac{1}{\zeta}$ care intră în expresia momentului, după cum, de altfel, am făcut mai sus pentru focar. Vom avea prin urmare:

$$(6.55) \quad \begin{cases} C_z = 2\pi \frac{4a}{c} \sin(\alpha + \tau) \approx 2\pi \frac{2}{z} (1 + \mu) (\alpha + \tau), \\ C_{m0} = -4\pi \frac{z^2 - 1}{3} \cdot \frac{q^2 \sin 2\tau}{4z^2 q^2 (1 + \mu^2)^2} \approx \\ \approx -2\pi \frac{z^2 - 1}{3z^2} (1 - 2\mu^2) \tau = -\frac{\pi}{2} \left(1 - \frac{\delta}{3\pi}\right) (1 - 2\mu^2) \tau, \\ C_m = C_{m0} - \frac{\overline{AF}}{c} C_z \approx C_{m0} - 0,25 \left(1 + \frac{2}{3} \cdot \frac{\delta}{\pi} + 3\mu^2\right) C_z. \end{cases}$$

6.2.4. Distribuția viteșelor. Am văzut că viteza w_p într'un punct al profilului este dată de expresia:

$$w_p = W_k \left| \frac{d\zeta}{dz} \right|,$$

unde W_k , viteza în punctul omolog de pe cerc, va fi dedusă din formula (6.36) și $\frac{d\zeta}{dz}$ va fi determinată plecând de la expresia (6.43)

$$\frac{z - zq}{z + zq} = \frac{(\zeta - q)^\alpha}{(\zeta + q)^\alpha}$$

și derivând-o. Vom avea succesiv:

$$(6.56) \quad \frac{dz}{d\zeta} = \frac{2zq}{(z + zq)^2} = \frac{2zq}{(\zeta + q)^{2\alpha}} (\zeta^2 - q^2)^{\alpha - 1} = \left(\frac{\zeta - q}{\zeta + q} \right)^\alpha \frac{2zq}{\zeta^2 - q^2}$$

și prin urmare, raportându-ne la figura (6.10), vom găsi în cele din urmă:

$$(6.57) \quad \left| \frac{dz}{d\zeta} \right| = \left| \frac{(z - zq)(z + zq)}{(\zeta - q)(\zeta + q)} \right| = \frac{r_1 r_2}{\rho_1 \rho_2}.$$

6.3. Profile diverse

Profilele JUCOVSCI au caracteristici geometrice precise, cum ar fi de exemplu: bordul de ieșire foarte subțiat, distribuția grosimii invariabil situată spre bordul de atac, scheletul totdeauna în arc de cerc, etc. Diedrul profilelor KÄRMÁN-TREFFTZ îngroașă bordul de ieșire, în timp ce metoda lui MISES, pe care o vom expune pe scurt mai jos, aduce o soluție cu privire la distribuția grosimii și la modificarea formei scheletului și prin aceasta aplicația în practică este lărgită.

Punctul de plecare al acestei metode este derivata $\frac{dz}{d\zeta}$, care poate fi pusă, după cum am văzut (4.38), sub forma:

$$(6.58) \quad \frac{dz}{d\zeta} = \left(1 - \frac{\lambda}{\zeta}\right) \left(1 - \frac{\lambda_1}{\zeta}\right) \dots \left(1 - \frac{\lambda_n}{\zeta}\right),$$

unde $\zeta = \lambda$ este un punct de pe cerc, care corespunde vârfului profilului, și $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$, alte n rădăcini cuprinse toate în interiorul cercului (fig. 6.11). Funcția z va fi de forma (4.27)

$$(6.59) \quad z = \zeta + \frac{q_1}{\zeta} + \frac{q_2}{\zeta^2} + \dots + \frac{q_n}{\zeta^n},$$

de unde rezultă relațiile următoare:

$$(6.60) \quad \begin{cases} \lambda + \sum_{j=1}^n \lambda_j = 0, \\ q_1 = \lambda \sum_{j=1}^n \lambda_j + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \lambda_j \lambda_k \quad (j \neq k) = -\lambda^2 + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \lambda_j \lambda_k. \end{cases}$$

Așa dar, suma geometrică a rădăcinilor este nulă și metoda constă tocmai în așezarea punctelor L_1, L_2, \dots, L_n , care reprezintă rădăcinile respective din interiorul cercului, astfel încât suma afixelor respective să fie egală cu $-\lambda$. Ne putem da seama că avem astfel o multiplă infinitate de posibilități pentru a acoperi tot câmpul aplicațiilor practice. Sub această

formă, deși de un mare interes pentru studiul profilelor, este totuși foarte greu de determinat caracteristicile geometrice ale profilului (formă, curbura, distribuția grosimei, etc.) cu ajutorul unor parametri precisi și simpli care să poată fi variați după dorință. De asemenea, vom trece peste detaliile trasării, remarcând pe de altă parte că coeficientul lui $\frac{1}{\zeta}$

poate fi pus sub forma $q_1 = q^2 e^{2i\gamma}$ și printr-o schimbare de axe ($z = z' e^{i\gamma}$, $\zeta = \zeta' e^{i\gamma}$), expresia (6.59) poate fi pusă sub forma (5.5), unde coeficientul q^2 al lui $\frac{1}{\zeta}$ este real.

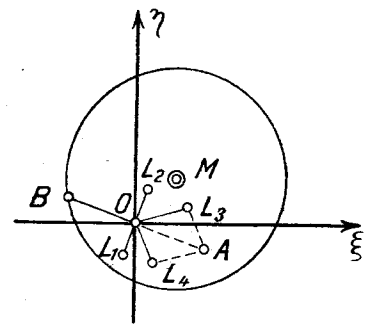


Fig. 6.41

Însă, în acest caz, cădem pe metoda tratată mai jos, care elimină inconvenientele semnalate și care face ca trasarea să fie făcută mult mai ușor.

6.3.1. Alte metode. Înainte de a expune această din urmă metodă, semnalăm alte metode diferite, datorite lui GECKELER, lui MÜLLER [21] și cea a lui GIRAULT [10], care este destul de originală. În aceeași ordine de idei, trebuie să semnalăm lucrările lui S.A. CIAPLĂGHIN tratând despre diversele forme de profile obținute pe o cale cu totul diferită. Astfel, de exemplu, în lucrarea sa „Despre presiunea exercitată de un curent paralel asupra unui corp cufundat” publicată în 1910 la Moscova, autorul indică o familie de profile obținute prin inversiunea parabolei. Cu tot interesul pe care-l prezintă aceste profile, metoda folosită este mai puțin simplă decât aceea indicată de JUCOVSKI, care a devenit clasică între timp și care este unanim adoptată în tratatele de specialitate. Într-o altă lucrare CIAPLĂGHIN [8] indică și alte forme de profile și în special profile cu vârf rotunjit.

6.4. Profile de formă generalizată

Am menționat mai sus caracteristicile geometrice ale profilelor JUCOVSKI și KÁRMÁN-TREFFTZ. Cu privire la profilele MISES, care extind, e drept, câmpul de aplicare, ele au totuși o trasare foarte anevoioasă și variația caracteristicilor lor nu este determinată de parametri precisi și simpli.

De aceea, am stabilit o metodă, mai simplă, care generalizează celelalte metode și acoperă toate formele profilelor utilizate în practică [3]. Ea se bazează pe următoarele puncte:

a) interpretarea geometrică a funcției de transformare;

b) determinarea parametrilor care să influențeze variația caracteristicilor geometrice și aerodinamice ale profilului;

c) găsirea formelor simple care să poată acoperi tot câmpul aplicațiilor.

Să plecăm mai întâi dela expresia generală (5.5) a lui z , care poate fi pusă sub forma:

$$(6.61) \quad z = \zeta + \frac{q^2}{\zeta} + \sum_{n=2}^n \sum_{m=0}^m \frac{q_{mn}}{(\zeta - \lambda_m)^n},$$

unde q^2 este o constantă reală și $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_m$ afixele punctelor L_0, L_1, \dots, L_m , așezate în interiorul cercului. Această formă este întotdeauna posibilă dacă, bine înțeles, rădăcinile lui $\frac{dz}{d\zeta}$ sunt de asemenea toate în interiorul cer-

cului, în afară de una singură, $\zeta = \zeta_B$ de exemplu, care este în B , pe cerc și care corespunde vârfului profilului.

Pentru ca această condiție să fie îndeplinită, este necesar să avem în punctul B următoarea condiție:

$$(6.62) \quad \left(\frac{dz}{d\zeta} \right)_B = 1 - \frac{q^2}{\zeta_B^2} - \sum_{n=2}^n \sum_{m=0}^m \frac{nq_{mn}}{(\zeta_B - \lambda_m)^{n+1}} \equiv 0$$

sau

$$(6.63) \quad \zeta_B - \frac{q^2}{\zeta_B} \equiv \sum_{n=2}^n \sum_{m=0}^m \frac{nq_{mn}}{(\zeta_B - \lambda_m)^n} \cdot \frac{\zeta_B}{(\zeta_B - \lambda_m)}.$$

Să observăm acum că inversiunea a

$$(6.64) \quad \zeta_1 = \frac{q^2}{\zeta}$$

aplicată cercului generator K reprezintă cercul auxiliar K_1 (fig. 6.12), a cărui trasare va fi definită precum urmează.

Fie pentru aceasta $me^{i\delta}$ afixul centrului (M) și $a = \overline{QM}$ raza cercului generator; ecuația acestuia față de un sistem $O\xi\eta$ va fi:

$$(6.65) \quad (\xi - m \cos \delta)^2 + (\eta - m \sin \delta)^2 = a^2.$$

Punând $\zeta = \xi + i\eta$ și $\bar{\zeta} = \xi - i\eta$, această ecuație poate fi scrisă sub forma următoare:

$$(6.66) \quad \zeta \bar{\zeta} - (\zeta + \bar{\zeta}) \cos \delta + i(\zeta - \bar{\zeta}) m \sin \delta = a^2 - m^2.$$

Să punem, după (6.64),

$$(6.67) \quad \zeta = \frac{q^2}{\zeta_1}, \quad \bar{\zeta} = \frac{q^2}{\bar{\zeta}_1}$$

și să introducem aceste expresii în (6.66); se obține, după câteva transformări și simplificări, următoarea relație:

$$(6.68) \quad \left(\zeta_1 + \frac{q^2}{a^2 - m^2} m \cos \delta \right)^2 + \left(r_1 - \frac{q^2}{a^2 - m^2} m \sin \delta \right)^2 = \\ = \left(\frac{q^2}{a^2 - m^2} \right) a^2 = a_1^2,$$

care este ecuația cercului K_1 , de rază a_1 , egală cu

$$(6.69) \quad a_1 = \frac{q^2}{a^2 - m^2} a,$$

având ca afix al centrului, $m_1 e^{i\delta_1}$ dat de expresia

$$(6.70) \quad m_1 e^{i\delta_1} = - \frac{q^2}{a^2 - m^2} m e^{-i\delta}$$

Se vede că centrul M_1 al cercului transformat se găsește pe dreapta OM_1 , simetrica lui OM față de Or_1 .

Fie Q intersecția cercului K cu partea negativă a axei Oz și Q_1 , intersecția aceleiași axe cu K_1 ; vom avea, după (6.64):

$$(6.71) \quad \overline{OQ_1} \times \overline{OQ} = q^2.$$

Observând mai departe că triunghiul QMR , în care latura MR este paralelă cu M_1O , este asemenea cu triunghiul Q_1M_1O , rezultă

$$(6.72) \quad \frac{\overline{Q_1M_1}}{\overline{QM}} = \frac{a_1}{a} = \frac{q^2}{a^2 - m^2}, \quad \frac{\overline{OM_1}}{\overline{RM}} = \frac{\overline{OM_1}}{\overline{OM}} = \frac{q^2}{a^2 - m^2}, \\ \frac{\overline{OQ_1}}{\overline{RQ}} = \frac{\overline{OQ_1}}{\overline{OQ} + 2m \cos \delta} = \frac{q^2}{\overline{OQ}^2 + 2\overline{OQ} m \cos \delta} = \frac{q^2}{a^2 - m^2};$$

se găsește deci că centrul M_1 este în același timp pe Q_1M_1 , paralelă cu QM : M_1 se găsește astfel la intersecția lui OM_1 și Q_1M_1 .

Punctul B_1 de pe cercul K_1 , care corespunde punctului B ($\zeta_B = -\overline{OB} e^{-i\beta}$) de pe K , va avea drept afix

$$(6.73) \quad \zeta_{1B} = \frac{q^2}{\zeta_B} = - \frac{q^2}{\overline{OB}} e^{i\beta} = - \overline{OB_1} e^{i\beta},$$

de unde rezultă:

$$(6.74) \quad \zeta_B - \frac{q^2}{\zeta_B} = -\overline{OB} e^{-i\beta} + \overline{OB_1} e^{i\beta} = \overline{B_1 B} e^{i\sigma}$$

Relația (6.63) devine atunci:

$$(6.75) \quad \sum_2^n \sum_0^m \frac{nq_{mn}}{(\zeta_B - \lambda_m)^n} \cdot \frac{\zeta_B}{(\zeta_B - \lambda_m)} = \overline{B_1 B} e^{i\sigma}$$

și prin urmare, condiția necesară pentru ca punctul B să corespundă vârfului B' al profilului rezultă imediat, și anume: suma geometrică a segmentelor

$$(6.76) \quad (-1)^h \frac{hq_{jh}}{(\overline{OB} e^{-i\beta} + \lambda_j)^h} \cdot \frac{\overline{OB} e^{-i\beta}}{\overline{OB} e^{-i\beta} + \lambda_j} = \\ = (-1)^h \frac{hq_{jh} \cdot \overline{OB} \cdot e^{-i\beta}}{(\overline{BL_j})^{h+1} e^{i(h+1)\tau_j}} = \overline{JH} e^{i\sigma_j h}$$

trebuie să fie egală cu $\overline{B_1 B} e^{i\sigma}$ (fig.6.12).

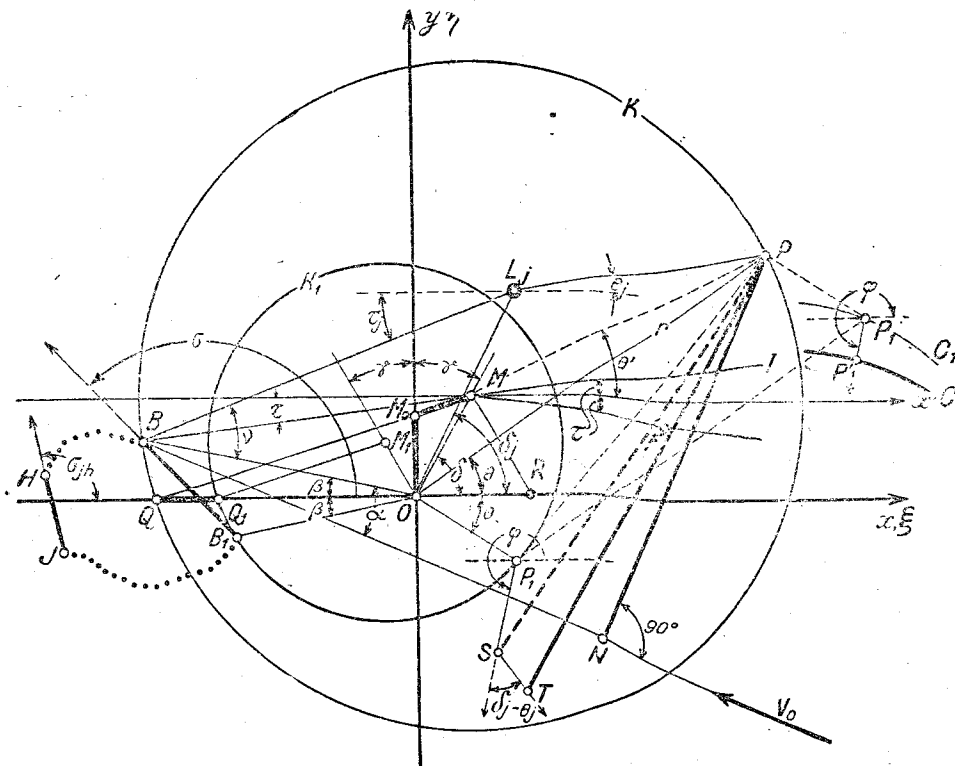


Fig. 6.12.

Scoatem în același timp și coeficientul q_{jh} :

$$(6.77) \quad q_{jh} = (-1)^h \frac{\overline{JH}}{h} \cdot \frac{(\overline{BL_j})^{h+1}}{\overline{OB}} e^{i(\sigma_j h + h\tau_j + \nu_j)},$$

unde:

$$(6.78) \quad \nu_j = \tau_j + \beta.$$

Fără a dăuna, în niciun fel, extinderea aplicațiilor practice, se poate reduce suma dublă din membrul al doilea al expresiei (6.61) la un singur termen :

$$(6.79) \quad \sum_2^n \sum_0^m \frac{q_{mn}}{(\zeta - \lambda_m)^n} = \frac{q_n}{(\zeta - \lambda_j)^n}$$

și transformarea care rezultă,

$$(6.80) \quad z = \zeta + \frac{q^2}{\zeta} + \frac{q_n}{(\zeta - \lambda_j)^n},$$

este suficientă pentru a acoperi un întreg câmp de aplicații al aerotehnicii. Din cele ce preced, deducem coeficientul celui de al treilea termen :

$$(6.81) \quad q_n = (-1)^n \frac{\overline{B_1 B}}{n} (\overline{BL_j})^n \frac{\overline{BL_j}}{\overline{OB}} e^{i(\sigma + n\tau_j + \nu_j)}$$

și astfel transformarea este perfect determinată. Ne putem da seama ușor că poziția punctului L_j ne oferă o infinitate de familii de profile. Există totuși două poziții speciale, care simplifică trasarea profilului, după cum vom vedea în cele ce urmează.

Aceste două poziții sunt următoarele : originea ($\lambda_j = 0$) și centrul M al cercului generator ($\lambda_j = \overline{OM} \cdot e^{i\delta} = me^{i\delta}$). Vom putea scrie pentru primul caz :

$$(6.82) \quad z = \zeta + \frac{q^2}{\zeta} + \frac{q_n}{\zeta^n}$$

și respectiv :

$$(6.83) \quad q_n = (-1)^n \frac{\overline{B_1 B}}{n} (\overline{BO})^n e^{i(\sigma - n\beta)}$$

Pentru cazul al doilea, vom avea deasemenea :

$$(6.84) \quad z = \zeta + \frac{q^2}{\zeta} + \frac{q_n}{(\zeta - me^{i\delta})^n},$$

unde coeficientul termenului al treilea, dacă însemnăm cu a raza cercului generator, va avea expresia :

$$(6.85) \quad q_n = (-1)^n \frac{\overline{B_1 B}}{n} \cdot \frac{a^{n+1}}{\overline{OB}} e^{i(\sigma + n\tau + \beta)}$$

7. TRASAREA ȘI STUDIUL SISTEMATIC AL PROFILELOR DE FORMĂ GENERALĂ

7.1. Trasarea profilului de bază și determinarea parametrilor geometrici

Să considerăm transformarea (6.80) și fie K cercul generator pe care vrem să-l transformăm. Să luăm drept lungime de referință segmentul \overline{OQ} , care determină, într'un fel oarecare, scara epurei, \overline{OQ} fiind aproximativ egal cu un sfert din coarda profilului. Remarcăm, dela început, că transformarea precedentă depinde de un număr de parametri, a căror variație ne dă tot atâtea familii de profile. Vrem să interpretăm acești parametri într'un mod geometric. Să punem pentru aceasta

$$(7.1) \quad \overline{OQ} = l$$

și fie κ , f și μ trei coeficienți numerici, definiți precum urmează :

$$(7.2) \quad \overline{QQ_1} = \kappa l, \quad \overline{OM_0} = fl, \quad \overline{M_0M} = \mu l.$$

Să notăm mai departe prin :

τ , unghiul făcut de axa de portanță nulă (\overline{BM}) cu axa absciselor, $\lambda_j = \overline{OL_j} \cdot e^{i\delta_j}$, poziția punctului L_j și n , gradul termenului al treilea.

Toți acești parametri independenți : κ , f , μ , τ , λ_j , n influențează forma și caracteristicile geometrice și aerodinamice ale profilelor. Este ușor de văzut, în acest caz, cât de multe familii de profile și ce diversitate de forme se pot obține prin variația acestor parametri.

Înainte de a stabili influența fiecăruia, vom da metoda trasării unui profil de formă generală, luând pentru fiecare parametru o valoare cunoscută a priori, dedusă din caracteristicile profilului ce vrem să-l obținem. Vom indica mai jos operațiile succesive ale trasării. Să luăm mai întâi $\overline{OQ} = l$ drept unitate de măsură, așa după cum am menționat mai sus, și fie M_0 un punct pe axa ordonatelor, astfel încât să avem $\overline{OM_0} = fl$.

Pe dreapta $\overline{QM_0}$ vom lua deasemenea un segment $\overline{M_0M} = \mu l$, M fiind centrul cercului generator. Să însemnăm cu Q_1 un punct de pe axa absciselor în partea pozitivă sau negativă față de Q , astfel încât $\overline{OQ} \times \overline{OQ_1} = q^2$ și fie $\overline{QQ_1} = \kappa l$. Cercul K_1 , inversul lui K , trece prin acest punct (Q_1) și are centrul în M_1 , intersecția dreptei $\overline{Q_1M_1}$, paralelă cu \overline{QM} și $\overline{OM_1}$, simetrică lui \overline{OM} față de axa ordonatelor.

Cu aceste date se pot calcula afixele ce rezultă din primii doi termeni :

$$(7.3) \quad z = \zeta + \frac{q^2}{\zeta} = \zeta + \frac{l^2(1-\kappa)}{\zeta}$$

Astfel, de exemplu, punctul P de pe cercul generator va fi transformat în punctul P_1 și așa mai departe pentru toate punctele cercului. Prin această transformare obținem un contur C_1 pe care-l vom numi conturul sau profilul de bază, având forma determinată de cei trei parametri : f , μ și κ .

7.2. Profile cu vârf ascuțit

Pentru a completa profilul, trebuie determinat al treilea termen din expresia (6.80). Pentru aceasta, trebuie să fixăm întâi punctul B de viteză nulă. Acest punct va fi determinat prin considerații de ordin aerodinamic. Intr'adevăr, unghiul τ pe care-l face dreapta BM cu axa absciselor determină momentul la portanță nulă sau coeficientul unitar $C_m \approx -\frac{\pi}{2} \tau$.

Deoarece pentru profilele moderne acest coeficient variază între 0 și 0,5, unghiul τ nu trece de două grade, astfel încât punctul B va fi determinat ușor, luând dinainte o valoare convenabilă pentru C_{m0} . În aceasta rezidă de altfel avantajul profilelor de formă generală.

Dreapta BM este în același timp axa de portanță nulă a profilului.

Punctul B_1 , omologul lui B pe cercul K_1 , ne determină segmentul $\overline{B_1B}$, care face unghiul σ cu axa absciselor. Rezultă astfel valoarea termenului al treilea:

$$(7.4) \quad \frac{q_n}{(\zeta - \lambda_j)^n} = (-1)^n \frac{\overline{B_1B}}{n} \left(\frac{\overline{BL_j}}{\overline{PL_j}} \right)^n \frac{\overline{BL_j}}{\overline{OB}} e^{i(\sigma + n\tau_j + \nu_j - n\theta_j)},$$

care trebuie adăugat la P'_1 , pentru a obține punctul P' al profilului (fig. 6.12). Noul termen, care este numit corecția conturului de bază, are deci drept modul și argument respectiv:

$$(7.5) \quad \overline{P_1P'} = (-1)^n \frac{\overline{B_1B}}{n} \left(\frac{\overline{BL_j}}{\overline{PL_j}} \right)^n \frac{\overline{BL_j}}{\overline{OB}}, \quad \varphi = \sigma + \tau_j + \nu_j - n\theta_j.$$

Poziția punctului L_j ne oferă evident o dublă infinitate de profile, determinată de variația modulului și a argumentului lui λ_j :

$$(7.6) \quad \lambda_j = \overline{OL} \cdot j e^{i\delta_j}.$$

Printre aceste poziții, după cum am spus, sunt două foarte interesante în ceea ce privește simplificarea trasării: originea axelor și centrul cercului generator.

Vom avea respectiv

$$(7.7) \quad \left| \frac{q_n}{\zeta^n} \right| = (-1)^n \frac{\overline{B_1B}}{n} \left(\frac{\overline{OB}}{\overline{OP}} \right)^n, \quad \varphi_0 = \sigma - n\beta - n\theta$$

pentru primul caz și

$$(7.8) \quad \left| \frac{q_n}{\zeta - m e^{i\delta}} \right| = (-1)^n \frac{\overline{B_1B}}{n} \cdot \frac{a}{\overline{OB}}, \quad \varphi_M = \sigma + n\tau - n\theta'$$

pentru al doilea caz, unde se vede că modulul termenului corectiv este constant pentru toate punctele profilului.

7.2.1. Distribuția viteselor. Modulul derivatei $\frac{dz}{d\zeta}$, care poate fi pus sub forma

$$(7.9) \quad \left| \frac{dz}{d\zeta} \right| = \frac{\left| \zeta - \frac{q^2}{\zeta} - \frac{nq_n}{(\zeta - \lambda_j)^n} \cdot \frac{\zeta}{\zeta - \lambda_j} \right|}{|\zeta|},$$

ne dă imediat soluția grafică a problemei. Intr'adevăr, se vede imediat că primii doi termeni ai numărătorului dau o rezultantă egală cu $\overline{P_1P}$ (fig. 6.12). În ceea ce privește al treilea termen, acesta devine succesiv:

$$(7.10) \quad \frac{nq_n}{(\zeta - \lambda_j)^n} \cdot \frac{\zeta}{\zeta - \lambda_j} = n \overline{P_1P'} \cdot e^{i\varphi} \left(1 + \frac{\lambda_j}{\zeta - \lambda_j} \right) = n \overline{P_1P'} e^{i\varphi} \left[1 + \frac{\overline{OL_j}}{\overline{PL_j}} e^{i(\delta_j - \theta_j)} \right] = \overline{P_1S} \cdot e^{i\varphi} + \overline{ST} \cdot e^{i(\varphi + \delta_j - \theta_j)}.$$

Prin urmare, trebuie adăugat punctului P_1 un termen aditiv $\overline{P_1S}$ de aceeași direcție ca și a termenului corectiv $\overline{P_1P'}$ a profilului, însă de n ori mai mare. Un al doilea termen aditiv, \overline{ST} , egal cu primul, redus însă în raportul $\frac{\overline{OL}}{\overline{PL_j}}$ și rotit de un unghi $(\delta_j - \theta_j)$ față de primul, ne dă în cele din urmă segmentul \overline{PT} care intră în expresia vitesei:

$$(7.11) \quad w_P = 2V_0 \frac{\overline{PN}}{a} \cdot \frac{\overline{OP}}{\overline{PT}}.$$

Dacă L_j este în origine ($\lambda_j = 0$), se vede din expresia (7.10) că segmentul \overline{ST} este nul și prin urmare:

$$(7.12) \quad w_P = 2V_0 \frac{\overline{PN}}{a} \cdot \frac{\overline{OP}}{\overline{PS}}.$$

7.2.2. Exemplu de trasare. Considerând transformarea

$$z = \zeta + \frac{q^2}{\zeta} + \frac{q_n}{\zeta^n}$$

și făcând să varieze parametrii μ , α , τ și n , obținem profile foarte variate ca forme geometrice și caracteristice aerodinamice.

Astfel, de exemplu, făcând să varieze f , păstrând însă ceilalți parametri constanți: $\mu = 0,125$, $\alpha = 0$, $\text{tg } \tau = 0,015$ și $n = 3$, obținem profile cu același C_{m0} și aceeași grosime, însă cu o curbură variind în funcție de f (fig. 7.1). Dacă facem să varieze α și μ , luând pentru τ și n respectiv $\tau = 0,015$, $n = 3$, obținem distribuția grosimii dealungul coar-dei, astfel încât bordul de ieșire devine cu atât mai gros cu cât α este mai mare (fig. 7.2). Dacă facem să varieze n , obținem forme din ce în ce mai ondule, însă cu aceeași grosime relativă maximă și cu aceleași caracteristice

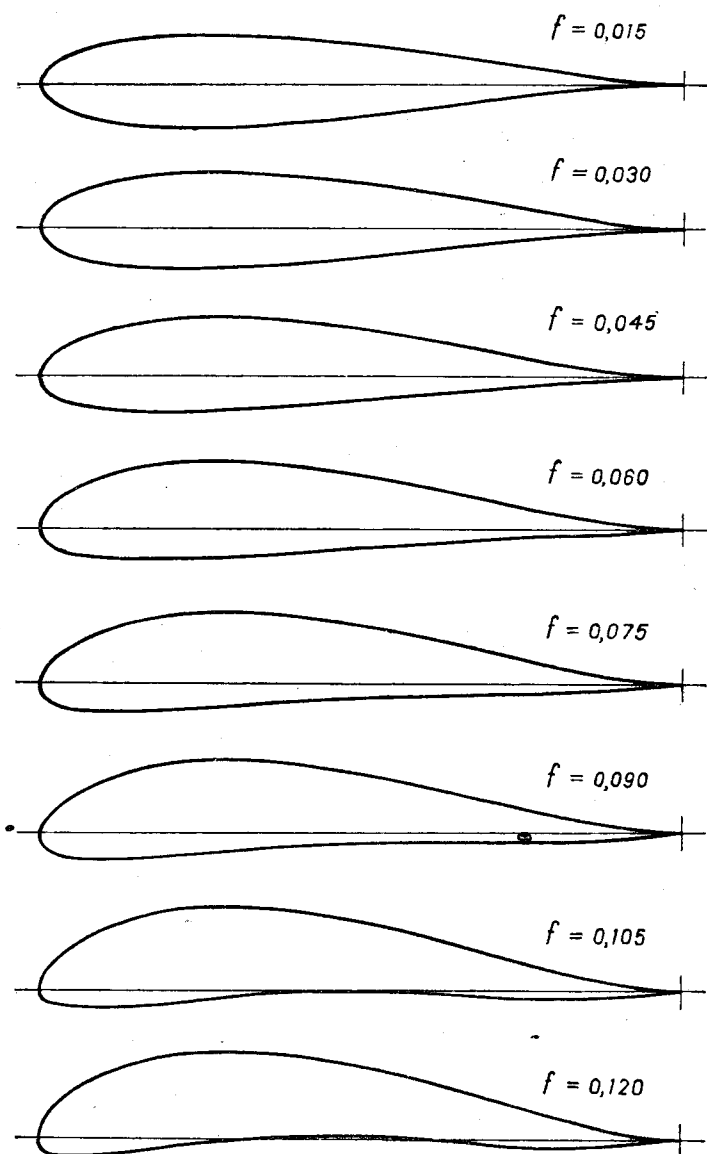


Fig. 7.1.

aerodinamice (fig. 7.3). După forma lor, se poate vedea că cele mai bune profile se obțin cu $n = 3$.

În sfârșit, făcând să varieze μ , se obține modificarea grosimii maxime relative (fig. 7.4), ceea ce vom constata de altfel și mai târziu, tratând această problemă în mod special.

$$\varepsilon_m = \frac{l_m}{c} \approx 0,15$$

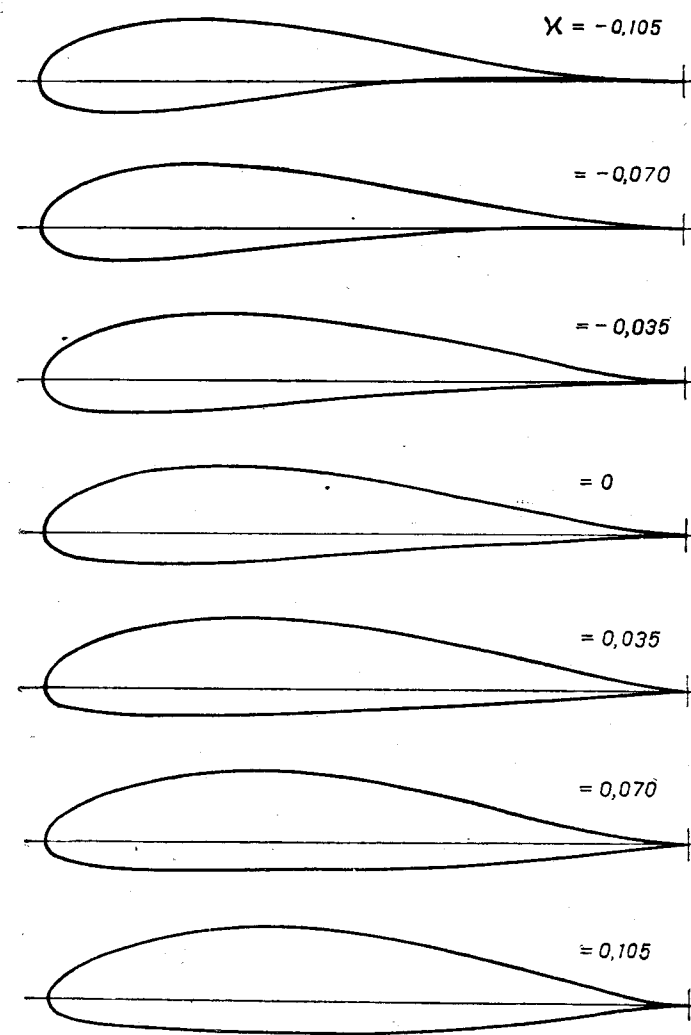


Fig. 7.2.

Din exemplele pe care le-am dat mai sus, se poate trage concluzia că influența parametrilor se rezumă aproximativ după cum urmează :

- f = definește curbura profilului,
- μ = „ grosimea relativă maximă,
- x = „ distribuția grosimii dealungul coardei.

Acest parametru influențează în același timp și grosimea maximă relativă, după cum vom vedea mai jos.

τ = determină momentul la portanța nulă: $C_{m0} = -\frac{\pi}{2}\tau$,

n = influențează forma. Cele mai bune forme se obțin cu $n = 3$,

λ_j = influențează deasemenea forma. Cele două poziții $\lambda_j = 0$ și $\lambda_j = me^{i\delta}$ sunt cele mai utilizate pentru trasările curente.

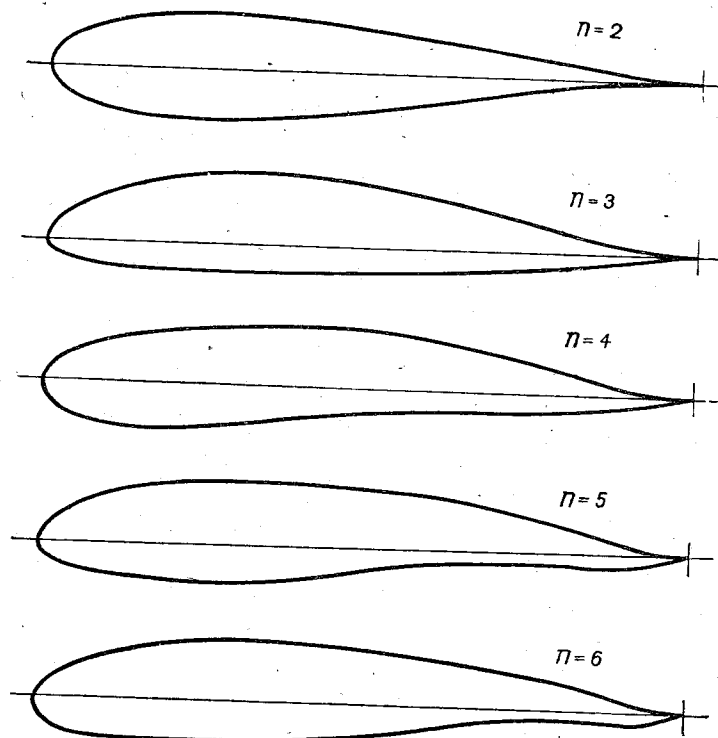


Fig. 7.3.

7.2.3. Caracteristicile geometrice și aerodinamice. Profunzimea profilului rezultă imediat, înlocuind ζ din expresia lui z prin

$$(7.13) \quad \zeta_4 = l + 2m \cos \delta, \quad \zeta_3 = -\overline{OB} \cdot e^{i\beta} \approx -l.$$

Să luăm pentru simplificare expresia (6.84), respectiv (7.8), adică $\lambda_j = me^{i\delta}$; vom avea

$$(7.14) \quad c = (z)_A^B \approx l + 2m \cos \delta + \frac{q^2}{1 + 2m \cos \delta} + (-1)^n \frac{\overline{B_1 B}}{n} \frac{a}{\overline{OB}} e^{i\sigma} + l + \frac{q^2}{l} - (-1)^n \frac{\overline{B_1 B}}{n} \frac{a}{\overline{OB}} e^{i(\sigma - n\pi)},$$

sau încă, înlocuind q^2 prin $q^2 = l^2(1-x)$,

$$(7.15) \quad c \approx 3l + 2\mu l - lx + l(1 - 2\mu + 4\mu^2)(1-x) - (1+\mu) \frac{\overline{B_1 B}}{n} \cos \sigma [1 - (-1)^n],$$

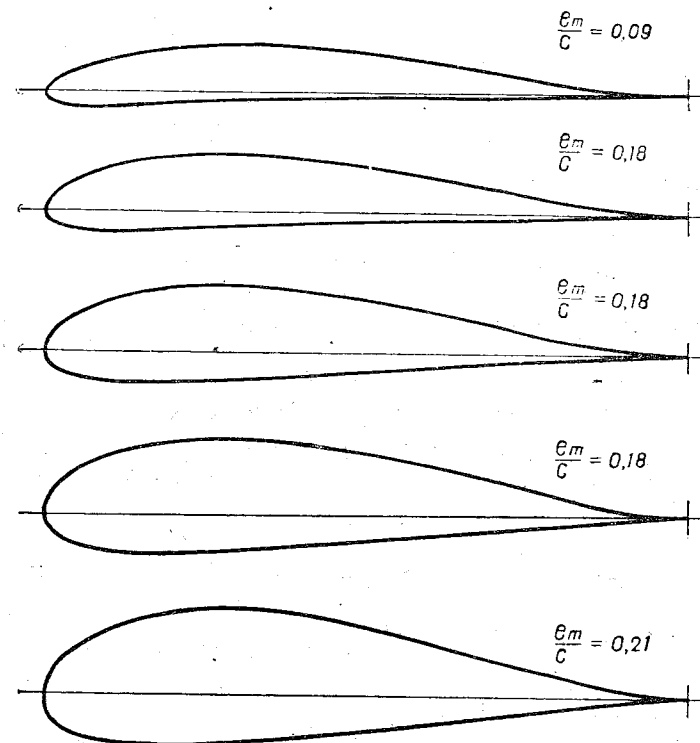


Fig. 7.4.

sau în sfârșit, observând că $\overline{B_1 B} \cos \sigma \approx xl$:

$$(7.16) \quad c \approx 4l \left\{ 1 + \mu^2 - \frac{x}{2} + \frac{\mu x}{2} + [1 - (-1)^n] \frac{(1+\mu)x}{4n} \right\} \approx \approx 4l \left[1 - \frac{2n + (-1)^n - 1}{4n} x \right].$$

Rezultatul în cazul general (λ_j oarecare) ar fi aproximativ același, fiind dat că, pentru profilele curente, $|\lambda_j|$ este foarte mic față de q .

Pentru poziția focarului vom găsi

$$(7.17) \quad \overline{MF} = \frac{q^2}{a} = l \frac{1-x}{1+\mu} \approx l(1-x-\mu+\mu x+\mu^2)$$

și prin urmare, însemnând prin B' bordul de ieșire și prin A' bordul de atac :

$$(7.18) \quad \left\{ \begin{aligned} \overline{B'F} &= l + l(1-x) + \frac{x l}{n} + \mu l + l \frac{1-x}{1+\mu} \approx \\ &\approx l(3-2x + \frac{x}{n} + \mu x + \mu^2), \\ \overline{A'F} = c - \overline{B'F} &= l \left[1 + 3\mu^2 + \mu x - \frac{(-1)^n x}{n} \right] \approx l \left[1 - \frac{(-1)^n x}{n} \right]. \end{aligned} \right.$$

Caracteristicile aerodinamice rezultă imediat :

$$(7.19) \quad \left\{ \begin{aligned} C_z &= 2\pi \frac{4a}{c} \sin(\alpha + \tau) \approx 2\pi(1+\mu)(\alpha + \tau), \\ C_{m_0} &= -4\pi \frac{q^2}{c^2} \sin 2\tau \approx \\ -\frac{\pi}{2} \left[1 - \mu^2 - \mu x - \frac{[1 - (-1)^n](1+\mu)x}{2n} \right] \tau &\approx -\frac{\pi}{2} \tau, \\ C_m &= C_{m_0} - \frac{\overline{A'F}}{c} C_z \approx C_{m_0} - 0,25 \left[1 + \frac{x}{2} + 2\mu^2 + \right. \\ \left. + \frac{\mu x}{2} - \frac{1+3(-1)^n}{4n}(1+\mu)x \right] C_z &\approx C_{m_0} - 0,25 C_z. \end{aligned} \right.$$

7.3. Profile generale cu vârf rotunjit

Metoda pe care am expus-o mai sus poate fi extinsă la profilele cu vârf rotunjit. Intr'adevăr, fie C un punct situat la o mică distanță CB de cercul generator (fig. 7.5); să presupunem că în acest punct derivata lui z se anulează o singură dată. Am văzut că, în acest caz, punctul B corespunde vârfului rotunjit B' al profilului. Primii doi termeni ai funcției de transformare

$$(7.20) \quad z = \zeta + \frac{q^2}{\zeta} + \frac{q'_n}{(\zeta - \lambda_j)^n} = z_1 + \frac{q_n}{(\zeta - \lambda_j)^n}$$

ne dau, ca și pentru profilele cu vârf ascuțit, același contur de bază. Al treilea termen va fi determinat într'un mod analog, observând că derivata se anulează în punctul C :

$$(7.21) \quad \zeta_c \left(\frac{dz}{d\zeta} \right)_c = \zeta_c - \frac{q^2}{\zeta_c} - \frac{n q_n \zeta_c}{(\zeta_c - \lambda_j)^{n+1}} = 0,$$

de unde rezultă relația care ne dă pe q'_n :

$$(7.22) \quad \overline{CC}_1 e^{i\sigma'} = (-1)^n \frac{n q_n \overline{OC} e^{-i\beta}}{(\overline{OC} e^{i\beta} - \lambda_j)^{n+1}} = (-1)^n \frac{n q'_n \overline{OC}}{\overline{CL}_j^n \overline{CL}_j} e^{-i(n\tau_j' + \nu_j')}$$

Prin urmare, modulul și argumentul celui de al treilea termen, pentru un punct P al cercului, vor fi respectiv

$$(7.23) \quad \left| \frac{q'_n}{(\zeta - \lambda_j)^n} \right| = (-1)^n \frac{\overline{CC}_1}{n} \left(\frac{\overline{CL}_j}{\overline{PL}_j} \right)^n \frac{\overline{CL}_j}{\overline{OC}} \quad \varphi' = \sigma' + n\tau_j' + \nu_j' - n\theta_j$$

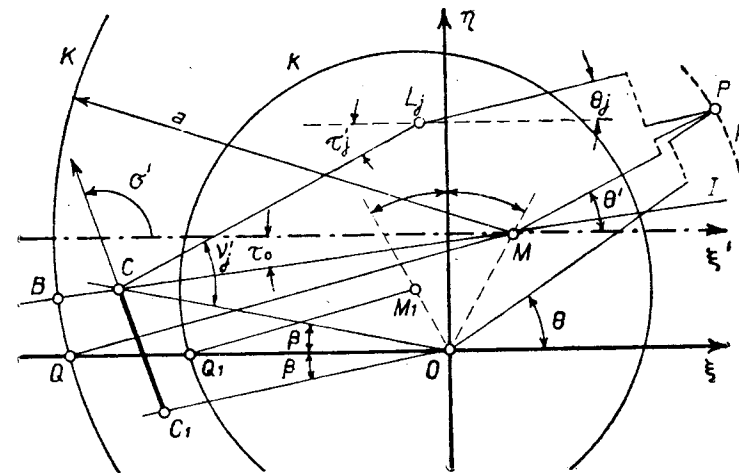


Fig. 7.5.

Pentru cazurile $\lambda_j = 0$ și $\lambda_j = me^{i\delta}$, aceste expresii devin respectiv :

$$(7.24) \quad \left| \frac{q'_n}{\zeta_n} \right| = (-1)^n \frac{\overline{CC}_1}{n} \left(\frac{\overline{OC}}{\overline{OP}} \right)^n, \\ \left| \frac{q'_n}{\zeta - me^{i\delta}} \right| = (-1)^n \frac{\overline{CC}_1}{n} \left(\frac{\overline{MC}}{a} \right)^n \cdot \frac{\overline{MC}}{\overline{OC}}, \\ \varphi'_0 = \sigma' - n\beta' - n\theta \quad \varphi'_M = \sigma' + n\tau' - n\theta'.$$

Determinarea grafică a viteșelor este identică cu cazul precedent referitor la vârful ascuțit, cu singura diferență că, în loc de q_n , vom avea coeficientul q'_n , care tocmai a fost determinat mai sus.

Drept exemplu de trasări, reprezentăm în fig. 7.6 o serie de profile cu diferite grade de rotunjire la vârfuri, definite prin raportul

$$(7.25) \quad k = \frac{\overline{CB}}{\overline{OQ}} = \frac{\overline{CB}}{l}.$$

Ceilalți parametri au păstrat valori constante :

$$f = 0,06; \mu = 0,09; \quad \text{tg } \tau = 0,015; n = 3; \lambda_j = 0.$$

Caracteristicile geometrice și aerodinamice sunt aproape identice cu profilele similare cu vârfuri ascuțite.

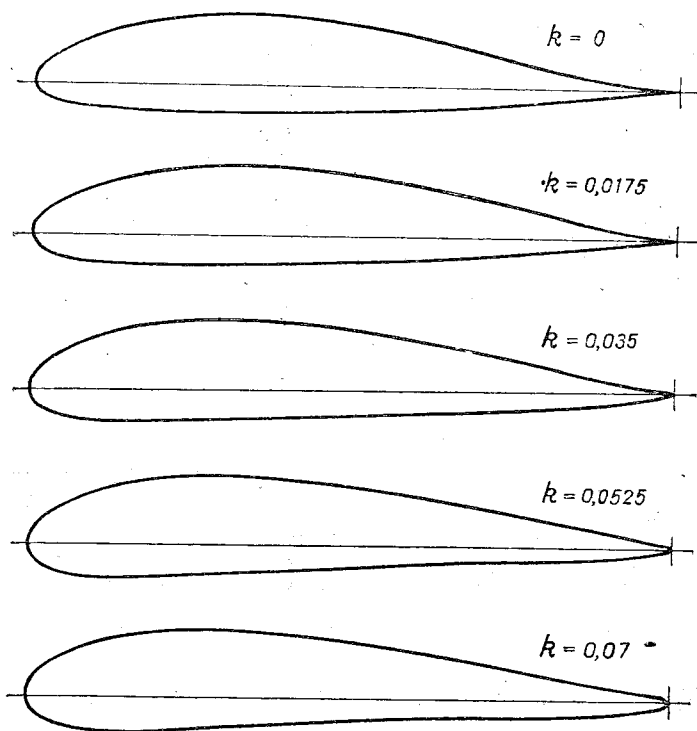


Fig. 7.6.

7.4. Profile generale cu diedru

Profilele KÁRMÁN-TREFFTZ cu diedru, pe care le-am studiat mai sus, sunt o generalizare a profilelor JUCOVSKI; au deci aceleași caracteristici și prin aceasta și un câmp de aplicație de aceeași întindere. Metoda pe care o preconizăm mai jos este o generalizare și mai largă și ne permite să trasăm profile cu diedru, având caracteristici geometrice și aerodinamice date a priori, întocmai ca și pentru profilele de formă generală, despre care am vorbit mai sus.

Să considerăm tot transformarea (5.5) și să facem o translație de axe luând drept origine a sistemului $B'xy$ (în planul z al profilului) tocmai vârful B' al profilului. Notând prin b afixul acestui punct față de sistemul inițial, considerând pe de altă parte sistemul de referință $O'\xi'\eta'$ (în planul ζ'),

se poate scrie funcția de transformare în raport cu noua origine,

$$(7.26) \quad z = \zeta' - b + \frac{q^2}{\zeta'} + \frac{q_2}{\zeta'^2} + \dots + \frac{q_n}{\zeta'^n},$$

care ar putea fi pusă încă, ținând seama de (4.33), sub forma

$$(7.27) \quad z = \left(1 + \frac{\overline{OB} e^{-i\beta}}{\zeta'}\right)^2 \cdot \left(\zeta' + b_0 + \frac{b_1}{\zeta'} + \frac{b_2}{\zeta'^2} + \dots\right),$$

de unde se vede că diedrul este nul la vârful.

Fie mai departe

$$(7.28) \quad z_1 = z \left(1 + \frac{\overline{OB} e^{-i\beta}}{\zeta'}\right)^{-\frac{\delta}{\pi}},$$

rezultă că z_1 se anulează de $\left(2 - \frac{\delta}{\pi}\right)$ ori în punctul B și prin urmare noul profil în planul z_1 va avea un diedru de unghi δ la vârful.

Dacă originea sistemului de axe din planul cercului generator este chiar în centrul acestui cerc, fie $M\xi\eta$ acest sistem paralel cu cel inițial de referință (fig. 7.7) și dacă a este raza cercului, se obține o formă puțin diferită, așa cum am indicat în lucrările noastre anterioare [3]:

$$(7.29) \quad z_1 = z \left(1 + \frac{ae^{i\tau}}{\zeta}\right)^{-\frac{\delta}{\pi}}$$

Această formă are avantajul de a simplifica calculele trasării. Într'adevăr, fie $z = re^{i\varphi}$ afixul unui punct al profilului inițial și $z_1 = r_1 e^{i\varphi_1}$ acela al noului profil; vom avea, punând $\zeta = ae^{i\theta}$, relațiile următoare:

$$(7.30) \quad \begin{cases} r_1 e^{i\varphi_1} = re^{i\varphi} \left[1 - e^{i(\tau-\theta)}\right]^{-\frac{\delta}{\pi}} \\ r_1 = r \left(2 \cos \frac{\theta-\tau}{2}\right)^{-\frac{\delta}{\pi}} = r \left(2 \cos \frac{\theta_1}{2}\right)^{-\frac{\delta}{\pi}}, \\ \varphi_1 = \varphi + \frac{\delta}{2\pi} (\theta-\tau) = \varphi + \frac{\delta}{2\pi} \theta_1. \end{cases}$$

unde

$$(7.31) \quad \theta_1 = \theta - \tau.$$

Vom observa că τ este foarte mic (dela 0° la 2°), deci practic neglijabil în formulele precedente.

Așa dar, prin aplicarea acestor formule, putem trece de la un profil oarecare, cu diedru δ , trasat după o metodă precedentă, la un profil cu diedru δ dat a priori. Caracteristicile geometrice și aerodinamice ale profilului astfel transformat, în raport cu cele ale profilului inițial, se obțin deasemenea din aceleași formule. Astfel, de exemplu, vom avea succesiv:

a) Coarda profilului nou, corespunzând aproximativ la $\theta_1 = 0$, va fi dată de relația

$$(7.32) \quad c_1 = c(2)^{-\frac{\delta}{\pi}} \approx c \left(1 - 0,7 \frac{\delta}{\pi} \right)$$

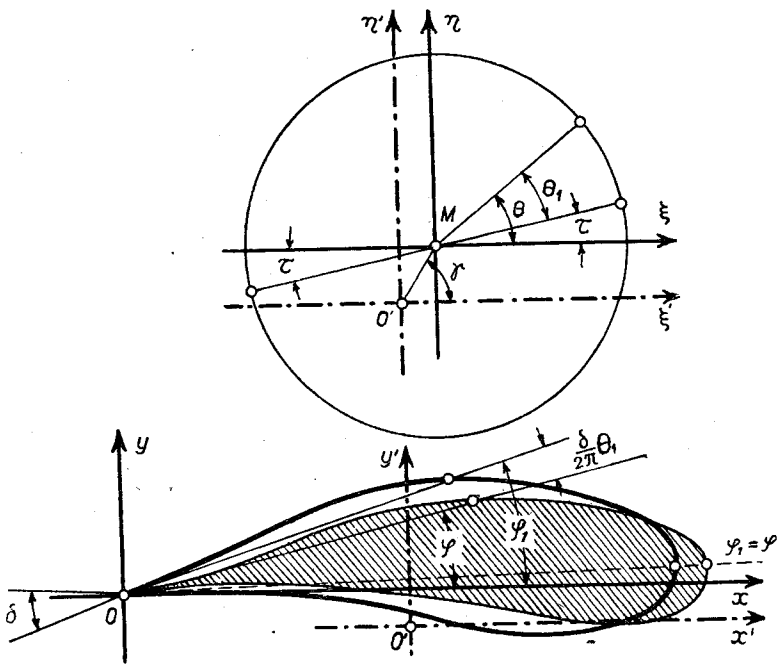


Fig. 7.7.

și prin urmare portanța unitară va fi

$$(7.33) \quad C_z = 2\pi \frac{4a}{c} (\alpha + \tau) \approx 2\pi \left(1 + \mu + 0,7 \frac{\delta}{\pi} \right) (\alpha + \tau).$$

b) Pentru a calcula C_m , vom pune mai întâi

$$(7.34) \quad \left(1 + \frac{\alpha e^{i\tau}}{\zeta} \right)^{-\frac{\delta}{\pi}} = 1 - \frac{\delta}{\pi} \frac{\alpha}{\zeta} e^{i\tau} + \dots$$

și înlocuind ζ' din expresia (7.26) prin $\zeta' = \zeta + me^{i\tau}$, unde $me^{i\tau}$ este afixul centrului, obținem

$$(7.35) \quad z = \zeta + me^{i\tau} - b + \frac{q^2}{\zeta} + \dots + \frac{q_u'}{\zeta^n}$$

Dacă dezvoltăm după aceea expresia lui z_1 (7.28), găsim pentru coeficientul lui $\frac{1}{\zeta}$ succesiv

$$(7.36) \quad \begin{aligned} q_1^2 &= q^2 + \frac{\delta}{\pi} (me^{i\tau} - b) ae^{i\tau} \approx \\ &\approx q^2 \frac{\delta}{\pi} \left(me^{i\tau} + 2l - \frac{n-1}{n} \alpha l \right) ae^{i\tau} \approx \\ &\approx q^2 \left[1 - 2 \frac{\delta}{\pi} \left(1 + 1,5\mu + \frac{n+1}{2n} \alpha \right) \right] \approx q^2 \left(1 - 2 \frac{\delta}{\pi} \right), \end{aligned}$$

de unde rezultă:

$$(7.37) \quad \begin{aligned} C'_{m_0} &= -4\pi \frac{q_1^2}{C_1^2} \sin 2\tau = \frac{1 - 2 \frac{\delta}{\pi}}{\left(1 - 0,7 \frac{\delta}{\pi} \right)^2} C_{m_0} \approx \\ &\approx \left(1 - 0,7 \frac{\delta}{\pi} \right) C_{m_0}. \end{aligned}$$

c) Focarul va fi așezat în F , la distanța \overline{MF} de M :

$$(7.38) \quad \overline{MF} = \frac{q_1^2}{a} \approx l \left(1 - \alpha - \mu - 2 \frac{\delta}{\pi} \right).$$

Distanța de la focar la bordul de atac rezultă din relația următoare:

$$(7.39) \quad \begin{aligned} \overline{FA}'_1 &= c_1 - l \left(2 - \frac{n-1}{n} \alpha + \mu \right) - \frac{q_1^2}{a} \approx \\ &\approx l \left[1 - \frac{(-1)^n}{n} \alpha - 0,8 \frac{\delta}{\pi} \right]. \end{aligned}$$

Aceasta ne permite să scriem mai departe

$$(7.40) \quad \begin{aligned} C'_m &= C'_{m_0} - \frac{\overline{FA}'_1}{c_1} C_z \approx \\ &\approx C'_{m_0} - 0,25 \left[1 + \frac{\alpha}{2} - \frac{1 + 3(-1)^n}{4n} \alpha \right] C_z, \end{aligned}$$

de unde se vede că momentul în raport cu bordul de atac are aceeași expresie ca și pentru profilul inițial. Pentru a pune în evidență influența diedrului asupra formei, dăm o serie de profile cu diedre variind de la 0° la 25° (fig. 7.8). Trebuie să remarcăm că, pentru a conserva grosimea maximă relativă, este necesar să variem și μ , grosimea fiind funcție de μ , α și δ , așa cum

vom vedea mai jos. Ceilalți parametri sunt următorii : $\alpha = 0, f = 0,06,$
 $\text{tg}\tau = 0,015, n = 3, \lambda_j = 0.$

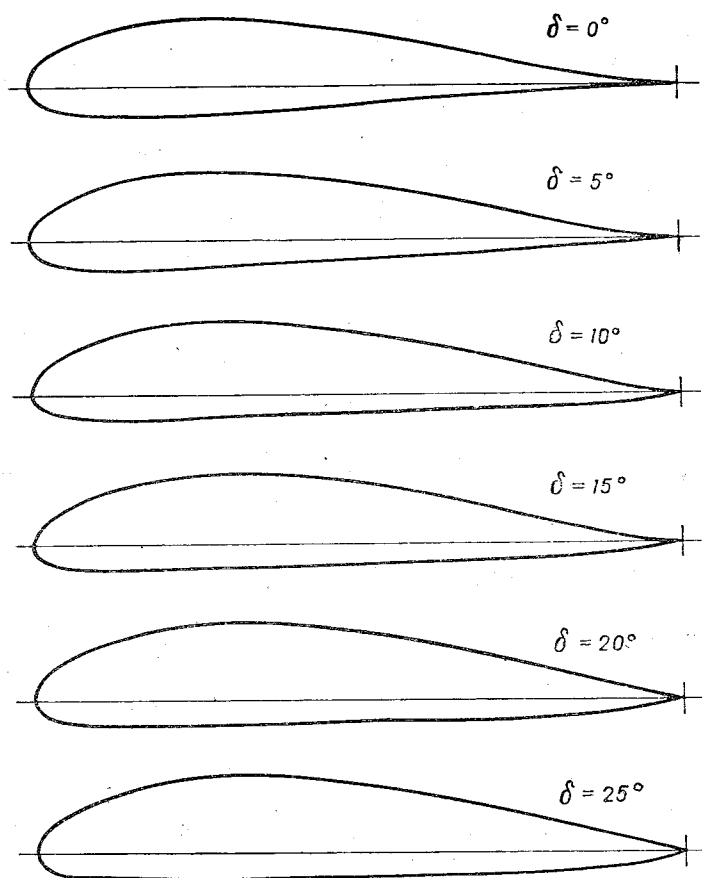


Fig. 7.8.

7.4.1. Distribuția viteșelor. Determinarea viteșelor este mai complicată, ea se deduce derivând relația (7.29) :

$$(7.41) \quad \left| \frac{dz_1}{d\zeta} \right| = \left(1 + \frac{ae^{i\tau}}{\zeta} \right)^{-\frac{\delta}{\pi}} \cdot \left[\frac{dz}{d\zeta} + \frac{\delta}{\pi} \cdot \frac{z}{\zeta} \cdot \frac{1}{1+e^{i(\theta-\tau)}} \right],$$

sau încă, referindu-ne la fig. 7. 9, se poate scrie :

$$(7.42) \quad \left| \frac{dz_1}{d\zeta} \right| = \left(2 \cos \frac{\theta-\tau}{2} \right)^{-\frac{\delta}{\pi}} \cdot \left| \frac{\overline{TP} e^{i\omega}}{\overline{OP} e^{i\theta'}} + \frac{\delta}{\pi} \cdot \frac{r e^{i\varphi}}{a e^{i\theta}} \cdot \frac{e^{-\frac{\theta-\tau}{2}}}{2 \cos \frac{\theta-\tau}{2}} \right|$$

Practic, unghiul τ poate fi neglijat fiind foarte mic. Făcând încă unele operațiuni simple, putem scrie în cele din urmă :

$$(7.43) \quad \left| \frac{dz}{d\zeta} \right| = \left(2 \cos \frac{\theta}{2} \right)^{-\frac{\delta}{\pi}} \left| \frac{\overline{TP}}{a} + \frac{\delta}{2\pi} \frac{r}{\cos \frac{\theta}{2}} \frac{\overline{OP}}{a} e^{i\left(\varphi - \frac{3}{2}\theta - \omega + \theta'\right)} \right| \frac{1}{\overline{OP}}.$$

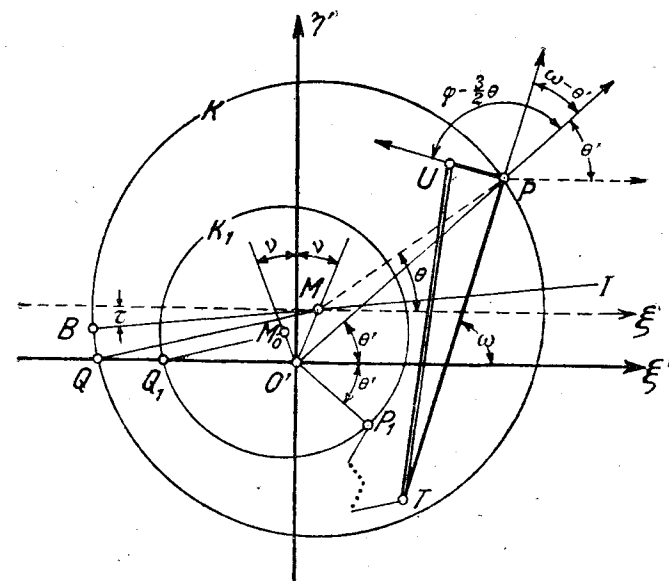


Fig. 7.9.

Construcția grafică este evidentă. Intr'adevăr, fie

$$(7.44) \quad \left| \frac{dz}{d\zeta} \right| = \frac{\overline{TP}}{\overline{OP}}$$

rezultatul referitor la profilul inițial fără diedru și să punem

$$(7.45) \quad \frac{\delta}{2\pi} \cdot \frac{r}{\cos \frac{\theta'}{2}} \cdot \frac{\overline{OP}}{a} = \overline{PU},$$

direcția PU face unghiul $\left(\varphi - \frac{3}{2}\theta\right)$ cu raza vectoare OP ; rezultă

$$(7.46) \quad \left|\frac{dz_1}{dz}\right| = \left(2\cos\frac{\theta}{2}\right)^{-\frac{\delta}{\pi}} \cdot \frac{T\bar{U}}{OP},$$

ceea ce ne permite să calculăm viteza după formula cunoscută.

8. DISTRIBUȚIA GROSIMII DEALUNGUL PROFILULUI ȘI POZIȚIA SECȚIUNII FRONTALE MAXIME

Această problemă are o foarte mare importanță, în special pentru vitezele avioanelor moderne. Deaceia, am găsit că este foarte util de a trata aceste chestiuni într'un mod mai profund, pentru a putea face astfel aplicații la profilele moderne corespunzătoare viteselor mari.

8.1. Variația grosimii

Pentru a simplifica scrierea, vom lua funcția de transformare sub forma (6.82)

$$(8.1) \quad z = \zeta + \frac{q^2}{\zeta} + \frac{q_n}{\zeta^n},$$

care devine, punând $\zeta = re^{i\theta}$ și înlocuind q_n prin valoarea sa scoasă din (6.83):

$$(8.1 \text{ bis}) \quad z = x + iy = re^{i\theta} + \frac{q^2}{r} e^{-i\theta} + (-1)^n \frac{\overline{BB_1} \left(\frac{\overline{OB}}{r}\right)^n}{n} e^{i(\sigma - n\beta - n\theta)}$$

Pentru cazul general $\lambda_j \neq 0$ ultimul termen va fi puțin diferit, însă modulul lui λ_j este mic pentru profilele curente, punctul L_j fiind situat în jurul originii, astfel încât, pentru scopul pe care-l urmărim, rezultatul va fi aproape identic cu acela care corespunde lui $\lambda_j = 0$, rezultat pe care l-am considerat mai sus. Să revenim la expresia (8.1 bis); putem scrie:

$$(8.2) \quad \begin{cases} x = \left(r + \frac{q^2}{r}\right) \cos \theta + (-1)^n \frac{\overline{BB_1} \left(\frac{\overline{OB}}{r}\right)^n}{n} \cos(\sigma - n\beta - n\theta), \\ y = \left(r - \frac{q^2}{r}\right) \sin \theta + (-1)^n \frac{\overline{BB_1} \left(\frac{\overline{OB}}{r}\right)^n}{n} \sin(\sigma - n\beta - n\theta). \end{cases}$$

Notând cu a raza cercului generator, vom putea pune (fig. 6.12)

$$(8.3) \quad a^2 = r^2 + m^2 - 2mr \cos(\theta - \delta),$$

de unde rezultă

$$(8.4) \quad r = a \sqrt{1 - \frac{m^2}{a^2} \sin^2(\theta - \delta)} + m \cos(\theta - \delta) \approx a + m \cos \delta \cos \theta + m \sin \delta \sin \theta \approx \overline{QM_0} + \overline{M_0M} + \overline{M_0M} \cos \theta + \overline{OM_0} \sin \theta,$$

sau încă, împărțind prin l și ținând seama de relațiile (7.2):

$$(8.5) \quad \frac{r}{l} \approx 1 + \mu(1 + \cos \theta) + f \sin \theta.$$

Să punem mai departe

$$(8.6) \quad q^2 = \overline{OQ} \times \overline{OQ_1} = l^2(1 - \kappa), \quad \overline{OB} \approx \overline{OQ}$$

și să observăm, pe de altă parte, că avem respectiv,

$$(8.7) \quad \overline{B_1B} \cos(\sigma - n\beta) \approx -\overline{QQ_1} = -\kappa l, \quad \overline{B_1B} \sin(\sigma - n\beta) \approx 2(f - \tau)l,$$

unde l, κ, τ au semnificațiile bine cunoscute; vom putea scrie pentru abscise:

$$(8.8) \quad \frac{x}{l} = 2 \cos \theta - \kappa(1 - \mu - \mu \cos \theta - f \sin \theta) \cos \theta - (-1)^n \frac{\kappa}{n} \left(\frac{q}{r}\right)^n \cos n\theta + (-1)^n \frac{2(f - \tau)}{n} \left(\frac{q}{r}\right)^n \sin n\theta.$$

Pentru punctele de pe intrados θ se schimbă în $-\theta$. Rezultatul este puțin diferit de cel precedent, însă diferența fiind foarte mică, se poate lua o abscisă medie. Neglijând, pe de altă parte, termenii de ordinul al doilea, această abscisă medie va avea în cele din urmă expresia următoare:

$$(8.9) \quad \frac{x}{l} = (2 - \kappa) \cos \theta - (-1)^n \frac{\kappa}{n} \cos n\theta.$$

În practică, abscisele sunt definite în raport cu coarda profilului, începând dela bordul de atac și fie λ acest raport; drept urmare, vom pune expresia (8.9) în funcție de λ . Am văzut că profunzimea este dată de expresia (7.16):

$$(8.10) \quad c \approx 4l \left\{ 1 - \frac{\kappa}{2} \left[1 - \frac{1 - (-1)^n}{2n} \right] \right\},$$

de unde rezultă

$$(8.11) \quad \lambda = \frac{(x)_{\theta=0} - x}{c} = \frac{1}{4} \cdot \frac{(2 - \kappa)(1 - \cos \theta) - (-1)^n \frac{\kappa}{n}(1 - \cos n\theta)}{1 - \frac{\kappa}{2} \left[1 - \frac{1 - (-1)^n}{2n} \right]} \approx 0,5(1 - \cos \theta).$$

Cu privire la ordonate, se găsește în mod analog

$$(8.12) \quad \frac{y}{l} = \left(1 + \mu + \mu \cos \theta + f \sin \theta - \frac{1 - \kappa}{1 + \mu + \mu \cos \theta + f \sin \theta} \right) \sin \theta + (-1)^n \frac{\overline{B_1B}}{n} \left(\frac{q}{r}\right)^n \sin(\sigma - n\beta) \cos n\theta - (-1)^n \frac{\overline{B_1B}}{n} \left(\frac{q}{r}\right)^n \cos(\sigma - n\beta) \sin n\theta,$$

sau încă, dezvoltând și neglijând termenii de ordinul al doilea :

$$(8.13) \quad \frac{y}{l} = (\mu + \mu \cos \theta + f \sin \theta) \left[2 - x - (\mu + \mu \cos \theta + f \sin \theta) \right] \sin \theta + \\ + x \sin \theta + (-1)^n \frac{2(f - \tau)}{n} \left(\frac{q}{r} \right)^n \cos n\theta + (-1)^n \frac{x}{n} \left(\frac{q}{r} \right)^n \sin n\theta.$$

Admițând o abscisă medie pentru punctele de pe extradados și intrados, așa precum am presupus mai sus, notând cu y_e și y_i , respectiv, ordonatele extradadosului și intradosului, grosimea profilului va putea fi exprimată prin expresia :

$$(8.14) \quad \frac{e}{l} = \frac{y_e - y_i}{l} \approx 4\mu \left[1 - \frac{\mu}{2}(1 + \cos \theta) - \frac{x}{2} \right] \sin \theta (1 + \cos \theta) + \\ + 2x \sin \theta + (-1)^n \frac{2x}{n} (1 - n\mu - n\mu \cos \theta) \sin n\theta.$$

Aceasta este formula generală a grosimii într'un punct al profilului.

8.2. Grosimea maximă și poziția secțiunii de grosime maximă

Sub forma (8.14), expresia grosimii prezintă dificultăți cu privire la găsirea grosimii maxime; deaceia, vom neglija termenii de ordinul al doilea și vom obține o expresie mai simplă,

$$(8.15) \quad \frac{e}{l} = 4\mu (1 + \cos \theta) \sin \theta + 2x \sin \theta + (-1)^n \frac{2x}{n} \sin n\theta,$$

a cărei derivată, egalată cu zero, ne dă soluția problemei :

$$(8.16) \quad \frac{1}{l} \cdot \frac{de}{d\theta} = (4\mu + 2x) \cos \theta + 4\mu \cos 2\theta + (-1)^n 2x \cos n\theta = 0.$$

Această ecuație ne dă, într'adevăr, valoarea unghiului θ , fie θ_m , care corespunde poziției secțiunii de grosime maximă și care va fi introdusă în (8.14) pentru a obține grosimea maximă propriu zisă.

Pentru $n = 0$ (rezultă $x = 0$, ceea ce corespunde profilului JUCOVSCI), $n = 2$, $n = 4$, găsim $\cos \theta_m = \frac{1}{2}$; se vede, după (8.11),

că secțiunea frontală maximă se găsește aproximativ la un sfert din coardă.

Se poate trage concluzia că pentru profilele JUCOVSCI și profilele cu $n = 2$ și $n = 4$ poziția secțiunii de grosime maximă rămâne invariabilă.

Este interesant de calculat grosimea maximă pentru $n = 2$, aplicând formula (8.14). Se găsește astfel, observând că profunzimea, după (8.10), este

$$(8.17) \quad c \approx 4l \left(1 - \frac{x}{2} \right),$$

o expresie simplă

$$(8.18) \quad \varepsilon_m = \frac{e_m}{c} = 1,3 \left[\mu \left(1 - x - \frac{3}{4} \mu \right) + \frac{x}{2} \right] \left(1 + \frac{x}{2} \right).$$

Pentru profilele JUCOVSCI ($x = 0$, $n = 0$) această expresie devine

$$(8.19) \quad \varepsilon_m = 1,3 \mu (1 - 0,75 \mu),$$

de unde rezultă μ în funcție de ε_m :

$$(8.20) \quad \mu \approx \frac{0,77 \varepsilon_m}{1 - 0,6 \varepsilon_m},$$

formula pe care am admis-o deja mai sus, anticipând rezultatul acesta.

8.2.1. Profilele cu $n = 3$. Profilele cu $n > 4$ nu prezintă o formă practic utilizabilă, din cauza undulațiilor dela bordul de ieșire (fig. 7.3), astfel că nu rămân decât profilele cu $n = 3$, singurele care au o poziție variabilă a grosimei maxime. Intr'adevăr, în acest caz, ecuația (8.16) devine

$$(8.21) \quad (\mu + 2x) \cos \theta + 2\mu \cos^2 \theta - 2x \cos^3 \theta - \mu = \\ = (1 + \cos \theta) [2(\mu + x) \cos \theta - 2x \cos^2 \theta - \mu] = 0,$$

de unde se vede mai întâi, după primul factor al acestei expresii, că la vârful profilului ($\theta = \pi$) grosimea este minimă, rezultat evident a priori, chiar sub forma inițială a ecuației (8.16) cu n oarecare.

Celălalt factor al ecuației (8.21) are câteva particularități interesante :

a) dacă $x = 0$ (punctele Q și Q_1 confundate sau profilele JUCOVSCI),

$\cos \theta_m = \frac{1}{2}$, prin urmare secțiunea de grosime maximă este la un sfert din coardă și grosimea propriu zisă este dată de formula (8.19) găsită mai sus;

b) dacă $\mu = 0$, $\cos \theta_m = 0$, secțiunea frontală maximă este la mijlocul profilului; remarcând că în acest caz coarda are expresia

$$(8.22) \quad c = 4l \left(1 - \frac{x}{3} \right),$$

rezultă o grosime maximă relativă dată de formula :

$$(8.23) \quad \varepsilon_m = \frac{2}{3} x \left(1 - \frac{x}{3} \right).$$

În cazul general, rădăcina celui de al doilea factor din (8.21) este

$$(8.24) \quad \cos \theta_m = \frac{\mu + x - \sqrt{\mu^2 + x^2}}{2x}.$$

Această valoare a lui $\cos \theta_m$ (respectiv $\sin \theta_m$) va fi înlocuită în expresia grosimii relative, care pentru $n = 3$ (singurul caz considerat) devine :

$$(8.25) \quad \varepsilon_m = \frac{e_m}{c} \approx \frac{\sin \theta_m (1 + \cos \theta_m)}{1 - 0,33 x} \left\{ \mu \left[1 - \frac{\mu}{2} (1 + \cos \theta_m) + \right. \right. \\ \left. \left. + x \cos 2\theta_m \right] + \frac{2}{3} x (1 - \cos \theta_m) \right\}.$$

Pentru acelaș caz ($n = 3$), aplicând formula (8.11) și remarcând pe de altă parte că $\cos \theta_m$ variază între 0 și $\frac{1}{2}$, poziția secțiunii de grosime maximă va fi dată de o expresie mai simplă:

$$(8.26) \quad \lambda_m = \frac{1}{2} \cdot \frac{1 - 0,33 \kappa - (1 - \kappa) \cos \theta_m - 0,67 \kappa \cos^3 \theta_m}{1 - 0,33 \kappa} \approx \approx \frac{1}{2} [1 - (1 - \kappa) \cos \theta_m].$$

Având în vedere importanța grosimii maxime relative și a poziției ei în lungul profilului pentru profilele utilizate la vitezele mari, vom face un studiu aprofundat despre acest subiect.

Pentru $\kappa = 0$, am văzut că poziția secțiunii de grosime maximă este la un sfert din coardă, în timp ce pentru $\mu = 0$, această grosime maximă este situată la mijlocul coardei.

Problema principală constă în trasarea unui profil care să aibă o grosime maximă dată și poziția ei în lungul profilului, deasemenea dată dinainte. Intr'adevăr, cercetările teoretice și experimentale făcute asupra profilelor aerodinamice destinate pentru viteze mari subsonice*) au arătat că dezvoltarea stratului limită laminar*) sau turbulent*) pe conturul profilului, precum și fenomenele perturbatoare datorite viteselor supersonice*) care apar în anumite puncte ale profilului, conduc la modificări esențiale ale formei profilelor curente și în special modificarea poziției secțiunii de grosime maximă, care trebuie împinsă spre spate pentru a obține anumite calități aerodinamice. Distingem trei cazuri:

a) Profile teoretice curente, care au poziția secțiunii de grosime maximă în jurul lui $\lambda_m = \frac{1}{4}$; pentru aceste profile κ este mic față de μ și vom avea în acest caz, respectiv:

$$(8.27) \quad \begin{cases} \cos \theta_m \approx \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{2} \frac{\kappa}{\mu} \right), & \lambda_m \approx \frac{1}{4} \left(1 + \frac{1}{2} \frac{\kappa}{\mu} \right), \\ (1 - 0,33 \kappa) \varepsilon_m = 1,3 \mu \left(1 - \frac{3}{4} \mu - \frac{1}{2} \kappa \right) + 0,44 \kappa. \end{cases}$$

Aceste formule sunt perfect valabile pentru $\left| \frac{\kappa}{\mu} \right| \leq \frac{1}{2}$.

b) Profile mijlocii, obținute cu valori ale lui κ și μ de acelaș ordin de mărime, fie

$$\frac{1}{2} \leq \frac{\kappa}{\mu} \leq \frac{4}{3}$$

*) Toate aceste noțiuni vor fi explicate pe larg, mai târziu, într'o altă lucrare.

Pentru aceste profile se aplică direct relațiile (8.24), (8.25) și (8.26). În acest caz λ_m variază în jurul cifrei de 0,35: între 0,31 și 0,375. Această ultimă poziție ar putea fi trecută de altfel în categoria următoare.

c) Profile laminare, cu secțiune frontală maximă împinsă spre spate, numite astfel din cauza scurgerii laminare care persistă în stratul limită pe o mare întindere a conturului; ele sunt cele mai interesante pentru aplicațiile din aviația actuală, la vitezele mari subsonice, din cauză că prezintă o rezistență redusă, datorită frecării laminare.

Pentru un raport $\frac{\mu}{\kappa} \leq \frac{3}{4}$, expresia lui $\cos \theta_m$ se poate pune sub forma

$$(8.28) \quad \cos \theta_m = \frac{\mu + \kappa - \kappa \sqrt{1 + \frac{\mu^2}{\kappa^2}}}{2 \kappa} \approx \frac{\mu}{2 \kappa} \left(1 - \frac{1}{2} \frac{\mu}{\kappa} + \frac{1}{8} \frac{\mu^3}{\kappa^3} \right) \approx \frac{\mu}{2 \kappa + \mu}.$$

Se deduce valoarea coeficientului μ ,

$$(8.29) \quad \mu = \frac{2 \cos \theta_m}{1 - \cos \theta_m} \kappa,$$

pe care o introducem în expresia grosimii (8.25) și obținem, după ce am neglijat termenii de ordinul al doilea, următoarea formulă simplă:

$$(8.30) \quad \varepsilon_m = \frac{2 \kappa}{3} \frac{\sin \theta_m (1 + \cos \theta_m) (1 + \cos \theta_m - 3 \kappa \cos \theta_m)}{(1 - 0,33 \kappa) (1 - \cos \theta_m)} \approx \approx \frac{2 \kappa}{3} \frac{(1 + \cos \theta_m)^3}{1 - 0,33 \kappa}.$$

Această formulă permite să trasăm ușor profilele laminare. Intr'adevăr, fie de trasat un profil de o grosime maximă ε_m și o poziție λ_m date; se găsește $\cos \theta_m = \frac{1 - 2 \lambda_m}{1 - \kappa}$ și expresiile (8.30) și (8.29) ne dau succesiv κ și μ .

Profilul este astfel perfect determinat. Ca exemplu de aplicații, am trasat profilul din figura 8.1 cu următoarele date: $\varepsilon_m = 0,115$, $\lambda_m = 0,455$ și prin urmare $\cos \theta_m = 0,10$.

Parametrii ce rezultă sunt: $\kappa = 0,126$ și $\mu = 0,028$; ceilalți parametri dați sunt: $f = 0,02$, $\tau = 0$.

Observație. Trebuie remarcat că, pentru $\mu = 0$, avem un vârf la bordul de atac; acest caz nu este deci interesant. Din această cauză, pentru aplicațiile practice, este necesar să luăm $\mu \geq 0,10 \kappa$, ceea ce corespunde la $\cos \theta_m \geq 0,0475$ și $\lambda_m = 0,48$.

8.3. Profile laminare cu vârf rotunjit

Termenul adițional $\left(\frac{q_3}{\tau^3} \right)$ este proporțional cu $\overline{C_1 C}$ și prin urmare, punând

$$(8.31) \quad \overline{C_1 C} \cos \sigma' = -(\kappa - 2k),$$

unde k reprezintă gradul de rotunjire (7.25), se poate scrie pentru abscise

$$(8.32) \quad \frac{x}{l} = (2 - \alpha) \cos \theta + \frac{\alpha - 2k}{3} \cos 3\theta.$$

Pentru poziția secțiunii de grosime maximă, observând că expresia coardei profilului cu vârf rotunjit este

$$(8.33) \quad c' = 4l [1 - 0,33 (\alpha + k)]$$

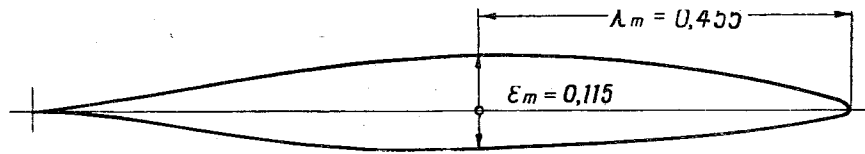


Fig. 8.1

și aducând câteva simplificări analoage cazului precedent al profilului cu vârf ascuțit, vom putea scrie în cele din urmă :

$$(8.34) \quad \lambda = \frac{1}{2} \left[1 - (1 - \alpha + k) \cos \theta \right].$$

Este ușor de văzut, mai departe, că ecuația (8.21) referitoare la profilele cu vârf ascuțit este ușor modificată pentru vârful rotunjit :

$$(8.35) \quad (4\mu + 2\alpha) \cos \theta + 4\mu \cos 2\theta - 2(\alpha - 2k) \cos 3\theta \approx \\ \approx (1 + \cos \theta) [2(\mu + \alpha - 1,5k) - 2(\alpha - 1,5k) \cos^2 \theta - \mu] = 0.$$

Intr'adevăr, punând $\alpha' = \alpha - 1,5k$, soluția are aproximativ aceeași formă ca și pentru cazul precedent :

$$(8.36) \quad \cos \theta'_m = \frac{\mu + \alpha' - \sqrt{\mu^2 + \alpha'^2}}{2\alpha'}$$

Se vede din această formulă că, pentru aceeași valoare a lui α , rotunjirea determină deplasarea secțiunii de grosime maximă către bordul de atac. Dacă vrem să păstrăm aproximativ aceeași poziție ca și pentru profilul cu vârf ascuțit, trebuie să mărim pe α astfel încât să obținem pentru $\alpha' = \alpha - 1,5k$ o valoare constantă, de unde rezultă și pentru $\cos \theta'_m$ de asemenea o valoare constantă. Trebuie văzut în acest caz dacă grosimea își păstrează valoarea sa inițială.

În acest scop, să revenim la expresia (8.14) a grosimii și să remarcăm că influența vârfului rotunjit afectează numai ultimul termen, în care 2α trebuie înlocuit prin $2(\alpha - 2k)$.

Desvoltând calculele pentru $n = 3$, găsim expresia

$$(8.37) \quad \epsilon'_m = \frac{\sin \theta'_m (1 + \cos \theta'_m)}{1 - 0,33(\alpha + k)} \left\{ \mu \left[1 - \frac{\mu}{2} (1 + \cos \theta'_m) + (\alpha - 2k) \cos 2\theta'_m \right] + \right. \\ \left. + \frac{2}{3} (\alpha - 2k) (1 - \cos \theta'_m) - \frac{k \sin \theta'_m \cos \theta'_m}{1 - 0,33(\alpha + k)} \right\}.$$

Se vede că grosimea păstrează aproximativ aceeași valoare, dacă $\alpha' = \alpha - 1,5k = (\alpha - 2k) + 0,5k$ are de asemenea aceeași valoare, ceea ce corespunde și cu condiția precedentă, într-un cât putem neglija termenul $0,5k$. Să presupunem, prin urmare, că am păstra valoarea lui α' (mărind

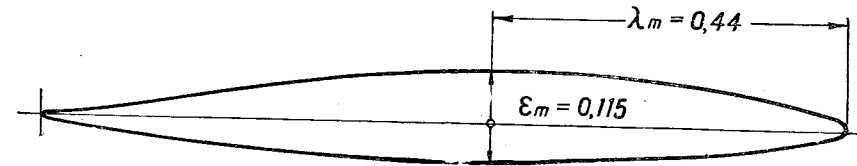


Fig. 8.2.

α); trebuie să avem în același timp μ mic față de α' pentru ca poziția secțiunii de grosime maximă să fie convenabil împinsă spre spate. Vom avea atunci, ca și pentru cazul precedent,

$$(8.38) \quad \cos \theta'_m = \frac{\mu}{2\alpha' - \mu}, \quad \mu = \frac{2 \cos \theta'_m \alpha'}{1 - \cos \theta'_m},$$

de unde rezultă aproximativ :

$$(8.39) \quad \epsilon'_m = \frac{2(\alpha - 2k)}{3 - (\alpha + k)} (1 + \cos \theta'_m)^3 - \frac{k \sin \theta'_m \cos \theta'_m}{1 - 0,33(\alpha + k)}.$$

Astfel se dă prin urmare $\cos \theta'_m$ [sau λ'_m , după (8.36)] și grosimea maximă relativă, se deduce α presupunând cunoscut, bine înțeles, gradul de rotunjire, se calculează apoi μ și profilul este perfect determinat. Ca exemplu de trasare, figura 8.2 reprezintă un profil cu vârf rotunjit, având următoarele caracteristici : $k = 0,02$, $\cos \theta'_m = 0,128$, $\lambda'_m = 0,44$, $\alpha = 0,126$, $\mu = 0,028$, $f = 0,02$ și $\tau = 0$.

Grosimea rămâne aceeași, ca și în cazul precedent : $\epsilon_m = 0,115$.

Remarcă. Dacă valoarea lui $\alpha' = \alpha - 1,5k$ se micșorează din cauza rotunjirii și devine mai mică decât μ , vom avea $\cos \theta'_m = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{\alpha'}{2\mu} \right)$, iar secțiunea de grosime maximă va fi aproximativ la un sfert din coardă. Regăsim astfel proprietatea caracteristică a profilelor curențe.

8.4. Profile laminare cu diedru

Intr'un punct oarecare al coardei, grosimea profilului va fi dată de următoarea formulă (fig. 7.7) :

$$(8.40) \quad \epsilon_1 = \frac{e_1}{c_1} = \frac{e}{c_1} + 2 \frac{r}{c_1} \frac{\delta}{\pi} \frac{\theta_1}{2} = \left(1 + 0,7 \frac{\delta}{\pi} \right) \left(\frac{e}{c} + \frac{r}{c} \frac{\delta}{\pi} \theta_1 \right).$$

Profilul fiind relativ subțire, r se poate confunda cu proiecția lui, care va fi dată de relația următoare:

$$(8.41) \quad r \approx r \cos \varphi \approx l \left[2 - \kappa + \frac{\kappa}{3} + (2 - \kappa) \cos \theta + \frac{\kappa}{3} \cos 3\theta \right] = \\ = 2l \left[1 - \frac{\kappa}{3} + (1 - \kappa) \cos \theta + \frac{2}{3} \kappa \cos^3 \theta \right],$$

unde θ este unghiul definit în figura 7.7.

Dacă neglijăm termenii de ordinul al doilea, obținem următoarea expresie pentru grosimea relativă:

$$(8.42) \quad \varepsilon_1 = \left(1 + 0,7 \frac{\delta}{\pi} \right) \left\{ \varepsilon + \frac{1}{2} \left[1 + (1 - \kappa) \cos \theta \right] \frac{\delta}{\pi} \theta \right\}.$$

Să observăm mai întâi că $\cos \theta$ este foarte mic și că putem pune prin urmare

$$(8.43) \quad \theta \approx \frac{\pi}{2} - \cos \theta, \quad \sin \theta \approx 1;$$

ε_1 devine maximum pentru o valoare a lui θ , care anulează expresia derivatei,

$$(8.44) \quad \frac{d\varepsilon}{d\theta} + \frac{1}{2} \frac{\delta}{\pi} [-0,57 + 1,57 \kappa + 2(1 - \kappa) \cos \theta] = 0.$$

Putem scrie mai departe

$$(8.45) \quad -0,57 + 1,57 \kappa + 2(1 - \kappa \cos \theta) \approx \\ \approx (1 + \cos \theta) [-0,57 + 1,57 \kappa + (2,57 - 3,57 \kappa) \cos \theta - (2,57 - 3,57 \kappa) \cos^2 \theta]$$

și dacă ținem seama de (8.16) și (8.21), ecuația (8.44) devine:

$$(8.46) \quad -2 \left[\kappa + \frac{\delta}{\pi} (0,64 - 0,87 \kappa) \right] \cos^2 \theta + \\ + 2 \left[\mu + \kappa + \frac{\delta}{\pi} (0,64 - 0,87 \kappa) \right] \cos \theta - \mu - \frac{\delta}{\pi} (0,12 - 0,4 \kappa) = 0.$$

Deducem imediat, punând pentru simplificare

$$(8.47) \quad \kappa_1 = \kappa + (0,64 - 0,87 \kappa) \frac{\delta}{\pi},$$

valoarea lui $\cos \theta_{1m}$:

$$(8.48) \quad \cos \theta_{1m} = \frac{\mu + \kappa_1 - \sqrt{\mu^2 + \kappa_1^2 - (0,24 - 0,8 \kappa) \kappa_1 \frac{\delta}{\pi}}}{2\kappa_1}.$$

Am făcut ipoteza, dela început, că profilele sunt laminare, deci $\cos \theta_{1m}$ este mic și prin urmare μ_1 trebuie să fie deasemenea mic în raport cu κ_1 . Deasemenea, putem considera termenul $\mu^2 - (0,24 - 0,8\kappa) \kappa_1 \frac{\delta}{\pi}$ foarte mic în raport cu κ_1^2 , astfel încât să putem desvolta expresia de sub radical și să obținem în cele din urmă:

$$(8.49) \quad \cos \theta_{1m} = \frac{\mu}{2\kappa_1} \left(1 - \frac{\mu}{2\kappa_1} \right) + \frac{(0,12 - 0,4 \kappa) \frac{\delta}{\pi}}{2\kappa_1},$$

de unde rezultă:

$$(8.50) \quad \mu \approx \frac{2\kappa_1 \cos \theta_{1m} - (0,12 - 0,4 \kappa) \frac{\delta}{\pi}}{1 - \cos \theta_{1m} + (0,12 - 0,4 \kappa) \frac{\delta}{2\pi \kappa_1}}.$$

În ceea ce privește poziția secțiunii de grosime maximă, asimilând r_1 cu proiecția sa x_1 , se poate scrie

$$(8.51) \quad \lambda_1 = \frac{c_1 - x_1}{c_1} = 1 - \frac{r_1}{c_1} = 1 - \frac{r}{c} \left(\cos \frac{\theta}{2} \right)^{-\frac{\delta}{\pi}}.$$

Avem însă

$$(8.52) \quad \left(\cos \frac{\theta}{2} \right)^{-\frac{\delta}{\pi}} = (2)^{\frac{\delta}{2\pi}} (1 + \cos \theta)^{-\frac{\delta}{2\pi}} \approx \\ \approx \left(1 + 0,35 \frac{\delta}{\pi} \right) \left(1 - 0,5 \frac{\delta}{\pi} \cos \theta \right);$$

dacă se înlocuiește mai departe r și c și dacă se neglijează termenii de al doilea ordin, se obține în cele din urmă:

$$(8.53) \quad \lambda_1 = 1 - \frac{1}{2} \left(\cos \frac{\theta}{2} \right)^{-\frac{\delta}{\pi}} \frac{1 - 0,33 \kappa (1 - \kappa) \cos \theta + 0,66 \kappa \cos^2 \theta}{1 - 0,33 \kappa} \approx \\ \approx \frac{1}{2} \left[1 - \left(1 - \kappa - 0,5 \frac{\delta}{\pi} \right) \cos \theta \right] - 0,175 \frac{\delta}{\pi} \approx \lambda - 0,175 \frac{\delta}{\pi}.$$

Prin urmare, poziția secțiunii de grosime maximă se deplasează spre bordul de atac.

Formulele stabilite mai sus ne permit să trasăm profilul cu λ_{1m} dat. Într'adevăr, fie δ diedrul profilului, formula (8.53) în care luăm pentru κ o valoare medie, ne dă $\cos \theta$ (respectiv $\cos \theta_{1m}$) și aplicând relația (8.50),

obținem și μ în funcție de κ , respectiv $\kappa_1 = \kappa + (0,64 - 0,87) \frac{\delta}{\pi}$. Valoarea lui κ va fi scoasă din expresia următoare :

$$(8.54) \quad \varepsilon_{1m} = \left(1 + 0,7 \frac{\delta}{\pi} \right) \left\{ \frac{\sin \theta_{1m} (1 + \cos \theta_{1m})}{1 - 0,33\kappa} \left[\mu \left(1 - \frac{\mu}{2} (1 + \cos \theta_{1m}) - \kappa \cos 2\theta_{1m} \right) + \frac{2}{3} \kappa (1 - \cos \theta_{1m}) \right] \frac{\delta}{2\pi} [1 + (1 - \kappa) \cos \theta_{1m}] \left(\frac{\pi}{2} - \cos \theta_{1m} \right) \right\}$$

și profilul este astfel perfect determinat. Cu titlu de exemplu, dăm în figura (8.3) un profil cu următoarele caracteristici : $\frac{\delta}{\pi} = 0,10$, $\varepsilon_{1m} = 0,11$, $\cos \theta_{1m} = 0,04$, $\lambda_{1m} = 0,46$; rezultă $\kappa = 0,06$, $\mu = -0,018$. Ceilalți parametri sunt identici cu cei corespunzători cazurilor precedente : $f = 0,02$, $\tau = 0$.

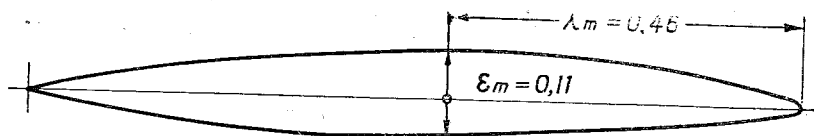


Fig. 8.3.

8.4.1. Variația lui μ . Pentru profilele cu vârf ascuțit sau cu vârf rotunjit, am arătat că μ este pozitiv. Altfel profilul ar prezenta o buclă la bordul de atac și condițiile transformării conforme n'ar fi îndeplinite. Nu se întâmplă același lucru pentru profilele cu diedru. Într'adevăr, e posibil de construit un profil cu μ negativ, însă această valoare negativă are o limită. Pentru a calcula această limită, să considerăm cazul simplu al unui profil JUCOVSCI raportat la un sistem de axe având vârful drept origină :

$$(8.55) \quad z = \zeta + 2q + \frac{q^2}{\zeta} = \left(1 + \frac{q}{\zeta} \right)^2 \zeta$$

și fie mai departe

$$(8.56) \quad z_1 = \left(1 + \frac{q}{\zeta} \right)^{-\frac{\delta}{\pi}} \cdot z = \left(1 + \frac{q}{\zeta} \right)^{2 - \frac{\delta}{\pi}} \zeta$$

profilul corespunzător, cu diedru; vom avea

$$(8.57) \quad \frac{dz}{d\zeta} = \left(1 + \frac{q}{\zeta} \right)^{1 - \frac{\delta}{\pi}} \cdot \left[1 - \left(1 - \frac{\delta}{\pi} \right) \frac{q}{\zeta} \right],$$

de unde se vede că a doua rădăcină a derivatei se găsește într'un punct A_1 , de abscisă $\overline{OA_1} = \left(1 - \frac{\delta}{\pi} \right) q$. Axa absciselor taie cercul în A , de abscisă

$\overline{OA} = q - 2\mu q = q(1 - 2\mu)$. Pentru ca A_1 să fie în interiorul cercului, este necesar să avem

$$(8.58) \quad q \left(1 - \frac{\delta}{\pi} \right) < q(1 - 2\mu),$$

sau încă

$$(8.59) \quad \mu < \frac{1}{2} \cdot \frac{\delta}{\pi}.$$

Admițând deci că μ poate lua ca valoare limită sa inferioară, prin aplicarea formulei (8.49), se va putea pune aproximativ

$$(8.60) \quad \cos \theta_{1m} \approx \frac{-0,4 \frac{\delta}{\pi}}{2 \kappa_1} = -\frac{0,2}{\kappa_1} \cdot \frac{\delta}{\pi}$$

și prin urmare

$$(8.61) \quad \lambda_{1m} \approx \frac{1}{2} \left(1 + \frac{0,2}{\kappa_1} \cdot \frac{\delta}{\pi} \right) - 0,175 \frac{\delta}{\pi} = 0,50 + \left(\frac{0,1}{\kappa_1} - 0,175 \right) \frac{\delta}{\pi}$$

de unde se vede că secțiunea de grosime maximă ar putea fi împinsă dincolo de centrul profilului, către bordul de ieșire.

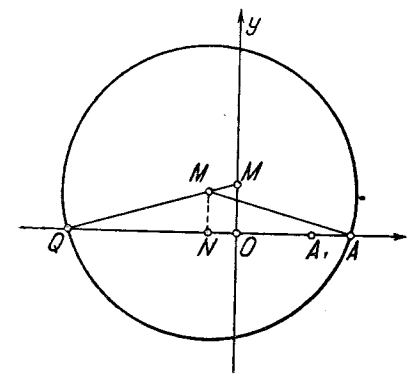


Fig. 8.4.

9. VERIFICĂRI EXPERIMENTALE ASUPRA ARIPILOR MONOPLANE DE ANVERGURĂ INFINITĂ

Teoria aripilor de anvergură infinită sau, ceea ce revine la același lucru, teoria profilelor aerodinamice este bazată pe fundamentele Mecanicii Fluidelor și atât timp cât ipotezele făcute sunt valabile, ea trebuie să fie verificată de experiență. În acest scop s'au întreprins numeroase cercetări în diferite laboratoare aerodinamice pentru a verifica până la ce punct această teorie este aplicabilă.

Și noi am făcut deasemenea o serie de cercetări la Institutul Aerotehnic de la Saint-Cyr pe baza următoarelor considerațiuni :

a) alegerea unei funcții de transformare cu trei termeni :

$$(9.1) \quad z = \zeta + \frac{q^2}{\zeta} + \frac{q_3}{\zeta^3};$$

b) alegerea următorilor parametri ai trasării :

$$f = 0,10, \mu = 0,10, \kappa = 0,05, \tau = 2^\circ;$$

- c) realizarea unui curent plan paralel;
- d) măsurări globale ale portanței și momentului și
- e) aflarea distribuției presiunilor pe conturul profilului.

Trebuie observat dela început că, deși parametrii au fost aleși în mod special pentru a se obține un profil de o formă mai generală, un profil cu curbura dublă, de exemplu, cu o săgeată destul de importantă (fig. 9.1);

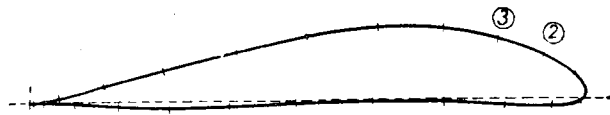


Fig. 9.1.

cu toate acestea, rezultatele sunt foarte interesante, concordanța între presiunile teoretice și cele experimentale este destul de bună (fig. 9.2, a, b, c, d), ca de altfel și pentru portanță (fig. 9.3). În ceea ce privește curba momentelor în raport cu C_z , ea este în concordanță aproape perfectă cu curba teoretică (fig. 9.4).

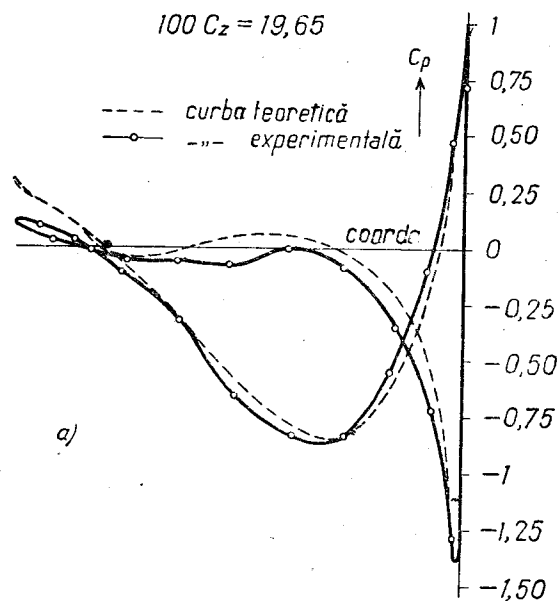


Fig. 9.2 a.

Reamintim că coeficientul unitar al presiunilor C_p depinde de viteza w_p într'un punct al profilului:

$$(9.2) \quad C_p = \frac{p - p_0}{\frac{\rho}{2} V_0^2} = 1 - \frac{w_p^2}{V_0^2}.$$

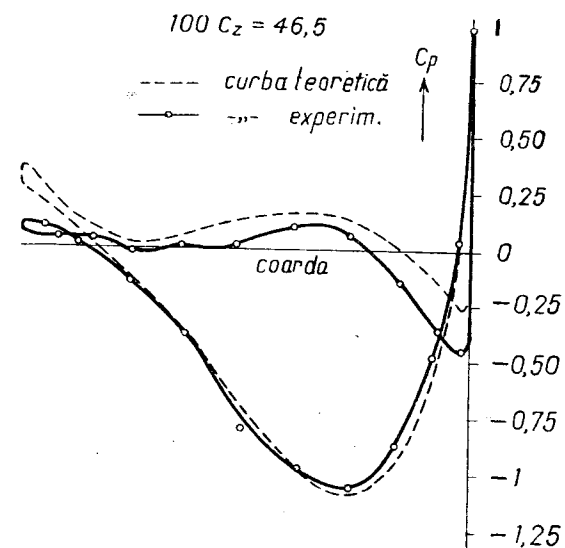


Fig. 9.2 b.

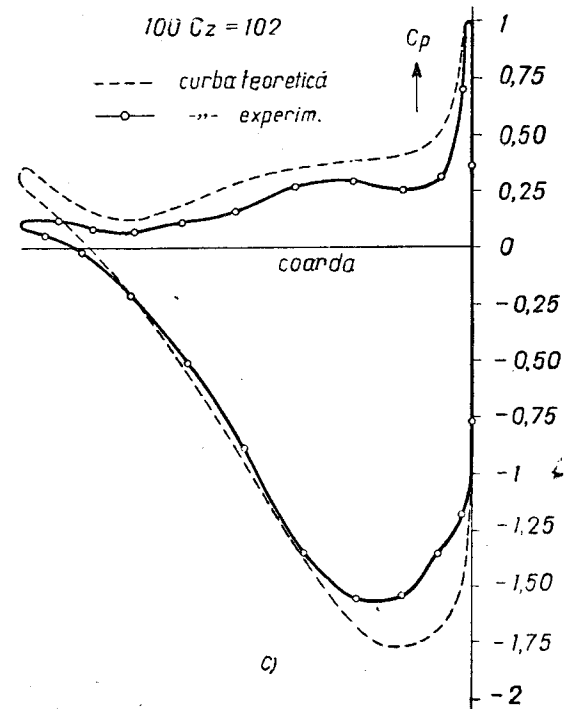


Fig. 9.2 c.

Atât pentru portanță, cât și pentru presiuni, există desigur o abatere între curbele experimentale și cele teoretice, însă abaterea este sistematică și ar putea fi explicată prin aceea că am considerat un fluid perfect, lipsit de vâzcozitate și de fenomenele perturbatoare ce decurg din acest fapt: fre-

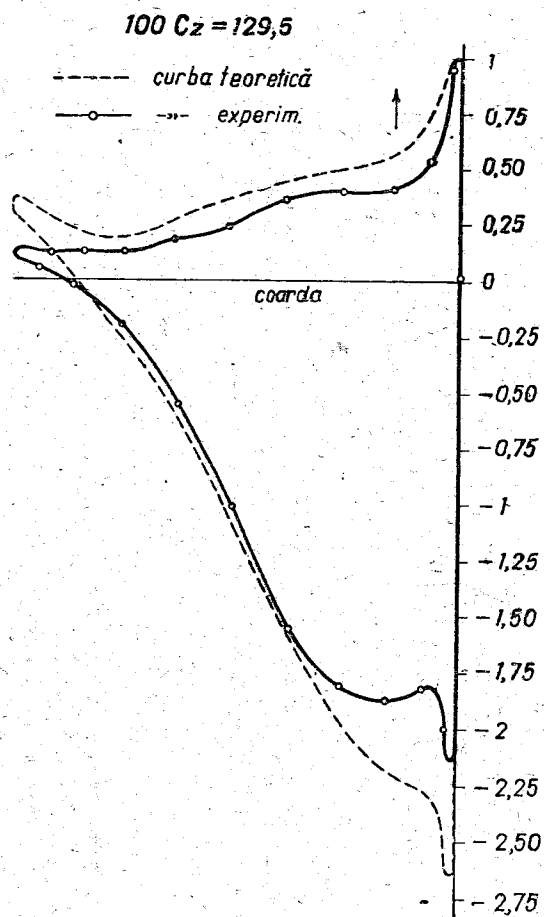


Fig. 9.2 d.

care, strat de vârtaj în apropierea imediată a conturului, desprinderea filurilor fluide la extradorsul profilului, etc. etc. Vom explica mai târziu toate aceste fenomene într'altă lucrare.

În altă ordine de idei, este interesant de constatat că ipoteza pe care am făcut-o asupra profilelor cu vârf rotunjit și rezultatele teoretice pe care le-am obținut se găsesc confirmate de asemenea de experiență. Într'adevăr, asupra unui astfel de profil (fig. 9.5), construit pe baza următorilor parametri: $f = 0,094$, $\mu = 0,094$, $\kappa = 0,121$ și a gradului de rotunjire $k = 0,0625$, prevederile teoretice ar fi putut să fie destul

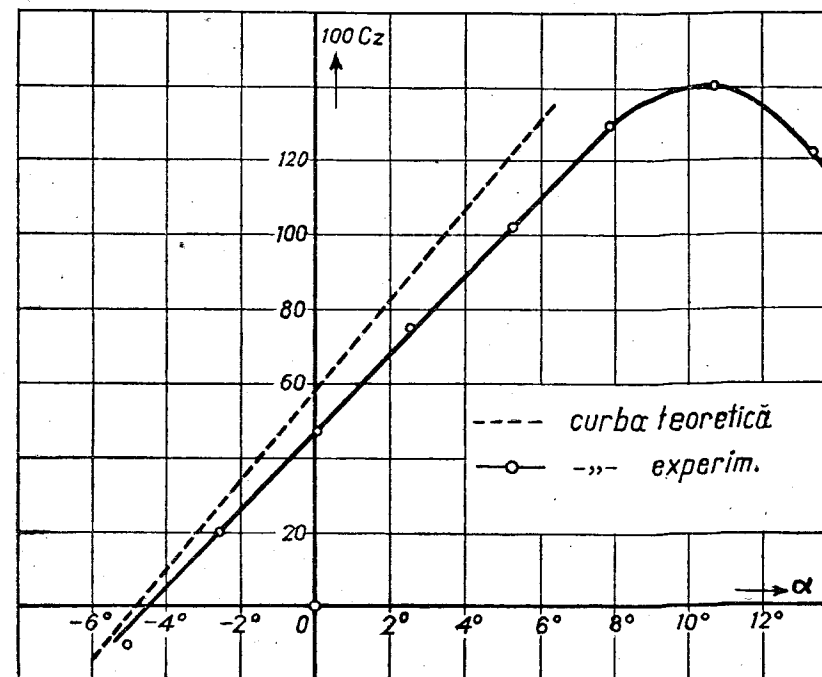


Fig. 9.3.

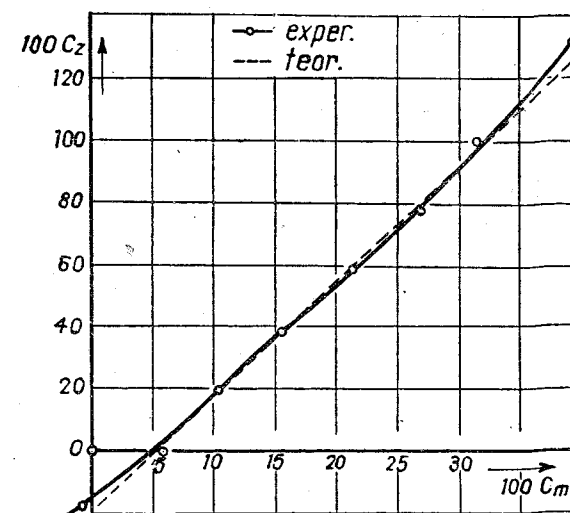


Fig. 9.4.

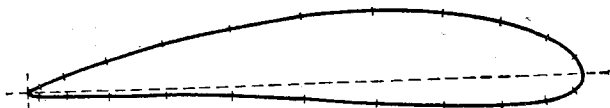


Fig. 9.5.

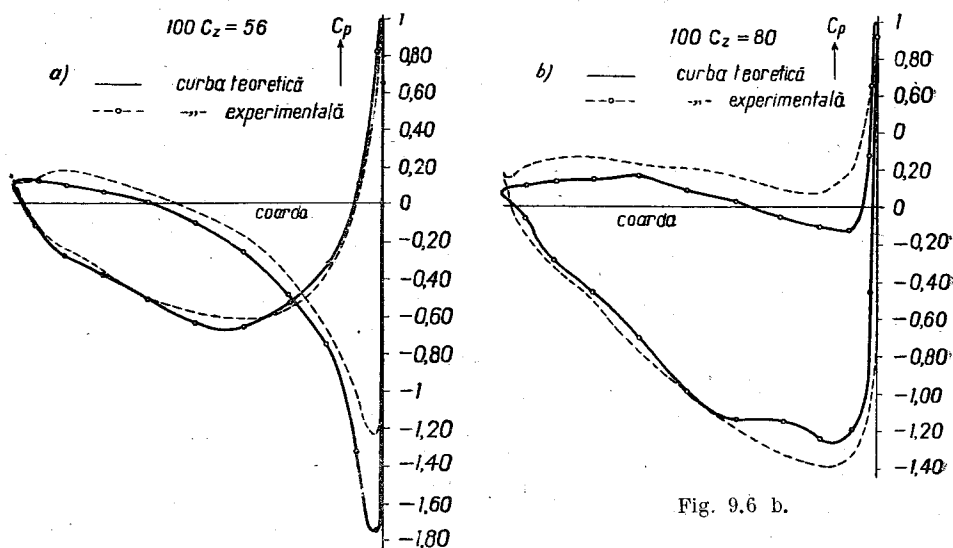


Fig. 9.6 a.

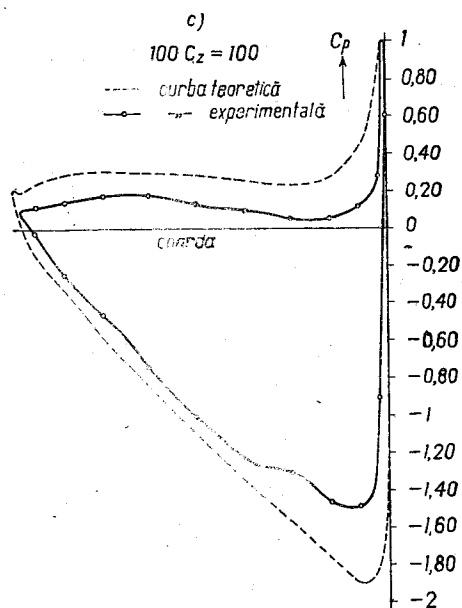


Fig. 9.6 c.

de îndepărtate de rezultatele experimentale din cauza exagerării impuse a unora dintre acești parametri și în special a gradului de rotunjire. Cu toate acestea, rezultatele experimentale sunt în concordanță cu teoria, după cum se constată din figurile 9.6, a, b, c, care reprezintă distribuția presiunilor dealungul conturului.

Importanța acestor rezultate este evidentă, dacă considerăm în special palele elicelor aeriene, unde este frecventă folosirea profilelor cu vârf rotunjit.

10. TEORIA PROFILELOR CU CONTUR DAT (Profile empirice)

Problema profilelor așa cum a fost tratată până acum este întemeiată pe studiul unei anumite funcții de transformare, ai cărei coeficienți și sistem de referință au fost convenabil variați, spre a putea găsi astfel o serie multiplă de familii de profile care să cuprindă tot câmpul de aplicații. Aceasta este problema indirectă care este foarte simplă de tratat și este în același timp suficientă pentru practică. Cu toate acestea, se prezintă des cazul unor profile date, numite profile empirice, ale căror funcții de transformare și caracteristici aerodinamice nu ne sunt cunoscute dinainte. Această problemă directă prezintă dificultăți foarte serioase pentru găsirea unei soluții explicite privitoare la distribuția presiunilor, axa de portanță nulă, momentul de portanță nulă, etc. Vom indica totuși mai jos, metode mai mult sau mai puțin laborioase, care rezolvă problema.

10.1. Metode utilizând o transformare cunoscută

Metoda aceasta datorită lui W. MÜLLER și dezvoltată de KÄRMÄN-BURGERS constă în aplicarea unei transformări cunoscute,

$$(10.1) \quad \frac{z - \alpha q}{z + \alpha q} = \frac{(\zeta' - q)^\alpha}{(\zeta' + q)^\alpha},$$

cu α dedus din formula

$$(10.2) \quad \alpha = 2 - \frac{\delta}{\pi},$$

unde δ este diedrul din vârful profilului și q este scos din relația

$$(10.3) \quad 2\alpha q = \overline{B'A'},$$

$\overline{B'A'}$ fiind aproape egală cu coarda (A' este în interiorul profilului, în apropierea bordului de atac). După aceea, conturul profilului se poate transforma, punct cu punct, într'un contur quasi-circular K , utilizând relațiile cunoscute (6.50):

$$(10.4) \quad \frac{R_1}{R_2} = k = \left(\frac{r_1'}{r_2'}\right)^\alpha, \quad \Phi = \alpha\varphi',$$

Să presupunem că punctul B corespunde vârfului profilului și să ducem o normală BM , la conturul K' (fig. 10.1), care face unghiul σ cu axa absciselor.

Să trasăm acum un cerc K , tangent în B , de aceeași arie cu conturul K' și fie M centrul său și a raza.

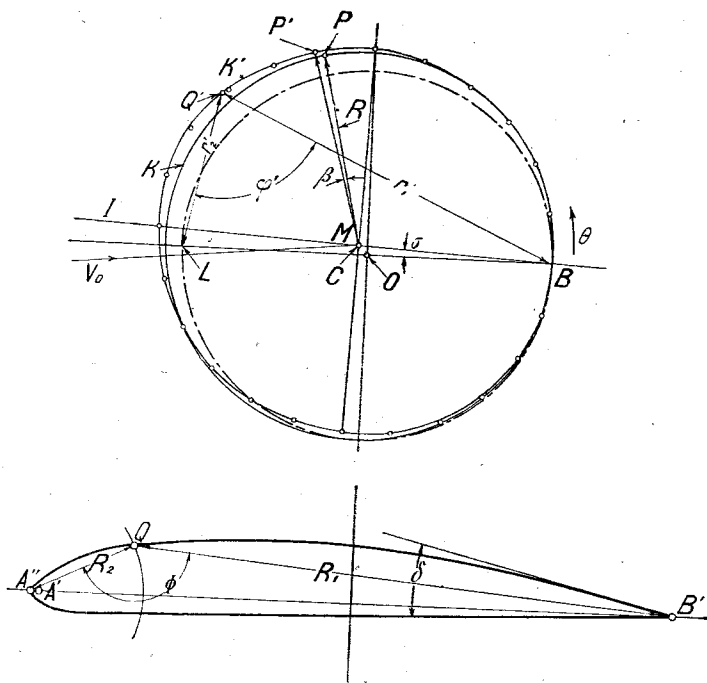


Fig. 10.1.

Un punct de pe conturul *quasi-circular* va avea drept modul

$$(10.5) \quad r' = a [1 + \varepsilon(\theta)],$$

unde $\varepsilon(\theta)$ este o funcție de θ , a cărei valoare este foarte mică în raport cu unitatea și satisface relația

$$(10.6) \quad \int_0^{2\pi} \varepsilon(\theta) d\theta = 0.$$

Să transformăm conturul K' în cercul K și fie

$$(10.7) \quad \zeta' = \zeta [1 + f(\zeta)]$$

funcția de transformare, unde $f(\zeta)$ este de asemenea foarte mică în raport cu unitatea, ceea ce ne permite să scriem:

$$(10.8) \quad \ln \zeta' \approx \ln \zeta + f(\zeta).$$

Rezultă mai departe, punând $\zeta' = r'e^{i\theta'}$ și $\zeta = ae^{i\theta}$,

$$(10.9) \quad \ln r' = \ln a + \text{p.re. } f(\zeta), \quad \theta' = \theta + \text{p.im. } f(\zeta)$$

și prin urmare, după (10.5),

$$(10.10) \quad \varepsilon(\theta) = \text{p.re. } f(\zeta).$$

Avem deci o problemă DIRICHLET: să se găsească o funcție $f(\zeta)$ a cărei parte reală să ia pe cerc valori determinate $\varepsilon(\theta)$; fiind olomorvă în exteriorul cercului și anulându-se la infinit, $f(\zeta)$ poate fi pusă deci sub forma

$$(10.11) \quad f(\zeta) = q_0 + \sum_1^n \frac{q_n}{\zeta^n} = q_0 + \sum (a_n + ib_n) (\cos n\theta - i \sin n\theta),$$

unde am înlocuit q_n prin

$$(10.12) \quad q_n = a^n (a_n + ib_n).$$

Vom avea mai departe

$$(10.13) \quad \varepsilon(\theta) = \text{p.re. } f(\zeta) = \sum_1^n (a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta),$$

partea reală a coeficientului $q_0 = a_0 + ib_0$ fiind nulă după (10.6); vom avea

$$(10.14) \quad a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \varepsilon(\theta) \cos n\theta d\theta, \quad b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \varepsilon(\theta) \sin n\theta d\theta.$$

Diferența de unghiuri dintre razele vectoroare ale punctelor omoloage P și P' rezultă imediat din (10.9) și (10.11):

$$(10.15) \quad \theta' - \theta = \beta(\theta) = b_0 + \sum_1^n (b_n \cos n\theta - a_n \sin n\theta).$$

Cele două contururi K și K' se corespund prin ipoteză în punctul B , deci $\theta' = \theta = \pi$ și $r' = r = a$. Din (10.5) și (10.13) rezultă relațiile următoare:

$$(10.16) \quad \sum_1^n (-1)^n a_n = 0, \quad b_0 + \sum_1^n (-1)^n b_n = 0.$$

Observând mai departe că avem succesiv:

$$(10.17) \quad \sum_1^n (-1)^n b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \varepsilon(\theta) \left[\sum_1^n (-1)^n \sin n\theta \right] d\theta = \\ = -\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \varepsilon(\theta) \operatorname{tg} \frac{\theta}{2} d\theta,$$

constanta $q_0 = ib_0$ va fi determinată printr'o integrală simplă.

10.1. 1. Caracteristicile profilului

Caracteristicile aerodinamice ale profilului sunt determinate astfel:

a) axa de portanță nulă face unghiul σ cu coarda considerată inițial;

b) coeficientul lui $\frac{1}{\zeta}$ din dezvoltarea $z = z(\zeta)$, care definește momentul la portanță nulă, rezultă ușor, observând mai întâi că avem, după (6.42),

$$(10.18) \quad z = \zeta' + \frac{x^2-1}{3} \cdot \frac{q^2}{\zeta'} + \dots;$$

înlocuind pe urmă ζ' prin $\zeta [1 + f(\zeta)]$, se găsește în cele din urmă

$$(10.19) \quad z = \zeta \left(1 + ib_0 + \sum_1^n \frac{q_n}{\zeta^n} \right) + \frac{x^2-1}{3} \cdot \frac{q^2}{\zeta} \left(1 - ib_0 - \sum_1^n \frac{q_n}{\zeta^n} \right) + \dots,$$

de unde rezultă coeficientul lui $\frac{1}{\zeta}$:

$$(10.20) \quad \frac{x^2-1}{3} q^2(1-ib_0) + q_2 = \frac{x^2-1}{3} (1-ib_0) q^2 + a^2(a_2 + ib_2) \approx q'^2 e^{2i\gamma}.$$

Axa a doua a profilului face unghiul γ cu axa inițială de construcție (fig. 10.1) și coeficientul C_{m0} va fi proporțional cu $\sin 2\tau = \sin 2(\sigma - \gamma)$, în conformitate cu teoria generală expusă în paragrafele precedente, observând bine înțeles că avem:

$$(10.21) \quad \tau = \sigma - \gamma;$$

e) Vitesa w_p într'un punct al profilului, însemnând prin W_K , vitesa în punctul omolog de pe cerc, va fi dată prin formula următoare:

$$(10.22) \quad w_p = W_K \cdot \left| \frac{d\zeta}{d\zeta'} \right| \cdot \left| \frac{d\zeta'}{dz} \right|.$$

Am văzut (6.57) că avem

$$(10.23) \quad \left| \frac{d\zeta'}{dz} \right| = \frac{r_1 r_2}{R_1 R_2};$$

cum pe de altă parte, pe cerc avem succesiv:

$$(10.24) \quad \frac{d\zeta'}{d\zeta} = 1 + f(\zeta) + \zeta \frac{df}{d\zeta} = 1 + \varepsilon(\theta) + i\beta(\theta) + ae^{i\theta} \frac{df}{i a e^{i\theta} d\theta} = 1 + \varepsilon(\theta) + i\beta(\theta) - i \frac{df}{d\theta} = 1 + \varepsilon(\theta) + \frac{d\beta}{d\theta} + i \left[\beta(\theta) - \frac{d\varepsilon}{d\theta} \right],$$

remarcând că $\beta(\theta)$ și $\frac{d\varepsilon}{d\theta}$ sunt foarte mici în raport cu unitatea și prin

urmare, neglijând $i \left[\beta(\theta) - \frac{d\varepsilon}{d\theta} \right]$, modulul lui $\frac{d\zeta'}{d\zeta}$ nu se modifică sensibil și se poate scrie deci în cele din urmă:

$$(10.25) \quad \left| \frac{d\zeta'}{d\zeta} \right| = \frac{1}{1 + \varepsilon + \frac{d\beta}{d\theta}} \approx 1 - \varepsilon - \frac{d\beta}{d\theta}$$

vom putea pune

$$(10.26) \quad w_p = W_K \left(1 - \varepsilon - \frac{d\beta}{d\theta} \right) \frac{r_1 r_2}{R_1 R_2}.$$

Această formulă ne permite să calculăm distribuția presiunilor de-a lungul conturului.

10.2. Metoda directă [5]

Metoda pe care am expus-o mai sus este foarte riguroasă în concepția ei, însă destul de grea în aplicarea ei efectivă pe exemple concrete.

Intr'adevăr, construcția conturului quasi-circular K' , ca rezultat al primei transformări, este foarte laborioasă și calculul grafic al coeficienților a_n, b_n este deseori delicat. Din această cauză, vom expune mai jos o metodă directă foarte simplă, care conduce imediat la determinarea caracteristicilor aerodinamice ale profilului empiric. Fie, pentru aceasta, un profil oarecare raportat la un sistem de axe Oxy , cu originea așezată în mijlocul coardei $A'B' = c$ și axa absciselor paralelă cu această coardă. Să presupunem că acest profil e obținut prin transformarea generală bine cunoscută:

$$(10.27) \quad z = \zeta + q_0 + \frac{q_1}{\zeta} + \dots + \frac{q_n}{\zeta^n}$$

a cercului K de rază a , raportat la același sistem de axe, cu centrul în origine (fig. 10.2). Fie B punctul de pe cerc corespunzător vârfului B' al profilului și σ unghiul pe care-l face \overline{BO} (axa de portanță nulă) cu Ox ; să punem $z = z_1 e^{i\sigma}$ și $\zeta = \zeta' e^{i\sigma}$, prin aceasta am dat o rotație vechiului sistem, în așa fel încât, axa absciselor Ox_1 să corespundă axei de portanță nulă.

În raport cu noul sistem Ox_1y_1 , funcția de transformare va avea forma:

$$(10.28) \quad z_1 = \zeta' + q_0 e^{-i\sigma} + \frac{q_1 e^{-2i\sigma}}{\zeta'} + \dots + \frac{q_n e^{-i(n+1)\sigma}}{\zeta'^n}.$$

Fie un cerc K_1 concentric cu K , de rază $a_1 = \frac{c}{4}$ și să punem

$$(10.29) \quad a = (1 + \mu)a_1 = (1 + \mu) \frac{c}{4};$$

relația

$$(10.30) \quad \zeta' = (1 + a)\zeta_1,$$

care este o simplă omotetie, transformă cercul K în cercul K_1 și expresia (10.28) devine:

$$(10.31) \quad z_1 = (1 + \mu)\zeta_1 + q_0 e^{-i\sigma} + \frac{q_1 e^{-2i\sigma}}{1 + \mu} \cdot \frac{1}{\zeta_1} + \dots \\ \dots + \frac{q_n e^{-i(n+1)\sigma}}{(1 + \mu)^n} \cdot \frac{1}{\zeta_1^n};$$

aceasta face să corespundă cercului K_1 profilul dat.

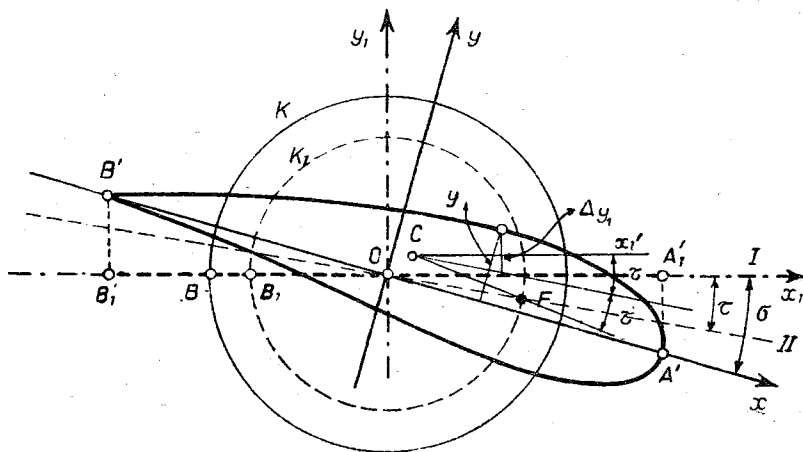


Fig. 10.2.

Să considerăm mai departe transformarea acestui cerc K_1 în segmentul rectiliniu $B'_1 A'_1$ prin funcția:

$$(10.32) \quad z'_1 = \zeta_1 + \frac{a_1^2}{\zeta_1}$$

și fie

$$(10.33) \quad \Delta z_1 = z_1 - z'_1 = \mu \zeta_1 + Q_0 + \frac{Q_1}{\zeta_1} + \dots + \frac{Q_n}{\zeta_1^n},$$

unde

$$(10.34) \quad Q_0 = q_0 e^{-i\sigma}, Q_1 = \frac{q_1 e^{-2i\sigma}}{1 + \mu} - a_1^2, Q_n = \frac{q_n e^{-i(n+1)\sigma}}{(1 + \mu)^n}.$$

Pentru punctele cercului K_1 vom pune $\zeta_1 = a_1 e^{i\theta}$ și, înlocuind $Q_0, Q_1, \dots, \dots, Q_n$, prin

$$(10.35) \quad Q_n = a_1^{n+1} (A_n + iB_n)$$

vom putea scrie în loc de (10.33) următoarea relație:

$$(10.36) \quad \frac{\Delta z_1}{a_1} = \mu e^{i\theta} + A_0 + iB_0 + (A_1 + iB_1)e^{-i\theta} + \dots + (A_n + iB_n)e^{-in\theta},$$

de unde rezultă:

$$(10.37) \quad \begin{cases} \frac{\Delta x_1}{a_1} = \mu \cos \theta + A_0 + \sum_{1}^n (A_n \cos n\theta + B_n \sin n\theta), \\ \frac{\Delta y_1}{a_1} = \mu \sin \theta + B_0 + \sum_{1}^n (B_n \cos n\theta + A_n \sin n\theta). \end{cases}$$

Să considerăm acum că abscisele profilului, pentru un θ determinat, corespund aproximativ absciselor segmentului rectiliniu

$$(10.38) \quad x_1 \approx x'_1 = 2a_1 \cos \theta;$$

se neglijează prin urmare variația lui Δx_1 .

Există totuși o condiție de îndeplinit: coarda profilului trebuie să fie egală cu lungimea segmentului ($c = 4a_1$). Această condiție este satisfăcută, dacă avem:

$$(10.39) \quad (\Delta x_1)_0 - (\Delta x_1)_\pi = 0;$$

rezultă

$$(10.40) \quad \mu + A_0 + \sum_{1}^n A_n - \left[-\mu + A_0 + \sum_{1}^n (-1)^n A_n \right] = 0$$

sau încă

$$(10.40 \text{ bis}) \quad \mu + A_1 + A_3 + A_5 + \dots + A_{2p+1} + \dots = 0.$$

Această relație ne va permite în cele ce urmează să determinăm pe μ .

Pentru calculul coeficienților A_n, B_n , este ușor de văzut că avem (fig. 10.2):

$$(10.41) \quad \Delta y_1 \approx y - 2\sigma a_1 \cos \theta$$

și prin urmare se deduc, din expresia a doua (10.37), următoarele relații:

$$(10.42) \quad \begin{cases} \mu - A_1 = \frac{1}{\pi a_1} \int_0^{2\pi} y \sin \theta d\theta, & -A_n = \frac{1}{\pi a_1} \int_0^{2\pi} y \sin n\theta d\theta, \\ B_0 = \frac{1}{2\pi a_1} \int_0^{2\pi} y d\theta, & 2\sigma + B_1 = \frac{1}{\pi a_1} \int_0^{2\pi} y \cos \theta d\theta, \\ & B_n = \frac{1}{\pi a_1} \int_0^{2\pi} y \cos n\theta d\theta. \end{cases}$$

10.2.1. Proprietăți aerodinamice. Pentru determinarea lui σ , se observă mai întâi că în vârful B_1 , care corespunde vârfului B' al profilului, derivata lui z_1 în raport cu ζ_1 este nulă :

$$(10.43) \quad \frac{dz_1}{d\zeta_1} - \frac{dz'_1}{d\zeta_1} = \frac{d(\Delta z_1)}{d\zeta_1} = \mu - \sum_1^n \frac{nQ_n}{\zeta_1^{n+1}} = 0;$$

este suficient apoi să înlocuim θ prin π ,

$$(10.44) \quad \mu + \sum' (-1)^n n (A_n + iB_n) = 0$$

și să obținem astfel :

$$(10.45) \quad \mu + \sum (-1)^n n A_n = 0, \quad \sum (-1)^n n B_n = 0.$$

Prima relație este o identitate. Intr'adevăr, remarcând că se poate pune succesiv :

$$(10.46) \quad \left\{ \begin{aligned} -n A_n &= \frac{n}{\pi a_1} \int_0^{2\pi} y \sin n\theta \, d\theta = \frac{n}{\pi a_1} \left(\frac{-y \cos n\theta}{n} \right)_0^{2\pi} + \\ &\quad + \frac{1}{\pi a_1} \int_0^{2\pi} \cos n\theta \, dy, *) \\ \mu - A_1 + 2A_2 - 3A_3 + 4A_4 - \dots &= \\ &= \frac{1}{\pi a_1} \int_0^{2\pi} \left[\sum' (-1)^n \cos n\theta \right] dy, \\ -\sum (-1)^n \cos n\theta &= \frac{1}{2} \left(\frac{e^{i\theta}}{1+e^{i\theta}} + \frac{e^{-i\theta}}{1+e^{-i\theta}} \right) = \frac{1}{2}, \end{aligned} \right.$$

se obține în cele din urmă verificarea primei ecuații (10.45) *) :

$$(10.45 \text{ bis}) \quad \mu + \sum (-1)^n n A_n = - \frac{1}{2\pi a_1} \int_0^{2\pi} dy = 0.$$

Din a doua ecuație (10.45) se obține σ . Vom avea ca mai sus :

$$(10.47) \quad n B_n = \frac{n}{\pi a_1} \int_0^{2\pi} y \cos n\theta \, d\theta = - \frac{1}{\pi a_1} \int_0^{2\pi} \sin n\theta \, dy;$$

înlocuind apoi $2i \sin n\theta$ prin $(e^{+in\theta} - e^{-in\theta})$, ținând seama de (10.42) și făcând reducerile necesare, se găsește :

$$(10.48) \quad \sum (-1)^n n B_n = - \frac{1}{\pi a_1} \int_0^{2\pi} [\sum (-1)^n \sin n\theta] dy + 2\sigma = \\ = \frac{1}{2\pi a_1} \int_0^{2\pi} \operatorname{tg} \frac{\theta}{2} dy + 2\sigma = 0.$$

*) Limitele integralelor se referă numai la variabila θ .

Astfel, unghiul σ , pe care axa de portanță nulă îl face cu axa inițială Ox a profilului, va fi dat de următoarea formulă :

$$(10.49) \quad \sigma = - \frac{1}{\pi c} \int_0^{2\pi} \operatorname{tg} \frac{\theta}{2} dy = \frac{1}{\pi c} \int_0^{2\pi} \frac{y}{1 + \cos \theta} d\theta,$$

unde $c = 4 a_1$ reprezintă coarda profilului.

Cu toate acestea, în cazul în care numărul coeficienților B_n este limitat la 3 - 5 și calculul este ușor, este preferabil de aplicat a doua formulă (10.45) sub forma ei inițială :

$$(10.50) \quad B_1 - 2B_2 + 3B_3 - 4B_4 + \dots = 0,$$

care conține pe 2σ în expresia ei.

Pentru coeficientul μ dat de relația (10.40), dacă A_1, A_3, A_5 nu sunt determinați, se poate găsi deasemenea o formulă analoagă cu (10.49); observând că se poate scrie succesiv :

$$(10.51) \quad \mu + A_1 + A_3 + A_5 + \dots + (\mu - A_1) = \frac{1}{\pi a_1} \int_0^{2\pi} y \sin \theta \, d\theta,$$

sau

$$(10.52) \quad 2\mu = \frac{1}{\pi a_1} \int_0^{2\pi} y (\sin \theta + \sin 3\theta + \sin 5\theta + \dots) d\theta = \\ = - \frac{i}{2\pi a_1} \int_0^{2\pi} y \left(\frac{e^{i\theta}}{1 - e^{2i\theta}} - \frac{e^{-i\theta}}{1 - e^{-2i\theta}} \right) d\theta$$

și în sfârșit

$$(10.53) \quad \mu = \frac{1}{\pi c} \int_0^{2\pi} \frac{y}{\sin \theta} d\theta.$$

Acest rezultat va fi utilizat dacă y este exprimat printr'o curbă analitică sau dacă este nevoie de făcut o integrare grafică.

Astfel, dacă μ și σ sunt calculați, portanța unitară va avea expresia :

$$(10.54) \quad C_z = 8\pi \frac{a}{c} (\alpha + \sigma) = 2\pi (1 + \mu) (\alpha + \sigma).$$

Un alt invariant al profilului este coeficientul momentului la portanța nulă și eventual focarul. În raport cu axa de portanță nulă (Ox_1), vom avea, ținând seama de (10.28) și de (10.34) :

$$(10.55) \quad q_1 e^{-2i\sigma} = (1 + \mu) (a_1^2 + Q_1) = (1 + \mu) a_1^2 (1 + A_1 + iB_1) = \\ = (1 + \mu) a_1^2 (1 + \epsilon) e^{2i\gamma},$$

unde A_1 și B_1 vor fi dați de primele ecuații (10.42) și respectiv :

$$(10.56) \quad \operatorname{tg} 2\gamma = \frac{B_1}{1 + A_1} \approx B_1 \approx 2\gamma, \quad \epsilon \approx A_1 + \frac{A_1^2 + B_1^2}{2} \approx A_1.$$

Dacă vrem ca termenul (10.55) să fie real, sistemul de axe trebuie rotit cu un unghi γ ; în acest caz, unghiul dintre noua axă a absciselor și a două axă a profilului și prin urmare unghiul pe care axa de portanță nulă îl face cu aceasta din urmă este egal cu $-\gamma$.

În tot ce precede, am însemnat întotdeauna acest unghi prin τ , deci :

$$(10.57) \quad \tau = -\gamma$$

și prin aplicarea primei formule (5.25) vom avea :

$$(10.58) \quad C_{m0} = 4\pi \frac{(1+\mu) a_1^2 (1+\varepsilon)}{16 a_1^2} \sin 2\gamma \approx \frac{\pi}{2} (1+\mu + A_1) \gamma.$$

Pentru a găsi focarul, trebuie să efectuăm o translație a profilului egală cu $q_0 e^{-i\sigma}$, noua variabilă fiind definită prin

$$(10.59) \quad z_1 = z_0 + q_0 e^{-i\sigma},$$

astfel încât, funcția de transformare (10.28) să nu aibă termen constant. Prin urmare centrul cercului generator este deplasat cu valoarea $q_0 e^{-i\sigma}$, egală după (10.34) și (10.35) cu

$$(10.60) \quad q_0 e^{-i\sigma} = Q_0 = a_1 (A_0 + iB_0),$$

unde vom avea, prin aplicarea formulelor (10.42) :

$$(10.61) \quad B_0 = \frac{1}{2\pi a_1} \int_0^{2\pi} y \, d\theta.$$

În ceea ce privește A_0 , el va fi determinat presupunând că expresia

$$(10.37) \text{ a lui } \frac{\Delta z_1}{a_1} \text{ este nulă pentru } \theta = \pi :$$

$$(10.62) \quad A_0 = \mu + A_1 - A_2 + A_3 - A_4 + \dots = -(A_2 + A_4 + A_6 + \dots).$$

În cazul în care dezvoltarea în serie FOURIER este nelimitată, observând că avem succesiv :

$$(10.63) \quad \sum \sin 2p\theta = -\frac{i}{2} \left(\frac{e^{2i\theta}}{1 - e^{2i\theta}} - \frac{e^{-2i\theta}}{1 - e^{-2i\theta}} \right) = \frac{1}{2} \cot \theta,$$

se găsește pentru A_0 următoarea integrală :

$$(10.64) \quad A_0 = -\sum A_{2p} = \frac{1}{\pi a_1} \int_0^{2\pi} y \left(\sum \sin 2p\theta \right) d\theta = \frac{1}{2\pi a_1} \int_0^{2\pi} y \cot \theta \, d\theta.$$

Fie deci C , centrul astfel deplasat, cu afixul $Q_0 = a_1 (A_0 + iB_0)$; focarul se găsește pe CF , simetrică la axa Ox'_1 , în raport cu o dreaptă trecând prin C și paralelă la OII (axa a doua, fig. 10.2) la distanța

$$(10.65) \quad \overline{CF} = \frac{q^2}{a} = \frac{(1+\mu)(1+\varepsilon)a_1^2}{a} \approx (1+A_1)a_1,$$

ceace corespunde la o distanță :

$$(10.66) \quad \overline{OF} \approx (1+A_1)a_1 + A_0 a_1$$

în raport cu originea.

10.2.2. Calculul viteșelor. Pentru distribuția de viteze, trebuie să fie cunoscuți toți coeficienții $A_1, \dots, A_n, B_1, \dots, B_n$. Este vorba, într'adevăr, să calculăm modulul derivatei $\frac{dz}{d\zeta}$:

$$(10.67) \quad \left| \frac{dz}{d\zeta} \right| = \left| \frac{dz}{dz_1} \right| \cdot \left| \frac{dz_1}{d\zeta_1} \right| \cdot \left| \frac{d\zeta_1}{d\zeta'} \right| \cdot \left| \frac{d\zeta'}{d\zeta} \right| = \frac{1}{1+\mu} \left| \frac{dz_1}{d\zeta_1} \right|.$$

Avem pe de altă parte :

$$(10.68) \quad \frac{dz_1}{d\zeta_1} = \frac{dz'_1}{d\zeta'_1} + \mu - \sum_1^n \frac{nQ_n}{\zeta_1^{n+1}} = \frac{1}{\zeta_1} \left(\zeta_1 \frac{dz'_1}{d\zeta'_1} + \mu \zeta_1 - \sum_1^n \frac{nQ_n}{\zeta_1^n} \right)$$

sau încă :

$$(10.69) \quad \left| \frac{dz_1}{d\zeta_1} \right| = \left| \mu \cos \theta - \sum_1^n n(A_n \cos n\theta + B_n \sin n\theta) + i \left[(2+\mu) \sin \theta - \sum_1^n n(B_n \cos n\theta - A_n \sin n\theta) \right] \right|.$$

Formula viteșei devine în acest caz :

$$(10.70) \quad w_p = \frac{(1+\mu) W_K}{\left| \frac{dz_1}{d\zeta_1} \right|}$$

10.2.3. Verificare. Pentru a verifica metoda pe care am expus-o mai sus, să luăm ca exemplu un profil JUCOVSKI, având următoarele caracteristici, după (6.25) :

coarda : $c = 4a_1 = 4q$,

raza cercului generator : $a = q + m \cos \delta = q(1 + \mu_0)$,

coeficientul de curbură (săgeata) : f_0 .

Transformarea bine cunoscută a unui astfel de profil, raportat la sistemul obișnuit de axe (fig. 6.1), va avea ca expresie :

$$z = \zeta' + \frac{q^2}{\zeta'}$$

și în raport cu un alt sistem paralel cu cel dintâi și având originea în centrul cercului generator, observând că putem scrie

$$(10.71) \quad \zeta' = \zeta + q(\mu_0 + if_0),$$

această expresie devine, succesiv :

$$(10.72) \quad z = \zeta + q(\mu_0 + if_0) + \frac{q^2}{\zeta \left(1 + \frac{q(\mu_0 + if_0)}{\zeta}\right)} \approx \\ \approx \zeta + q(\mu_0 + if_0) + \frac{q^2}{\zeta} - \frac{q^3(\mu_0 + if_0)}{\zeta^2}$$

și prin urmare, pentru punctele cercului $[\zeta = q(1 + \mu_0 e^{i\theta})]$, vom avea :

$$(10.73) \quad \frac{z}{q} = (1 + \mu_0)e^{i\theta} + (\mu_0 + if_0) + (1 - \mu_0)e^{-i\theta} - (\mu_0 + if_0)e^{-2i\theta}$$

Rezultă

$$(10.74) \quad \frac{y}{q} = 2\mu_0 \sin \theta + \mu_0 \sin 2\theta - f_0 \cos 2\theta + f_0$$

de unde se deduce :

$$(10.75) \quad \mu - A_1 = 2\mu_0, \quad A_2 = -\mu_0, \quad B_1 = -2\sigma, \quad B_2 = -f_0, \quad B_0 = f_0$$

Aplicând relațiile (10.40) și (10.50) și ținând seama de ultimile rezultate obținem în mod riguros :

$$(10.76) \quad \mu = \mu_0, \quad \sigma = f_0 = \tau,$$

tocmai caracteristicile profilului JUCOVSKI.

Avem pe de altă parte : $2\gamma = B_1 = -2\sigma$, $\varepsilon = A_1 = -\mu_0$, $A_0 = \mu_0$.

În general, ordonatele unui profil oarecare nu sunt exprimate printr'o expresie analitică simplă; de aceea, pentru a determina caracteristicile aerodinamice este nevoie de integrări grafice mai mult sau mai puțin simple. Se mai poate face să treacă prin diferite puncte ale conturului o curbă analitică regulată, foarte apropiată de conturul real (extradosul de o parte și intradosul de altă parte) și să se calculeze ușor integralele (10.40), (10.42) și (10.53) pentru determinarea lui σ , μ , $Q_0 = a_1(A_0 + iB_0)$ și $Q_1 = a_1^2(A_1 + iB_1)$

10.3. Aplicație la profile empirice subțiri

Aplicațiile metodei precedente la profilele empirice subțiri conduc la rezultate foarte interesante. Într'adevăr, un profil subțire ar putea fi confundat cu linia sa medie pe care am numit-o *schélet* (fig. 10.3). Ordinatele profilului pentru $+\theta$ și $-\theta$ fiind egale, dezvoltarea lui y în polinom trigonometric nu conține decât termenii în $\cos n\theta$:

$$(10.77) \quad 4\frac{y}{c} = \beta_0 + \beta_1 \cos \theta + \beta_2 \cos 2\theta + \beta_3 \cos 3\theta + \dots$$

Pentru ca y să se anuleze la cele două extremități, $A(\theta=0)$ și $B(\theta=\pi)$, coeficienții β_n trebuie să satisfacă relațiile următoare :

$$(10.78) \quad \begin{cases} \beta_0 + \beta_2 + \beta_4 + \dots = 0, \\ \beta_1 + \beta_3 + \beta_5 + \dots = 0, \end{cases}$$

de unde rezultă :

$$(10.79) \quad \mu = A_1 = A_2 = \dots = A_n = 0$$

și

$$(10.80) \quad B_1 = \beta_1 - 2\sigma, \quad B_2 = \beta_2, \dots, B_n = \beta_n.$$

Aceste ultime rezultate, înlocuite în (10.50), ne dau valoarea lui σ .

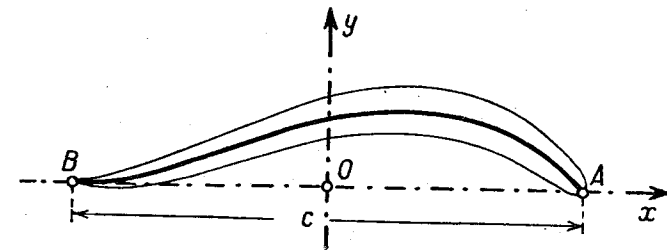


Fig. 10.3.

În cazul când nu se cunoaște dezvoltarea (10.77), este suficient să se aplice formulele (10.42) și (10.49) într'o formă puțin diferită :

$$(10.81) \quad \begin{cases} B_1 = \frac{1}{\pi a_1} \int_0^{2\pi} y \cos \theta d\theta - 2\sigma = \frac{8}{\pi c} \int_0^\pi y \cos \theta d\theta, \\ \sigma = -\frac{2}{\pi c} \int_0^\pi \operatorname{tg} \frac{\theta}{2} dy = -\frac{2}{\pi c} \int_0^\pi \frac{y}{1 + \cos \theta} d\theta, \\ B_n = \frac{8}{\pi c} \int_0^\pi y \cos n\theta d\theta. \end{cases}$$

De multe ori este preferabil să trecem prin punctele conturului o curbă analitică regulată cât mai apropiată posibil de conturul real și să determinăm apoi, după transformare, coeficienții definiți de (10.81). Astfel, de exemplu, profilul subțire din fig. 10.4 (483, Göt. Ergeb.) ar putea fi reprezentat într'un mod aproape riguros prin curba regulată :

$$(10.82) \quad 4\frac{y}{c} = 0,2324 + 0,137\frac{2x}{c} - 0,2228\left(\frac{2x}{c}\right)^2 - 0,1274\left(\frac{2x}{c}\right)^3,$$

care devine înlocuind x după (10.38), prin $\frac{c}{2} \cos \theta$:

$$(10.83) \quad 4 \frac{y}{c} = 0,125 - 0,0414 \cos \theta - 0,1114 \cos 2\theta + 0,03184 \cos 3\theta.$$

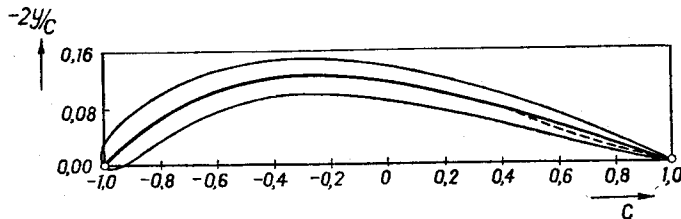


Fig. 10.4.

Se poate scrie deci:

$$(10.84) \quad B_1 = -0,0414 - 2\sigma, \quad B_2 = -0,1114, \quad B_3 = 0,03184$$

și prin urmare, după (10.50), se obține:

$$(10.85) \quad \sigma = 0,1385 = 8^\circ.$$

Pentru momentul unitar la portanță nulă, se calculează γ din relația (10.56):

$$(10.86) \quad \operatorname{tg} 2\gamma = B_1 = -0,3184, \quad \sin 2\gamma = -0,305 = -\sin 2\tau$$

și se găsește astfel:

$$(10.87) \quad C_{m_0} = -\frac{\pi}{4} \sin 2\tau = -0,305 \frac{\pi}{4}.$$

Invers, se poate pleca de la o expresie în $\cos n\theta$ (10.77) sau în

$$(10.88) \quad \xi = \frac{2x}{c}$$

cum ar fi, de exemplu,

$$(10.89) \quad 4 \frac{y}{c} = \alpha_0 + \alpha_1 \xi + \alpha_2 \xi^2 + \alpha_3 \xi^3 + \alpha_4 \xi^4$$

și să se varieze coeficienții α_i , respectiv β_i din (10.77), astfel încât să se obțină o serie de profile cu curbura simplă sau dublă (fig. 5.4 a, b). În acest ultim caz, profilul ar putea fi reprezentat printr-o ecuație simplă:

$$(10.90) \quad 4 \frac{y}{c} = k (\xi - 1) (\xi + 1) (\xi + \varepsilon),$$

unde ε va fi determinat în așa fel, încât să putem obține un coeficient C_{m_0} dat.

10.4. Profile deformate

Una din aplicațiile cele mai interesante ale teoriei profilelor empirice este fără îndoială deformația conturului unui profil.

Intr'adevăr, un profil oarecare, fie el profil teoretic sau cu caracteristici aerodinamice perfect determinate, devine un profil empiric de îndată ce i se deformează într'un mod oarecare conturul. Astfel de exemplu, aripioarele la aripi, voleanții de intrados, pereții elastici ce îmbracă bordul de atac al aripilor contra jivrajului, etc., sunt tot atâtea moduri de a deforma conturul inițial al unui profil.

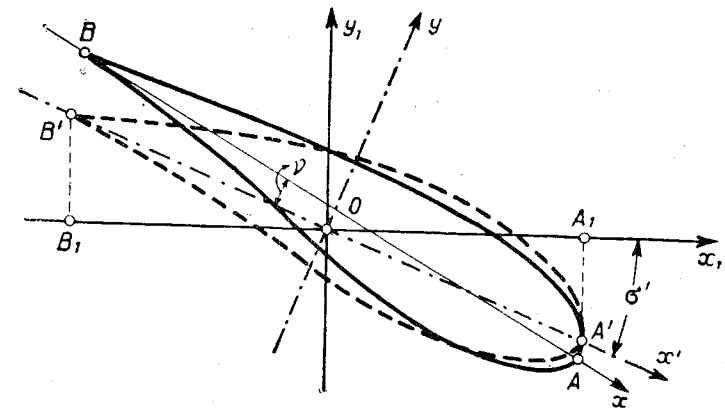


Fig. 10.5.

Pentru a determina influența acestor deformații, se pot aplica metodele precedente, considerând abscisele profilului inițial și cele ale profilului deformat aproximativ egale. Să raportăm deci profilul deformat la un sistem de axe $Ox'y'$ unde Ox' este chiar coarda acestui profil (fig. 10.5).

Să indicăm prin y ordonatele profilului nedeformat în raport cu axa sa de referință și să presupunem că, coarda profilului deformat face unghiul ν cu această axă inițială de referință; prin Δy , în raport cu aceeași axă să notăm deformațiile pe care le suferă conturul. Vom avea însemnând tot prin c coarda profilului deformat pe care o presupunem egală cu aceea a profilului inițial:

$$(10.91) \quad 4 \frac{y'}{c} = 4 \frac{y}{c} - 4\nu \frac{x}{c} + 4 \frac{\Delta y}{c} + b_0 = 4 \frac{y}{c} - 2\nu \cos \theta + \frac{4}{c} \Delta y + b_0.$$

Aplicarea formulelor (10.42), ne dau soluția :

$$(10.92) \quad \left\{ \begin{array}{l} \mu' - \mu (A_1' - A_1) = \frac{4}{\pi c} \int_0^{2\pi} \Delta y \sin \theta d\theta, \\ -(A_n' - A_n) = \frac{4}{\pi c} \int_0^{2\pi} \Delta y \sin n\theta \cdot d\theta, \\ B_1' - B_1 = -2\nu + \frac{4}{\pi c} \int_0^{2\pi} \Delta y \cos \theta d\theta - 2(\sigma' - \sigma), \\ B_n' - B_n = \frac{\pi}{4\nu} \int_0^{2\pi} \Delta y \cos n\theta d\theta. \end{array} \right.$$

Insemnând prin Δ diferențele între caracteristicile profilului deformat și cele ale profilului inițial nedeformat, vom stabili mai jos principalele formule pe care le vom utiliza mai târziu :

$$(10.93) \quad \left\{ \begin{array}{l} \Delta \mu + \Delta A_1 + \Delta A_3 + \Delta A_5 + \dots = 0, \\ \Delta B_1 - 2\Delta B_2 + 3\Delta B_3 - 4\Delta B_4 + \dots = 0, \\ \Delta \mu = \frac{1}{\pi c} \int_0^{2\pi} \frac{\Delta y}{\sin \theta} d\theta, \\ \Delta \sigma = -\nu - \frac{1}{\pi c} \int_0^{2\pi} \operatorname{tg} \frac{\theta}{2} d(\Delta y) = \frac{1}{\pi c} \int_0^{2\pi} \frac{\Delta y}{1 + \cos \theta} d\theta - \nu, \\ 2\Delta \gamma = -\Delta B_1; \Delta \varepsilon \approx \Delta A_1, \\ \Delta C_{m0} = -\frac{\pi}{4} (1 + \Delta \mu + \Delta \varepsilon) \Delta B_1 \approx -\frac{\pi}{4} \Delta B_1. \end{array} \right.$$

Printre problemele privitoare la deformația profilelor, vom trata mai jos, câteva cazuri practice interesante.

10.5. Bracajul părții mobile

Partea mobilă $B_1 O_1$ din spre bordul de ieșire, (care se numește aripă și o aripă dacă este vorba de aripă, profundor sau direcție respectiv în cazul

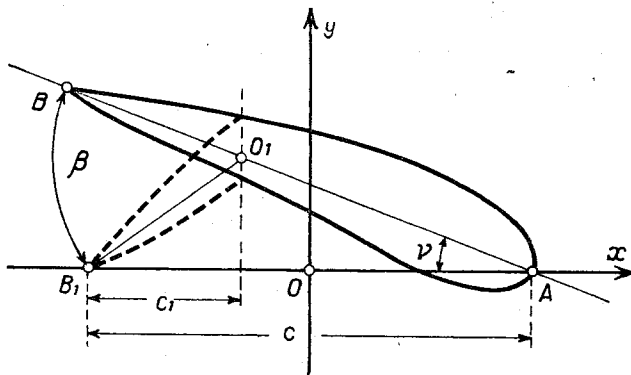


Fig. 10.6.

ampenajului orizontal sau vertical), se rotește în jurul axului O_1 numit șarnieră, de un unghi β numit bracaj.

Prin acest bracaj, profilul se deformează și primește următoarele modificări (fig. 10.6) :

$$(10.94) \quad \left\{ \begin{array}{l} \Delta y = 0, \text{ dela } A \text{ la } O_1 \text{ și } \Delta y = \left(\frac{c}{2} - c_1 + x \right) \beta, \text{ dela } O_1 \text{ la } B, \\ \frac{d(\Delta y)}{dx} = 0, \text{ dela } A \text{ la } O_1 \text{ și } \frac{d(\Delta y)}{dx} = \beta, \text{ dela } O_1 \text{ la } B. \end{array} \right.$$

Pe intrados variația este identică ca pe extrados, așa încât coeficienții ΔA_n sunt identic nuli. Rezultă că $\Delta \mu = 0$ iar axa de portanță nulă va face unghiul următor cu axa $B_1 A$ a profilului deformat :

$$(10.95) \quad \begin{aligned} \Delta \sigma &= -\nu - \frac{1}{\pi c} \int_0^{2\pi} \operatorname{tg} \frac{\theta}{2} \frac{d(\Delta y)}{dx} \frac{dx}{d\theta} d\theta = -\nu + \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \operatorname{tg} \frac{\theta}{2} \sin \theta \left[\frac{d(\Delta y)}{d\theta} \right] d\theta = \\ &= -\nu + \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{d(\Delta y)}{dx} (1 - \cos \theta) d\theta = -\nu + \frac{\beta}{\pi} (\theta - \sin \theta) \Big|_0^{\pi} \end{aligned}$$

Fie mai departe $\theta = \varphi$ unghiul corespunzător punctului O_1 ; adăugând la rezultatul de mai sus unghiul ν pentru a exprima $\Delta \sigma$ în raport cu axa inițială $B A$ a profilului, expresia precedentă devine

$$(10.96) \quad \Delta \sigma = \beta \frac{\pi - \varphi + \sin \varphi}{\pi}.$$

Dacă x_1 este abscisa punctului O_1 (fig. 10.6) și c_1 partea mobilă a corzii (dinspre bordul de ieșire), avem succesiv

$$(10.97) \quad x_1 = c_1 - \frac{c}{2} = \frac{c}{2} \cos \varphi, \quad \cos \frac{\varphi}{2} = \sin \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\varphi}{2} \right) = \sqrt{\frac{c_1}{c}};$$

se deduce ușor mai departe :

$$(10.98) \quad \sin \varphi = 2 \sqrt{\frac{c_1}{c} \left(1 - \frac{c_1}{c} \right)}, \quad \pi - \varphi = 2 \arcsin \sqrt{\frac{c_1}{c}},$$

de unde rezultă :

$$(10.99) \quad \Delta \sigma = 2 \frac{\beta}{\pi} \left[\arcsin \sqrt{\frac{c_1}{c}} + \sqrt{\frac{c_1}{c} \left(1 - \frac{c_1}{c} \right)} \right].$$

Această formulă a fost obținută pe o altă cale de către M. MUNK pentru profilele subțiri. Am demonstrat mai sus că ea este valabilă deasemenea și pentru profilele groase. În general $\frac{c_1}{c}$ este mic în raport cu unitatea, acest raport nu depășește niciodată 0,50, în așa fel, încât putem dezvolta expresia precedentă și, neglijând termenii de ordin secundar, putem obține o formă mai simplă :

$$(10.100) \quad \Delta \sigma \approx \frac{4}{\pi} \sqrt{\frac{c_1}{c}} \left(1 - 0,17 \frac{c_1}{c} \right) \beta.$$

Rezultatele experimentale sunt în general mai mici, de altfel conform cu cele ce se întâmplă în cazul unghiurilor de portanță nulă la profilele foarte curbate, în așa fel, încât aceste rezultate sunt mai bine exprimate prin

formula următoare dedusă, de altfel, din cea precedentă prin simplificarea coeficienților :

$$(10.101) \quad \Delta \sigma = \beta \sqrt{\frac{c_1}{c}}$$

Sub această formă calculul este mai comod și formula va fi des utilizată în aplicațiile de mai târziu. Rezultatele experimentale sunt în bun acord cu această formulă.

Pentru coeficientul C_{m0} , trebuie calculat $\Delta \gamma$:

$$(10.102) \quad \Delta \gamma = \frac{1}{2} \Delta B_1 = -v - \Delta \sigma + \frac{2}{\pi c} \int_0^{2\pi} \Delta y \cos \theta d\theta = \\ = -\frac{\beta}{\pi} (\pi - \varphi + \sin \varphi) - \frac{4}{\pi c} \int_0^{2\pi} \sin \theta d(\Delta y).$$

Avem pe de altă parte :

$$(10.103) \quad -\frac{4}{\pi c} \int_0^{2\pi} \sin \theta d(\Delta y) = -\frac{4}{\pi c} \int_0^{\pi} \sin \theta \left[\frac{d(\Delta y)}{dx} \right] \frac{dx}{d\theta} d\theta = \\ = \frac{\beta}{\pi} \left(\pi - \varphi + \frac{\sin 2\varphi}{2} \right)$$

și prin urmare :

$$(10.104) \quad \Delta C_{m0} = \frac{\pi}{4} (1 + \varepsilon) \Delta \gamma \approx -\frac{\beta}{2} \left(\sin \varphi - \frac{\sin 2\varphi}{2} \right) = \\ = -2\beta \sqrt{\frac{c_1}{c} \left(1 - \frac{c_1}{c} \right)^3}.$$

10.6. Aplicații la profile laminare

Rezultatele precedente privitoare la profilele deformate au aplicații foarte importante în legătură cu anumite modificări speciale aduse conturului. Fie, într'adevăr,

$$(10.105) \quad X = \sum_0^n k_n \cos n\theta$$

o funcție în $\cos n\theta$, pozitivă în tot intervalul $-\frac{c}{2} < x < \frac{c}{2}$, c fiind coarda profilului; dacă punem

$$(10.106) \quad y' = yX,$$

unde y reprezintă ordonatele unui profil oarecare, se obține un nou profil cu caracteristici geometrice și aerodinamice complet diferite. Calculul

acestor caracteristici este foarte ușor dacă X este o funcție simplă, după cum vom vedea mai jos.

1. Astfel, de exemplu, dacă $X = k_0 = Ct$, profilul rezultat are toate ordonatele sale reduse în aceeași proporție. Rezultă din integralele (10.42) că coeficienții A_1, \dots, A_n și B_1, \dots, B_n , sunt reduși deasemenea în aceeași proporție, ca de altfel și μ și σ . Este un rezultat remarcabil care ne permite să determinăm caracteristicile aerodinamice și funcția de transformare a unui profil obținut prin reducerea în aceeași proporție a ordonatelor unui profil teoretic cunoscut. Să luăm de exemplu cazul profilului JUCOVSKI definit prin relația (10.74) și să presupunem că, coeficienții sunt reduși la jumătate; vom avea :

$$(10.107) \quad \mu' = \frac{\mu_0}{2},$$

$$f' = \frac{f_0}{2}, \quad \sigma' = \frac{\sigma_0}{2}$$

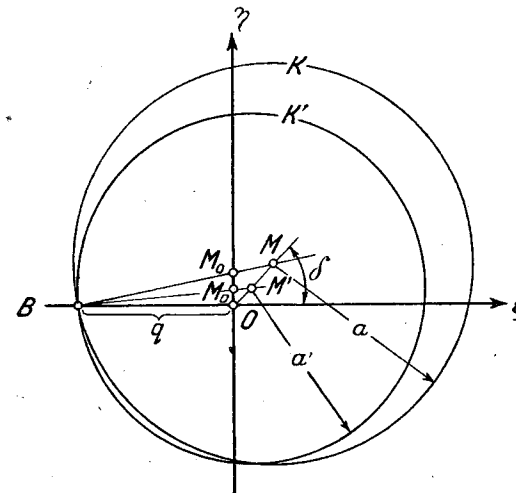


Fig. 10.7.

și noul profil va fi aproximativ un profil JUCOVSKI reprezentat prin aceeași funcție $z = \zeta + \frac{q^2}{\zeta}$, însă cercul generator K'

(fig. 10.7) va avea drept rază

$$(10.108) \quad a' = q (1 + \mu') = q \left(1 + \frac{\mu_0}{2} \right)$$

iar centrul său, M' , va avea ca afix

$$(10.109) \quad \overline{OM'} e^{i\delta} = q (\mu' + if') = q \left(\frac{\mu_0}{2} + i \frac{f_0}{2} \right).$$

2. O aplicație interesantă este cea privitoare la profilele laminare. Să presupunem, într'adevăr, că multiplicatorul X este de forma

$$(10.110) \quad X = k_0 + k_1 \cos \theta;$$

ordonatele noului profil vor fi :

$$(10.111) \quad y' = yX = k_0 y + k_1 y \cos \theta.$$

Deformațiile suferite de profilul inițial vor fi definite de expresia :

$$(10.112) \quad \Delta y = y' - y = (k_0 - 1) y + k_1 y \cos \theta,$$

de unde rezultă, aplicând formulele (10.92) și (10.93), modificările corespunzătoare caracteristicilor noului profil, a cărui axă se suprapune axei profilului inițial ($v = 0$)

$$(10.113) \quad \left\{ \begin{array}{l} \Delta(\mu - A_1) = (k_0 - 1)(\mu - A_1) + \frac{k_1}{2} A_2, \\ \Delta A_n = (k_0 - 1) A_n + \frac{k_1}{2} (A_{n-1} + A_{n+1}), \\ \Delta(2\sigma + B_1) = (k_0 - 1)(2\sigma + B_1) + \frac{k_1}{2} B_2, \\ \Delta B_n = (k_0 - 1) B_n + \frac{k_1}{2} (B_{n-1} + B_{n+1}), \\ \Delta \mu = (k_0 - 1) \mu + \frac{k_1}{2} A_0, \\ \Delta \sigma = (k_0 - k_1 - 1) \sigma, \end{array} \right.$$

unde A_0 este dat de integrala (10.64).

Să luăm drept exemplu un profil de formă generală, trasat după metoda generală expusă mai sus (§ 7.1), cu următoarele valori numerice ale parametrilor :

$$(10.114) \quad \mu = 0,107, \quad \alpha = 0,07, \quad \tau = 0,015, \quad f = 0,06;$$

profilul astfel definit este reprezentat în fig. (10.8 a). Fie mai departe expresia multiplicatorului :

$$(10.115) \quad X = 1,12 - 0,56 \cos \theta;$$

profilul obținut are secțiunea maximă împinsă spre spate (fig. 10.9 b). Astfel, prin urmare, plecând de la un profil inițial oarecare și variind coeficienții multiplicatorului, se obțin profile cu calități laminare. Grosimea maximă relativă și poziția secțiunii maxime depind de coeficienții k_0 și k_1 .

3. Drept al treilea exemplu, să luăm cazul unui multiplicator cu variație parabolică,

$$(10.116) \quad X = k_0 + k_1 \cos \theta + k_2 \cos 2\theta,$$

și să presupunem că este pozitiv în intervalul $\theta = 0$ și $\theta = \pi$.

Se deduce :

$$(10.117) \quad \Delta y = y' - y = (k_0 - 1) y + k_1 y \cos \theta + k_2 y \cos 2\theta$$

și procedând într'un mod analog cazului precedent, se găsește :

$$(10.118) \quad \left\{ \begin{array}{l} \Delta(\mu - A_1) = (k_0 - 1)(\mu - A_1) + \frac{k_1}{2} A_2 + \frac{k_2}{2} (A_3 - A_1), \\ \Delta A_n = (k_0 - 1) A_n + \frac{k_1}{2} (A_{n-1} + A_{n+1}) + \frac{k_2}{2} (A_{n-2} + A_{n+2}), \\ \Delta(2\sigma + B_1) = (k_0 - 1)(2\sigma + B_1) + \frac{k_1}{2} B_2 + \frac{k_2}{2} (B_1 + B_3), \\ \Delta B_n = (k_0 - 1) B_n + \frac{k_1}{2} (B_{n-1} + B_{n+1}) + \frac{k_2}{2} (B_{n-2} + B_{n+2}), \\ \Delta \mu = (k_0 + k_2 - 1) \mu + \frac{k_1}{2} A_0 - \frac{k_2}{2} A_1, \\ \Delta \sigma = (k_0 - k_1 + k_2 - 1) \sigma + \frac{k_2}{2} B_1. \end{array} \right.$$

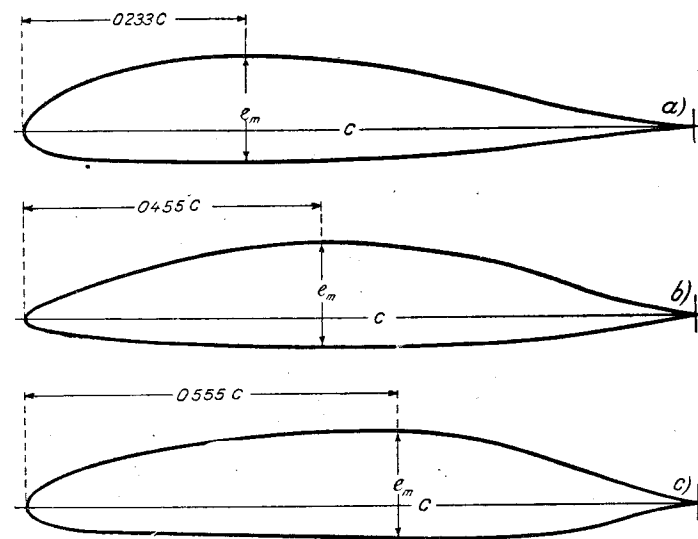


Fig. 10.8 a, b, c.

Luând același profil ca mai sus și utilizând următorul multiplicator cu coeficienții cunoscuți :

$$(10.119) \quad X = 1,3 - 0,77 \cos \theta + 0,29 \cos 2\theta,$$

obținem un profil cu secțiune maximă împinsă și mai spre spate (fig. 10.9 c).

Trebuie observat că cele trei profile din fig. 10.8 au aceeași grosime relativă : $\epsilon_m = 0,15$.

10.6.1. Grosimea maximă și poziția secțiunii frontale maxime. Pentru a evita calculele dificile ne vom limita numai la formulele principale. Astfel de exemplu, poziția secțiunii de grosime maximă va fi dată de relația

$$(10.120) \quad \frac{d(y'_e - y'_i)}{dx} = \frac{de'}{dx} = X \frac{de}{dx} + e \frac{dX}{dx} = 0.$$

Insemnând prin x_n (respectiv θ_n, e_n) soluția acestei ecuații, se va putea scrie următoarea relație pentru grosimea relativă maximă:

$$(10.121) \quad \frac{e'_m}{c} = \left(\frac{y'_e - y'_i}{c} \right)_{x=x_n} = X_n \left(\frac{y_e - y_i}{c} \right)_{x=x_n} = X_n \frac{e_n}{c},$$

unde e'_m reprezintă grosimea maximă a noului profil.

Se poate obține o soluție aproximativă a ecuației (10.120) luând pentru e din termenul al doilea, o valoare medie.

11. TEORIA TURBIONARĂ A PROFILELOR SUBȚIRI

Să considerăm un profil subțire oarecare, care poate fi asimilat cu linia sa mijlocie (scheletul) și fie α unghiul pe care-l face viteza la infinit cu coarda OA , pe care o vom lua drept axă a absciselor.

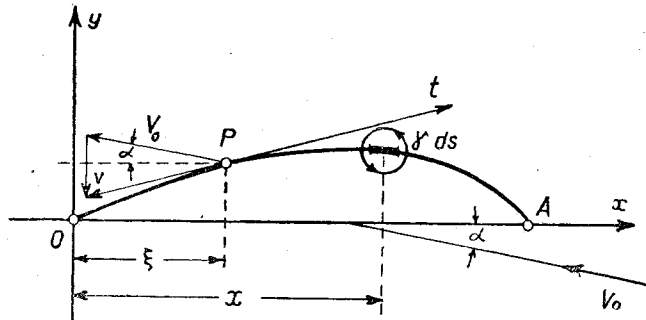


Fig. 11.1.

După o concepție pe care am expus-o la început (§ 2.3), putem să înlocuim conturul mijlociu al profilului printr'un strat de vârtajuri obligat să păstreze întotdeauna aceeași poziție ca și peretele înlocuit. Datorită acestei legături, acest strat de vârtajuri se supune legilor pe care le-am stabilit mai sus. Într'adevăr, dacă γ este intensitatea turbionară pe unitatea de lungime, elementul ds al profilului suportă o forță elementară dată de teorema lui KUTTA-JUCOVSKI:

$$(11.1) \quad q ds = \rho \gamma V ds,$$

unde V este viteza curentului în dreptul elementului considerat și q , intensitatea forței pe unitatea de lungime.

Prin urmare, pentru a determina acțiunea curentului pe profil trebuie să cunoaștem pe γ .

11.1. Determinarea caracteristicilor aerodinamice

Să presupunem acum că repartiția lui γ este cunoscută și să considerăm pe de altă parte că, curbura profilului este destul de mică pentru a putea confunda arcele elementare ds cu proiecțiile lor dx ($ds \approx dx$); intensitatea turbionară γ este în acest caz funcție de x [$\gamma = \gamma(x)$]. Șuvița de vârtajuri așezată în x , de intensitate γdx , induce într'un punct ξ (fig. 11.1) după direcția Oy , o viteză elementară dată de legea lui BIOT-SAVART:

$$(11.2) \quad dv = \frac{-\gamma dx}{2\pi(x - \xi)}.$$

iar viteza totală indusă va fi:

$$(11.3) \quad v = -\frac{1}{2\pi} \int_0^A \frac{\gamma dx}{x - \xi}.$$

Insemnând cu V_0 viteza curentului la infinit (care face unghiul α cu Ox) și cu u proiecția pe Ox a vitezei adiționale, datorită stratului de vârtajuri (la extradados dirijată în sens negativ și la intrados în sensul pozitiv), viteză legată de intensitatea turbionară γ prin relația

$$(11.4) \quad \gamma d\xi = 2u d\xi, \quad \gamma = 2u,$$

este ușor de văzut că viteza totală în direcția Ox , în același punct P , va fi

$$(11.5) \quad V_e = V_0 \cos \alpha + u \approx V_0 + u$$

pe extradados și

$$(11.6) \quad V_i = V_0 \cos \alpha - u \approx V_0 - u$$

pe intrados.

Presupunând că stratul de vârtajuri are o grosime oarecare, oricât de mică ar fi, viteza orizontală în mijlocul stratului de vârtajuri va avea o valoare medie:

$$(11.7) \quad \frac{1}{2} (V_e + V_i) = V_0 \cos \alpha \approx V_0.$$

Această viteză rezultantă este tangențială la peretele profilului și face cu V_0 un unghi mediu ε dat de

$$(11.8) \quad \operatorname{tg} \varepsilon \approx \varepsilon \approx \frac{v}{V_0},$$

unde v este considerat în sens negativ.

Unghiurile ε fiind mici, tangentele pot fi confundate chiar cu unghiurile, ceea ce am făcut de altfel mai sus, astfel că $\varepsilon = \frac{v}{V_0}$ este egal cu incidența α plus unghiul tangentei la profil în ξ (fig. 11.1):

$$(11.9) \quad \frac{v}{V_0} = \frac{dy}{dx} + \alpha.$$

Această ecuație datorită lui W. BIRNBAUM [1] și aplicată, după cum va fi indicat mai jos, de către H. GLAUERT [11], ne dă soluția problemei, care constă în a găsi caracteristicile aerodinamice ale profilului subțire. Fie într'adevăr:

$$(11.10) \quad x = \frac{c}{2} (1 - \cos \theta), \quad \xi = \frac{c}{2} (1 - \cos \varphi)$$

și să punem intensitatea turbionară γ sub forma

$$(11.11) \quad \gamma = 2V_0 \left(A_0 \operatorname{tg} \frac{\theta}{2} + \sum_1^n A_n \sin n\theta \right).$$

Această ultimă expresie reprezintă dezvoltarea lui γ în serie FOURIER, în afară de primul termen pe care-l vom explica mai jos.

Pentru aceasta, să remarcăm că potențialul în jurul cercului,

$$(11.12) \quad f(\zeta) = -V_0 \left(\zeta e^{i\alpha} + \frac{a^2}{\zeta e^{i\alpha}} \right) - \frac{i\Gamma}{2\pi} \ln \zeta,$$

va reprezenta mișcarea în jurul unei plăci subțiri dacă aplicăm transformarea

$$(11.13) \quad z = \zeta + \frac{a^2}{\zeta}$$

unde $a = \frac{c}{4}$, c fiind coarda profilului.

În acest caz circulația este

$$(11.14) \quad \Gamma = 4\pi a V_0 \sin \alpha = \pi c V_0 \sin \alpha.$$

Viteza complexă într'un punct din planul plăcii subțiri va fi:

$$(11.15) \quad w = \frac{df}{d\zeta} \cdot \frac{d\zeta}{dz} = -\frac{\zeta^2}{\zeta^2 - a^2} \left[V_0 \left(e^{i\alpha} - \frac{a^2}{\zeta^2} e^{-i\alpha} \right) + i \frac{c}{2} V_0 \sin \alpha \frac{1}{\zeta} \right],$$

iar în punctele plăcii, punând $\zeta = ae^{i\delta} = \frac{c}{4} e^{i\delta}$, se găsește

$$(11.16) \quad u = -V_0 \frac{\sin \alpha + \sin(\delta + \alpha)}{\sin \delta} = -V_0 \left(\cos \alpha + \sin \alpha \cot \frac{\delta}{2} \right).$$

Indicând prin u_s și u_i vitezele, respectiv de pe fața superioară și cea inferioară și însemnând cu γ_0 intensitatea turbionară într'un punct al plăcii subțiri, prin analogie cu γ pe care l-am definit pentru profilul subțire vom avea:

$$(11.17) \quad \gamma_0 dx = -(u_s - u_i) dx = 2V_0 \sin \alpha \cot \frac{\delta}{2} dx.$$

Observând mai departe că originea axelor pentru placa subțire, așa cum am considerat-o mai sus, este în mijlocul corzii, pe când pentru profil originea a fost luată la bordul de ieșire, rezultă ușor:

$$(11.18) \quad \delta = \pi - \theta, \quad \cot \frac{\delta}{2} = \operatorname{tg} \frac{\theta}{2}$$

și prin urmare

$$(11.19) \quad \gamma_0 = 2V_0 \sin \alpha \operatorname{tg} \frac{\theta}{2} \approx 2V_0 \alpha \operatorname{tg} \frac{\theta}{2}.$$

Primul termen din (11.11) este prin urmare proporțional cu cel corespunzător segmentului rectiliniu și forma completă a acestei expresii ar corespunde profilului subțire, căruia îi căutăm tocmai caracteristicile aerodinamice.

Să scriem mai departe

$$(11.20) \quad \gamma dx = cV_0 \left[A_0 (1 - \cos \theta) + \sum_1^n A_n \sin n\theta \sin \theta \right] d\theta;$$

viteza indusă (11.3) devine, înlocuind x și ξ prin expresiile lor (11.10):

$$(11.21) \quad v = -\frac{V_0}{\pi} \int_0^\pi \frac{A_0 (1 - \cos \theta) d\theta}{\cos \varphi - \cos \theta} - \frac{V_0}{2\pi} \int_0^\pi \frac{d\theta}{\cos \varphi - \cos \theta} \left\{ \sum_1^n A_n \left[\cos(n-1)\theta - \cos(n+1)\theta \right] \right\}.$$

Avem însă:

$$(11.22) \quad \int_0^\pi \frac{\cos m\theta}{\cos \theta - \cos \varphi} d\theta = \pi \frac{\sin m\varphi}{\sin \varphi}$$

și integrala precedentă devine în cele din urmă :

$$(11.23) \quad v = -V_0 \left[A_0 - \frac{1}{2} \sum_1^n A_n \frac{\sin(n-1)\varphi - \sin(n+1)\varphi}{\sin\varphi} \right] = \\ = -V_0 \left(A_0 + \sum_1^n A_n \cos n\varphi \right).$$

Rezultă pentru relația (11.9), introducând din nou variabila curentă θ și considerând v în sensul negativ :

$$(11.24) \quad \frac{dy}{dx} = A_0 - \alpha + \sum_1^n A_n \cos n\theta.$$

Adică, coeficienții $A_0 - \alpha, A_1, \dots, A_n$, sunt coeficienții corespunzători din dezvoltarea în serie FOURIER a tangentei $\frac{dy}{dx}$. Vom avea prin urmare :

$$(11.25) \quad A = A_0 - \alpha = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \frac{dy}{dx} d\theta, \dots \\ \dots, A_n = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \frac{dy}{dx} \cos n\theta d\theta.$$

Pentru a calcula rezultanta aerodinamică, trebuie remarcat întâi că acțiunea reciprocă a două elemente din stratul de vârtejuri este egală și de semn contrar, încât portanța totală a unei porțiuni de aripă, egală cu unitatea, este normală la curent și are expresia :

$$(11.26) \quad P = \rho V_0 \int_0^A \gamma dx = \rho \pi c V_0^2 \left(A_0 + \frac{1}{2} A_1 \right) = \\ = \rho \pi c V_0^2 \left(\alpha + A + \frac{1}{2} A_1 \right)$$

sau încă :

$$(11.27) \quad C_z = 2\pi \left(A_0 + \frac{1}{2} A_1 \right) = 2\pi \left(\alpha + A + \frac{1}{2} A_1 \right) = \\ = 2\pi (\alpha + \sigma).$$

Unghiul de portanță nulă, pe care l-am notat întotdeauna prin σ , va fi dat de formula

$$(11.28) \quad \sigma = A + \frac{1}{2} A_1 = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \frac{dy}{dx} (1 + \cos\theta) d\theta = \\ = \frac{2}{\pi c} \int_0^\pi \cot \frac{\theta}{2} dy = \frac{2}{\pi c} \left(y \cot \frac{\theta}{2} \right)_0^\pi + \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \frac{y}{x} d\theta = \\ = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \frac{y}{x} d\theta,$$

care este identică cu cea găsită pe cale directă (10.81), schimbând θ cu $\pi - \theta$ (sau x cu $\frac{c}{2} + x$).

Deasemenea, pentru momentul în raport cu bordul de atac, presupunând că viteza rezultantă în dreptul elementului de vârtej γdx considerat este sensibil egală cu viteza curentului la infinit (V_0), se găsește :

$$(11.29) \quad M = -\rho V_0 \int_0^A \gamma (c-x) \cos \alpha dx \approx \rho V_0 \frac{c}{2} \int_0^\pi (1 + \cos\theta) \gamma dx = \\ = \rho \frac{\pi}{4} c^2 V_0^2 \left(A_0 + \frac{1}{2} A_1 \right) - \rho c^2 V_0 \frac{\pi}{8} (A_1 + A_2),$$

sau pentru momentul unitar :

$$(11.30) \quad C_m = -\frac{\pi}{4} (A_1 + A_2) - \frac{1}{4} C_z = C_{m0} - 0,25 C_z.$$

Ca și pentru unghiul de portanță nulă, valoarea lui C_{m0} va fi dedusă ușor, precum urmează :

$$(11.31) \quad C_{m0} = \frac{\pi}{4} (A_1 + A_2) = \frac{\pi}{2} \sigma - \frac{1}{2} \int_0^\pi \frac{dy}{dx} (1 - \cos 2\theta) d\theta = \\ = \frac{\pi}{2} \sigma + \frac{2}{c} \int_0^\pi y \cos \theta d\theta.$$

11.2. Influența bracajului părții mobile

Dacă partea mobilă c_1 se rotește de un unghi β (care este numit unghiul de bracaj), observând pe de altă parte că avem

$$(11.32) \quad cv = c_1 \beta,$$

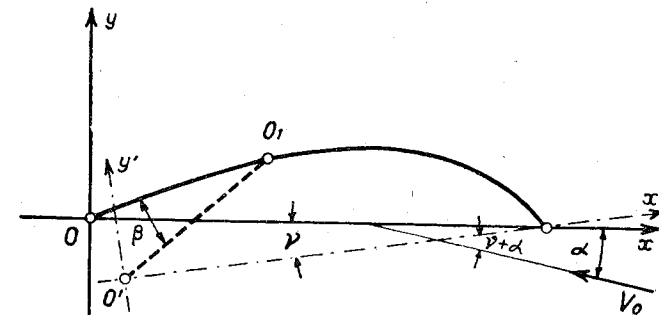


Fig. 11.2.

coordonatele noului profil modificat vor fi aproximativ (fig. 11.2) :

$$(11.33) \quad y' = y + (c-x)v - (c_1-x)\beta = y(\beta-v)x, \quad x' \approx x,$$

dela O la O_1 și

$$(11.34) \quad y' = y + (c-x)v, \quad x' \approx x,$$

dela O_1 la A . Să notăm, ca mai sus, prin φ valoarea unghiului θ definit de

relația (11.10), unde ξ este egal cu c_1 :

$$(11.35) \quad c_1 = \frac{c}{2} (1 - \cos \varphi)$$

și să aplicăm relațiile (11.25) noului profil deformat; se obține, respectiv:

$$(11.36) \quad \left\{ \begin{aligned} A' &= A'_0 - \alpha = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \frac{dy'}{dx'} d\theta = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \frac{dy}{dx} d\theta + \\ &\quad + \frac{\beta - \nu}{\pi} \int_0^\varphi d\theta - \frac{\nu}{\pi} \int_\varphi^\pi d\theta, \\ A'_0 &= \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \frac{dy'}{dx'} \cos n\theta d\theta = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \frac{dy}{dx} \cos n\theta d\theta + \\ &\quad + \frac{2(\beta - \nu)}{\pi} \int_0^\varphi \cos n\theta d\theta - \frac{2\nu}{\pi} \int_\varphi^\pi \cos n\theta d\theta \end{aligned} \right.$$

și prin urmare:

$$(11.37) \quad \left\{ \begin{aligned} A' &= A'_0 - \alpha' = A_0 - \alpha + \frac{\varphi}{\pi} \beta - \nu = A + \frac{\varphi}{\pi} \beta - \nu \\ A'_0 &= A_0 + \frac{\varphi}{\pi} \beta, \\ A'_n &= A_n + \frac{2}{\pi} \frac{\sin n\varphi}{n} \beta, \end{aligned} \right.$$

Unghiul de portanță nulă și coeficientul momentului la portanța nulă devin, respectiv:

$$(11.38) \quad \sigma' = A' + \frac{1}{2} A'_1 = \sigma + \frac{\varphi}{\pi} \beta - \nu + \frac{\sin \varphi}{\pi} \beta,$$

în raport cu axa Ox' și

$$(11.39) \quad \sigma_1 = \sigma + \frac{\varphi + \sin \varphi}{\pi} \beta,$$

în raport cu axa inițială Ox . Deasemenea, momentul unitar de portanță nulă devine:

$$(11.40) \quad C'_{m_0} = \frac{\pi}{4} (A'_1 + A'_2) = C_{m_0} + \frac{1}{2} \left(\sin \varphi + \frac{\sin 2\varphi}{2} \right) \beta.$$

Este ușor de văzut că $\Delta\sigma = \sigma_1 - \sigma$ și $\Delta C_{m_0} = C'_{m_0} - C_{m_0}$ au aceleași expresii ca și cele găsite anterior, (10.99) și (10.104), dacă se înlocuiește φ prin valoarea sa în funcție de c_1 scoasă din (11.35).

11.3. Forța și momentul de șarnieră pe partea mobilă

Este de un mare interes pentru aplicații cunoașterea forței rezultante și a momentului de șarnieră ce lucrează asupra părții mobile. Forțele elementare sunt normale pe vitesă în dreptul fiecărui element și se poate

admite, prin urmare, că forța rezultantă este normală pe suprafața părții mobile și sensibil normală pe vitesa V_0 a curentului la infinit. Ea este dată de integrala

$$(11.41) \quad \begin{aligned} P_1 &= \rho V_0 \int_0^{\alpha_1} \gamma dx = \\ &= \rho c V_0^2 \int_0^\varphi \left[A_0 (1 - \cos \theta) + \sum_1^n A_n \sin n\theta \sin \theta \right] d\theta = \\ &= \rho c V_0^2 \left\{ A_0 (\varphi - \sin \varphi) + \frac{1}{2} \sum_1^n A_n \left[\frac{\sin (n-1)\varphi}{n-1} - \frac{\sin (n+1)\varphi}{n+1} \right] \right\}. \end{aligned}$$

Dacă partea mobilă este bracată de un unghi β , coeficienții A_0, A_1, \dots, A_n , ai acestor expresii vor fi înlocuiți, respectiv, prin A'_0, A'_1, \dots, A'_n și forța rezultantă devine:

$$(11.42) \quad P'_1 = P_1 + \rho c V_0^2 \pi \frac{\varphi^2}{\pi^2} \beta.$$

Se vede astfel că, creșterea forței în funcție de bracaj este reprezentată printr-o expresie foarte simplă. Prin analogie cu coeficientul de portanță unitară, se poate scrie, împărțind ambii termeni ai formulei (11.42) prin $\frac{1}{2} \rho V_0^2$:

$$(11.43) \quad C'_{z_1} = C_{z_1} + 2\pi \frac{\varphi^2}{\pi^2} \beta.$$

Se vede, sub această formă, că dacă tot profilul ($\varphi = \pi$) se rotește în jurul bordului de atac de un unghi β , creșterea $2\pi\beta$ corespunde relației bine cunoscute care leagă C_z de incidență.

În mod analog, vom avea pentru momentul de șarnieră:

$$(11.44) \quad \begin{aligned} M_1 &= -\rho V_0 \int_0^{\alpha_1} \frac{(c_1 - x) \gamma dx}{\cos \widehat{O_1 O' A}} \approx -\rho \frac{c}{2} V_0 \int_0^\varphi (\cos \theta - \cos \varphi) \gamma dx = \\ &= \rho_1 \frac{c}{2} \cos \varphi - \rho \frac{c^2}{2} V_0^2 \int_0^\varphi \left[A_0 (\cos \theta - \cos^2 \theta) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} \sum_1^n A_n \sin n\theta \sin 2\theta \right] d\theta = \frac{1}{2} \rho c^2 V_0^2 \left\{ A_0 (\varphi - \sin \varphi) \cos \varphi + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} \cos \varphi \sum_1^n A_n \left[\frac{\sin (n-1)\varphi}{n-1} - \frac{\sin (n+1)\varphi}{n+1} \right] - \right. \\ &\quad \left. - A_0 \left(\sin \varphi - \frac{1}{2} \varphi - \frac{1}{4} \sin 2\varphi \right) - \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{4} \sum_1^n A_n \left[\frac{\sin (n-2)\varphi}{n-2} - \frac{\sin (n+2)\varphi}{n+2} \right] \right\}. \end{aligned}$$

Iar pentru un bracaj β vom obține deasemenea :

$$(11.45) \quad M'_1 = M_1 + \frac{1}{2} \rho c^2 V_0^2 \left(\varphi^2 \cos \varphi - \varphi \sin \varphi + \right. \\ \left. + \frac{1}{2} \varphi^2 - \frac{1}{2} \sin^2 \varphi \right) \frac{\beta}{\pi},$$

de unde se scoate expresia coeficientului unitar :

$$(11.46) \quad C'_{u1} = C_{m1} + \left(\varphi^2 \cos \varphi - \varphi \sin \varphi + \frac{1}{2} \varphi^2 - \frac{1}{2} \sin^2 \varphi \right) \frac{\beta}{\pi}.$$

Formulele (11.42) și (11.45) respectiv (11.43) și (11.46), pe care le-am obținut pentru prima oară într-o lucrare anterioară [6] vor fi utilizate practic sub o altă formă. Pentru a simplifica calculele, considerăm mai întâi că profilul este *biconvex simetric subțire*.

Prin aplicarea formulelor precedente, vom avea foarte ușor :

$$(11.47) \quad P_1 = \rho c V_0^2 (\varphi - \sin \varphi) \alpha,$$

$$M_1 = \frac{1}{2} \rho c^2 V_0^2 \left(\varphi \cos \varphi + \frac{1}{2} \varphi - \sin \varphi - \frac{1}{4} \sin 2\varphi \right) \alpha$$

și prin urmare

$$(11.48) \quad \left\{ \begin{array}{l} P'_1 = \frac{1}{2} \rho c V_0^2 \left[2(\varphi - \sin \varphi) \alpha + 2\pi \frac{\varphi^2}{\pi^2} \beta \right] \\ M'_1 = \frac{1}{2} \rho c^2 V_0^2 \left[\left(\varphi \cos \varphi + \frac{1}{2} \varphi - \sin \varphi - \frac{1}{4} \sin 2\varphi \right) \alpha + \right. \\ \left. + \left(\varphi^2 \cos \varphi - \varphi \sin \varphi + \frac{1}{2} \varphi^2 - \frac{1}{2} \sin^2 \varphi \right) \frac{\beta}{\pi} \right]. \end{array} \right.$$

Sub această formă se vede că, coeficienții lui α și β sunt foarte sensibili și sunt susceptibili deseori de erori. De aceea vom dezvolta aceste expresii și obținem relații mai ușor de calculat :

$$(11.49) \quad \left\{ \begin{array}{l} p = \varphi - \sin \varphi = \frac{\varphi^3}{3!} - \frac{\varphi^5}{5!} + \dots \approx \frac{1}{6} \varphi^3 \left(1 - \frac{1}{20} \varphi^2 \right), \\ m = \varphi \cos \varphi + \frac{1}{2} \varphi - \sin \varphi - \frac{1}{4} \sin 2\varphi \approx -\frac{1}{30} \varphi^5 (1 - 0,154 \varphi^2), \\ n = \varphi^2 \cos \varphi - \varphi \sin \varphi + \frac{1}{2} \varphi^2 - \frac{1}{2} \sin^2 \varphi \approx -\frac{1}{6} \varphi^4 (1 - 0,067 \varphi^2). \end{array} \right.$$

Aceste formule sunt valabile pentru $\varphi \leq \frac{\pi}{2}$; pentru valori mai mari este preferabil de aplicat formulele sub forma lor inițială.

$$11.4 \text{ Calculul integralei} \quad I_n = \int_0^\pi \frac{\cos n\theta}{\cos \theta - \cos \varphi} d\theta.$$

Valoarea principală a acestei integrale va fi definită de expresia următoare :

$$(11.50) \quad I_n = \int_0^\pi \frac{\cos n\theta}{\cos \theta - \cos \varphi} d\theta = \int_0^{\varphi-\varepsilon} \frac{\cos n\theta}{\cos \theta - \cos \varphi} d\theta + \\ + \int_{\varphi+\varepsilon}^\pi \frac{\cos n\theta}{\cos \theta - \cos \varphi} d\theta,$$

unde vom face pe ε să tindă către zero.

Pentru a o calcula, vom porni mai întâi de la integrala nedefinită următoare, care se poate efectua prin mijloace elementare :

$$(11.51) \quad \int \frac{d\theta}{\cos \theta - \cos \varphi} = \frac{1}{\sin \varphi} \ln \frac{1 - \cos(\theta + \varphi)}{\cos \theta - \cos \varphi} = \frac{1}{\sin \varphi} \ln \frac{\sin \frac{\varphi + \theta}{2}}{\sin \frac{\varphi - \theta}{2}}.$$

Calculând valoarea acestei integrale în intervalul $0 - \pi$, obținem succesiv :

$$(11.52) \quad I_0 = \int_0^\pi \frac{d\theta}{\cos \theta - \cos \varphi} = \int_0^{\varphi-\varepsilon} \frac{d\theta}{\cos \theta - \cos \varphi} + \int_{\varphi+\varepsilon}^\pi \frac{d\theta}{\cos \theta - \cos \varphi} = \\ = \frac{1}{\sin \varphi} \left[\ln \frac{\sin \frac{\varphi + \theta}{2}}{\sin \frac{\varphi - \theta}{2}} \right]_0^{\varphi-\varepsilon} + \frac{1}{\sin \varphi} \left[\ln \frac{\sin \frac{\varphi + \theta}{2}}{\sin \frac{\varphi - \theta}{2}} \right]_{\varphi+\varepsilon}^\pi = \\ = \frac{1}{\sin \varphi} \ln \frac{\sin \left(\varphi - \frac{\varepsilon}{2} \right)}{\sin \left(\varphi + \frac{\varepsilon}{2} \right)} = 0$$

Vom putea scrie, în acest caz,

$$(11.53) \quad I_n = \int_0^\pi \frac{\cos n\theta}{\cos \theta - \cos \varphi} d\theta = \int_0^\pi \frac{\cos n\theta - \cos n\varphi}{\cos \theta - \cos \varphi} d\theta,$$

iar pentru $n = 1$, vom obține :

$$(11.54) \quad I_1 = \int_0^\pi \frac{\cos \theta - \cos \varphi}{\cos \theta - \cos \varphi} d\theta = \pi.$$

Pe de altă parte, din relația

$$(11.55) \quad \cos(n+1)\theta + \cos(n-1)\theta = 2 \cos n\theta \quad \cos \theta = 2 \cos n\theta \quad (\cos \theta = -\cos \varphi) + 2 \cos n\theta \cos \varphi,$$

se deduce ușor :

$$(11.56) \quad \int_0^\pi \frac{\cos(n+1)\theta}{\cos \theta - \cos \varphi} d\theta + \int_0^\pi \frac{\cos(n-1)\theta}{\cos \theta - \cos \varphi} d\theta = \\ = 2 \int_0^\pi \cos n\theta d\theta + 2 \cos \varphi \int_0^\pi \frac{\cos n\theta - \cos n\varphi}{\cos \theta - \cos \varphi} d\theta,$$

de unde, remarcând că prima integrală din membrul al doilea este nulă se obține o *ecuație cu diferențe finite* [19] :

$$(11.57) \quad I_{n+1} + I_{n-1} = 2 I_n \cos \varphi.$$

Însă, fără să ne referim la proprietățile acestor ecuații, este suficient să remarcăm că există o soluție particulară de forma :

$$(11.58) \quad I_n = Cx^n,$$

dacă x satisface ecuația

$$(11.59) \quad x^2 - 2x \cos \varphi + 1 = 0,$$

adică, dacă avem :

$$(11.60) \quad x = \cos \varphi \pm i \sin \varphi = e^{\pm i\varphi}.$$

Indicând cu $C' = A' + iB'$ și $C'' = A'' + iB''$ două constante complexe arbitrare, vom putea scrie pentru soluția integrală (11.50) :

$$(11.61) \quad I_n = C'e^{in\varphi} + C''e^{-in\varphi} = (A' + iB')e^{in\varphi} + (A'' + iB'')e^{-in\varphi}$$

Cum nu ne interesează decât partea reală a acestei expresii, vom avea în cele din urmă, indicând cu A și B două constante reale arbitrare :

$$(11.62) \quad I_n = A \sin n\varphi + B \cos n\varphi.$$

Constantele A și B vor fi determinate ținând seama de (11.52, $I_0 = 0$) și (11.54, $I_1 = \pi$); vom găsi astfel :

$$(11.63) \quad B = 0, \quad A = \frac{\pi}{\sin \theta}$$

de unde se deduce, în cele din urmă :

$$(11.64) \quad I_n = \pi \frac{\sin n\varphi}{\sin \varphi}$$

12. TRASAREA PROFILTELOR DE GROSIME MIJOCIE, AVÂND PRESENTE DATE DEALUNGUL CONTURULUI

Pentru a păstra caracterul general al problemei, să considerăm un profil de formă generală cu vârf rotunjit, a cărui coardă $BA = c$ să fie aproximativ normală atât la bordul de atac, cât și la bordul de ieșire, în punctele de curbură maximă, care presupunem că sunt A și B (Fig. 12.1).

În toată rigoarea, această condiție nu poate fi îndeplinită decât în cazul profilelor biconvexe simetrice. Însă pentru considerațiile ce urmează, această aproximație este suficientă, unghiul coardei cu normalele reale în punctele A și B fiind foarte mic. Să luăm drept origine a axelor, centrul coardei și să punem

$$(12.1) \quad x = -\frac{1}{2} c \cos \theta,$$

$$(12.2) \quad y = c f_1(\theta),$$

$$\frac{dy}{dx} = f_2(\theta).$$

rezultă că ordonatele conturului precum și tangenta vor fi funcție de θ :

12.1. Relații fundamentale

Să dezvoltăm $\frac{dy}{dx}$ în serie FOURIER; observând că tangenta la cele două extremități este în general infinită, după cum am presupus de altfel prin ipoteză încă de la început, dezvoltarea va fi de forma [2]

$$(12.3) \quad \frac{dy}{dx} = -\frac{1}{2} \sigma_a \operatorname{tg} \frac{\theta}{2} + \frac{1}{2} \sigma_b \cot \frac{\theta}{2} + C_0 + \sum_1^n A_n \cos n\theta + \sum_1^n B_n \sin n\theta,$$

unde σ_a și σ_b sunt doi coeficienți care sunt legați respectiv de razele de curbură ρ_a și ρ_b ale bordului de atac și bordului de ieșire prin formulele următoare :

$$(12.4) \quad \sigma_a^2 = 2 \frac{\rho_a}{c}, \quad \sigma_b^2 = 2 \frac{\rho_b}{c}.$$

Aceste formule sunt deduse din expresia razei de curbură :

$$(12.5) \quad \rho = \left[\left(\frac{dx}{d\theta} \right)^2 + \left(\frac{dy}{d\theta} \right)^2 \right]^{\frac{3}{2}} \cdot \left(\frac{dx}{d\theta} \cdot \frac{d^2y}{d\theta^2} - \frac{dy}{d\theta} \cdot \frac{d^2x}{d\theta^2} \right),$$

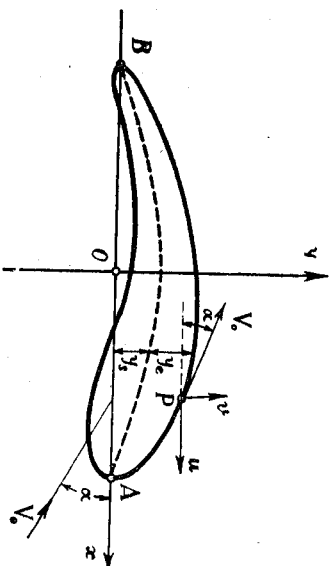


Fig. 12.1

care este ușor de calculat, punând mai întâi $\frac{dx}{d\theta}$ și $\frac{dy}{d\theta}$ sub următoarea formă :

$$(12.6) \quad \begin{cases} \frac{1}{c} \cdot \frac{dx}{d\theta} = \frac{1}{2} \sin \theta \\ \frac{1}{c} \cdot \frac{dy}{d\theta} = -\frac{1}{4} \sigma_a (1 - \cos \theta) + \frac{1}{4} \sigma_b (1 + \cos \theta) + \\ + \frac{1}{2} \left(C_0 \sin \theta + \sin \theta \sum_1^n A_n \cos n\theta + \sin \theta \sum_1^n B_n \sin n\theta \right) \end{cases}$$

și înlocuind apoi θ prin 0 pentru ρ_a și prin π pentru ρ_b .

Să observăm mai departe că coeficienții σ_a și σ_b trebuie să îndeplinească condiția următoare :

$$(12.7) \quad \int_B^A dy = B_1 - \sigma_a - \sigma_b = 0.$$

Fie acum un punct P de pe profil (fig. 12.1); dacă notăm cu u și v vitezele adiționale, componentele vitezei totale în același punct vor fi :

$$(12.8) \quad U = -V_0 \cos \alpha + u, \quad V = V_0 \sin \alpha + v.$$

Direcția acestei viteze este paralelă cu tangenta în punctul P ; observând mai departe că incidența α , precum și vitezele u și v sunt foarte mici, vom putea scrie

$$(12.9) \quad \frac{dy}{dx} = \frac{V}{U} = \frac{V_0 \sin \alpha + v}{-V_0 \cos \alpha + u} \approx -\alpha - \frac{v}{V_0}.$$

Această expresie este diferită de cea precedentă (11.9) cu privire la semne, fiindcă pentru v am luat mai sus sensul pozitiv, pe când v din formula (11.9) este considerat de sus în jos (în sensul negativ).

Am presupus că vitezele u și v sunt foarte mici față de V_0 , ceea ce este perfect adevărat pentru profilele de grosime mijlocie și pentru unghiurile de incidență mici. Să observăm totuși că la bordul de atac și în special în punctul de viteză nulă, unde $u = V_0 \cos \alpha \approx V_0$, această ipoteză nu este îndeplinită și relația (12.9) nu mai este valabilă. Însă această regiune de excepție este foarte redusă și incertitudinea asupra vitezelor și a fenomenelor ce rezultă nu influențează în mod sensibil rezultatul total.

Din această cauză vom face această ipoteză simplificatoare, considerând u și v foarte mici și neglijând pătratele acestor viteze. În acest caz, înlocuind viteza prin expresiile (12.8) și observând că incidențele sunt mici, ecuația presiunii într'un punct P se reduce la relația următoare :

$$(12.10) \quad p - p_0 = -\frac{1}{2} \rho \left[(-V_0 \cos \alpha + u)^2 + (V_0 \sin \alpha + v)^2 - V_0^2 \right] \approx \rho V_0 u,$$

sau încă

$$(12.11) \quad C_p = \frac{2(p - p_0)}{\rho V_0^2} = 2 \frac{u}{V_0}.$$

Trebuie observat că semnul va fi pozitiv când C_p este dirijat spre interiorul profilului.

Problema constă acum în a trasa un profil a cărui presiune p , deci u după (12.10), să fie cunoscută dealungul conturului (în funcție de θ eventual).

Ecuația (12.9) poate fi pusă, ținând seama de dezvoltarea tangentei $\frac{dy}{dx}$ (12.3), sub următoarea formă :

$$(12.12) \quad \frac{v}{V_0} = -\left(\frac{dy}{dx} + \alpha \right) = \frac{1}{2} \sigma_a \operatorname{tg} \frac{\theta}{2} - \frac{1}{2} \sigma_b \cot \frac{\theta}{2} - C_0 - \\ - \sum_1^n A_n \cos n\theta - \sum_1^n B_n \sin n\theta - \alpha.$$

Dacă se cunoaște v dealungul conturului, această ecuație ne determină pe $\frac{dy}{dx}$ și chestiunea este rezolvată. Pentru a calcula v , u fiind cunoscută, vom observa mai întâi că și una și cealaltă reprezintă valorile pe contur ale vitezei complexe adiționale

$$(12.13) \quad w = u - iv,$$

care este o funcție analitică de z . Problema revine deci la o chestiune de frontieră : de a găsi o funcție analitică $w(z)$ olomoră în tot spațiul din exteriorul profilului, a cărei parte reală să ia valori determinate pe contur. Aceasta este o problemă a lui DIRICHLET.

12.2. Reprezentarea vitezelor din jurul cercului

Pentru a rezolva problema, facem o transformare a planului z (planul profilului) în domeniul exterior al unui cerc de rază $a = \frac{c}{4}$ și căutăm apoi funcția w în acest domeniu. Pentru aceasta, vom face o aproximație, asimilând profilul cu o placă subțire de coardă c .

În acest caz, funcția de transformare este bine cunoscută :

$$(12.14) \quad z = \zeta + \frac{c^2}{16} \cdot \frac{1}{\zeta}$$

și punctele cercului vor avea drept afix :

$$(12.15) \quad \zeta = \frac{c}{4} e^{i\theta}.$$

Aproximația făcută este perfect valabilă, observând că, prin transformarea (12.14), profilul real este transformat într'o curbă quasi-circulară, care

este foarte apropiată de cea a cercului și prin acest fapt, distribuția viteșelor în jurul acestei curbe ar putea fi considerată aproximativ egală cu distribuția din jurul cercului.

Prin transformarea efectuată, viteza complexă adițională din planul cercului devine

$$(12.16) \quad W = U - iV = W(\zeta)$$

și vom avea prin urmare, notând în mod general prin $w(z)$ viteza complexă într'un punct oarecare din planul real,

$$(12.17) \quad w(z) = u - iv = W \frac{d\zeta}{dz} = W(\zeta) \frac{\zeta^2}{\zeta^2 - \frac{c^2}{16}} = w(\zeta)$$

Funcția $w(\zeta)$ este olomorfa în tot spațiul din afara cercului, se anulează la infinit și devine infinită în punctele $\zeta = \pm \frac{c}{4}$. Ea poate fi dezvoltată, în acest caz, sub forma următoare :

$$(12.18) \quad w(\zeta) = \frac{C_1}{\zeta - \frac{c}{4}} + \frac{C_2}{\zeta + \frac{c}{4}} + \sum_1^n \frac{Q_n}{\zeta^n},$$

în care putem pune :

$$(12.19) \quad C_1 = \alpha_1 + i\beta_1, \quad C_2 = \alpha_2 + i\beta_2, \quad Q_n = a_n + ib_n.$$

Inlocuind pe ζ prin $\frac{c}{4} e^{i\theta}$, dezvoltând și separând partea reală de cea imaginară, se obține :

$$(12.20) \quad w = u - iv = \frac{2(\alpha_1 + \alpha_2)}{c} + \frac{2\beta_1}{c} \operatorname{tg} \frac{\theta}{2} - \frac{2\beta_2}{c} \cot \frac{\theta}{2} + \\ + \sum_1^n \frac{a_n}{\left(-\frac{c}{4}\right)^n} \cos n\theta + \sum_1^n \frac{b_n}{\left(-\frac{c}{4}\right)^n} \sin n\theta - \\ - i \left[\frac{2(\beta_1 + \beta_2)}{c} + \frac{2\alpha_1}{c} \operatorname{tg} \frac{\theta}{2} - \frac{2\alpha_2}{c} \cot \frac{\theta}{2} \sum_1^n \frac{b_n}{\left(-\frac{c}{4}\right)^n} \cos n\theta + \right. \\ \left. + \sum_1^n \frac{a_n}{\left(-\frac{c}{4}\right)^n} \sin n\theta \right].$$

Să egalăm această expresie a lui v cu cea dată de relația (12.12); se găsește :

$$(12.21) \quad \begin{cases} 2(\beta_1 + \beta_2) = c(C_0 + \alpha)V_0, & 2\alpha_1 = \frac{c}{2}\sigma_a V_0, & 2\alpha_2 = \frac{c}{2}\sigma_b V_0 \\ b_n = \left(-\frac{c}{4}\right)^n A_n V_0, & a_n = -\left(-\frac{c}{4}\right)^n B_n V_0. \end{cases}$$

Rezultă mai departe, după (12.11) și (12.20), coeficientul de presiune :

$$(12.22) \quad 2 \frac{u}{V_0} = C_p = (\sigma_a + \sigma_b) + \left[2(C_0 + \alpha) - \frac{4\beta_2}{c} \right] \operatorname{tg} \frac{\theta}{2} - \\ - \frac{4\beta_2}{c} \cot \frac{\theta}{2} + 2 \sum_1^n (-B_n \cos n\theta + A_n \sin n\theta).$$

În această formulă coeficientul β_2 nu este determinat, însă putem să-l determinăm observând că, dacă presiunea în cazul unei plăci subțiri poate lua teoretic o valoare infinită la bordul de atac, determinarea circulației în jurul plăcii impune dimpotrivă o valoare finită la bordul de ieșire. Putem face aceeași ipoteză pentru profilul real a cărui formă o căutăm și pe care l-am asimilat aproximativ cu placa subțire.

Rezultă din acest fapt

$$(12.23) \quad \beta_2 = 0$$

și expresia (12.22) nu mai conține termenul în $\cot \frac{\theta}{2}$.

12.3. Caracteristicile profilului rezultat

Ecuția precedentă, care poate fi scrisă sub forma :

$$(12.24) \quad C_p = 2 \frac{u}{V_0} = (\sigma_a + \sigma_b) + 2(C_0 + \alpha) \operatorname{tg} \frac{\theta}{2} + \\ + 2 \sum_1^n (A_n \sin n\theta - B_n \cos n\theta),$$

ne arată că A_n, B_n , sunt coeficienții dezvoltării în serie FOURIER a lui C_p , cu termenul în $\operatorname{tg} \frac{\theta}{2}$ în plus. Dacă ni se dă deci distribuția presiunii în lungul conturului și deoarece prin aceasta se pot determina coeficienții dezvoltării în serie, rezultă imediat coordonatele profilului, prin aplicarea ecuațiilor (12.3) și (12.6).

Să revenim la prima din aceste relații și să remarcăm că ea poate fi descompusă în alte două :

$$(12.25) \quad \begin{cases} \frac{dy_s}{dx} = C_0 + \sum_1^n A_n \cos n\theta, \\ \frac{dy_e}{dx} = -\frac{1}{2}\sigma_a \operatorname{tg} \frac{\theta}{2} + \frac{1}{2}\sigma_b \cot \frac{\theta}{2} + \sum_1^n B_n \sin n\theta, \end{cases}$$

dintre care, prima este o funcție pară, care ia deci aceeași valoare pentru θ și $-\theta$, a doua o funcție impară, care ia valori egale și de semne contrare pentru θ și $-\theta$.

Este ușor de văzut că prima reprezintă ecuația liniei mijlocii (ecuația scheletului) iar a doua aceea a grosimii. Într'adevăr, înlocuind dx prin

$$(12.26) \quad dx = \frac{1}{2} c \sin\theta \, d\theta$$

și integrând ecuațiile diferențiale (12.25), obținem două expresii care satisfac condițiilor următoare:

$$(12.27) \quad \begin{aligned} y_s(\theta) &= y_s(-\theta), \\ y_e(\theta) &= -y_e(-\theta). \end{aligned}$$

Deoarece, prin definiție, linia medie separă profilul în două părți de grosimi riguros egale, rezultă că y_s reprezintă scheletul și y_e , grosimea profilului; iar ordonatele reale ale acestuia vor fi date de sumelor

$$(12.28) \quad y = y_s + y_e.$$

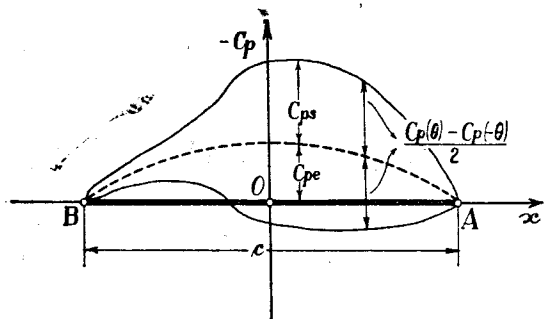


Fig. 12.2

Prin identificarea cu expresiile (11.24) și (11.25), care se referă la ecuația profilelor subțiri, se obține ușor:

$$(12.29) \quad C_0 = A_0 - \alpha = A = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \frac{dy_s}{dx} \, d\theta.$$

Să descompunem deasemenea expresia lui C_p (12.24) în două părți: C_{ps} , o funcție impară de θ și C_{pe} , o funcție pară de θ :

$$(12.30) \quad \begin{cases} C_{ps} = 2(A + \alpha) \operatorname{tg} \frac{\theta}{2} + 2 \sum_1^n A_n \sin n\theta, \\ C_{pe} = \sigma_a + \sigma_b - 2 \sum_1^n B_n \cos n\theta. \end{cases}$$

Rezultă că prin C_{ps} se vor putea calcula coeficienții A_1, \dots, A_n ai liniei medii (a scheletului) și prin C_{pe} , coeficienții B_1, \dots, B_n ai grosimii.

Astfel, de exemplu, dacă avem o distribuție oarecare a presiunii de-a lungul conturului (fig. 12.2), este ușor de văzut că linia medie va reprezenta

$$(12.31) \quad C_{pe} = \frac{1}{2} \left[C_p(\theta) + C_p(-\theta) \right],$$

iar diferența

$$(12.32) \quad C_{ps} = \frac{1}{2} \left[C_p(\theta) - C_p(-\theta) \right].$$

Desvoltând aceste două funcții în serie FOURIER, printr'o metodă grafică sau analitică, se determină coeficienții A_n, B_n și problema este rezolvată.

Să punem mai departe

$$(12.33) \quad \begin{cases} C_z = \frac{1}{c} \int_B^A C_p \, dx = 2\pi \left(\alpha + A + \frac{1}{2} A_1 \right), \\ C_m = \frac{1}{c^2} \int_B^A C_p \left(\frac{c}{2} - x \right) dx = \frac{\pi}{4} (A_1 + A_2) - \frac{1}{4} C_z, \end{cases}$$

vom deduce pe de o parte C_z și C_m în funcție de C_p , iar pe de altă parte unghiul de portanță nulă și C_{m0} în funcție de coeficienții A, A_1, A_2 :

$$(12.33 \text{ bis}) \quad \sigma = A + \frac{1}{2} A_1,$$

$$C_{m0} = -\frac{\pi}{4} (A_1 + A_2).$$

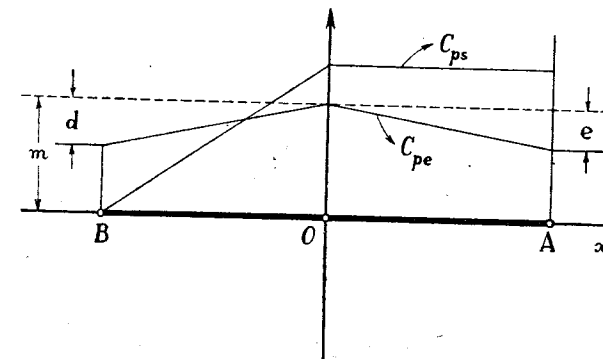


Fig. 12.3

12.4. Exemplu de trasare

Exemplul următor referitor la un profil cu scurgere laminară îl vom lua din lucrarea lui BRENNAN și STEVENSON [2].

De altfel interesul acestei metode constă tocmai în trasarea profilelor laminare. Fie deci coeficientul de presiune C_{ps} distribuit pe contur la extradados, după cum indică fig. 12.3.

$$(12.34) \quad \begin{cases} C_{ps} = C_{p0}(1 - \cos \theta), \text{ de la } 0 \text{ la } \frac{\pi}{2} \\ C_{ps} = C_{p0}, \text{ de la } \frac{\pi}{2} \text{ la } \pi. \end{cases}$$

Să observăm din nou că semnul va fi pozitiv când C_{ps} este dirijat spre exteriorul profilului, ceea ce se întâmplă la extradados. La intrados, C_{ps} are aceleași valori, însă negative, presiunea este deci dirijată spre interiorul profilului și efectul se adaugă celui de la extradados.

Vom avea mai departe

$$(12.34 \text{ bis}) \quad C_z = 2 \frac{1}{c} \int_{-c}^{+c} C_{ps} \, dx = \frac{3}{2} C_{p0}$$

și să remarcăm astfel că trasarea profilului după condițiile impuse corespunde unui C_z determinat, pe care-l vom alege pe bază de considerațiuni practice și anume: portanța pentru care dorim să păstrăm calitățile laminare ale profilului.

Pentru a simplifica problema, să luăm drept axă de referință, o dreaptă care face unghiul A (12.29) cu axa considerată la început. În acest caz, notând cu y' și x' noile coordonate, avem

$$(12.35) \quad x' \approx x, \quad y' \approx y - Ax$$

iar prima ecuație (12.25), unde C_0 va fi înlocuit prin A , devine:

$$(12.36) \quad \frac{dy_s}{dx} = \sum_1^n A_n \cos n\theta.$$

Insemnând prin α' incidența față de noua axă,

$$(12.37) \quad \alpha' = A + \alpha,$$

se poate scrie, în locul primei ecuații (12.30), următoarea relație:

$$(12.38) \quad C_{ps} = 2\alpha' \operatorname{tg} \frac{\theta}{2} + 2 \sum_1^n A_n \sin n\theta,$$

de unde se vede că primul termen corespunde distribuției presiunii pe o placă subțire de incidență α' . Cealaltă termeni aditivi ai lui C_{ps} reprezintă influența arcuirii profilului. Dacă $\alpha' = A + \alpha = 0$, presiunea este finită în toate punctele plăcii. Din această cauză, A se numește **i n c i d e n ț a i d e a l ă**.

Comparând cele două expresii (12.36) și (12.38), este ușor de văzut că prima reprezintă variația scheletului în raport cu placa subțire, iar termenii aditivi ai celei de a doua, influența acestei variații. Prin urmare, se pot determina coeficienții A_1, \dots, A_n , cu ajutorul expresiei

$$(12.39) \quad C'_{ps} = C_{ps} - 2\alpha' \operatorname{tg} \frac{\theta}{2} = 2 \sum_1^n A_n \sin n\theta,$$

de unde rezultă pentru exemplul ales, luând în considerare distribuția presiunii (fig. 12.3) față de noua axă, așa cum am definit-o mai sus, următoarea relație:

$$(12.40) \quad A_n = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi C'_{ps} \sin n\theta \, d\theta = \frac{C_{p0}}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \cos \theta) \sin n\theta \, d\theta + \\ + \frac{C_{p0}}{\pi} \int_{\frac{\pi}{2}}^\pi \sin n\theta \, d\theta.$$

În sfârșit, înlocuind pe C_{p0} prin expresia lui (12.34), găsim:

$$(12.41) \quad A_1 = \frac{1}{\pi} C_z, \\ A_n = -\frac{2}{3\pi} C_z \left[\frac{(-1)^n - 1}{n} + \frac{1}{2} \cdot \frac{\sin \frac{n\pi}{2} + 1}{n+1} - \frac{1}{2} \cdot \frac{\sin \frac{n\pi}{2} - 1}{n-1} \right].$$

Odată ce coeficienții A_1, \dots, A_n , sunt cunoscuți, se poate integra ecuația (12.36) și se găsește astfel y'_s dezvoltat în serie trigonometrică destul de dificilă. Pentru simplificare să punem [19]

$$(12.42) \quad \left\{ \begin{aligned} e^{i\theta} = t, \quad \sum_1^n A_n \cos n\theta &= \text{p. r.} \quad \sum_1^n A_n t^n, \\ \sum_1^\infty \frac{(-1)^n t^n}{n} &= -\ln(1+t), \quad \sum_1^\infty \frac{t^n}{n} = -\ln(1-t), \\ \sum_1^\infty \frac{t^n}{n+1} &= -\frac{1}{t} \ln(1-t) - 1, \quad \sum_1^\infty \frac{t^n}{n-1} = -t \ln(1-t), \\ \sum_1^\infty \frac{\sin \frac{\pi}{2} t^n}{n+1} &= \frac{1}{2t} \ln(1+t^2), \quad \sum_1^\infty \frac{\sin \frac{\pi}{2} t^n}{n-1} = -\frac{1}{2t} \ln(1+t^2); \end{aligned} \right.$$

rezultă, presupunând că în dezvoltarea lui C'_{ps} în serie FOURIER n tinde către infinit,

$$(12.43) \quad -\frac{3}{2} \frac{\pi}{C_z} \sum_1^\infty A_n t^n = \left(1 - \frac{1}{2}t - \frac{1}{2t} \right) \ln(1-t) - \ln(1+t) - \\ - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \left(t + \frac{1}{t} \right) \ln(1+t^2).$$

Să punem mai departe

$$(12.44) \quad 1-t = e^{i\frac{\theta}{2}} \left(e^{-i\frac{\theta}{2}} - e^{i\frac{\theta}{2}} \right) = -ie^{i\frac{\theta}{2}} \sqrt{2 + 4\frac{x}{c}}; \\ 1+t = e^{i\frac{\theta}{2}} \sqrt{2 - 4\frac{x}{c}}; \quad 1+t^2 = -e^{i\theta} \cdot 4\frac{x}{c},$$

vom putea scrie, ținând seama și de (12.36),

$$(12.45) \quad \frac{dy'_s}{dx} = \frac{dy_s}{dx} - A =$$

$$= -\frac{C_z}{3\pi} \left[\left(1 + 2\frac{x}{c}\right) \ln \left(2 + 4\frac{x}{c}\right) - \ln \left(2 - 4\frac{x}{c}\right) - 1 - \frac{x}{c} \ln 16 \frac{x^2}{c^2} \right].$$

Vom putea obține în cele din urmă, prin integrare,

$$(12.46) \quad \frac{1}{c} y_s = A \frac{x}{c} + \frac{C_z}{3\pi} \left[\frac{1}{2} \frac{x^2}{c^2} \ln 4 \frac{x^2}{c^2} + \frac{1}{2} \frac{x}{c} - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{4} \left(1 + 2\frac{x}{c}\right)^2 \ln \left(1 + 2\frac{x}{c}\right) - \frac{1}{2} \left(1 - 2\frac{x}{c}\right) \ln \left(1 - 2\frac{x}{c}\right) \right] + ct.$$

Pentru a determina constanta de integrare, observând că avem $y_s = 0$ pentru $x = \pm \frac{c}{2}$, rezultă:

$$(12.47) \quad ct. = \frac{C_z}{3\pi} \ln 2, \quad A = -\frac{C_z}{6\pi}.$$

Unghiul de portanță nulă și momentul la portanță nulă vor fi respectiv:

$$(12.48) \quad \sigma = A + \frac{1}{2} A_1 = \frac{2}{6\pi} C_z = -2A,$$

$$C_{m0} = -\frac{1}{4} (A_1 + A_2) = -\frac{5}{36} C_z.$$

Pentru $C_z = 0,8$, se obține profilul subțire din fig. (12.4) în jurul căruia rămâne de adăugat grosimea. Pentru aceasta, raportându-ne tot la diagrama din fig. (12.3), se găsește pentru C_{pe} :

$$(12.49) \quad \begin{cases} C_{pe} = m - d \cos \theta, \text{ dela } 0 \text{ la } \frac{\pi}{2}, \\ C_{pe} = m + e \cos \theta, \text{ dela } \frac{\pi}{2} \text{ la } \pi. \end{cases}$$

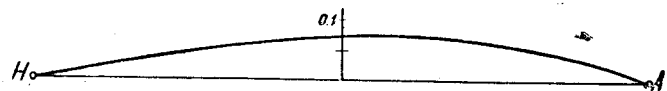


Fig. 12.4.

Aceste valori, valabile pentru extradados, sunt egale și de semne contrare la intrados.

Din ecuația a doua (12.30) se constată că $\sigma_a + \sigma_b$, B_1, \dots, B_n sunt coeficienții dezvoltării în serie FOURIER a lui C_{pe} : vom avea prin urmare succesiv:

$$(12.50) \quad \sigma_a + \sigma_b = m - \frac{1}{\pi} (d + e), \quad B_1 = \frac{1}{4} (d - e),$$

$$B_n = \frac{1}{2\pi} (d + e) \left[\frac{\sin(n+1)\frac{\pi}{2}}{n+1} + \frac{\sin(n-1)\frac{\pi}{2}}{n-1} \right].$$

Ținând seama de relația (12.7), se găsește pe de altă parte

$$(12.51) \quad \sigma_a - \sigma_b = B_1 = \frac{1}{4} (d - e),$$

de unde rezultă σ_a și σ_b și prin acestea razele de curbură

$$(12.52) \quad \begin{cases} \sigma_a = \frac{1}{2} \left[m - \frac{1}{\pi} (d + e) + \frac{1}{4} (d - e) \right] = \sqrt{\frac{2}{c} \rho_a}, \\ \sigma_b = \frac{1}{2} \left[m - \frac{1}{\pi} (d + e) - \frac{1}{4} (d - e) \right] = \sqrt{\frac{2}{c} \rho_b}. \end{cases}$$

Pentru a găsi funcția grosimii, dată de a doua ecuație (12.25), se procedează în același mod ca mai sus, punând

$$(12.53) \quad \sum_1^{\infty} B_n \sin n\theta = p. i. \sum_1^{\infty} B_n t^n$$

și observând că avem succesiv:

$$(12.54) \quad \begin{cases} \sum_2^{\infty} \frac{\sin(n+1)\frac{\pi}{2}}{n+1} t^n = -\frac{t^2}{3} + \frac{t^4}{5} - \frac{t^6}{7} + \dots, \\ \sum_2^{\infty} \frac{\sin(n-1)\frac{\pi}{2}}{n-1} t^n = t^2 - \frac{t^4}{3} + \frac{t^6}{5} - \dots, \\ t - \frac{t^3}{3} + \frac{t^5}{5} - \dots = -\frac{1}{2} i \left[\ln(1+it) - \ln(1-it) \right] = \\ = \frac{1}{2} i \ln \frac{1-it}{1+it}. \end{cases}$$

Rezultă

$$(12.55) \quad 1 + \frac{2\pi}{d+e} \sum_2^{\infty} B_n t^n = \left(\frac{i}{2t} + \frac{it}{2} \right) \ln \frac{1-it}{1+it} =$$

$$= i \cos \theta \ln \frac{1 + \sin \theta - i \sin \theta}{1 - \sin \theta + i \cos \theta},$$

sau încă

$$(12.56) \quad \frac{2\pi}{d+e} \sum_2^{\infty} B_n \sin n\theta = \frac{1}{2} \cos \theta \ln \frac{1 + \sin \theta}{1 - \sin \theta}.$$

Ținând seama de a doua ecuație din (12.25), se poate scrie

$$(12.57) \quad \frac{1}{c} \cdot \frac{dy_e}{d\theta} = \frac{1}{c} \cdot \frac{dy_e}{dx} \cdot \frac{dx}{d\theta} = \frac{1}{4} \left(m - \frac{d+e}{\pi} \right) \cos \theta - \\ - \frac{d-e}{16} \cos 2\theta + \frac{d+e}{8\pi} \sin \theta \cos \theta \ln \frac{1 + \sin \theta}{1 - \sin \theta},$$

care devine, prin integrare,

$$(12.58) \quad \frac{y_e}{c} = \frac{1}{4} \left(m - \frac{d+e}{\pi} \right) \sin \theta - \frac{d-e}{32} \sin 2\theta - \\ - \frac{d+e}{16\pi} \cos^2 \theta \ln \frac{1 + \sin \theta}{1 - \sin \theta}.$$

Constanta de integrare este nulă, ceea ce este ușor de altfel demonstrat, observând că $y_e = 0$ pentru $\theta = 0$ și $\theta = \pi$. Este interesant de văzut că, dacă $d = e = 0$, adică dacă presiunea este constantă dealungul conturului, vom găsi:

$$(12.59) \quad y_e = \frac{c}{4} m \sin \theta, \quad x = -\frac{c}{2} \sin \theta,$$

de unde rezultă că profilul este redus la o elipsă.

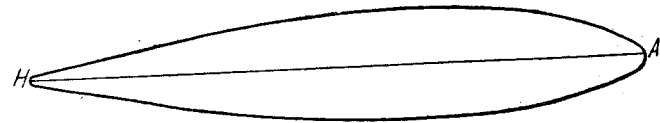


Fig. 12.5

Trasarea obținută de BRENNAN și STEVENSON, reprezentată în fig. 12.5 corespunde la $m = 0,40$, $d = 0,625$, $e = 0,075$; iar razele de curbură ce rezultă sunt respectiv: $\rho_a = 0,0124 c$, $\rho_b = 0,0002 c$.

Grosimea relativă maximă este 0,15 și poziția secțiunii maxime se găsește la 0,05 c față de centru.



Fig. 12.6.

Dacă se combină mai departe scheletul cu grosimea, se obțin în cele din urmă profile de forma celui reprezentat în fig. 12.6.

BIBLIOGRAFIA CAP. II

- 1) BIRNBAUM X.: Die tragende Wirbelfläche als Hilfsmittel zur Behandlung des ebenen Problems der Tragflügeltheorie, Zeit. f. angew. Math. u. Mech. 1923.
- 2) BRENNAN M. I. and STEVENSON A. C.: Simplified Two-Dimensional Aerofoil Theory, Aircraft Engineering, XVIII (1946).
- 3) CARAFOLI E.: a) Méthode générale pour le tracé des profils d'aviation, C.R.A.S. de Paris t. 185.
b) Sur les profils aérodynamiques de forme générale, C.R.A.S. de Paris t. 185, 1927.
c) Tracé général des profils avec dièdre à la pointe, t. 186.
- 4) CARAFOLI E.: Recherches expérimentales sur les Ailes Monoplanes, Publications Scientifiques et Techniques du Ministère de l'Air, Gauthier-Villars, Paris 1928.
- 5) CARAFOLI E.: Despre teoria profilelor cu contur dat, comunicare la Academia R. P.R., Buletin Științific Nr. 5 din Aprilie 1949.
- 6) CARAFOLI E.: Influence des ailerons sur les propriétés aérodynamiques des surfaces sustentatrices, Centre de Documentation Aéronautique International de l'Aéro-Club de France, Paris, 1929.
- 7) CEAPLĂGHIN S. A.: Despre presiunea curentului de aer planparalel asupra corpurilor obstacole. Culegere de opere, vol. II, 1933.
- 8) CEAPLĂGHIN S. A.: Asupra teoriei generale a aripilor monoplanului. Culegere de opere vol. II. 1933.
- 9) GECKELER: Zeit. f. Flug. u. Motorluft, 1922.
- 10) GIRAUT: Méthode géométrique de tracés de profils d'ailes et de corps fuselés. Publications scientifiques du Ministère de l'Air, Nr. 4, Paris, 1931.
- 11) GLAUERT H.: The Elements of Aerofoil and Airscrew Theory, Cambridge, University Press, 1926.
- 12) GOLUBEV V. V.: Teoria aripei aeroplanului în curent planparalel. GTTI, 1933.
- 13) GOLUBEV V. V.: Despre aplicarea formulei Schwartz-Cristoffel la construirea profilelor aerodinamice. Lucrările Institutului Central de Aerodinamică Nr. 493, 1940.
- 14) GOLUBEV V. V.: Lecțiuni din teoria aripei, Gosudarstvenic izdatelistvo, Moscova, Lenin-grad, 1949.
- 15) JUCOVSKI N. E.: Aérodynamique, 2-e édition, Gauthier-Villars, Paris, 1931.
- 16) JUCOVSKI N. E.: Cercetări geometrice asupra scurgerii Kutta. Culegere de opere, vol. V. 1937.
- 17) JUCOVSKI N. E.: Determinarea presiunii curentului planparalel de fluid asupra unui contur care la limită trece într'un segment de dreaptă. Culegere de opere, vol. V, Moscova, 1937.
- 18) KARMAN-BURGERS: Aerodynamic Theory, vol. II, Durand-Editor Julius Springer, Berlin, 1935.
- 19) MILNE-THOMSON L. M.: Theoretical Aerodynamics, Mac Millan and Co. Limited, London, 1948.
- 20) MISES R.: Zur Theorie des Tragflächenantriebs, Zeit. f. Flug. u. Motorluft., Nr. 8, 1917.
- 21) MÜLLER W.: Konstruktion von Tragflächenprofilen, Zeit. f. angew. Math. u. Mech., 1924, pag. 218.
- 22) TOUSSAINT et CARAFOLI: Théorie et Tracés des profils d'ailes sustentatrices, Librairie Chiron Editeur, Paris 1928.

CAPITOLUL III

TEORIA BIPLANULUI DE ANVERGURA INFINITA

În capitolul precedent, am dezvoltat teoria monoplanului de anvergură infinită, drept studiu de bază al aripilor monoplane, reale, de anvergură finită. În practică se utilizează adesea și celulele biplane (și foarte rar celule multiplane). Pentru stabilirea caracteristicilor biplanelor reale de anvergură finită, este necesar să expunem într'un mod analog problema biplanelor de anvergură infinită, așa cum o vom face de altfel mai jos.

13. BIPLANE SUBȚIRI AVÂND COARDELE ȘI INCIDENTELE EGALE

Am văzut că prin reprezentarea conformă se pot rezolva toate problemele mișcării plane. Însă rezultatele găsite până acum nu se mai pot aplica și la domeniile cu conexitate multiplă, cum este de exemplu cazul biplanului de anvergură infinită.

Reprezentarea domeniului unui biplan pe o coroană circulară, după metoda lui H. VILLAT, ar putea da o soluție riguroasă a problemei, însă comportă dificultăți serioase în determinarea explicită a rezultatelor; de aceea ne vom limita la metode aproximative și la câteva cazuri particulare care ne vor permite să studiem aplicațiile problemei biplanului la cazurile practice ale aerotehnice.

13.1. Mișcarea în jurul plăcii subțiri.

Să considerăm mai întâi mișcarea în jurul unei plăci subțiri, așezată într'un curent de viteză V_0 la infinit, făcând unghiul α cu placa. Fie

$$(13.1) \quad U = -V_0 \cos \alpha, \quad V = V_0 \sin \alpha$$

componentele vitezei, după o direcție paralelă la placă și respectiv după normala la aceasta. Prima componentă nu este perturbată de prezența plăcii; mișcarea datorită celei de a doua, modifică total aspectul scurgerii în jurul plăcii subțiri.

Se poate stabili direct potențialul mișcării, considerând potențialul general din jurul cercului:

$$(13.2) \quad f(\zeta) = -V_0 \left(\zeta e^{i\alpha} + \frac{a^2}{\zeta e^{i\alpha}} \right) - \frac{i\Gamma}{2\pi} \ln \zeta = -V_0 \cos \alpha \left(\zeta + \frac{a^2}{\zeta} \right) - iV_0 \sin \alpha \left(\zeta - \frac{a^2}{\zeta} \right) - \frac{i\Gamma}{2\pi} \ln \zeta$$

și înlocuind ζ prin valoarea sa scoasă din funcția de transformare a cercului în segment linear:

$$(13.3) \quad z = \zeta + \frac{a^2}{\zeta}, \quad 2\zeta = z + \sqrt{z^2 - 4a^2}, \quad \zeta - \frac{a^2}{\zeta} = \sqrt{z^2 - 4a^2},$$

unde $a = \frac{c}{4}$, c fiind profunzimea plăcii. Obținem ușor

$$(13.4) \quad \left\{ \begin{aligned} f(z) &= \varphi + i\psi = -V_0 \cos \alpha \cdot z - iV_0 \sin \alpha \cdot \sqrt{z^2 - 4a^2} - \\ &\quad - \frac{i\Gamma}{2\pi} \ln \frac{z + \sqrt{z^2 - 4a^2}}{2}, \\ \frac{df}{dz} &= u - iv = -V_0 \cos \alpha - iV_0 \sin \alpha \cdot \frac{z}{\sqrt{z^2 - 4a^2}} - \\ &\quad - \frac{i\Gamma}{2\pi} \cdot \frac{1}{\sqrt{z^2 - 4a^2}}. \end{aligned} \right.$$

Din forma acestor expresii, se constată că pentru $y = 0$ și $-2a < x < 2a$, adică chiar pe placă, vitesele sunt paralele cu aceasta, ceea ce era de așteptat de altfel, placa fiind linie de curent. Pentru $y = 0$ și $x = \pm 2a$ viteza devine infinită, în afară de cazul când circulația Γ este egală cu $4\pi a V_0 \sin \alpha$, în care caz viteza este finită pentru $x = -2a$, însă infinită pentru $x = +2a$. Pentru z foarte mare, viteza se reduce la aceea a curentului: $-V_0$. Dacă $\alpha = \frac{\pi}{2}$, în absența circulației ($\Gamma = 0$),

viteza este nulă pentru $z = 0$. Am făcut aceste considerațiuni asupra unei mișcări cunoscute pentru a le aplica în soluționarea biplanului.

13.2. Biplan în tandem

Să considerăm un biplan în tandem având coardele egale cu c , raportat la un sistem de axe a cărui origine să fie în mijloc, iar axa absciselor formată de linia planelor (fig. 13.1).

Fie p, q respectiv $-p, -q$ extremitățile celor două plane, cu $p - q = c$. Prin analogie cu monoplanul, se observă că pentru $q < x < p$ și $y = 0$, vitesele trebuie să fie paralele cu axa absciselor, biplanul fiind o linie de curent și pentru $x = \pm p$ și $x = \pm q$ (y fiind tot 0), adică la vârfurile ascuțite ale celor două plane, vitesele devin infinite. Pentru un z foarte mare viteza trebuie să se reducă la $-V_0 e^{i\alpha}$ iar pentru $\alpha = \frac{\pi}{2}$ și $\Gamma = 0$, trebuie

să avem două puncte de viteză nulă, simetrice față de y și așezate pe cele două plane: fie $z = \pm m$ abscisele acestor două puncte.

Deasemenea, considerând o circulație în jurul sistemului format de cele două plane, termenul datorit acestei circulații, prin analogie cu cazul plăcii, ne dă o viteză

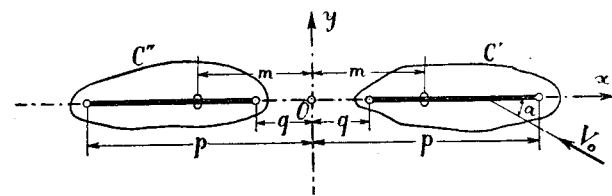


Fig. 13.1.

infinită pentru $y = 0$, $x = \pm p$ și $x = \pm q$. Viteza datorită circulației se anulează cu toate acestea pentru z foarte mare. Insemnând mai departe prin Γ' și Γ'' ($\Gamma = \Gamma' + \Gamma''$) circulațiile respective din jurul celor două plane, ante-

rior și posterior, este ușor de văzut că într'un punct $z = n$, pe axa absciselor, viteza datorită circulației va fi nulă.

Toate aceste condițiuni sunt satisfăcute riguros de expresiile următoare, a vitesei complexe și a potențialului complex, care definesc astfel mișcarea în jurul biplanului în tandem:

$$(13.5) \quad \begin{cases} \frac{df}{dz} = u - iv = -V_0 \cos \alpha - iV_0 \sin \alpha \cdot \frac{z^2 - m^2}{\sqrt{(z^2 - p^2)(z^2 - q^2)}} - \\ \quad - \frac{i\Gamma}{2\pi} \cdot \frac{z - n}{\sqrt{(z^2 - p^2)(z^2 - q^2)}}, \\ f(z) = \varphi + i\psi = -V_0 \cos \alpha \cdot z - iV_0 \sin \alpha \int_0^z \frac{(z^2 - m^2)dz}{\sqrt{(z^2 - p^2)(z^2 - q^2)}} - \\ \quad - \frac{i\Gamma}{2\pi} \int_0^z \frac{(z - n) dz}{\sqrt{(z^2 - p^2)(z^2 - q^2)}}. \end{cases}$$

Termenii acestei mișcări sunt, într'un fel oarecare, analogi cu cei ai monoplanului (13.4) și această analogie ne-a ajutat, de altfel, la stabilirea expresiei vitesei complexe.

Pentru determinarea constantelor m , n și a circulației Γ , să observăm mai întâi că, dacă mișcarea este lipsită de circulație, este necesar ca aceasta din urmă să fie identic nulă în jurul fiecărui plan: $\Gamma' = \Gamma'' = 0$. Urmează:

$$(13.6) \quad \int_{-p}^{-q} \frac{(z^2 - m^2)dz}{\sqrt{(z^2 - p^2)(z^2 - q^2)}} = \int_p^q \frac{(z^2 - m^2)dz}{\sqrt{(z^2 - p^2)(z^2 - q^2)}} = 0,$$

sau încă:

$$(13.7) \quad m^2 \int_q^p \frac{dz}{\sqrt{(z^2 - p^2)(z^2 - q^2)}} = \int_q^p \frac{z^2 dz}{\sqrt{(z^2 - p^2)(z^2 - q^2)}}.$$

Dacă punem mai departe

$$(13.8) \quad k = \frac{q}{p}, \quad k' = \sqrt{1 - k^2}, \quad 1 - \frac{z^2}{p^2} = (1 - k^2)t^2 = k'^2 t^2,$$

relația precedentă devine în cele din urmă:

$$(13.9) \quad m^2 \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k'^2 t^2)}} = p^2 \int_0^1 \sqrt{\frac{1-k'^2 t^2}{1-t^2}} dt.$$

Primul membru este o integrală eliptică de prima speță pe care o notăm cu K' , al doilea membru este o integrală eliptică de a doua speță pe care o notăm cu E' ; cu aceste notații, vom putea scrie mai simplu:

$$(13.10) \quad m^2 = p^2 \frac{E'}{K'}.$$

Valorile lui E' și K' corespunzătoare modulului k' vor fi scoase din tabelele curențe ale integralelor eliptice definite.

13.2.1. Circulația. Să considerăm acum mișcarea completă cu circulație și să determinăm această circulație și constanta n , astfel încât la vârfurile din spate ale celor două plane ($z = q$ și $z = -p$) viteza să fie finită; vom avea

$$(13.11) \quad \begin{cases} V_0 \sin \alpha (q^2 - m^2) + \frac{\Gamma}{2\pi} (q - n) = 0, \\ V_0 \sin \alpha (p^2 - m^2) - \frac{\Gamma}{2\pi} (p + n) = 0, \end{cases}$$

de unde rezultă:

$$(13.12) \quad \Gamma = 2\pi V_0 (p - q) \sin \alpha, \quad n = \frac{p}{1 - k} \left(k - \frac{E'}{K'} \right),$$

exact valoarea circulației unui monoplan având coarda dublă:

$$(13.13) \quad c_m = 2(p - q) = 2c.$$

Inlocuind aceste valori în expresia vitesei (13.5), se obține o formă mult mai simplă:

$$(13.14) \quad w = \frac{df}{dz} = -V_0 \cos \alpha - iV_0 \sin \alpha \sqrt{\frac{(z+p)(z-q)}{(z+q)(z-p)}}.$$

Să observăm mai departe că pentru o valoare mare a lui z se poate scrie

$$(13.15) \quad \sqrt{\frac{(z+p)(z-q)}{(z+q)(z-p)}} \approx \sqrt{\left(1 + 2\frac{p}{z} + 2\frac{p^2}{z^2} + \dots\right) \left(1 - 2\frac{q}{z} + 2\frac{q^2}{z^2} + \dots\right)} = \\ = 1 + \frac{p-q}{z} + \frac{1}{2} \frac{(p-q)^2}{z^2} + \dots$$

și prin urmare viteza ar putea fi dezvoltată după puterile lui $\frac{1}{z}$:

$$(13.16) \quad w = -V_0 \cos \alpha - iV_0 \sin \alpha \left(1 + \frac{p-q}{z} + \frac{(p-q)^2}{2z^2} + \dots\right).$$

13.2.2. Forțe și moment. Integralele BLASIUS-CIAPLĂGHIN, extinse pe un contur C de rază mare, ne dau rezultanta aerodinamică și momentul rezultat :

$$(13.17) \quad \begin{cases} R = R_x - iR_y = \frac{1}{2} i \rho \int_C \frac{df}{dz} dz = -i 2\pi \rho V_0 e^{i\alpha} (p-q) \sin \alpha, \\ M = -\text{p.r.} \frac{1}{2} \rho \int_C z \frac{df}{dz} dz = \frac{\pi}{2} \rho V_0^2 (p-q)^2 \sin 2\alpha. \end{cases}$$

Se obțin aceleași rezultate ca și pentru un monoplan de coardă totală dublă.

Să calculăm acum rezultantele $R' = R'_x - iR'_y$ și $R'' = R''_x - iR''_y$ respectiv a planului anterior și a celui posterior; pentru aceasta, integralele BLASIUS-CIAPLĂGHIN trebuie extinse pe contururile C' și C'' ce înconjoară fiecare plan :

$$(13.18) \quad R' = \frac{i\rho}{2} \int_{C'} \frac{df}{dz} dz = i\rho \int_p^q \frac{df}{dz} dz, \quad R'' = \frac{i\rho}{2} \int_{C''} \frac{df}{dz} dz = i\rho \int_{-p}^{-q} \frac{df}{dz} dz.$$

Să observăm mai întâi că, raportându-ne la expresia pătratului vitezei :

$$(13.19) \quad \left(\frac{df}{dz}\right)^2 = V_0^2 \cos^2 \alpha + 2i V_0^2 \sin \alpha \cos \alpha \sqrt{\frac{(z+p)(z-q)}{(z+q)(z-p)}} - V_0 \sin^2 \alpha \frac{(z+p)(z-q)}{(z+q)(z-p)},$$

avem pe de o parte,

$$(13.20) \quad \frac{(z+p)(z-q)}{(z+q)(z-p)} = 1 + 2 \frac{p-q}{p+q} \cdot \frac{q}{z+q} + 2 \frac{p-q}{p+q} \cdot \frac{p}{z-p},$$

iar pe de altă parte, ținând seama de relațiile (13.8), avem următoarea expresie

$$(13.21) \quad \sqrt{\frac{(z+p)(z-q)}{(z+q)(z-p)}} dz = i \frac{(q-p) \sqrt{1-k'^2 t^2} + p(1-k'^2 t^2) - q}{\sqrt{(1-t^2)(1-k'^2 t^2)}} dt.$$

Integralele precedente se găsesc în al doilea și al treilea termen al lui w^2 . Pentru acesta din urmă, ținând seama de (13.20) și observând că conturul C' conține polul $z=p$ (fig.13.1), vom lua drept reziduu al lui CAUCHY coeficientul termenului în $\frac{1}{z-p}$ și respectiv, pentru conturul C'' , vom lua coeficientul termenului în $\frac{1}{z+q}$, singurul pol pe care-l conține fiind

$z=-q$. Se obțin valori reale pentru R' și R'' , respectiv :

$$(13.22) \quad R'_x = 2\pi \rho V_0^2 \sin^2 \alpha \frac{p(p-q)}{p+q}, \quad R''_x = 2\pi \rho V_0^2 \sin^2 \alpha \frac{q(p-q)}{p+q}$$

Pentru al doilea termen din membrul al doilea al lui w^2 , ținând seama de (13.21), vom obține valori imaginare, respectiv :

$$(13.23) \quad \begin{aligned} R'_y &= \frac{\pi}{2} \rho (p-q) V_0^2 \sin 2\alpha (1+\nu), \\ R''_y &= \frac{\pi}{2} \rho (p-q) V_0^2 \sin 2\alpha (1-\nu), \end{aligned}$$

unde ν este dat de expresia :

$$(13.24) \quad \nu = \frac{2}{\pi(p-q)} (pE' - qK').$$

Se constată că planul anterior este mai purtător decât planul posterior și aceasta se explică de altfel ușor prin faptul că planul din față are o incidență mai mare, indusă în parte de circulația planului din spate.

Observație. Dacă planele tandemului nu sunt egale raționamentul este analog, însă soluția problemei este foarte complicată și fără interes practic.

13.3. Biplan suprapus

Când cele două plane sunt dispuse în înălțime, se obține biplanul propriu zis. Să considerăm ca mai sus, pentru a simplifica problema, că cele două plane ar fi identice și fie h distanța dintre cele două plane. Axele OX și OY sunt axele de simetrie ale biplanului. Vrem să găsim mișcarea în jurul biplanului din planul Z , printr-o transformare conformă a planului z format de biplanul în tandem, a cărui mișcare am studiat-o mai sus. Fie

$$(13.25) \quad Z = Z(z)$$

funcția de transformare și să presupunem că la infinit cele două domenii se suprapun, însă cu o rotație egală de exemplu cu $\frac{\pi}{2}$. Se poate scrie în acest caz,

$$(13.26) \quad \left(\frac{dZ}{dz}\right)_{z=\infty} = e^{i\frac{\pi}{2}} = i, \quad \left(\frac{dZ}{dz}\right)_{z=-\infty} = -i,$$

de unde rezultă că un curent paralel cu Oy în planul z , fie

$$(13.27) \quad w_0 = -iv_0,$$

se transformă în planul Z într'un curent paralel cu OX :

$$(13.28) \quad W_0 = w_0 \left(\frac{dz}{dZ} \right)_\infty = -v_0.$$

Și respectiv, un curent orizontal $w_0 = u_0$ din planul z devine un curent

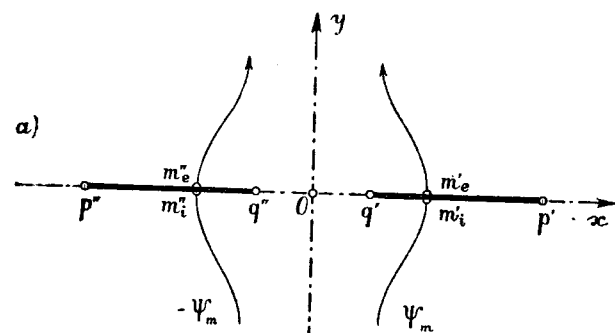


Fig. 13.2 a.

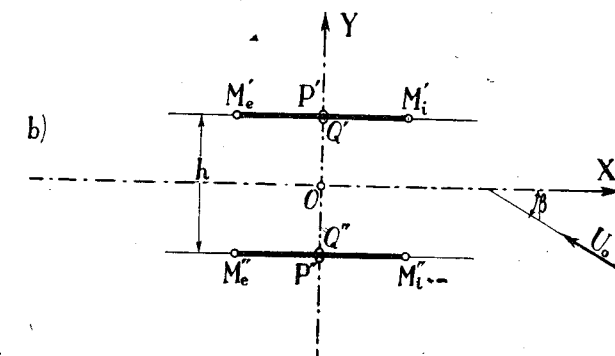


Fig. 13.2 b.

vertical $W_0 = -iu_0$ în planul Z . În concluzie deci, transformarea pe care o avem în vedere rotește planul z la înfinit de un unghi $\frac{\pi}{2}$, pentru a-l suprapune pe planul Z .

În domeniul Z , liniile de curent corespunzătoare unui curent orizontal sunt toate paralele cu OX și planele însăși, superior și inferior, sunt linii de curent.

Deci $Z = Z(z)$ este o astfel de transformare, încât liniile de curent datorite unei viteze verticale în planul z , se transformă în linii orizontale $Y = ct$, în planul Z .

Cu excepția unui factor real, funcția de transformare este identică cu cea care reprezintă potențialul complex datorit unei viteze verticale din planul z :

$$(13.29) \quad Z = i \int_0^z \frac{(z^2 - m^2) dz}{\sqrt{(z^2 - p^2)(z^2 - q^2)}} = \Phi + i\Psi, \quad \frac{dZ}{dz} = i \frac{z^2 - m^2}{\sqrt{(z^2 - p^2)(z^2 - q^2)}}.$$

Am notat cu Φ și Ψ potențialul și funcția de curent a mișcării din planul z datorită unui curent vertical de viteză egală cu unitatea, astfel că dreptele $Y = ct$, reprezintă liniile de curent $\Psi = ct$:

$$(13.30) \quad Y = \Psi.$$

Astfel de exemplu, axa Oy ($x = 0$) este reprezentată prin axa OX ($Y = 0$), liniile particulare Ψ_m și $-\Psi_m$, din care fac parte cele două plane

în tandem, devin liniile orizontale $Y = \pm \Psi_m$, care conțin cele două plane suprapuse.

Punctele de viteză nulă m_i' și m_e' , respectiv m_i'' și m_e'' corespund extremităților biplanului suprapus, în M_i' și M_e' , respectiv M_i'' și M_e'' . Ne puteam aștepta de altfel la aceasta, dat fiind că $\frac{dZ}{dz}$ se anulează pentru

$z = \pm m$ și prin urmare punctele omologe din planul Z corespund la vârfuri ascuțite.

Din cauza simetriei, punctele p', q' , respectiv p'', q'' , corespund punctelor P', Q' , respectiv P'', Q'' (fig. 13.2). Pentru determinarea caracteristicilor geometrice ale biplanului real în raport cu biplanul în tandem, vom observa mai întâi că avem :

$$(13.31) \quad \begin{cases} i \frac{h}{2} = i \int_0^p \frac{(z^2 - m^2) dz}{\sqrt{(z^2 - p^2)(z^2 - q^2)}} = i \int_0^q \frac{(z^2 - m^2) dz}{\sqrt{(z^2 - p^2)(z^2 - q^2)}}, \\ \frac{c}{2} + i \frac{h}{2} = i \int_0^{m_i'} \frac{(z^2 - m^2) dz}{\sqrt{(z^2 - p^2)(z^2 - q^2)}}, \\ -\frac{c}{2} + i \frac{h}{2} = i \int_0^{m_e'} \frac{(z^2 - m^2) dz}{\sqrt{(z^2 - p^2)(z^2 - q^2)}}, \\ \frac{c}{2} = i \int_0^{m_i'} - i \int_0^p = i \int_p^{m_i'} \frac{(z^2 - m^2) dz}{\sqrt{(z^2 - p^2)(z^2 - q^2)}}. \end{cases}$$

Punem tot $m^2 = p^2 \frac{E'}{K'}$; dacă se notează mai departe prin K

și E integralele eliptice de prima și a doua speță în raport cu modulul $k = \frac{q}{p}$, fie

$$(13.32) \quad K = \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}}, \quad E = \int_0^1 \sqrt{\frac{1-k^2t^2}{1-t^2}} dt,$$

prima integrală (13.31) ne dă h în funcție de p :

$$(13.33) \quad \frac{h}{2p} = E - \left(1 - \frac{E'}{K'} \right) K.$$

Pentru ultima integrală (13.31), ținând seama de relațiile (13.8) și observând că avem $t = 0$ pentru $z = p$ și

$$(13.34) \quad t = \left(\sqrt{1 - \frac{E'}{K'}} \right) \frac{1}{\sqrt{1-k^2}} = t_m$$

pentru $z^2 = m^2 = p^2 \frac{E'}{K'}$,

se găsește în cele din urmă

$$(13.35) \quad \frac{c}{2p} = \int_0^{t_m} \sqrt{\frac{1-k'^2 t^2}{1-t^2}} dt - \frac{E'}{K'} \int_0^{t_m} \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k'^2 t^2)}},$$

unde valorile celor două integrale eliptice incomplete vor fi căutate în tabelele curențe.

Să revenim acum la mișcarea în planul Z pe care vrem s'o cunoaștem și să observăm că avem :

$$(13.36) \quad \frac{df}{dZ} = \frac{df}{dz} \cdot \frac{dz}{dZ} = -i \frac{\sqrt{(z^2 - p^2)(z^2 - q^2)}}{z^2 - m^2} \cdot \frac{df}{dz},$$

unde $f(z)$ reprezintă potențialul mișcării în planul z (13.5); rezultă pentru viteza din planul Z următoarea expresie :

$$(13.37) \quad \frac{df}{dZ} = -V_0 \sin \alpha + i V_0 \cos \alpha \cdot \frac{\sqrt{(z^2 - p^2)(z^2 - q^2)}}{z^2 - m^2} - \frac{\Gamma}{2\pi} \frac{z - n}{z^2 - m^2}.$$

Se vede din această expresie că mișcarea în planul real Z (biplanul suprapus) se descompune în trei părți datorite, respectiv : 1) unei viteze orizontale ($-V_0 \sin \alpha$), care nu suferă nici o perturbație prin prezența biplanului; 2) unei viteze verticale descendente ($-V_0 \cos \alpha$) al cărei potențial este dat de termenul al doilea, din membrul doi; 3) unei circulații totale Γ .

Să notăm prin β , unghiul de incidență al biplanului suprapus (planul Z) și prin U_0 viteza curențului la infinit (fig. 13.2); vom avea $-U_0 \cos \beta$, componenta paralelă cu OX ,
 $U_0 \sin \beta$, „ „ „ „ „ OY .

Aplicând cele stabilite mai sus, viteza va avea următoarea formă în funcție de U_0 și β :

$$(13.38) \quad W = \frac{df}{dZ} = -i U_0 \sin \beta \cdot \frac{\sqrt{(z^2 - p^2)(z^2 - q^2)}}{z^2 - m^2} - U_0 \cos \beta - \frac{\Gamma}{2\pi} \frac{z - n}{z^2 - m^2}.$$

Se regăsește, pentru un z foarte mare, curențul dela infinit :

$$(13.39) \quad W = -U_0 \cos \beta - i U_0 \sin \beta = -U_0 e^{i\beta}.$$

Se vede că, pentru $z = \pm m$ (vârfulurile din aval ale celor două plane), viteza devine infinită; pentru a evita acest lucru, este necesar ca numitorul din (13.38) să fie deasemenea nul. Rezultă, observând că

$\sqrt{m^2 - p^2} = \pm i \sqrt{p^2 - m^2}$ și că semnul pozitiv corespunde planului superior ($z = +m$) și semnul negativ, planului inferior ($z = -m$):

$$(13.40) \quad -i U_0 \sin \beta \sqrt{(p^2 - m^2)(m^2 - q^2)} (\pm i) - \frac{\Gamma}{2\pi} (\pm m - n) = 0$$

și prin urmare :

$$(13.41) \quad n = 0, \Gamma = 2\pi U_0 \sin \beta \frac{\sqrt{(p^2 - m^2)(m^2 - q^2)}}{m} = 2\pi p U_0 \sin \beta \sqrt{\left(\frac{K'}{E'} - 1\right) \left(\frac{E'}{K'} - k^2\right)}.$$

Pentru a calcula portanța totală, este suficient să aplicăm teorema lui KUTTA-JUCOVSKI; se poate face însă direct, aplicând integralele BLASIUS-CIAPLĂGHIN pe un contur foarte mare, în punctele căruia viteza va lua următoarea formă :

$$(13.42) \quad W = -U_0 e^{i\beta} - \frac{\Gamma}{2\pi} \cdot \frac{1}{z} + \dots = -U_0 e^{i\beta} - \frac{i\Gamma}{2\pi} \cdot \frac{1}{Z} + \dots,$$

ceea ce conduce la rezultatul cunoscut :

$$(13.43) \quad R = R_x - i R_y = -i \rho U_0 \Gamma e^{i\beta}.$$

Comparând acest rezultat cu cel obținut pentru un monoplan de aceeași suprafață totală, deci de coardă $c_m = 2c$ și de circulație $\Gamma_m = 2\pi c U_0 \sin \beta$, (raportul circulațiilor va avea următoarea expresie :

$$(13.44) \quad \frac{\Gamma}{\Gamma_m} = \frac{p}{c} \sqrt{\left(\frac{K'}{E'} - 1\right) \left(\frac{E'}{K'} - k^2\right)}.$$

Ținând seama de relațiile (13.33) și (13.35), acest raport se poate exprima în funcție de $\frac{h}{c}$. Din cauza simetriei, circulațiile Γ' și Γ'' din jurul fiecărui plan sunt egale.

Pe o cale analoagă cu cazul precedent, se pot calcula rezultantele R', R'' pe fiecare plan; calculele sunt destul de grele și lipsite de altfel de interes, acest caz fiind rar întâlnit în practică. Inșă interesul calitativ al studiului precedent este evident și vom avea ocazia să aplicăm rezultatele obținute, la alte probleme.

14. TEORIA BIPLANULUI IN CAZUL GENERAL

Problema biplanului în cazul general este foarte complicată și soluțiile date de către diferiți autori sunt aproximative. Principiul metodelor utilizate constă, în general, în a înlocui influența unei aripi asupra celeilalte prin singularități definite, reprezentând efectul principal al primei aripi, pe care o vom denumi aripa activă. Astfel de exemplu, o primă idee, datorită lui PRANDTL, este aceea de a înlocui această aripă printr'un vârtej de aceeași circulație ca și cea din jurul aripii însăși. Alți autori, ca de pildă BETZ și PISTOLESI, au dezvoltat această idee, găsind rezultate concrete și interesante. O ameliorare a acestor cercetări a fost adusă de către A. TOUSSAINT și C. B. MILLIKAN, care au ajuns la rezultate confirmate de experiență. A. TOUSSAINT a pus în evidență într'un mod remarcabil influența grosimii. Alte cercetări, bazate pe transformarea a două cercuri în două profile, au fost întreprinse de către diferiți alți autori, printre cari vom cita pe DUPONT și FERRARI. Într'un studiu recent N. F. SACCHARNAI utilizează metoda profilelor subțiri și aduce soluții concrete la problema biplanului cu aripi subțiri. Vom expune mai jos o soluție aproximativă a problemei bazată pe găsirea punctelor singulare ce vor înlocui aripa activă, precum au făcut și o parte din autorii citați mai sus.

14.1. Singularități ce înlocuiesc aripa activă

Să considerăm de exemplu una din aripile biplanului; influența pe care aceasta o exercită asupra celeilalte se traduce printr'un câmp de viteze suplimentare pe care scurgerea din jurul primului plan îl produce în dreptul celuiilalt.

Vom presupune că mișcarea în jurul primului plan este cea datorită curentului de viteză V_0 dela infinit și circulației Γ , în care am inclus și cota respectivă datorită influenței aripei vecine.

Notând cu a raza cercului generator, cu v afixul centrului, cu α incidența curentului cu Ox , expresia potențialului (4.10) va fi pusă sub forma următoare:

$$\begin{aligned} f(\zeta) &= -V_0 \left(\zeta e^{i\alpha} + \frac{a^2 e^{-i\alpha}}{\zeta - v} \right) - \frac{i\Gamma}{2\pi} \ln(\zeta - v) \approx \\ (14.1) \quad &\approx -V_0 \left[\zeta e^{i\alpha} + \frac{a^2 e^{-i\alpha}}{\zeta} \left(1 + \frac{v}{\zeta} \right) \right] - \frac{i\Gamma}{2\pi} \ln \zeta \left(1 - \frac{v}{\zeta} \right) \approx \\ &\approx -V_0 \left(\zeta e^{i\alpha} + \frac{a^2 e^{-i\alpha}}{\zeta} + \frac{i\Gamma}{2\pi V_0} \cdot \frac{v}{\zeta} + \frac{a^2 v e^{-i\alpha}}{\zeta^2} \right) - \frac{i\Gamma}{2\pi} \ln \zeta. \end{aligned}$$

Vom utiliza mai jos această ultimă expresie, însă este necesar să facem mai întâi câteva considerațiuni asupra caracteristicilor geometrice ale profilului.

14.1.1. Conturul de bază al profilului. Să presupunem că funcția de transformare, care reprezintă conform profilul aripei active pe cercul generator K , este de forma generală studiată mai înainte,

$$(14.2) \quad z' = \zeta' + \frac{q'^2}{\zeta'} + \frac{q_n'}{\zeta'^n},$$

unde q'^2 este real; să admitem pe de altă parte că, caracteristicile geometrice principale ale profilului și anume: grosimea, curbura, poziția secțiunii de grosime maximă, etc. sunt în funcție de parametri definiți anterior (7.2): μ, κ, f . Să notăm cu c coarda profilului; putem scrie:

$$(14.3) \quad l = 0,25c, \quad a = l(1 + \mu), \quad q'^2 = l^2(1 - \kappa), \quad v = l(\mu + if).$$

Să admitem, într'o primă aproximație, că influența datorită caracteristicilor geometrice ale profilului se reduce la cea a conturului de bază (7.3):

$$(14.4) \quad z' = \zeta' + \frac{q'^2}{\zeta'}$$

Într'adevăr, această expresie este suficientă pentru a exprima în mărimi de primul ordin, grosimea, curbura și aproximativ, poziția secțiunii maxime. Vom neglija, într'un fel, influența termenilor secundari asupra caracteristicilor geometrice ale profilului. Pentru a simplifica expunerea, vom admite că axa absciselor sistemului de referință este paralelă cu axa de portanță nulă. Fie, într'adevăr, $Ox'y'$ (planul z') sistemul de axe de construcție a profilului și τ unghiul pe care axa de portanță nulă îl face cu Ox' ; dacă sistemul se rotește de un unghi τ , astfel ca axa absciselor să fie paralelă cu axa de portanță nulă, vom avea

$$(14.5) \quad z' = ze^{i\tau}, \quad \zeta' = \zeta e^{i\tau}$$

și vom putea scrie succesiv:

$$(14.5 \text{ bis}) \quad \begin{cases} z' = \zeta' + \frac{q'^2}{\zeta'} = \zeta e^{i\tau} + \frac{q'^2}{\zeta e^{i\tau}} = ze^{i\tau}, \\ z = \zeta + \frac{q'^2 e^{-2i\tau}}{\zeta} = \zeta + \frac{q^2}{\zeta}. \end{cases}$$

Deoarece τ este foarte mic, pentru profilele moderne abia atinge un grad, se poate admite în cele din urmă

$$(14.6) \quad q^2 \approx q'^2 = l^2(1 - \kappa) \approx \frac{c^2}{16};$$

se neglijează prin urmare efectul unghiului τ sau, ceea ce revine la același lucru, efectul momentului unitar la portanța nulă $\left(C_{m0} \approx -\frac{\pi}{2} \tau \right)$.

În concluzie deci, vom admite că forma geometrică a profilului, astfel definită prin conturul de bază, va avea un efect aerodinamic asupra

planului vecin, aproximativ egal, cu cel al conturului exact. In această caz, este preferabil pentru a defini mai bine conturul, să punem în evidență grosimea maximă relativă și poziția secțiunii de grosime maximă (λ_m)*. După (8.15), neglijând termenii, de ordinul al doilea, notând cu θ_m unghiul corespunzător poziției secțiunii maxime (acest unghi este dedus din formula (8.11): $\lambda_m \approx 0,5 (1 - \cos \theta_m)$, și cu ε_m grosimea maximă relativă, se poate scrie:

$$(14.7) \quad \varepsilon_m \approx \sin \theta_m \left[\mu (1 + \cos \theta_m) + \frac{x}{2} \right].$$

Pe de altă parte, după (8.16), putem obține

$$(14.8) \quad (2\mu + x) \cos \theta_m + 2\mu \cos 2\theta_m = 0,$$

de unde vom scoate în cele din urmă:

$$(14.9) \quad \mu + \frac{x}{2} = - \frac{\cos 2\theta_m}{\sin^3 \theta_m} \varepsilon_m, \quad \mu = \frac{\cos \theta_m}{\sin^3 \theta_m} \varepsilon_m.$$

Astfel, prin urmare, μ și x definesc grosimea maximă relativă și poziția secțiunii de grosime maximă. Aceste rezultate se aplică deasemenea și la profilele empirice, unde ε_m , λ_m pot fi măsurate ușor. In cazul profilelor JUCOVSKI ($x = 0$), μ va fi dedus mai exact din formula

$$(14.10) \quad \mu = \frac{0,77 \varepsilon_m}{1 - 0,6 \varepsilon_m}.$$

Să revenim la conturul de bază și să punem ζ în funcție de z :

$$(14.11) \quad \zeta = \frac{z}{2} + \frac{z}{2} \sqrt{1 - 4 \frac{q^2}{z^2}} = z - \frac{q^2}{z^2} - q \frac{q^3}{z^3} - 2 q \frac{q^5}{z^5}.$$

Dacă distanța între cele două plane este destul de mare, se vor putea neglija termenii superiori lui $\frac{1}{z}$ și se va putea scrie:

$$(14.12) \quad \zeta = z - \frac{q^2}{z} \approx z - \frac{l^2}{z}.$$

Această aproximație este perfect valabilă, chiar pentru aripile foarte apropiate.

14.1.2. Determinarea și poziția singularităților. Să revenim la potențialul (14.1) din planul ζ ; ținând seama de (14.3), punând pe de altă parte

$$(14.13) \quad \Gamma = 4\pi a V_0 \alpha, \quad a^2 + q^2 \approx 2al, \quad a^2 - q^2 \approx 2al \left(\mu + \frac{x}{2} \right),$$

*) λ_m reprezintă poziția secțiunii de grosime maximă față de bordul de atac al profilului, în fracțiune din coardă.

unde l reprezintă un sfert din coardă și neglijând termenii de al doilea ordin, se poate scrie succesiv:

$$(14.14) \quad f(z) = -V_0 \left[\zeta e^{i\alpha} + \frac{q^2 e^{i\alpha}}{\zeta} + \frac{a^2 e^{-i\alpha} - q^2 e^{+i\alpha} + 2iav\alpha}{\zeta} + \left(\zeta + \frac{q^2}{\zeta} \right) \frac{1}{\zeta} \frac{a^2 v e^{i-\alpha}}{q^2} \right] - \frac{i\Gamma}{2\pi} \ln \zeta \approx -V_0 z e^{i\alpha} - V_0 \left[(a^2 - q^2) \cos \alpha - i(a^2 + q^2 - 2q^2\mu) \sin \alpha \right] \frac{z}{z^2 - q^2} - V_0 \frac{a^2 v e^{-i\alpha}}{q^2} \frac{z^2}{z^2 - q^2} - \frac{i\Gamma}{2\pi} \ln \frac{z^2 - q^2}{z} \approx -V_0 z e^{i\alpha} - 2V_0 l^2 \left[(1 + \mu) \left(\mu + \frac{x}{2} \right) - i\alpha \right] \frac{1}{z} - \frac{i\Gamma}{2\pi} \ln z.$$

14.2. Caracteristicile geometrice ale biplanului

Fie aripile (1) și (2), raportate fiecare la un sistem $O_1 x_1 y_1$, respectiv $O_2 x_2 y_2$, având centrele drept origine iar axele $O_1 x_1$ și $O_2 x_2$ paralele cu axele de portanță nulă (fig. 14.1). Fie mai departe $c_1 = 4l_1$ și $c_2 = 4l_2$, coardele profilelor biplanului, α_1 și α_2 incidențele,

$\omega = \alpha_2 - \alpha_1$ inter-inclinația planului inferior în raport cu planul superior. Distanța între cele două plane, fie h , se numește înălțimea biplanului sau interplan. Din cauza inter-inclinației ω , se obțin două înălțimi diferite, h_1 și h_2 , după cum se duce o perpendiculară $O_1 H_1$ pe $O_2 x_1$ sau $O_2 H_2$ pe $O_1 x_2$; de aceea, se poate lua pentru h înălțimea medie:

(14.15)
$$h = \frac{1}{2} (h_1 + h_2).$$

Totuși, în aplicațiile curente, vom pune

$$(14.16) \quad h = h_1,$$

așa cum vom face de altfel dese ori în cele ce urmează.

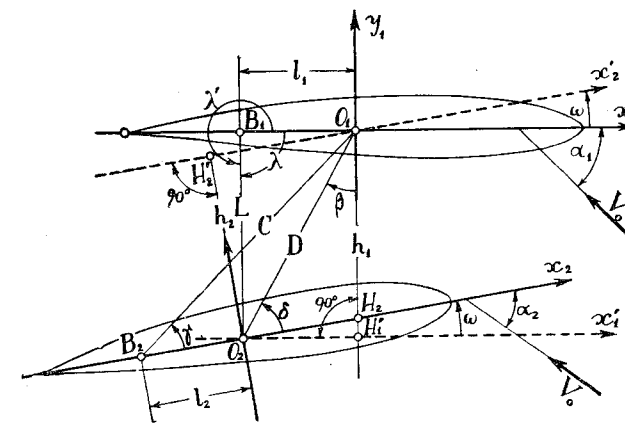


Fig. 14.1

Dacă se unesc cele două centre, dreapta O_1O_2 face unghiul β cu normala O_1H_1 la O_2x_1 ; distanța $s = \overline{O_2H_1} \approx \overline{O_2H_2}$ se numește decalajul biplanului și este legat de unghiul β , care se numește unghiul de decalaj, prin următoarea formulă:

$$(14.17) \quad s = h \operatorname{tg} \beta.$$

Punctele de vitesă nulă de pe cercurile generatoare, care corespund cu vârfurile profilurilor, vor avea drept afixe, după (14.3) și (14.4), respectiv:

$$(14.18) \quad \xi_1 \approx -l_1 = -\frac{c_1}{4}, \quad \xi_2 \approx -l_2 = -\frac{c_2}{4}$$

și vor fi notate prin B_1 și B_2 . Vom defini printre caracteristicile geometrice ale biplanului, distanța O_1O_2 și valoarea ei în funcție de înălțimea h și de decalajul s :

$$(14.19) \quad \overline{O_1O_2}^2 = D^2 = h^2 + s^2, \quad \operatorname{tg}(\delta + \omega) = \frac{h}{s} = \cot \beta.$$

Aceste date geometrice vor fi folosite, mai departe, în calculul circulației și a forțelor ce lucrează asupra aripilor biplanului.

14.3. Determinarea circulației pe aripa inferioară

Am văzut mai sus, că influența unei aripi asupra celeilalte se traduce prin acțiunea unui sistem de vârtej și dublet, ce înlocuiește aripa activă, acțiune care se exercită asupra scurgerii în jurul aripei influențate. În raport cu scurgerea în jurul aripei singure, izolate, aripa influențată suferă modificări în ceea ce privește distribuția viteselor în lungul conturului său; prin urmare, condițiile de scurgere la vârf sunt deasemenea modificate. Vitesa trebuind să fie întotdeauna finită la vârf, circulația, care pentru aripa izolată ar fi Γ , devine $\Gamma + \Delta\Gamma$, diferența fiind datorită acțiunii singularităților care înlocuiesc aripa activă.

Să considerăm planul aripei influențate (2), pe care-l vom indica prin $z_2 = x_2 + iy_2$ și să efectuăm o transformare definită de expresia precedentă (14.12):

$$(14.20) \quad \zeta_2 = z_2 - \frac{l_2^2}{z_2}$$

pentru a reveni în planul cercului generator, definit prin $\zeta_2 = \xi_2 + i\eta_2$ (fig. 14.2); centrul O_1 al aripei active, care este sediul singularităților definite mai sus, ajunge în Ω_1 , după această transformare.

În planul ζ_2 , scurgerea suplimentară, în afară de cea datorită curenților V_0 , va fi dată de sistemul format din vârtej și dublet așezat în Ω_1 . Pentru a determina acțiunea lor, să observăm mai întâi că în punctul B_2 ($\xi_2 = -l_2$), care corespunde vârfului profilului, vitesa Δv_2 , care rezultă din

această scurgere suplimentară, este egală și de semn contrar cu v_0 , dată de circulația suplimentară $\Delta\Gamma_2$ ce se naște de pe urma acestei scurgeri:

$$(14.21) \quad \Delta v_2 = -v_0 = \frac{\Delta\Gamma_2}{2\pi a_2}$$

Această vitesă, care trebuie să fie tangentă la cerc, în B_2 , este prin urmare paralelă cu O_2y_2 . Este suficient deci să calculăm Δv_2 pentru a deduce circulația suplimentară $\Delta\Gamma_2$: este tocmai ceea ce vom face mai jos.

14.3.1. Influența vârtejiului. Fie Γ_1 vârtejiul izolat așezat în Ω_1 , de afix $Re^{i\rho}$ (fig. 14.2). Expresia potențialului în raport cu un sistem de axe trecând prin centrul M_2 al cercului generator va fi dată de relația (3.29). Pentru a simplifica calculele, se poate admite că centrul este în origine. Această aproximație nu aduce o eroare sensibilă, astfel că se poate scrie pentru potențial și pentru vitesă, respectiv

$$(14.22) \quad \begin{cases} f(\zeta_2) = -\frac{i\Gamma_1}{2\pi} \ln \frac{\zeta_2 (\zeta_2 - Re^{i\rho})}{\zeta_2 - \frac{a_2^2}{R} e^{i\rho}}, \\ w_{21} = -\frac{i\Gamma_1}{2\pi} \left(\frac{1}{\zeta_2} + \frac{1}{\zeta_2 - Re^{i\rho}} - \frac{1}{\zeta_2 - \frac{a_2^2}{R} e^{i\rho}} \right). \end{cases}$$

În punctul B_2 ($\zeta_2 = -a_2$), vitesa va avea valoarea:

$$(14.23) \quad w_{21} = -iv_{21} = \frac{i\Gamma_1}{2\pi a_2} \left(1 + \frac{1}{1 + \frac{R}{a_2} e^{i\rho}} - \frac{1}{1 + \frac{a_2}{R} e^{i\rho}} \right) = \frac{i\Gamma_1}{2\pi} \cdot \frac{2(a_2 + R \cos \rho)}{a_2^2 + R^2 + 2a_2 R \cos \rho} = \frac{i\Gamma_1 \cdot 2 \cos \alpha}{2\pi K};$$

rezultă, după (14.21),

$$(14.24) \quad \Gamma_{21}^{(t)} = 2\pi a_2 v_{21} = -4\pi a_2 \frac{\Gamma_1 \cos \alpha}{2\pi K} = -4\pi a_2 V_{21} \cos \alpha,$$

unde V_{21} este vitesa totală indusă de vârtej în punctul B_2 și $V_{21} \cos \alpha$ componenta ei verticală. Rămâne de definit acum poziția punctului Ω_1 în raport cu punctul omolog O_1 din domeniul real (domeniul biplanului). Proiecțiile vectorului $\overline{O_1\Omega_1}$ se deduc ușor din relația următoare (fig. 14.2):

$$(14.25) \quad \begin{cases} \zeta_2 - Z_2 = \Delta s + i\Delta h = -\frac{l_2^2}{z_2} = -\frac{l_2^2}{s + ih} = -\frac{l_2^2}{s^2 + h^2} (s - ih) \\ \zeta_2 = s \left(1 - \frac{1}{16} \frac{c_2^2}{D^2} \right) + ih \left(1 + \frac{1}{16} \frac{c_2^2}{D^2} \right), \end{cases}$$

de unde rezultă pentru K și $\text{tg } \kappa$, următoarele relații :

$$(14.26) \left\{ \begin{aligned} K^2 &= \left[\frac{c_2}{4} + s \left(1 - \frac{1}{16} \frac{c_2^2}{D^2} \right) \right]^2 + h^2 \left[1 + \frac{1}{16} \frac{c_2^2}{D^2} \right]^2, \\ \text{tg } \kappa &= \frac{h \left(1 + \frac{1}{16} \frac{c_2^2}{D^2} \right)}{\frac{c_2^2}{4} + s \left(1 - \frac{1}{16} \frac{c_2^2}{D^2} \right)}. \end{aligned} \right.$$

14.3.2. Influența dubletului și generalizarea problemei. Am văzut că determinarea circulației suplimentare $\Gamma_{21}^{(s)}$ datorită vârtejului așezat în Ω_1 se reduce la calculul componentei verticale indusă de acest vârtej în punctul B_2 (fig. 14.2). Calcule analoage, privitoare la o sursă de un debit egal cu Q_1 , ne conduc la un rezultat asemănător :

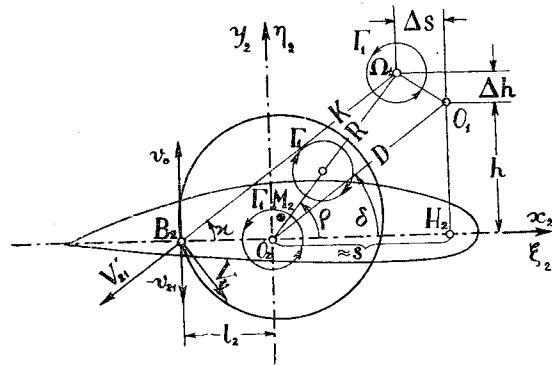


Fig. 14.2.

La fel se întâmplă pentru un dublet, care este format din două surse sau două vârtejuri egale și de semne contrare, infinit apropiate; de altfel, ca și pentru un curent paralel, care ar putea fi considerat ca rezultând dintr'o sursă dusă la infinit. Rezultatul este deci general: circulația în jurul profilului este egală cu de $4\pi a_2$ ori componenta după $O_2 y_2$ a vitesei generale din punctul B_2 .

Totuși, trebuie văzut cum se reproduc toate aceste singularități din planul real în planul cercului. Centrul O_1 al aripii active (1) ajunge în Ω_1 , punctul său omolog și am văzut, pe de altă parte, că circulația precum și debitul, se conservă. În ceea ce privește însă dubletul, momentul său va fi multiplicat cu valoarea derivatei $\left(\frac{d\zeta_2}{dz_2} \right)$ din punctul O_1 , așa cum am arătat la început (4.54). Avem astfel, după (14.20) :

$$(14.28) \left(\frac{d\zeta_2}{dz_2} \right)_{O_1} = 1 + \frac{l_2^2}{z_2^2} = 1 + \frac{l_2^2(s - ih)^2}{(h^2 + s^2)^2} = 1 - \frac{c_2^2}{16(h^2 + s^2)} \frac{h^2 - s^2}{h^2 + s^2} - i \frac{c_2^2}{16(h^2 + s^2)} \frac{2hs}{h^2 + s^2}.$$

$$(14.27) \Gamma_{21}^{(s)} = 2\pi a_2 v_{21} = -4\pi a_2 \frac{Q_1}{2\pi} \frac{\sin \kappa}{K} = -4\pi a_2 V_{21}' \sin \kappa,$$

unde $V_{21}' \sin \kappa$ este componenta verticală indusă de sursă în punctul B_2 .

Dacă se neglijează s în raport cu h , se obține o expresie mai simplă :

$$(14.29) \left(\frac{d\zeta_2}{dz_2} \right)_{O_1} \approx 1 - \frac{1}{16} \frac{c_2^2}{D^2} \approx \frac{1}{1 + \frac{1}{16} \frac{c_2^2}{D^2}}.$$

Aceste formule nu sunt valabile decât pentru interplanele curente. Dacă înălțimea este suficient de mică în raport cu coarda ($h < 0,5 c$), trebuie folosită a doua formulă din (14.29). Pentru mai multă rigurozitate, este necesar de stabilit derivata lui ζ în raport cu z , plecând direct dela expresia (14.5 bis); se obține astfel

$$(14.30) \frac{d\zeta_2}{dz_2} = \frac{\zeta_2^2}{\zeta_2^2 - l_2^2},$$

unde ζ_2 va fi înlocuit în funcție de z_2 prin valoarea sa exactă :

$$(14.30 \text{ bis}) \zeta_2 = \frac{1}{2} \left(z_2 + \sqrt{z_2^2 - 4q^2} \right).$$

Pentru biplanele curente, a doua formulă (14.29) va fi utilizată mai des. Cu aceste considerațiuni, să trecem mai departe la determinarea circulației suplimentare $\Gamma_{21}^{(d)}$ datorită dubletului.

Momentul dubletului așezat în Ω_1 (de afix $Re^{i\varphi}$), are următoarea expresie :

$$(14.31) - \frac{2V_0 l_1^2}{1 + \frac{1}{16} \frac{c_2^2}{D^2}} \left[(1 + \mu_1) \left(\mu_1 + \frac{x_1}{2} \right) - i\alpha_1 \right] = -(p_1 - iq_1);$$

potențialul său va avea expresia

$$(14.32) - \frac{p_1 - iq_1}{\zeta_2 - Re^{i\varphi}},$$

de unde rezultă pentru viteza în punctul B_2 ($\zeta_2 = -l_2$) :

$$(14.33) w_{21}' = \frac{p_1 - iq_1}{(l_2 + Re^{i\varphi})^2}.$$

Însă, având (fig. 14.2)

$$(14.34) l_2 + Re^{i\varphi} = \frac{c_2}{4} + Re^{i\varphi} = Ke^{i\kappa},$$

rezultă

$$(14.35) w_{21}' = (p_1 - iq_1) \frac{e^{-2i\kappa}}{K^2} = \frac{p_1 \cos 2\kappa - q_1 \sin 2\kappa}{K^2} - i \frac{p_1 \sin 2\kappa + q_1 \cos 2\kappa}{K^2}.$$

Viteza verticală v'_{21} va avea astfel expresia

$$(14.36) \quad v'_{21} = p_1 \frac{\sin 2k}{K^2} + q_1 \frac{\cos 2k}{K^2}.$$

de unde rezultă următoarea formulă pentru circulația suplimentară $\Gamma_{21}^{(d)}$ datorită dubletului:

$$(14.37) \quad \begin{aligned} \Gamma_{21}^{(d)} &= 4\pi a_2 v'_{21} = \\ &= 4\pi a_2 \left(p_1 \frac{\sin 2k}{K^2} + q_1 \frac{\cos 2k}{K^2} \right). \end{aligned}$$

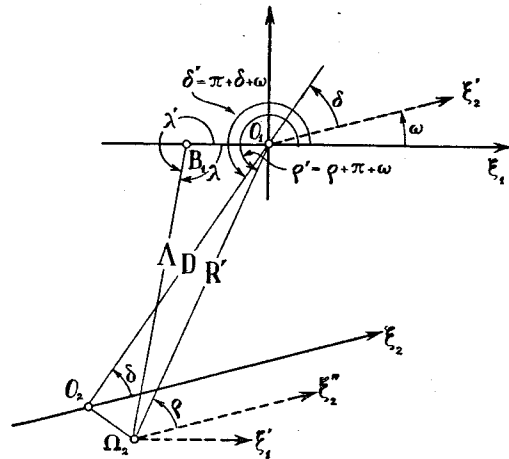


Fig. 14.3.

14.3.3. Circulația suplimentară în jurul aripii superioare. Pentru determinarea circulației suplimentare în jurul aripii (1), datorită aripii (2), vom observa mai întâi că centrul acesteia din urmă, ajunge în Ω_2 , a cărui afix $R'e^{i\varphi}$ (fig. 14.3), va fi determinat aplicând punctului O_2 transformarea

$$(14.38) \quad \zeta_1 = z_1 - \frac{l_1^2}{z_1}.$$

Vom găsi, punând $\delta' = \pi + \delta + \omega$, în care se poate neglija interinclinarea ω ($\delta' \approx \pi + \delta$):

$$(14.39) \quad \begin{aligned} R'e^{i\varphi} &= -(s + ih) + \frac{l_1^2}{s + ih} = -(s + ih) + \frac{l_1^2}{h^2 + s^2} (s - ih) = \\ &= -s \left(1 - \frac{1}{16} \frac{c_1^2}{D^2} \right) - ih \left(1 + \frac{1}{16} \frac{c_1^2}{D^2} \right); \end{aligned}$$

de unde rezultă (fig. 14.3)

$$(14.40) \quad l_1 + R'e^{i\varphi} = \Lambda e^{i\lambda'} = \Lambda e^{-i\lambda},$$

care va înlocui Ke^{ix} din expresiile precedente. Vom avea astfel, pentru circulația suplimentară datorită vârtejului, relația

$$(14.41) \quad \Gamma_{12}^{(d)} = -4\pi a_1 \frac{\Gamma_2 \cos \lambda}{2\pi \Lambda},$$

unde Λ și λ vor fi date de expresiile următoare:

$$(14.42) \quad \begin{cases} \Lambda^2 = \left[\frac{c_1}{4} - s \left(1 - \frac{1}{16} \frac{c_1^2}{D^2} \right) \right]^2 + h^2 \left(1 + \frac{1}{16} \frac{c_1^2}{D^2} \right)^2, \\ \operatorname{tg} \lambda = \frac{h \left(1 + \frac{1}{16} \frac{c_1^2}{D^2} \right)}{\frac{c_1}{4} - s \left(1 - \frac{1}{16} \frac{c_1^2}{D^2} \right)}. \end{cases}$$

Punând mai departe

$$(14.43) \quad p_2 = \frac{2V_0 l_2^2}{1 + \frac{1}{16} \frac{c_1^2}{D^2}} (1 + \mu_2) \left(\mu_2 + \frac{\alpha_2}{2} \right), \quad q_2 = \frac{2V_0 l_2^2}{1 + \frac{1}{16} \frac{c_1^2}{D^2}} \alpha_2,$$

se poate stabili, în același mod ca mai înainte, circulația suplimentară $\Gamma_{12}^{(d)}$ datorită dubletului așezat în Ω_2 :

$$(14.43 \text{ bis}) \quad \Gamma_{12}^{(d)} = 4\pi a_1 \left(-p_2 \frac{\sin 2\lambda}{\Lambda^2} + q_2 \frac{\cos 2\lambda}{\Lambda^2} \right).$$

14.3.4. Calculul circulațiilor Γ_1 și Γ_2 . Să notăm cu Γ_{11} circulația în jurul aripii superioare (1) considerată izolată și prin $\Gamma_{12} = \Gamma_{12}^{(d)} + \Gamma_{12}^{(a)}$ circulația suplimentară totală în jurul aceleiași aripi datorită influenței aripii inferioare (2). Pentru aceasta din urmă, vom avea respectiv Γ_{22} și $\Gamma_{21} = \Gamma_{21}^{(d)} + \Gamma_{21}^{(a)}$. Circulațiile totale Γ_1 și Γ_2 vor fi respectiv:

$$(14.44) \quad \Gamma_1 = \Gamma_{11} + \Gamma_{12}, \quad \Gamma_2 = \Gamma_{22} + \Gamma_{21}.$$

Dacă α_1 și $\alpha_2 = \alpha_1 + \omega$ sunt incidențele în raport cu axele de portanță nulă, se poate pune în mod general

$$(14.44 \text{ bis}) \quad \Gamma_{11} = k_1 c_1 V_0 \alpha_1, \quad \Gamma_{22} = k_2 c_2 V_0 \alpha_2,$$

unde k_1 și k_2 sunt coeficienți, teoretic egali cu $\pi(1 + \mu)$, însă practic reduși cu 10% până la 13%.

Deasemenea, în loc de $4\pi a_1 = \pi c_1(1 + \mu_1)$ și $4\pi a_2 = \pi c_2(1 + \mu_2)$, vom putea lua respectiv $k_1 c_1$ și $k_2 c_2$ și vom putea scrie astfel, următoarele două ecuații:

$$(14.45) \quad \begin{cases} \frac{\Gamma_1}{k_1 c_1 V_0} = \alpha_1 - \frac{\Gamma_2}{2\pi V_0} \frac{\cos \lambda}{\Lambda} + \frac{q_2 \cos 2\lambda}{V_0 \Lambda^2} - \frac{p_2 \sin 2\lambda}{V_0 \Lambda^2} \\ \frac{\Gamma_2}{k_2 c_2 V_0} = \alpha_2 - \frac{\Gamma_1}{2\pi V_0} \frac{\cos \lambda}{K} + \frac{q_1 \cos 2\lambda}{V_0 K^2} + \frac{p_1 \sin 2\lambda}{V_0 K^2} \end{cases}$$

de unde se scoate Γ_1 și Γ_2 . Pentru aceasta, să punem

$$(14.46) \left\{ \begin{aligned} g_{12} &= \frac{c_2}{2} \frac{\cos \lambda}{\Lambda}, & g_{21} &= \frac{c_1}{2} \frac{\cos \kappa}{K}, \\ e_{12} &= \frac{1}{8} \cdot \frac{c_2^2}{1 + \frac{1}{16} \frac{c_1^2}{D^2}} \frac{\sin 2\lambda}{\Lambda^2}, & e_{21} &= \frac{1}{8} \cdot \frac{c_1^2}{1 + \frac{1}{16} \frac{c_2^2}{D^2}} \frac{\sin 2\kappa}{K^2}, \\ i_{12} &= \frac{1}{8} \cdot \frac{c_2^2}{1 + \frac{1}{16} \frac{c_1^2}{D^2}} \frac{\cos 2\lambda}{\Lambda^2}, & i_{21} &= \frac{1}{8} \cdot \frac{c_1^2}{1 + \frac{1}{16} \frac{c_2^2}{D^2}} \frac{\cos 2\kappa}{K^2}; \end{aligned} \right.$$

ecuațiile precedente devin în acest caz

$$(14.47) \left\{ \begin{aligned} \frac{\Gamma_1}{k_1 c_1 V_0} &= \alpha_1 - g_{12} \frac{\Gamma_2}{k_2 c_2 V_0} + i_{12} \alpha_2 - e_{12} (1 + \mu_2) \left(\mu_2 + \frac{\kappa_2}{2} \right), \\ \frac{\Gamma_2}{k_2 c_2 V_0} &= \alpha_2 - g_{21} \frac{\Gamma_1}{k_1 c_1 V_0} + i_{21} \alpha_1 + e_{21} (1 + \mu_1) \left(\mu_1 + \frac{\kappa_1}{2} \right). \end{aligned} \right.$$

Rezolvarea acestor ecuații este ușoară.

Intr'adevăr, notând prin ε_m grosimea relativă maximă, se poate scrie, după (14.9) și (14.10),

$$(14.48) \quad (1 + \mu_1) \left(\mu_1 + \frac{\kappa_1}{2} \right) = \eta_1 \varepsilon_{m1}, \quad (1 + \mu_2) \left(\mu_2 + \frac{\kappa_2}{2} \right) = \eta_2 \varepsilon_{m2},$$

unde η_1 , respectiv η_2 , variază dela 0,8 la 1; vom admite, de altfel, pentru simplificare,

$$(14.49) \quad (1 + \mu) \left(\mu + \frac{\kappa}{2} \right) \approx (1 + 0,8 \varepsilon_m) \cdot 0,8 \varepsilon_m.$$

Ținând seama de cele de mai sus (14.47), rezultă în cele din urmă ecuațiile:

$$(14.50) \left\{ \begin{aligned} \frac{\Gamma_1}{k_1 c_1 V_0} &= \frac{1 - g_{12} i_{21}}{1 - g_{12} g_{21}} \alpha_1 + \frac{i_{12} - g_{12}}{1 - g_{12} g_{21}} \alpha_2 - \frac{e_{12} \eta_2 \varepsilon_{m2} + g_{12} e_{21} \eta_1 \varepsilon_{m1}}{1 - g_{12} g_{21}}, \\ \frac{\Gamma_2}{k_2 c_2 V_0} &= \frac{1 - g_{21} i_{12}}{1 - g_{12} g_{21}} \alpha_2 + \frac{i_{21} - g_{21}}{1 - g_{12} g_{21}} \alpha_1 + \frac{e_{21} \eta_1 \varepsilon_{m1} + g_{21} e_{12} \eta_2 \varepsilon_{m2}}{1 - g_{12} g_{21}}. \end{aligned} \right.$$

Aceste formule sunt susceptibile de a fi încă simplificate dacă, pentru interplanele mari se neglijează produsele: $g_{12} g_{21}$, $g_{12} i_{21}$, $g_{21} i_{12}$, $g_{21} e_{21}$, $g_{21} e_{12}$, ceea ce ne conduce la următoarele relații simple:

$$(14.51) \left\{ \begin{aligned} \frac{\Gamma_1}{k_1 c_1 V_0} &\approx \alpha_1 + (i_{12} - g_{12}) \alpha_2 - e_{12} \eta_2 \varepsilon_{m2}, \\ \frac{\Gamma_2}{k_2 c_2 V_0} &\approx \alpha_2 + (i_{21} - g_{21}) \alpha_1 + e_{21} \eta_1 \varepsilon_{m1}. \end{aligned} \right.$$

14.4. Simplificarea problemei în cazul aripilor subțiri

Dacă aripile biplanului sunt subțiri (considerând tot timpul un moment unitar la portanța nulă, redus: $C_{m0} = -\frac{\pi}{2} \tau \approx 0$), se poate folosi o metodă

mai simplă, înlocuind vârtejul și dubletul așezați în centrul aripei active printr'un singur vârtej așezat în centrul de gravitate al circulației, noțiune pe care o vom defini mai jos.

14.4.1. Centrul de gravitate al circulației. Să presupunem că suprimăm pereții aripilor, înlocuindu-i printr'un strat de vârtejuri; acțiunea unei aripi asupra celeilalte este identică cu acțiunea stratului de vârtejuri răspândit pe tot conturul. Dacă aripa este moderat apropiată, se poate admite că acțiunea stratului de vârtejuri este echivalentă cu un tub de vârtej infinit subțire, de aceeași intensitate totală, așezat în centrul de gravitate al circulației [8] și cu un dublet având un moment proporțional cu grosimea profilului.

Intr'adevăr, să notăm prin C conturul profilului, prin γ circulația pe unitatea de lungime și prin V viteza tangențială într'un punct al conturului; se poate scrie, observând că funcția de curent este constantă pe contur:

$$(14.52) \quad \Gamma = \int_C \gamma ds = \int_C V ds = \int_C \frac{\partial \varphi}{\partial s} ds = \int_C (d\varphi + i\psi) = \int_C df = (f)_C.$$

Notând mai departe prin $z_g = x_g + iy_g$ afixul centrului de gravitate al circulației, se poate scrie

$$(14.53) \quad z_g \Gamma = \int_C z \gamma ds = \int_C z df,$$

ceea ce va permite să determinăm z_g în cele ce urmează. Să revenim, în acest scop, la expresia (14.1) a potențialului din jurul cercului; vom avea:

$$(14.54) \quad z_g \Gamma = \int_C z df = \int_K \left(\zeta + \frac{q^2}{\zeta} + \dots \right) \left(-V_0 e^{i\alpha} + \frac{V_0 a e^{-i\alpha}}{(\zeta - v)^2} - \frac{i\Gamma}{2\pi} \frac{1}{\zeta - v} \right) d\zeta = \\ = 2\pi V_0 [(a^2 + q^2) \sin \alpha + i(a^2 - q^2) \cos \alpha] + \Gamma v,$$

și prin urmare, observând că axa de portanță nulă face unghiul τ cu Ox (axa de construcție), deci $\Gamma = 4\pi a V_0 \sin(\alpha + \tau)^*$, se poate scrie în cele

* Această ipoteză nu este valabilă decât pentru aripa izolată. Dacă se ține seama de influența aripei vecine în cazul biplanului, trebuie adăugat încă un termen datorit acestei influențe. Dacă aripile sunt subțiri și incidențele sunt egale, acțiunea reciprocă se traduce printr'o circulație suplimentară proporțională cu unghiul de incidență și concluziile sunt ca și cele pe care le vom găsi mai jos.

din urmă, în raport cu un sistem $Mx'y'$, trecând prin origine,

$$(14.55) \quad z'_g = z_g - v = \frac{1}{2} \left[\left(a + \frac{q^2}{a} \right) \frac{\sin \alpha}{\sin(\alpha + \tau)} + i \left(a - \frac{q^2}{a} \right) \frac{\cos \alpha}{\sin(\alpha + \tau)} \right],$$

de unde se vede că locul geometric al circulației este o dreaptă. Astfel, de exemplu punând, după (14.13),

$$(14.56) \quad a + \frac{q^2}{a} \approx 2l, \quad a - \frac{q^2}{a} \approx 2l \left(\mu + \frac{\kappa}{2} \right),$$

coordonatele centrului de greutate vor fi date de următoarele expresii:

$$(14.57) \quad \frac{x'_g}{l} = \frac{\sin \alpha}{\sin(\alpha + \tau)} \approx \frac{\alpha}{\alpha + \tau}, \quad \frac{y'_g}{l} = \left(\mu + \frac{\kappa}{2} \right) \frac{\cos \alpha}{\sin(\alpha + \tau)} \approx \frac{\mu + \frac{\kappa}{2}}{\alpha + \tau}.$$

Se poate elimina α , înmulțind prima ecuație cu $\cos \tau$, a doua cu $\sin \tau$ și adunând rezultatele

$$(14.58) \quad \frac{x'_g}{l} \cos \tau + \frac{y'_g}{l} \frac{\sin \tau}{\mu + \frac{\kappa}{2}} = 1.$$

Această dreaptă este a treia axă a profilului.

Grosimea și momentul la portanță nulă fiind considerați foarte mici după ipoteza făcută $\left(\mu + \frac{\kappa}{2} \approx 0, C_{m_0} = -\frac{\pi}{2} \tau \approx 0 \right)$, vom găsi:

$$(14.59) \quad x'_g \approx l = \frac{c}{4}, \quad x_g = \frac{c}{4} (1 - \mu).$$

Prin urmare, acțiunea aripei active este echivalentă cu un vârtej așezat aproximativ la un sfert din aripă (focarul profilului)*. Acest rezultat simplifică considerabil problema și calculele.

14.4.2. Determinarea circulației în jurul fiecărei aripi. Ca și în cazul precedent, problema constă în găsirea viteselor verticale din punctele B_1 și B_2 și în calculul circulațiilor după formulele (14.24) și (14.41).

Noua poziție a vârtejurii ce înlocuiește aripa nu schimbă nimic din aceste formule, însă, în loc de decalajul s care intră în expresiile K și κ ale aripei inferioare sau Λ și λ ale aripei superioare, se va pune s_2 , respectiv s_1 , definiți prin următoarele relații (fig. 14.4):

$$(14.60) \quad s_2 = s + \frac{c_1}{4}, \quad s_1 = s - \frac{c_2}{4}.$$

*) Dacă se ține seama de influența reciprocă, poziția centrului de greutate este puțin diferită, în funcție de această influență.

Vom obține astfel noi expresii K' , κ' în loc de (14.26) și Λ' , λ' în loc de (14.42), care vor fi introduse în primele două formule din (14.46), pentru a obține în cele din urmă următoarele relații:

(14.61)

$$\begin{aligned} \gamma_{12} &= \frac{c_2 \cos \lambda'}{2 \Lambda'} = \\ &= \frac{c_2}{2} \frac{\frac{c_1}{4} - \left(s - \frac{c_2}{4} \right) \left(1 - \frac{c_1^2}{16h^2 + (4s - c_2)^2} \right)}{\left[\frac{c_1}{4} - \left(s - \frac{c_2}{4} \right) \left(1 - \frac{c_2^2}{16h^2 + (4s - c_2)^2} \right) \right]^2 + h^2 \left(1 + \frac{c_1^2}{16h^2 + (4s - c_2)^2} \right)^2} \\ \gamma_{21} &= \frac{c_1 \cos \kappa'}{2 K'} = \\ &= \frac{c_1}{2} \frac{\frac{c_2}{4} + \left(s + \frac{c_1}{4} \right) \left(1 - \frac{c_2^2}{16h^2 + (4s + c_1)^2} \right)}{\left[\frac{c_2}{4} + \left(s + \frac{c_1}{4} \right) \left(1 - \frac{c_2^2}{16h^2 + (4s + c_1)^2} \right) \right]^2 + h^2 \left(1 + \frac{c_2^2}{16h^2 + (4s + c_1)^2} \right)^2}. \end{aligned}$$

Pentru biplanele obișnuite (h este de același ordin de mărime cu c), aceste formule pot fi simplificate, reducând termenii de ordinul al doilea.

Pentru a găsi circulațiile Γ_1 și Γ_2 , vom observa mai întâi că

$$i_{12} = i_{21} = e_{12} = e_{21} = 0$$

și formulele devin:

$$(14.62) \quad \frac{\Gamma_1}{k_1 c_1 V_0} = \frac{\alpha_1 - \gamma_{12} \alpha_2}{1 - \gamma_{12} \gamma_{21}}, \quad \frac{\Gamma_2}{k_2 c_2 V_0} = \frac{\alpha_2 - \gamma_{21} \alpha_1}{1 - \gamma_{12} \gamma_{21}}.$$

Este interesant de văzut acum, până la ce punct această metodă aproximativă ne reproduce scurgerea teoretică în jurul aripei influențate, stabilită anterior prin metoda riguroasă.

Să luăm pentru aceasta cazul biplanului cu aripi subțiri, fără decalaj ($s = 0$), fără interinclinație ($\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha$) și cu coarde egale ($c_1 = c_2 = c$). Admițând mai departe, pentru simplificare, $h = c$, se găsește, după (14.61), $\gamma_{12} = \gamma_{21} = 0,177$ și, prin aplicarea formulelor (14.62), se obține de asemenea $\Gamma_1 = \Gamma_2 = 0,85 \Gamma_m$, unde Γ_m este circulația monoplanului, având aceleași caracteristici geometrice. Din teoria riguroasă a biplanului suprapus se obține formula (13.44), care dă în cazul nostru, $\Gamma \approx 0,857 \Gamma_m$; de unde se vede că acordul este remarcabil, ceea ce ne va face să aplicăm mai târziu aceeași metodă pentru cazul biplanului de anvergură finită.

14.4.3. Interpretarea geometrică a rezultatelor: Curbura curenului. Analizând mai de aproape structura formulelor vom constata că acțiunea vârtejurii (ce înlocuiește aripa activă), care se exercită pe aripa influențată,

se manifestă printr'un unghi indus, ale cărui valori în dreptul fiecărei aripi vor fi date de formulele următoare :

$$(14.63) \quad \varphi'_{12} = \gamma_{12} \frac{\Gamma_2}{k_2 c_2 V_0}, \quad \varphi'_{21} = \gamma_{21} \frac{\Gamma_1}{k_1 c_1 V_0}.$$

Putem obține aproximativ aceleași rezultate pe o altă cale, directă, interpretând în mod geometric condițiile de scurgere din jurul aripei perturbate de prezența celeilalte.

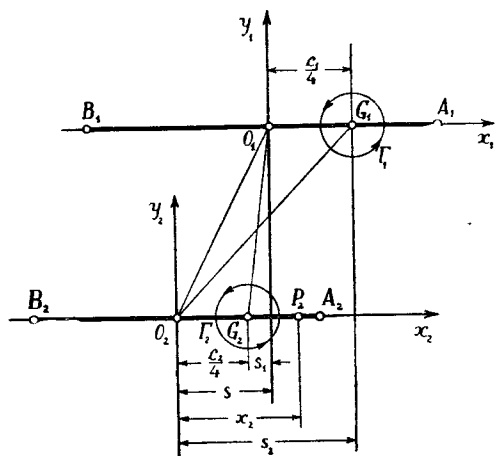


Fig. 14.4.

Fie, într'adevăr, v_{21} componenta verticală (după axa ordonatelor) a vitezei induse într'un punct $P_2(x_2)$ al aripei influențate (2), datorită vârtejului Γ_1 al aripii active (1), așezat la un sfert din coardă începând dela bordul de atac al profilului (fig. 14.4); vom putea scrie

$$(14.64) \quad v_{21} = \frac{\Gamma_1}{2\pi} \frac{x_2 - s - \frac{c_1}{4}}{h^2 + \left(x_2 - s - \frac{c_1}{4}\right)^2}$$

iar variația sa dealungul coardei :

$$(14.65) \quad \frac{dv_{21}}{dx_2} = \frac{\Gamma_1}{2\pi} \frac{h^2 - \left(x_2 - s - \frac{c_1}{4}\right)^2}{\left[h^2 + \left(x_2 - s - \frac{c_1}{4}\right)^2\right]^2}.$$

Ca urmare, curentul rectiliniu V_0 suferă o curbura ρ_2 ; între două puncte P_1 și P_2 variația vitezei verticale se deduce ușor, din fig. 14.5 :

$$(14.66) \quad dv_{21} = V_0 d\theta = \frac{ds_2}{\rho_2} V_0 \approx dx_2 \frac{V_0}{\rho_2},$$

de unde rezultă inversul razei de curbura :

$$(14.67) \quad \frac{1}{\rho_2} = \frac{1}{V_0} \frac{dv_{21}}{dx_2} = \frac{\Gamma_1}{2\pi V_0} \frac{h^2 - \left(x_2 - s - \frac{c_1}{4}\right)^2}{\left[h^2 + \left(x_2 - s - \frac{c_1}{4}\right)^2\right]^2}.$$

În $O_2 (x_2 = 0)$, în centrul aripei (2), avem :

(14.67 bis)

$$\frac{1}{\rho_2} = \frac{\Gamma_1}{2\pi V_0} \frac{h^2 - \left(s + \frac{c_1}{4}\right)^2}{\left[h^2 + \left(s + \frac{c_1}{4}\right)^2\right]^2}.$$

Dacă aripa ar avea o astfel de curbura, în lipsa oricărei alte incidențe, portanța ar fi nulă. Fiind dreaptă, aripa suferă efectul unei curburii inverse față de curentul curbat; rezultă deci o diminuare a unghiului de incidență a cărui valoare, după (6.15), notând prin t_2 săgeata unei astfel de aripi curbate, va fi

$$(14.68) \quad \tau_{21} = \frac{2t_2}{c_2} = \frac{c_2}{4\rho_2} = \frac{\Gamma_1 c_2}{8\pi V_0} \frac{h^2 - \left(s + \frac{c_1}{4}\right)^2}{\left[h^2 + \left(s + \frac{c_1}{4}\right)^2\right]^2}.$$

În mod analog, se găsește pentru planul superior (1) :

$$(14.69) \quad \tau_{12} = \frac{2t_1}{c_1} = \frac{c_1}{4\rho_1} = \frac{\Gamma_2 c_1}{8\pi V_0} \frac{h^2 - \left(\frac{c_1}{4} - s\right)^2}{\left[h^2 + \left(\frac{c_1}{4} - s\right)^2\right]^2}.$$

Însă direcția medie a curentului este orizontală și trebuie să corespundă cu tangenta la profil, în centrul său aerodinamic, în G_2 de exemplu (fig. 14.6), în așa fel încât, curentul curbat să nu acționeze asupra aripei, dacă ea este cabrată de un unghi ε_{21} , care va face să corespundă această tangentă cu direcția curentului. Este ușor de văzut că ε_{21} va fi dat de următoarea expresie :

$$(14.70) \quad \varepsilon_{21} = \left(\frac{c_2}{2} - d_2\right) \frac{1}{\rho_2} = \left(\frac{c_2}{2} - d_2\right) \frac{\Gamma_1}{2\pi V_0} \frac{h^2 - \left(s + \frac{c_1}{4}\right)^2}{\left[h^2 + \left(s + \frac{c_1}{4}\right)^2\right]^2},$$

unde d_2 este distanța dela centrul aerodinamic la bordul de atac.

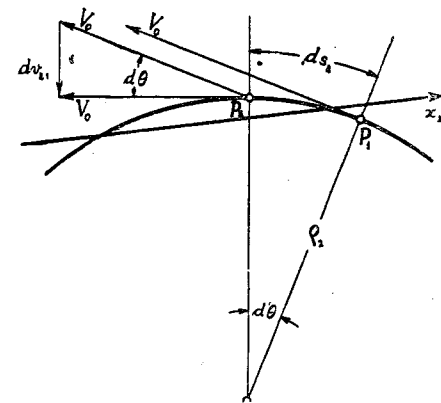


Fig. 14.5.

Deoarece aripa este dreaptă, aceasta corespunde la o altă scădere de incidență egală cu ε_{21} . În cele din urmă, scăderea totală a incidenței va fi

$$(14.71) \quad \varphi_{21} = \tau_{21} + \varepsilon_{21} = \left(3 - 4 \frac{d_2}{c_2}\right) \frac{\Gamma_1 c_2}{8\pi V_0} \frac{h^2 - \left(s + \frac{c_1}{4}\right)^2}{\left[h^2 + \left(s + \frac{c_1}{4}\right)^2\right]^2}$$

În mod analog, se stabilește unghiul indus φ_{12} al aripei superioare (1), datorit aripei inferioare (2):

$$(14.72) \quad \varphi_{12} = \tau_{12} + \varepsilon_{12} = \left(3 - 4 \frac{d_1}{c_1}\right) \frac{\Gamma_2 c_1}{8\pi V_0} \frac{h^2 - \left(\frac{c_1}{4} - s\right)^2}{\left[h^2 + \left(\frac{c_1}{4} - s\right)^2\right]^2}$$

Dacă G_2 , respectiv G_1 , este centrul de împingere, avem din formula care ne dă momentul unitar față de bordul de atac:

$$(14.73) \quad C_{m_2} = \frac{d_2}{c_2} C_{z_2} = C_{m_{02}} + \frac{1}{4} C_{z_2}, \quad C_{m_1} = \frac{d_1}{c_1} C_{z_1} = \\ = C_{m_{01}} + \frac{1}{4} C_{z_1}.$$

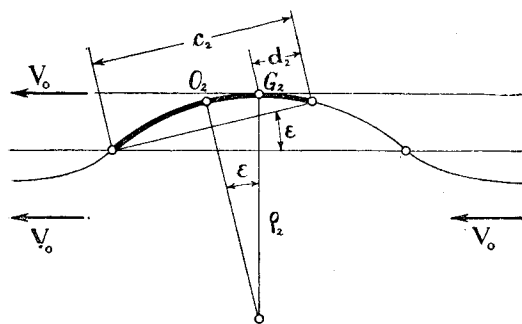


Fig. 14.6.

Pentru profilele stabile, cu centrul de împingere invariabil, vom avea $C_{m_{01}} = C_{m_{02}} = 0$ și prin urmare $\frac{d_1}{c_1} = \frac{d_2}{c_2} = \frac{1}{4}$. Considerând această ipoteză, care este foarte aproape de realitate pentru profilele moderne, neglijând decalajul s și presupunând că înălțimea h este destul de mare față de $\frac{c_1}{4}$, se obțin:

$$(14.74) \quad \varphi_{12} \approx \frac{\Gamma_2}{4\pi V_0} \frac{c_1}{h^2}, \quad \varphi_{21} \approx \frac{\Gamma_1}{4\pi V_0} \frac{c_2}{h^2}$$

Aceste formule sunt comparabile cu cele găsite mai înainte (14.63), dacă aducem aceleași simplificări; astfel, de exemplu, dacă înălțimea este

destul de mare și decalajul este relativ neglijabil, expresiile (14.61) devin respectiv,

$$(14.75) \quad \gamma_{12} = \frac{1}{8} \frac{c_2 (c_1 + c_2)}{\left(\frac{c_1 + c_2}{4}\right)^2 + h^2} \approx \frac{c_2 (c_1 + c_2)}{8 h^2},$$

$$\gamma_{21} = \frac{1}{8} \frac{c_1 (c_1 + c_2)}{\left(\frac{c_1 + c_2}{4}\right)^2 + h^2} \approx \frac{c_1 (c_1 + c_2)}{8 h^2},$$

de unde rezultă, punând π în loc de k_1 și k_2 :

$$(14.76) \quad \varphi'_{12} \approx \frac{\Gamma_2}{8\pi V_0} \frac{c_1 + c_2}{h^2}, \quad \varphi'_{21} \approx \frac{\Gamma_1}{8\pi V_0} \frac{c_1 + c_2}{h^2}.$$

Admițând că c_1 și c_2 sunt de același ordin de mărime, aceste expresii sunt asemănătoare celor stabilite prin metoda aproximativă a curburii curentului: ceea ce justifică folosirea acestei metode de către unii autori.

14.5. Forțe și momente pe aripile biplanului

După ce am înlocuit aripa activă (1) prin sistemul vârtej-dublet așezat în centrul aripei (O_1), trebuie să stabilim mișcarea în jurul aripei influențate (2) și pe urmă să calculăm presiunile de pe contur și rezultanta aerodinamică. În acest scop, vom aplica transformarea inversă (14.12) pentru a reveni în planul cercului generator.

În acest plan, scurgerea este datorită curentului general V_0 , circulației Γ_2 și sistemului de singularități sus menționate așezate în Ω_1 , omologul punctului O_1 . Imaginea unui vârtej sau a unui dublet față de un cerc este o problemă cunoscută (§ 3.2 și § 3.3): potențialul în jurul cercului va fi deci ușor de stabilit. Pe urmă, prin aplicarea formulilor lui BLASIUS-CIAPLĂGHIN, vom deduce rezultanta aerodinamică și momentul resultant.

Calculul este totuși extrem de grele și problema astfel tratată este lipsită, de altfel, de interes practic.

Din această cauză este preferabil să revenim la metoda sistemului vârtej-dublet așezat în centru, după cum am indicat mai sus. Prin această metodă, problema nu este mai puțin grea, însă e susceptibilă de a fi încă simplificată.

14.5.1. Calculul forțelor. În afară de curentul general, sistemul vârtej-dublet al aripei superioare (1) induce în dreptul aripei inferioare (2) un câmp de viteze, care va fi dat de următoarea expresie (fig. 14.7):

$$(14.77) \quad w_{21} = -\frac{i\Gamma}{2\pi} \frac{1}{z_2 - De^{i(\delta_2 + \alpha_2)}} + \frac{p'_1 - iq'_1}{(z_2 - De^{i(\delta_2 + \alpha_2)})^2}$$

unde axa absciselor aparținând sistemului de referință $O_2x_2y_2$ este paralelă cu viteza generală. În origine ($z_2 = 0$) această viteză devine

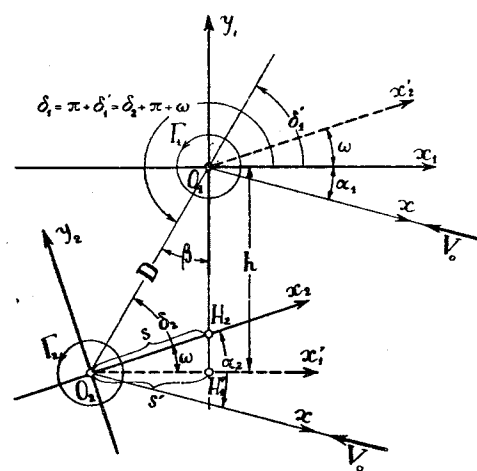


Fig. 14.7.

În mod analog se va stabili viteza w_{12} din dreptul aripei (1), în O_1 , datorită aripei (2):

$$(14.79) \quad w_{12} = u_{12} - iv_{12} = -\frac{\Gamma_2}{2\pi D} \sin(\delta'_1 + \alpha_1) + \frac{p'_2}{D^2} \cos 2(\delta'_1 + \alpha_1) - \frac{q'_2}{D^2} \sin 2(\delta'_1 + \alpha) - i \left[\frac{\Gamma_2}{2\pi D} \cos(\delta'_1 + \alpha_1) + \frac{p'_2}{D^2} \sin 2(\delta'_1 + \alpha_1) + \frac{q'_2}{D^2} \cos 2(\delta'_1 + \alpha_1) \right].$$

Trebuie observat că p'_1, p'_2, q'_1, q'_2 nu conțin factorul $\frac{d\zeta_1}{dz_1}$ respectiv $\frac{d\zeta_2}{dz_2}$.

Să punem

$$(14.80) \quad \delta'_1 + \alpha_1 = \delta_2 + \alpha_2 = \delta_2 + \omega + \alpha_1 = \delta$$

și să neglijăm, pe de altă parte, decalajul în ceea ce privește termenii datorți dubletului; se poate scrie în cele din urmă pentru incidențele mici:

$$(14.81) \quad \begin{cases} u_{12} - iv_{12} = -\frac{\Gamma_2}{2\pi D} \sin \delta - \frac{p_2}{D^2} - i \left(\frac{\Gamma_2}{2\pi D} \cos \delta - \frac{q_2}{D^2} \right) \\ u_{21} - iv_{21} = \frac{\Gamma_1}{2\pi D} \sin \delta - \frac{p_1}{D^2} - i \left(-\frac{\Gamma_2}{2\pi D} \cos \delta - \frac{q_1}{D^2} \right) \end{cases}$$

$$(14.78) \quad w_{21} = u_{21} - iv_{21} = \frac{\Gamma_1}{2\pi D} \sin(\delta_2 + \alpha_2) + \frac{p'_1}{D^2} \cos 2(\delta_2 + \alpha_2) - \frac{q'_1}{D^2} \sin 2(\delta_2 + \alpha_2) - i \left[-\frac{\Gamma_1}{2\pi D} \cos(\delta_2 + \alpha_2) + \frac{p'_1}{D^2} \sin 2(\delta_2 + \alpha_2) + \frac{q'_1}{D^2} \cos 2(\delta_2 + \alpha_2) \right].$$

Ca de obicei, am însemnat prin D distanța $\overline{O_1O_2} = \sqrt{h^2 + s^2}$.

Se deduce pentru portanță, ținând seama de acțiunea reciprocă între vârtejul unei aripi și dubletul celeilalte,

$$(14.82) \quad \begin{cases} P_1 = \rho V_0 \Gamma_1 \left(1 + \frac{\Gamma_2}{2\pi V_0} \frac{\sin \delta}{D} \right) + \rho \frac{\Gamma_1 p_2 - \Gamma_2 p_1}{D^2}, \\ P_2 = \rho V_0 \Gamma_2 \left(1 - \frac{\Gamma_1}{2\pi V_0} \frac{\sin \delta}{D} \right) - \rho \frac{\Gamma_1 p_2 - \Gamma_2 p_1}{D^2}, \end{cases}$$

de unde rezultă:

$$(14.83) \quad P = P_1 + P_2 = \rho V_0 (\Gamma_1 + \Gamma_2).$$

Pentru rezistența la înaintare, se obține deasemenea, indicând prin R_{01} și R_{02} rezistențele de formă ale fiecărei aripi,

$$(14.84) \quad \begin{aligned} R_1 &= -R_{01} + \rho \frac{\Gamma_1 \Gamma_2}{2\pi D} \cos \delta - \rho \frac{\Gamma_1 q_2 - \Gamma_2 q_1}{D^2}, \\ R_2 &= -R_{02} - \rho \frac{\Gamma_1 \Gamma_2}{2\pi D} \cos \delta + \rho \frac{\Gamma_1 q_2 - \Gamma_2 q_1}{D^2}. \end{aligned}$$

de unde deducem

$$(14.85) \quad R = R_1 + R_2 = -R_{01} - R_{02},$$

rezultat la care trebuia să ne așteptăm.

Să înlocuim δ prin $\delta'_1 + \alpha_1$, respectiv $\delta_2 + \alpha_2$, după (14.80), și să observăm că incidența α_1 este mică; vom avea

$$(14.86) \quad \begin{cases} \frac{\sin \delta}{D} = \frac{D \sin \delta}{D^2} \approx \frac{h + \alpha_1 s}{D^2} \approx \frac{\overline{O_1 H_2} + \alpha_2 s}{D^2}, \\ \frac{\cos \delta}{D} = \frac{D \cos \delta}{D^2} \approx \frac{s - \alpha_1 h}{D^2} \approx \frac{s - \alpha_2 \cdot \overline{O_1 H_2}}{D^2}. \end{cases}$$

Aceste expresii vor fi înlocuite în (14.82) și (14.84).

Dacă aripile sunt subțiri ($p_1 = p_2 \approx 0$), se vede din (14.48) și (14.50) că circulația depinde numai de incidență și va fi determinată cu ajutorul formulilor (14.50) sau încă, mai simplu, va fi scoasă din formulele (14.62). În acest caz, Γ_1 și Γ_2 nu diferă decât foarte puțin și al treilea termen al rezistenței (14.84) precum și al doilea termen al portanței (14.82) sunt nuli.

Pentru interplanele curențe ($\frac{2}{3} < \frac{h}{c} < \frac{3}{2}$), coeficienții e_{12} , e_{21} (14.46) devin mici și termenii circulației datorți grosimii devin deasemenea neglijabili.

Pentru aripile groase și pentru interplanele mici ($h < 0,6 c$), este necesar de ținut seama de termenii datorți influenței grosimii, pe care îi vom pune totuși sub o formă curentă mai accesibilă.

Să revenim pentru aceasta la expresiile (14.50) ale circulației și să punem $\alpha_2 = \alpha_1 + \omega$ în prima formulă și $\alpha_1 = \alpha_2 - \omega$ în a doua. Se va putea scrie

$$(14.87) \quad \frac{\Gamma_1}{k_1 c_1 V_0} = A_1 (\alpha_1 - \tau_1) = A_1 \alpha'_1, \quad \frac{\Gamma_2}{k_1 c_1 V_0} = A_2 (\alpha_2 + \tau_2) = A_2 \alpha'_2$$

unde A_1 și A_2 vor fi dați de relațiile

$$(14.88) \quad A_1 = \frac{1 - g_{12} (1 + i_{21}) + i_{12}}{1 - g_{12} g_{21}}, \quad A_2 = \frac{1 - g_{21} (1 + i_{12}) + i_{21}}{1 - g_{12} g_{21}}$$

iar τ_1 și τ_2 , pe care îi vom numi unghiuri de circulație nulă, vor fi dați de expresiile:

$$(14.89) \quad \begin{cases} \tau_1 = \frac{e_{12} \eta_2 \varepsilon_{m_2} + g_{12} e_{21} \eta_1 \varepsilon_{m_1} - (i_{12} - g_{12}) \omega}{1 - g_{12} (1 + i_{21}) + i_{12}}, \\ \tau_2 = \frac{e_{21} \eta_1 \varepsilon_{m_1} + g_{21} e_{12} \eta_2 \varepsilon_{m_2} - (i_{21} - g_{21}) \omega}{1 - g_{21} (1 + i_{12}) + i_{21}}. \end{cases}$$

Dacă introducem aceste relații în formulele portanței (14.82) și ale rezistenței (14.84), punând pentru termenii secundari $k_1 = k_2 = \pi$, vom obține următoarele expresii pentru coeficienții unitari:

$$(14.90) \quad \begin{cases} C_{z_1} = 2k_1 A_1 \left(1 + \frac{\sin \delta}{2} \frac{c_2}{D} A_2 \alpha'_2 \right) \alpha'_1 + \\ \quad + \frac{\pi}{4} \left[\frac{c_2^2}{D^2} \eta_2 \varepsilon_{m_2} A_1 \alpha'_1 - \frac{c_1 c_2}{D^2} \eta_1 \varepsilon_{m_1} A_2 \alpha'_2 \right], \\ C_{z_2} = 2k_2 A_2 \left(1 - \frac{\sin \delta}{2} \frac{c_1}{D} A_1 \alpha'_1 \right) \alpha'_2 + \\ \quad + \frac{\pi}{4} \left[\frac{c_1 c_2}{D^2} \eta_2 \varepsilon_{m_1} A_1 \alpha'_1 - \frac{c_1^2}{D^2} \eta_1 \varepsilon_{m_1} A_2 \alpha'_2 \right] \end{cases}$$

pentru portanță și

$$(14.91) \quad \begin{cases} C_{x_1} = C_{x_{01}} + \pi A_1 A_2 \frac{c_2}{D} \cos \delta \alpha'_1 \alpha'_2 - \\ \quad - \frac{\pi}{4} \left(A_1 \frac{c_2^2}{D^2} \alpha'_1 \alpha_2 - A_2 \frac{c_1 c_2}{D} \alpha'_2 \alpha_1 \right), \\ C_{x_2} = C_{x_{02}} - \pi A_1 A_2 \frac{c_1}{D^2} \cos \delta \alpha'_1 \alpha'_2 + \\ \quad + \frac{\pi}{4} \left(A_1 \frac{c_1 c_2}{D^2} \alpha'_1 \alpha_2 - A_2 \frac{c_1^2}{D^2} \alpha'_2 \alpha_1 \right) \end{cases}$$

pentru rezistență.

Aceste formule pot fi simplificate. Astfel de exemplu, pentru biplanul cu aripi egale, fără decalaj, fără interinclinație, vom avea:

$$(14.92) \quad \begin{cases} c_1 = c_2 = c, \quad \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha, \quad \eta_1 = \eta_2 = \eta, \quad \varepsilon_{m_1} = \varepsilon_{m_2} = \varepsilon_m, \\ \Lambda^2 = K^2 = \frac{c^2}{16} + h^2 \left(1 + \frac{c^2}{16 h^2} \right), \quad \operatorname{tg} \lambda = \operatorname{tg} \kappa = 4 \frac{h}{c} \left(1 + \frac{c^2}{16 h^2} \right), \\ g_{12} = g_{21} = g = \frac{c \cos \lambda}{2 \Lambda}, \quad e_{12} = e_{21} = e = \frac{1}{8} \frac{c^2}{1 + \frac{1}{16} \frac{c^2}{h^2}} \frac{\sin 2\lambda}{\lambda^2}, \\ i_{12} = i_{21} = i = \frac{1}{8} \frac{c^2}{1 + \frac{1}{16} \frac{c^2}{h^2}} \frac{\cos^2 \lambda}{\Lambda^2}, \\ A_1 = A_2 = A = \frac{1 - g (1 + i) + i}{1 - g^2} = \frac{1 + i}{1 + g}, \\ \tau_1 = \tau_2 = \tau = \frac{(1 + g) e \eta \varepsilon_m}{(1 - g) (1 + i)}, \quad \alpha'_1 = \alpha - \tau, \quad \alpha'_2 = \alpha + \tau, \end{cases}$$

de unde rezultă

$$(14.93) \quad \begin{cases} C_{z_1} = 2kA \left[\left(1 + \frac{1}{2} \frac{c}{h} A (\alpha + \tau) \right) (\alpha - \tau) - \frac{1}{4} \frac{c^2}{h^2} \eta \varepsilon_m \tau \right], \\ C_{z_2} = 2kA \left[\left(1 - \frac{1}{2} \frac{c}{h} A (\alpha - \tau) \right) (\alpha + \tau) + \frac{1}{4} \frac{c^2}{h^2} \eta \varepsilon_m \tau \right], \end{cases}$$

pentru portanța unitară și

$$(14.94) \quad \begin{cases} C_{x_1} = C_{x_0} + \frac{\pi}{2} A \frac{c^2}{h^2} \tau \alpha, \\ C_{x_2} = C_{x_0} - \frac{\pi}{2} A \frac{c^2}{h^2} \tau \alpha, \end{cases}$$

pentru rezistența unitară.

14.5.2. Calculul momentelor. Stabilirea scurgerii potențiale în jurul aripei influențate este foarte grea; aplicarea formulilor teoretice în calculul momentelor devine încă mai dificilă și complicată. Metoda aproximativă bazată pe curbura curentului nu este în bun acord cu experiența, care arată mai degrabă o neînsemnată variație a momentului la portanță nulă și o deplasare insensibilă a centrului de împingere. Astfel că se poate considera fără prea mare eroare, același moment ca și pentru aripa izolată.

BIBLIOGRAFIA CAP. III

- 1) *BETZ A.*: Berechnung der Luftkräfte auf eine Doppeldeckerzelle aus den, entsprechenden Werten für Eindeckertragflächen, Technische Berichte, I. 1926.
- 2) *CEAPLĂGHIN S.A.*: Teoria schematică a aripei segmentate, Culegere de opere, vol. II, 1933.
- 3) *DUPONT*: Théorie du biplan indéfini. Comptes Rendus du III e Congrès International de Mécanique Appliquée, Stockholm 1930.
- 4) *FERRARI*: Sulla determinazione delle caratteristiche aerodinamiche di un biplano indefinito costituito da due profile alari dati. Memorie della R. Acc. delle Scienze di Torino, 1931.
- 5) *GOLUBEV V.V.*: Cercetări in domeniul teoriei aripei segmentate, partea I-a, Lucrările TAGHI, Nr. 147, 1933; partea II-a, TAGHI, Nr. 306, 1937.
- 6) *GOLUBEV V.V.*: Scurgerea în jurul unui cilindru în prezența unui sistem de vârtejuri fixe. Scrieri științifice, MGU. vol. VII, 1937.
- 7) *MILLIKAN C.B.*: An Extended Theory of Thin Airofoils and its Application to the Biplane Problem, Nat. Advis Comm. for Aeronautics (Washington) Rep. Nr. 326 (1930).
- 8) *PISTOLESI E.*: Aerodinamica, Unione Tipografico-Editrice, Torinese, Torino, 1942.
- 9) *SAHARNAIN F.*: Scurgerea fără cavitații în jurul unui sistem format de două arce de formă dată, Buletinul de Matematică și Mecanică Aplicată, Institutul de Mecanică, Academia de Științe U.R.S.S. t. 5III, B. 4, 1949.
- 10) *TOUSSAINT A.*: Théorie approchée des cellules sustentatrices biplanes d'envergure infinie. Publications scientifiques et techniques du Ministère de l'Air, Nr. 53, Gauthier-Villars, Paris 1934

CAPITOLUL IV

TEORIA ARIPILOR MONOPLANE
DE ANVERGURĂ FINITĂ

Am considerat până în prezent o aripă cilindrică nelimitată, a cărei mișcare după o direcție normală pe generatoarele sale dă naștere unei scurgeri plan paralele. Această ipoteză este o pură ficțiune, căci în realitate aripile nu sunt nici cilindrice, nici nelimitate: ele sunt de anvergură limitată, iar profilele variază pe de altă parte, dela o secțiune la alta. Aceste secțiuni sunt paralele cu planul median, normal pe generatoarele părții centrale ale aripii; aceasta este în general simetrică și prin urmare planul median este un plan de simetrie.

Scurgerea care ia naștere în jurul aripii este o mișcare în trei dimensiuni, a cărei abatere dela mișcarea plană depinde de extremitățile aripii precum și de profilele corespunzătoare fiecărei secțiuni în parte.

Problema astfel concepută n'ar putea fi rezolvată cu mijloacele pe care le avem astăzi; de aceea, este necesar să facem ipoteze simplificatoare, care vor reduce problema la cazurile simple pe care le-am studiat. Tocmai acest lucru îl vom face în cele ce urmează.

15. CONDIȚIILE DE MIȘCARE IN JURUL UNEI ARIPI DE ANVERGURĂ
FINITĂ (TEORIA LUI PRANDTL)

15.1. Vârtejuri libere și vârtejuri legate

Să imaginăm mai întâi o porțiune de aripă de anvergură infinită; susținută rezultă din suprapresiunile care se exercită pe intrados și din depresiunile care se exercită pe extradados (fig. 15.1) Același fenomen apare și pe aripa de anvergură finită, însă extremitățile fiind libere, suprapresiunea dela intrados alungă particulele fluide către depresiunea dela extradados și astfel ia naștere un curent paralel cu anvergura, din centru spre extremități, la intrados și dela extremități spre centru, la extradados (fig. 15.2). Acest curent persistă departe în spatele aripii și se formează astfel o pânză plană de grosime foarte redusă prin care viteza trece dela $+v$ pe fața inferioară, la $-v$, pe fața superioară. Am văzut în primul

capitol al acestei lucrări (§ 2.3, fig. 2.6) că se poate înlocui această suprafață de discontinuitate printr'un strat de vârtejuri, paralel cu direcția curentului general.

Prin urmare, în dosul aripii apare un sistem de vârtejuri, paralel cu viteza generală, în formă de șuvițe nelimitate libere, care se desprind de la bordul de fugă al aripii și se întind în aval, până la infinit. După legile vârtejurilor, aceste fileuri de vârtej nu rămân izolate, ci se leagă între ele prin vârtejurile localizate pe aripă, care sunt denumite din această cauză vârtejuri legate.

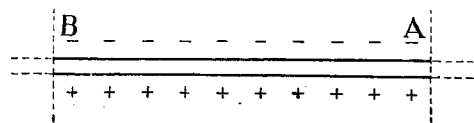


Fig. 15.1.

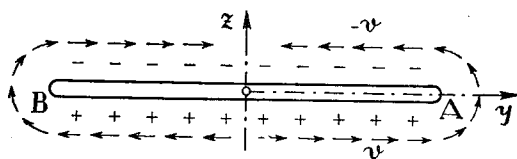


Fig. 15.2.

Intr'adevăr, am văzut că pereții aripii ar putea fi suprimați, cu condiția de a fi înlocuiți printr'un strat de vârtejuri obligați să păstreze întotdeauna aceeași poziție (§ 2.3). Fie o secțiune de aripă paralelă cu direcția generală a curentului (fig. 15.3); se poate presupune că vitezele sunt conținute aproximativ în această secțiune, dacă neglijăm bine înțeles curentul transversal, despre care am vorbit mai sus și a cărui valoare este foarte mică față de curentul general. Să presupunem mai departe că în interiorul aripii este acelaș fluid, însă în repaus, care comunică cu exteriorul printr'o fisură practică în punctul de viteză nulă A. Presiunea din interior corespunde prin urmare cu cea din punctul A[14].

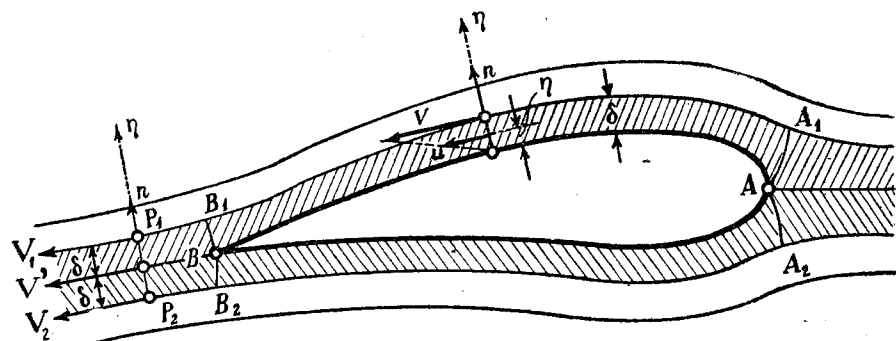


Fig. 15.3.

Insemnând prin p'_0 și V_0 presiunea și curentul la infinit, prin p_A presiunea din A, unde viteza este nulă, și prin p și V presiunea și viteza

intr'un punct oarecare, dacă facem abstracție de forțele exterioare care sunt neglijabile, formula lui BERNOULLI se va scrie :

$$(15.1) \quad p + \frac{\rho}{2} V^2 = p_0 + \frac{\rho}{2} V_0^2 = p_A = ct.$$

Mișcarea fiind irotațională în tot domeniul exterior aripii, constanta lui BERNOULLI este aceeași peste tot.

Suprimând pereții, aceștia vor fi înlocuiți printr'un strat de vârtejuri AA_1B_1B și AA_2B_2B de grosime δ , astfel încât pe suprafața exterioară, pe A_1B_1 și A_2B_2 , viteza V să fie cea potențială, iar pe suprafața interioară AB viteza să fie nulă. Fețele exterioare ale stratului sunt linii de curent care se prelungesc dincolo de punctele A_1A_2 , la infinit amonte, și dincolo de punctele B_1B_2 la infinit aval. Acest strat este obligat să-și păstreze poziția deci este supus unor forțe exterioare care țin în echilibru diferența de presiune dintre cele două fețe.

Prin suprimarea pereților, spațiul devine simplu conex și putem aplica ecuațiile mișcării pe toată întinderea, fără nici o restricție de frontieră datorită peretelui, cu condiția însă de a introduce forțe exterioare care să acționeze asupra stratului de vârtej, pentru ca acesta să-și poată menține aceeași poziție. Să însemnăm prin \bar{q} această forță exterioară raportată la unitatea de volum; ecuațiile mișcării trebuie să țină seama de această nouă forță și putem scrie în acest caz (2.35), notând prin \bar{u} viteza într'un punct oarecare al spațiului sau al stratului de vârtejuri,

$$(15.2) \quad \text{rot } \bar{u} \wedge \bar{u} + \text{grad} \left(P + \frac{u^2}{2} - U \right) = \frac{\bar{q}}{\rho}.$$

Am spus mai sus că constanta lui BERNOULLI este aceeași în tot domeniul din afara aripii. Ea are aceeași valoare în interiorul aripii, unde au loc condițiile punctului A, deci pe toată întinderea, fără nici o restricție, chiar în interiorul stratului de vârtejuri, unde, pe fața interioară, ea este egală cu p_A ($u = 0$), conform cu relația (15.1). Presiunea variază de la p_A la p , după o lege, care depinde de variația vitesei din stratul de vârtejuri. Acesta fiind foarte subțire, se poate admite o variație lineară a vitesei în funcție de înălțime (fig. 15.3):

$$(15.3) \quad \bar{u} = \frac{\eta}{\delta} \bar{V}.$$

Am presupus că forțele exterioare datorite greutateii sunt neglijabile ($U \approx 0$) și că fluidul este incompresibil ($\rho = ct.$); am văzut că în acest caz formula lui BERNOULLI se reduce la forma (15.1):

$$(15.4) \quad P + \frac{u^2}{2} - U = \frac{p}{\rho} + \frac{u^2}{2} = ct.$$

și ca urmare ecuația (15.2) devine :

$$(15.5) \quad \bar{q} = \rho (\text{rot } \bar{u}) \wedge \bar{u} = \rho \bar{\Omega} \wedge \bar{u},$$

unde s'a notat cu $\bar{\Omega}$, vectorul $\text{rot } \bar{u}$ pe care l-am numit tot **vârtej**, ca și pentru $\bar{\omega} = \frac{1}{2} \bar{\Omega}$, pentru a simplifica limbajul.

Din relația (15.3), însemnând prin \bar{n} vectorul unitar normal pe suprafața stratului, se scoate :

$$(15.6) \quad \text{rot } \bar{u} = \bar{\Omega} = \frac{\bar{n}}{\delta} \wedge \bar{V}, \quad \Omega = \frac{V}{\delta},$$

de unde se vede că vârtejul este constant pe toată înălțimea stratului, tangent la suprafață și normal pe viteza \bar{V} , deci aproximativ paralel cu direcția generală a anvergurii, dacă bine înțeles aripa este aproximativ dreaptă. Dacă se consideră înălțimea totală δ , intensitatea de vârtej pe unitatea de lungime a stratului va fi dată de :

$$(15.7) \quad \gamma = \Omega \times \delta = V.$$

Revenind la relația (15.5), se constată că forța pe unitatea de volum este normală pe \bar{u} și $\bar{\Omega}$, este prin urmare normală la suprafața profilului. Valoarea absolută este egală cu

$$(15.8) \quad q = \rho u \frac{V}{\delta}$$

și dacă se face integrarea pe toată înălțimea se obține forța pe unitatea de suprafață :

$$(15.9) \quad \int_0^{\delta} q d\eta = \rho \frac{V}{\delta} \int_0^{\delta} u d\eta = \frac{\rho}{2} V^2 = p_A - p,$$

care est egală, după cum era de așteptat, cu diferența de presiune ce se exercită pe cele două fețe ale stratului.

Dincolo de $B_1 B_2$, în aval, presiunile p_1 și p_2 sunt egale, pentru a realiza echilibrul, căci nu există nicio condiție care ar permite o variație de presiune. În condițiile generale de mișcare, se impune de altfel o presiune continuă în toate punctele înafara aripei. Urmează că vitezele V_1 și V_2 sunt egale și nu diferă decât prin orientările datorite viteselor transversale, v pe fața inferioară și $-v$ pe fața superioară (fig. 15.2). Proiectând aceste viteze pe un plan paralel cu aripa și cu curentul general și luând Oy (fig. 15.4) după direcția anvergurii, vitezele variază pe toată înălțimea stratului de vârtejuri libere dela \bar{V}_1 în P_1 , la \bar{V}_2 în P_2 , cu următoarele valori intermediare :

$$(15.10) \quad \bar{u} = \frac{\bar{V}_1 + \bar{V}_2}{2} + \frac{\eta}{\delta} \bar{v} = \bar{V} + \frac{\eta}{\delta} \bar{v},$$

de unde rezultă :

$$(15.11) \quad \bar{\Omega} = \text{rot } \bar{u} = \frac{\bar{n}}{\delta} \wedge \bar{v}, \quad \Omega = \frac{v}{\delta}.$$

Astfel deci, vârtejul liber, care se desprinde dela bordul de ieșire al aripii, este paralel cu direcția generală a curentului \bar{V} din punctele considerate (fig. 15.4).

Pe toată înălțimea vom avea :

$$(15.12) \quad \bar{\gamma} = 2\delta\bar{\Omega} = 2\bar{n} \wedge \bar{v}, \\ \gamma = 2\delta\Omega = 2v;$$

aceasta este intensitatea de vârtej pe unitatea de lungime transversală a pânzei de vârtejuri libere.

Rezultă în acelaș timp, după cum ne așteptam de altfel, că aceste vârtejuri libere nu sunt supuse la nicio forță exterioară. Intr'adevăr, luând două câte două, vârtejurile în punctele η_1 și $\eta_2 = -\eta_1$, vom avea succesiv :

$$(15.13) \quad \bar{q}_1 + \bar{q}_2 = \rho \bar{\Omega} \wedge (\bar{u}_1 + \bar{u}_2) = \\ = 2 \rho \bar{\Omega} \wedge \bar{V} = 0, \quad (\bar{\Omega} \parallel \bar{V}).$$

Se poate conchide în cele din urmă că aripa de anvergură finită este echivalentă cu două sisteme de vârtejuri : a) un sistem de vârtejuri legate, fie $\bar{\Omega}_a$, localizate pe suprafața superioară și inferioară a aripii, având o direcție aproximativ paralelă cu anvergura ; b) un sistem de vârtejuri libere, fie $\bar{\Omega}_l$, care se desprind dela bordul de ieșire și se întind paralel cu viteza generală a curentului, formând o pânză de vârtejuri până la infinit aval.

15.2. Rezultanta aerodinamică

Imaginea pe care ne-am făcut-o despre aripa de anvergură finită și rezultatele obținute mai sus ne permit să calculăm rezultanta presiunilor ce se exercită pe aripă.

Intr'adevăr, forța elementară care se exercită pe un element $d\tau$ de volum este $q d\tau$. Această forță elementară este egală și de semn contrar cu forța ce se exercită pe aripă. Forța totală, care este numită rezultanta aerodinamică, va fi prin urmare.

$$(15.14) \quad \bar{Q} = - \int_{\tau} \bar{q} d\tau = - \rho \int_{\tau} \bar{\Omega} \wedge \bar{u} d\tau,$$

unde integrala se extinde pe întregul volum τ de vârtejuri.

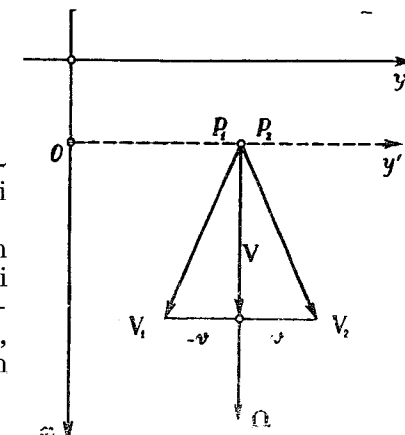


Fig. 15.4.

Însă această integrală este identic nulă pe volumul corespunzător vârtejurilor libere, încât expresia precedentă se reduce la :

$$(15.15) \quad \bar{Q} = -\rho \int_{\tau_a} \bar{\Omega}_a \wedge \bar{u} \, d\tau,$$

unde $\bar{\Omega}_a$ înseamnă vârtejul legat și τ_a reprezintă volumul ocupat de acesta.

Pentru a desvolta mai departe această integrală, să descompunem viteza \bar{u} în trei componente: prima, viteza \bar{V}_0 a curentului general, care este constantă, a doua, viteza \bar{w} indusă de sistemul de vârtejuri libere și a treia, viteza \bar{w}' datorită sistemului de vârtejuri legate; vom avea prin urmare

$$(15.16) \quad \bar{u} = \bar{V}_0 + \bar{w} + \bar{w}',$$

unde expresiile lui \bar{w} și \bar{w}' vor fi scoase din formula (2.21):

$$(15.17) \quad \bar{w}' = \frac{1}{4\pi} \int_{\tau_a} \frac{\bar{r} \wedge \bar{\Omega}_a}{r^3} \, d\tau, \quad \bar{w} = \frac{1}{4\pi} \int_{\tau_l} \frac{\bar{r} \wedge \bar{\Omega}_l}{r^3} \, d\tau.$$

Se găsește astfel pentru rezultantă expresia următoare :

$$(15.18) \quad \bar{Q} = \rho \bar{V}_0 \wedge \int_{\tau_a} \bar{\Omega}_a \, d\tau - \rho \int_{\tau_a} \bar{\Omega}_a \wedge \bar{w}' \, d\tau - \rho \int_{\tau_a} \bar{\Omega}_a \wedge \bar{w} \, d\tau,$$

sau încă :

$$(15.19) \quad \bar{Q} = \rho \bar{V}_0 \wedge \int_{\tau_a} \bar{\Omega}_a \, d\tau - \frac{\rho}{4\pi} \int_{\tau_a} \bar{\Omega}_a \, d\tau \wedge \int_{\tau_a} \frac{\bar{r} \wedge \bar{\Omega}_a}{r^3} \, d\tau - \frac{\rho}{4\pi} \int_{\tau_a} \bar{\Omega}_a \, d\tau \wedge \int_{\tau_l} \frac{\bar{r} \wedge \bar{\Omega}_l}{r^3} \, d\tau.$$

Prima integrală are o semnificație simplă. Să raportăm mai întâi aripa la un sistem de axe $Oxyz$, unde Oy este dirijat după anvergura, Ox după direcția generală a curentului și Oz după normala la planul xOy (fig. 15.8): Într-o secțiune oarecare, paralelă cu planul median xOz , așa cum este indicată în fig. 15.3, stratul de vârtejuri, care înlocuiește profilul în acest punct al anvergurii, are o suprafață totală σ_a ; se poate scrie în acest caz, însemnând cu Γ circulația în jurul acestei secțiuni a aripii,

$$(15.20) \quad \bar{\Omega}_a \, d\tau = \bar{\Omega}_a \sigma_a \, dy = \bar{\Gamma} \, dy,$$

de unde rezultă :

$$(15.21) \quad \bar{P} = \rho \bar{V}_0 \wedge \int_{\tau_a} \bar{\Omega}_a \, d\tau = \rho \bar{V}_0 \wedge \int_B^A \bar{\Gamma} \, dy, \quad P = \rho V_0 \int_B^A \Gamma \, dy.$$

Aceasta este formula lui KUTTA-JUCOVSKI, sub o formă generalizată. Ea reprezintă o forță normală pe curent și pe direcția generală a anvergurii și se numește portanță sau sustentanță.

Să revenim la expresia rezultantei și să observăm că a doua integrală (15.18) este nulă dacă vârtejurile $\bar{\Omega}_a$ sunt toate paralele cu anvergura.

Într'adevăr, să considerăm două astfel de vârtejuri $\bar{\Omega}_1, \bar{\Omega}_2$ și fie $d\sigma_1$ și $d\sigma_2$ secțiunile elementare ale tuburilor de vârtej corespunzătoare (fig. 15.5); intensitățile turbionare sunt respectiv: $d\Gamma_1 = \Omega_1 d\sigma_1$ și $d\Gamma_2 = \Omega_2 d\sigma_2$, iar viteza elementară dv_{21} datorită elementului ds_1 , în dreptul elementului ds_2 , precum și dv_{12} datorită elementului ds_2 , în dreptul lui ds_1 , vor fi respectiv, după legea lui BIOT-SAVART (2.25):

$$(15.22) \quad dv_{21} = \frac{d\Gamma_1 \cdot ds_1}{4\pi r^2} \sin \nu,$$

$$dv_{12} = -\frac{d\Gamma_2 \cdot ds_2}{4\pi r^2} \sin \nu.$$

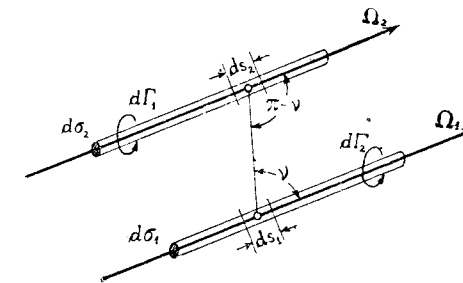


Fig. 15.5.

Rezultă, astfel, pentru forțele elementare ce se exercită pe aceste două elemente :

$$(15.23) \quad \left\{ \begin{aligned} q_1 \cdot d\tau_1 &= q_1 \cdot d\sigma_1 \cdot ds_1 = \rho \Omega_1 \cdot dv_{12} \cdot d\sigma_1 \cdot ds_1 = \\ &= -\rho \frac{d\Gamma_1 \cdot d\Gamma_2 \cdot ds_1 \cdot ds_2}{4\pi r^2} \sin \nu, \\ q_2 \cdot d\tau_2 &= q_2 \cdot d\sigma_2 \cdot ds_2 = \rho \Omega_2 \cdot dv_{21} \cdot d\sigma_2 \cdot ds_2 = \\ &= \rho \frac{d\Gamma_1 \cdot d\Gamma_2 \cdot ds_1 \cdot ds_2}{4\pi r^2} \sin \nu, \end{aligned} \right.$$

de unde se vede că aceste forțe sunt două câte două egale și de semn contrar și prin urmare a doua integrală (15.17) este nulă.

Trebuie văzut acum dacă vârtejurile legate $\bar{\Omega}_a$ se pot considera paralele. Am văzut (15.6) că aceste vârtejuri sunt normale la viteza \bar{V} corespunzătoare punctului considerat de pe aripă (fig. 15.3). Atâta timp cât aripa este aproximativ dreaptă, cât anvergura este suficient de mare față de coarda mijlocie a aripii și curentul transversal \bar{v} este foarte mic față de \bar{V} , aceasta conservă aproximativ o direcție paralelă cu planul median, deci normală pe anvergura; rezultă deci că vârtejurile $\bar{\Omega}_a$ sunt aproximativ paralele cu anvergura și prin urmare ipoteza făcută este valabilă. Pentru aripi în săgeată această ipoteză nu mai este valabilă; de aceea, pentru a rezolva problema respectivă, vom face alte ipoteze, așa cum s'a indicat la paragraful respectiv tratat mai departe.

Pentru a calcula a treia integrală, trebuie observat mai întâi că direcția vârtejurilor libere este paralelă cu viteza curentului din spatele aripii, începând dela bordul de ieșire. Această direcție este foarte puțin diferită de direcția generală a curentului, astfel că se poate presupune că vârtejurile libere formează cu aripa același plan paralel cu viteza \bar{V}_0 . În acest caz, viteza \bar{w} (15.17) este normală la acest plan și este dirijată prin urmare după Oz ; de unde rezultă că integrala

$$(15.24) \quad \bar{R} = \rho \int_{\tau_a} \bar{w} \wedge \bar{\Omega}_a d\tau$$

reprezintă o forță normală pe $\bar{\Omega}$ și \bar{w} , deci paralelă cu curentul. Deoarece, pe de altă parte, \bar{w} este dirijată după direcția negativă a lui Oz , când $\bar{\Omega}_a$

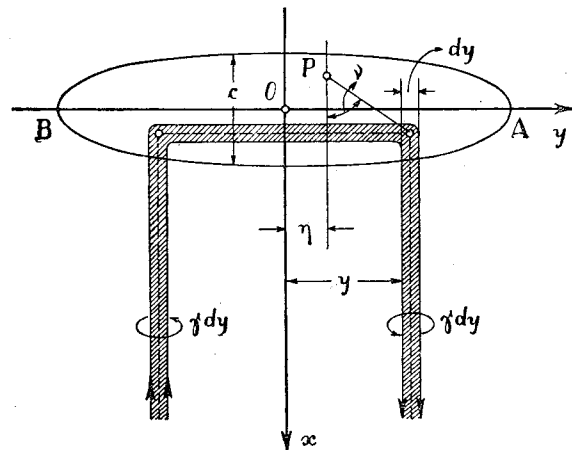


Fig. 15.6.

este în direcția pozitivă a lui Oy , această forță este dirijată după direcția curentului, altfel zis, ea se opune înaintării aripii. Ea se numește din această cauză rezistența la înaintare sau încă rezistența indusă, fiindcă este datorită vitezei induse a vârtejurilor libere. Să revenim la expresia acestei viteze induse (15.17); în condițiile ipotezei noastre calcularea ei este ușoară. Într'adevăr, însemnând prin γdy intensitatea turbionară a unei fâșii de vârtejuri de lățime dy , de grosime egală cu aceea a pânzei (2δ, fig. 15.3) și care se întinde

$$(15.25) \quad dw = -\frac{\gamma dy}{4\pi} \frac{1 + \cos \nu}{y - \eta};$$

viteza totală datorită întregii pânze va avea expresia:

$$(15.26) \quad w = -\frac{1}{4\pi} \int_B^A \frac{\gamma}{y - \eta} dy - \frac{1}{4\pi} \int_B^A \frac{\gamma \cos \nu}{y - \eta} dy.$$

Pentru o aripă de mare anvergură în raport cu coarda, ν ia valori alternative în jurul lui $\frac{\pi}{2}$, astfel încât, pentru o valoare medie a lui w în

secțiunea η , valoarea integralei a doua poate fi considerată neglijabilă sau chiar nulă și prin urmare putem scrie:

$$(15.27) \quad w = -\frac{1}{4\pi} \int_B^A \frac{\gamma}{y - \eta} dy.$$

În acest caz, însemnând prin $\Gamma = \Omega_a \times \sigma_a$ intensitatea turbionară a întregii secțiuni considerate (egală cu circulația din jurul aripii în această secțiune) și înlocuind $d\tau$ prin $\sigma_a dy$, integrala (15.24) devine:

$$(15.28) \quad R = \rho \int_B^A w \Gamma dy = \frac{1}{4\pi} \int_B^A \Gamma d\eta \int_B^A \frac{\gamma}{y - \eta} dy.$$

Prin aceasta am admis implicit că intensitatea turbionară $\Gamma = \Omega_a \times \sigma_a$ este concentrată într'un filet subțire de vârtej rectiliniu și că pânza de vârtejuri se desprinde direct dela această linie. Suntem conduși astfel la concepția de filet portant sau linie portantă, în loc de suprafață portantă (fig. 15.7).

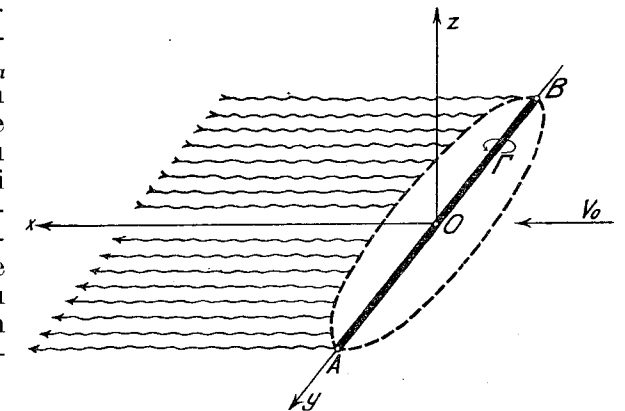


Fig. 15.7.

15.3. Fundamentele teoriei lui Prandtl

Referindu-ne la fig. 15.8, să trasăm în punctul y al anvergurii conturul C și în punctul $y + dy$, conturul C' ; circulațiile respective vor fi Γ și Γ' :

$$(15.29) \quad \Gamma' = \Gamma + \frac{d\Gamma}{dy} dy.$$

Fie $d\sigma$ o suprafață care se sprijină pe aceste două contururi; diferența $d\Gamma = \Gamma' - \Gamma$ este egală cu fluxul vârtejurilor libere, care se desprind la bordul de ieșire și care formează fâșia elementară dy , de unde

$$(15.30) \quad \gamma dy = 2\delta \Omega_l dy;$$

vom avea evident:

$$(15.31) \quad \gamma dy + \frac{d\Gamma}{dy} dy = 0, \quad \gamma = -\frac{d\Gamma}{dy}$$

și prin urmare viteza indusă și rezistența indusă devin respectiv :

$$(15.32) \quad w = \frac{1}{4\pi} \int_B^A \frac{d\Gamma}{dy} \frac{dy}{y-\eta}, \quad R = \frac{\rho}{4\pi} \int_B^A \int_B^A \Gamma \frac{d\Gamma}{dy} \frac{dy d\eta}{y-\eta}.$$

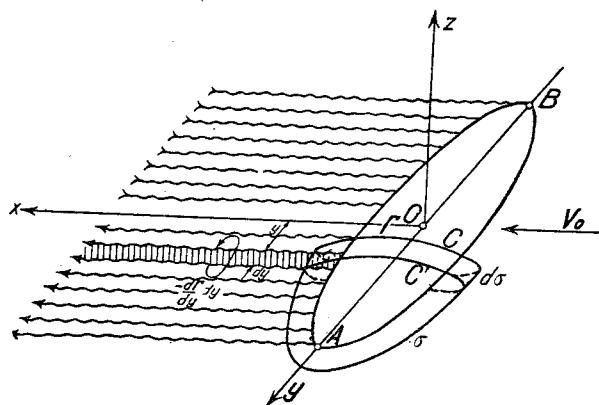


Fig. 15.8.

Se vede că această viteză depinde de distribuția lui Γ dealungul anvergurii și deoarece fiecare fâșie de vârtejuri este o prelungire a vârtejurilor proprii ale aripii, viteza w se numește viteza auto-indusă. Prin urmare, pânza de vârtejuri libere, a căror intensitate în fiecare punct al anvergurii este

$$\gamma = - \frac{d\Gamma}{dy},$$

induce în dreptul aripii o viteză w normală la curent;

totul se petrece în realitate ca și cum curentul ar avea viteza V_0 , în loc de V_0 (fig. 15.9).

Din acest fapt decurg două consecințe importante pentru o porțiune elementară de aripă situată în punctul y al anvergurii.

1. Condițiile de scurgere în jurul acestei porțiuni sunt acelea ale unui curent plan de viteză V_0' ; rezultanta aerodinamică elementară dQ este normală pe direcția acestei viteze și egală cu

$$(15.33) \quad dQ = \rho \Gamma V_0'.$$

Insemnând prin i unghiul pe care-l face această nouă direcție a vitezei cu direcția inițială V_0 și care se numește unghiul indus, vom putea scrie pentru proiecțiile lui dQ după V_0 și după normala la V_0 :

$$(15.34) \quad \begin{cases} dP = dQ \cos i = \rho \Gamma V_0' dy \cos i = \rho \Gamma V_0 dy, \\ dR = dQ \sin i = \rho \Gamma V_0' dy \sin i = \rho \Gamma w dy = \frac{w}{V_0} dP, \end{cases}$$

unde w este luat în valoarea sa absolută.

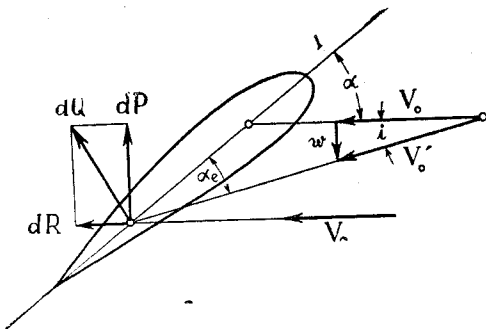


Fig. 15.9.

În realitate deci, nu există o rezistență propriu zisă, fiindcă rezultanta generală este normală la viteza rezultantă V_0' . Rezistența indusă nu este decât proiecția rezultantei generale pe direcția inițială a vitezei.

Trebuie observat de la început că viteza indusă w este mică față de V_0 , astfel încât unghiul indus i este de asemenea mic, prin urmare se poate scrie :

$$(15.35) \quad \operatorname{tg} i \approx i = \frac{w}{V_0}.$$

2. Circulația în jurul profilului rezultă de asemenea din noile condiții de scurgere. Într'adevăr, viteza reală nu mai face unghiul α cu axa de portanță nulă (I) a profilului, ci unghiul efectiv α_e (fig. 15.9). Am văzut (5.13) că circulația în jurul unei aripi de anvergură infinită, dacă notăm cu a raza cercului generator și cu c coarda profilului, are expresia :

$$(15.36) \quad \Gamma = 4\pi a V_0 \sin \alpha \approx \pi \frac{4a}{c} V_0 \alpha = \pi (1 + \epsilon) c V_0 \alpha = k c V_0 \alpha.$$

Experiența ne arată însă că această valoare a circulației este micșorată în raportul 0,85 până la 0,90; astfel că este mai exact să înlocuim $\pi (1 + \epsilon)$, cum am făcut mai sus, printr'un coeficient practic k , care va fi dat de experiență. Pentru circulația corespunzătoare porțiunii considerate a aripii de anvergură finită vom avea aceeași formulă, însă incidența α va fi înlocuită prin incidența efectivă α_e :

$$(15.37) \quad \Gamma = k c V_0 \alpha_e = k c V_0 (\alpha - i) = k c V_0 \left(\alpha - \frac{w}{V_0} \right),$$

unde w este luat în sensul negativ.

Înlocuind w prin expresia (15.32), ținând seama și de orientarea sa, vom obține în cele din urmă următoarea ecuație integro-diferențială fundamentală :

$$(15.38) \quad \Gamma = k c V_0 \left(\alpha - \frac{1}{4\pi V_0} \int_B^A \frac{d\Gamma}{dy} \frac{dy}{\eta - y} \right).$$

Această concepție a mișcării turbionare în spatele aripii de anvergură finită, precum și ecuația la care se ajunge este datorită lui PRANDTL.

16. PROBLEME SPECIALE PRIVITOARE LA ARIPILE DE ANVERGURĂ FINITĂ ȘI FORMULE PRACTICE

16.1. Considerații preliminare

Să studiem mișcarea în jurul pânzei de vârtejuri la o distanță mare în spatele aripii și să facem abstracție de viteza V_0 a curentului, ceea ce corespunde de altfel cu realitatea în cazul când aripa se deplasează într'un mediu imobil.

Să notăm prin w' viteasa indusă verticală în dreptul pânzei; ea are, în acest caz, o valoare de două ori mai mare ($w' = 2w$) decât cea indicată de formula (15.32), fiindcă pânza vârtejurilor libere se întinde nelimitat în aval, precum și în amonte.

Urma BA a pânzei pe planul normal Oyz (fig. 16.1) este o linie de discontinuitate pentru componenta v' a vitesei după Oy . Într'adevăr, considerând două puncte P_1 și P_2 , având aceeași abscisă y , așezate respectiv pe fața superioară și inferioară a pânzei, această viteză trece dela valoarea v' în punctul P_2 la valoarea $-v'$ în punctul P_1 . Din considerațiuni de simetrie, aceste viteze sunt egale în valoare absolută. În același punct y intensitatea turbionară a unei fâșii dy , a cărei valoare pe unitatea de lungime va fi întotdeauna notată prin γ ($\gamma = -\frac{d\Gamma}{dy}$), rezultă din determinarea circulației din jurul unui dreptunghi elementar, având drept înălțime grosimea ε a stratului și dy drept lățime (fig. 16.1):

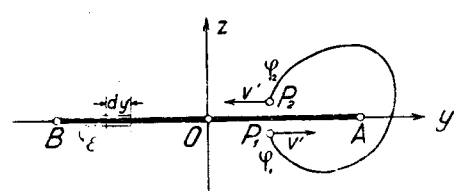


Fig. 16.1.

$$(16.1) \quad \gamma dy = v'dy - \varepsilon w' + v'dy + \varepsilon w' = 2v'dy$$

și prin urmare

$$(16.2) \quad \gamma = -\frac{d\Gamma}{dy} = 2v'.$$

Scurgerea în jurul pânzei plane de vârtejuri este o mișcare plană irotațională, reprezentată printr'un potențial de viteze φ ; vom avea prin urmare:

$$(16.3) \quad w' = 2w = \frac{\partial\varphi}{\partial z}, \quad v' = \frac{\partial\varphi}{\partial y},$$

de unde se vede că derivata lui φ în raport cu y suferă o discontinuitate la traversarea lui BA :

$$(16.4) \quad \left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)_{z=-\frac{\varepsilon}{2}} = v', \quad \left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)_{z=\frac{\varepsilon}{2}} = -v'.$$

Fie un contur C având extremitățile în P_1 și P_2 și înconjurând toate fâșiile de vârtejuri din punctul y , până în punctul A ; circulația din jurul acestui contur este egală cu Γ căci intensitatea fâșiilor înconjurate are o valoare totală egală cu intensitatea care corespunde circulației totale din jurul aripii în punctul y al anvergurii. Ținând seama de (1.35) și (1.36), se obține următoarea relație importantă:

$$(16.5) \quad \Gamma = \int_C (v'dy + w'dz) = \int_C \left(\frac{\partial\varphi}{\partial y} dy + \frac{\partial\varphi}{\partial z} dz \right) = \int_2^1 d\varphi = \varphi_1 - \varphi_2.$$

Deci φ este o funcție multiformă pentru orice contur care traversează segmentul BA ; în timp ce, pentru un contur care înconjoară întreaga urmă BA , φ este uniformă, circulația în jurul unui astfel de contur fiind nulă.

Potențialul φ este uniform și tinde către zero la infinit ca $\frac{1}{z}$ iar viteza tinde deasemenea către zero ca $\frac{1}{z^2}$. Relația precedentă (16.5) va fi utilizată mai târziu.

16.2. Energia cinetică

Energia cinetică totală corespunzătoare unei porțiuni a pânzei de vârtejuri egală cu unitatea de lungime, determinată de mișcarea definită de potențialul φ , este finită și va avea ca expresie, după (1.47):

$$(16.6) \quad E = -\frac{\rho}{2} \oint_{BA} \varphi \frac{\partial\varphi}{\partial z} dy = \frac{\rho}{2} \int_B^A (\varphi_1 - \varphi_2) \frac{\partial\varphi}{\partial z} dy = \frac{\rho}{2} \int_B^A w' \Gamma dy = \rho \int_B^A \Gamma w dy.$$

Prima integrală este extinsă pe fața inferioară și superioară a segmentului BA , a doua și a treia integrală sunt extinse pe o singură față în sensul lui y pozitiv.

Se vede deci că energia cinetică a unei porțiuni unitare este egală cu rezistența indusă a aripii. Acest rezultat este de o mare importanță și bogat în consecințe, ca de exemplu:

Un element portant oarecare Δy ar putea fi deplasat în sensul curentului, fără ca rezistența să fie schimbată, dacă, bine înțeles, circulația elementului considerat rămâne aceeași, ceea ce se poate face printr'o schimbare potrivită a incidenței acestui element.

Este un rezultat găsit de MUNK în cazul general al unui sistem portant oarecare. Într'adevăr, deplasarea acestui element portant, atâta timp cât își păstrează aceeași circulație, nu influențează asupra condițiilor de scurgere departe în spatele aripii; viteza indusă dela infinit rămâne constantă ($w' = ct.$) și energia cinetică rămâne deasemenea constantă, după (16.6). Vom avea prin urmare același lucru și pentru rezistența indusă. O aplicație importantă este constituită de aripile în săgeată, unde rezistența indusă nu va depinde decât de distribuția lui Γ dealungul anvergurii, exact ca și pentru aripile drepte.

16.3. Calculul circulației corespunzătoare unei viteze induse date

Am văzut că circulația într'un punct y este egală cu diferența $\varphi_1 - \varphi_2$ a potențialului de viteze (16.5). Trebuie să găsim deci o funcție φ , regulată

în tot domeniul exterior segmentului BA , care se reduce la o constantă la infinit și a cărei derivată $\frac{\partial \varphi}{\partial z}$ ia valori determinate pe conturul BA

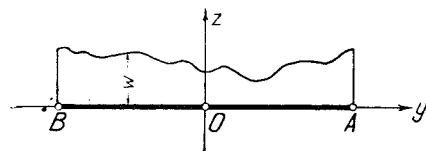


Fig. 16.2.

$$\frac{\partial \varphi}{\partial z} = w' = 2w.$$

Vom rezolva problema în mod elementar, utilizând aceeași cale ca și pentru problemele privitoare la ecuația (15.37), de care ne vom ocupa în mod special mai târziu.

Intr'adevăr, fie b anvergura aripii și să punem

$$(16.7) \quad y = -\frac{b}{2} \cos \theta.$$

Să dezvoltăm Γ în serie FOURIER; observând că circulația își schimbă semnul odată cu θ , se va putea scrie:

$$(16.8) \quad \Gamma = 2bV_0 \sum_1^n A_n \sin n\theta, \quad \frac{d\Gamma}{d\theta} = 2bV_0 \sum_1^n n A_n \cos n\theta.$$

Să însemnăm, în mod general, prin w viteza indusă într'un punct oarecare η al anvergurii, care poate fi pus, deasemenea, sub forma (16.7):

$$(16.9) \quad \eta = -\frac{b}{2} \cos \psi;$$

în acest caz, valoarea lui w va fi dată de expresia (15.32):

$$(16.10) \quad w = -\frac{1}{4\pi} \int_B^A \frac{d\Gamma}{dy} \frac{dy}{\eta - y} = -\frac{V_0}{\pi} \int_0^\pi \frac{\sum_n A_n \cos n\theta}{\cos \theta - \cos \psi} d\theta.$$

Am văzut însă mai sus (11.22) că putem avea

$$(16.11) \quad \int_0^\pi \frac{\cos n\theta}{\cos \theta - \cos \psi} d\theta = \pi \frac{\sin n\psi}{\sin \psi},$$

de unde rezultă

$$(16.12) \quad w = -\frac{V_0}{\sin \psi} \sum_1^n n A_n \sin n\psi.$$

Prin urmare, dacă w este dat dealungul anvergurii, (fig. 16.2), vom dezvolta $w \sin \psi$ în serie FOURIER:

$$(16.13) \quad w \sin \psi = V_0 \sum_1^n B_n \sin n\psi$$

și coeficienții A_1, A_2, \dots, A_n ai lui Γ vor fi respectiv:

$$(16.14) \quad A_1 = B_1, \quad A_2 = \frac{B_2}{2}, \dots, A_n = \frac{B_n}{n}.$$

16.3.1. Exemple de aplicație. Să presupunem că viteza indusă variază dealungul anvergurii după o lege parabolică

$$(16.15) \quad w = kV_0 \left[1 + \left(\frac{2\eta}{b} \right)^2 \right] = kV_0 (1 + \cos^2 \psi) = kV_0 (1,5 + 0,5 \cos 2\psi);$$

rezultă numai decât

$$(16.16) \quad w \sin \psi = V_0 (1,25 k \sin \psi + 0,25 k \sin 3\psi)$$

și prin urmare:

$$(16.17) \quad A_1 = 1,25 k, \quad A_3 = \frac{0,25 k}{3}, \quad A_2 = A_4 = A_5 = \dots = A_n = 0.$$

Circulația Γ va avea ca expresie în acest caz:

$$(16.18) \quad \Gamma = 2bV_0 \left(1,25 k \sin \psi + \frac{0,25 k}{3} \sin 3\psi \right).$$

Dacă viteza indusă este constantă, fie $w = w_0 = kV_0 = \text{ct.}$, se va putea pune

$$(16.19) \quad w \sin \psi = V_0 \frac{w_0}{V_0} \sin \psi,$$

de unde rezultă o variație eliptică pentru circulație:

$$(16.20) \quad \Gamma = 2bV_0 \frac{w_0}{V_0} \sin \psi = 2bw_0 \sqrt{1 - \left(\frac{2\eta}{b} \right)^2} = \Gamma_0 \sqrt{1 - \left(\frac{2\eta}{b} \right)^2}.$$

16.4. Aripa de rezistență indusă minimă

Este de foarte mare importanță de găsit felul cum variază circulația dealungul anvergurii pentru ca rezistența indusă a aripei, pentru o portanță totală dată, să fie minimă. Vom da mai jos o demonstrație elementară datorită lui A. BETZ. Fie P și R , portanța și rezistența unei aripi:

$$(16.21) \quad P = \rho V_0 \int_B^A \Gamma dy = \text{ct.}, \quad R = \rho \int_B^A w \Gamma dy;$$

trebuie să găsim, pentru o portanță totală dată, variația lui Γ , care să ducă la o rezistență minimă.

Să presupunem că cunoaștem a priori această circulație optimă și fie δP_1 un element portant suplimentar pe care-l adăugăm într'un punct y_1 . Pentru ca portanța totală se păstreze aceeași valoare dată, este necesar de adăugat încă un element portant δP_2 în punctul y_2 , egal și de semn contrar cu primul:

$$(16.22) \quad \delta P_1 + \delta P_2 = 0.$$

Prin adăugarea acestor două elemente, distribuția viteșelor induse foarte departe în aval, în dreptul punctelor y_1 și y_2 , nu este schimbată, mai bine spus, variația viteșei induse este de ordinul al doilea și deci o putem neglija; prin urmare, dacă notăm cu w_1 și w_2 viteșele induse respective, rezultă o rezistență suplimentară, a cărei valoare, după (15.34), va fi

$$(16.23) \quad \delta R = \frac{w_1}{V_0} \delta P_1 + \frac{w_2}{V_0} \delta P_2 = \frac{w_1 - w_2}{V_0} \delta P_1.$$

Însă am făcut, a priori, ipoteza că distribuția circulației este optimă și că ea corespunde prin urmare la o rezistență minimă. Urmează că orice variație elementară a rezistenței induse în jurul acestei poziții minime este nulă ($\delta R = 0$), de unde rezultă:

$$(16.24) \quad w_1 = w_2 = w_0 = ct.$$

Am obținut astfel un rezultat remarcabil: rezistența indusă a unei aripi va fi minimă, dacă viteșa indusă este constantă pe toată anvergura. Rezultă, după cele stabilite mai sus (16.20), că variația lui Γ este eliptică:

$$(16.25) \quad \Gamma = \Gamma_0 \sqrt{1 - \left(\frac{2y}{b}\right)^2} = 2bw_0 \sqrt{1 - \left(\frac{2y}{b}\right)^2}.$$

Din această expresie se deduce circulația din centrul aripii, sau viteșa indusă în funcție de această circulație:

$$(16.26) \quad \Gamma_0 = 2bw_0, \quad w_0 = \frac{\Gamma_0}{2b}.$$

Să considerăm acum ecuația (15.37) și fie c_0 coarda centrală a aripii; vom avea

$$(16.27) \quad \Gamma_0 = kc_0 V_0 \left(x - \frac{w_0}{V_0}\right) = kc_0 V_0 \left(x - \frac{\Gamma_0}{2bV_0}\right)$$

și prin urmare:

$$(16.28) \quad \Gamma_0 = \frac{kc_0 V_0 \alpha}{1 + \frac{kc_0}{2b}} = \frac{\frac{kc_0}{2b}}{1 + \frac{kc_0}{2b}} 2bV_0 \alpha = \frac{\mu_0 \alpha}{1 + \mu_0} 2bV_0.$$

Notând prin c_m coarda medie, prin S suprafața și prin λ alungirea aripii definită de raportul:

$$(16.29) \quad \lambda = \frac{b}{c_m} = \frac{b^2}{bc_m} = \frac{b^2}{S}$$

și punând mai departe:

$$(16.30) \quad \mu_0 = \frac{kc_0}{2b} = \frac{k}{2} \cdot \frac{c_0 b}{S} \cdot \frac{1}{\lambda},$$

se poate scrie în cele din urmă, ținând seama și de (16.7), formulele circulației sub diferite forme:

$$(16.31) \quad \begin{cases} \Gamma = \Gamma_0 \sqrt{1 - \left(\frac{2y}{b}\right)^2} = \Gamma_0 \sin \theta = \frac{kc_0 V_0 \alpha}{1 + \mu_0} \sin \theta, \\ \Gamma = 2bV_0 A_1 \sin \theta = 2bV_0 \frac{\mu_0 \alpha}{1 + \mu_0} \sin \theta. \end{cases}$$

Din aceste formule, se vede că putem obține o circulație cu variație eliptică în diferite moduri: fie luând o aripă cu contur eliptic ($c = c_0 \sin \theta$), având incidența constantă; fie luând o aripă dreptunghiulară ($c = c_0$) având însă incidența variabilă, $\alpha' = \alpha \sin \theta$; fie, în sfârșit, luând o aripă de contur și incidența oarecare, unde avem însă:

$$(16.32) \quad c\alpha' = c_0 \alpha \sin \theta.$$

Primul caz este cel mai important și prezintă un mare interes pentru aplicații. Deaceia, vom studia acest caz mai dezvoltat și vom stabili în același timp și formulele fundamentale utilizate în tehnica aeronautică.

16.4.1. Analogie cu seurgerea în jurul unei plăci așezată normal pe curent. Se poate demonstra pe o cale directă că, dacă viteșa indusă este constantă dealungul anvergurii ($-w_0$), distribuția circulației este eliptică. Într'adevăr, să ne așezăm la infinit aval unde viteșa indusă va fi $-2w_0$ și să presupunem că tot fluidul este animat de o viteză egală și de semn contrar, fie $2w_0$; în acest caz, mișcarea în jurul stratului de vârtej este identică cu mișcarea în jurul unei plăci subțiri așezată într'un curent normal de viteză $2w_0$. Am văzut că potențialul mișcării, în lipsa unei viteșes orizontale și a circulației, va fi dată, după (13.4), de următoarea expresie:

$$(16.33) \quad f(x) = -2iw_0 \sqrt{(y + iz)^2 - \frac{b^2}{4}} = -2iw_0 \sqrt{x^2 - \frac{b^2}{4}},$$

unde x este în acest caz variabila complexă:

$$(16.34) \quad x = y + iz,$$

Oy fiind axa absciselor și Oz axa ordonatelor. Vitesa complexă devine

$$(16.35) \quad \frac{df}{dx} = v - iw = \frac{-2iw_0 x}{\sqrt{x^2 - \frac{b^2}{4}}}$$

și ia pentru $z = 0$ următoarele valori:

$$(16.36) \quad v = \frac{-2iw_0 y}{\sqrt{y^2 - \frac{b^2}{4}}} = \frac{-2w_0 y}{\sqrt{\frac{b^2}{4} - y^2}}$$

Rezultă, după (16.2),

$$(16.37) \quad \gamma = -\frac{d\Gamma}{dy} = 2v = -\frac{4w_0 y}{\sqrt{\frac{b^2}{4} - y^2}}$$

și prin urmare regăsim aceeași distribuție eliptică:

$$(16.38) \quad \Gamma = 4w_0 \sqrt{\frac{b^2}{4} - y^2} = 2w_0 b \sqrt{1 - \left(\frac{2y}{b}\right)^2}$$

16.5 Caracteristicile aerodinamice ale aripilor eliptice

Să considerăm o aripă cu contur eliptic ($c = c_0 \sin \theta$) având incidența α constantă dealungul anvergurii. Această incidență este luată în raport cu axa de portanță nulă, precum am menționat mai sus.

Luând pentru circulație a treia expresie din (16.31) și înlocuind y în funcție de θ (16.7), putem calcula ușor portanța și rezistența indusă, după (15.21) și (15.28):

$$(16.39) \quad \begin{cases} P = \rho V_0 \int_B^A \Gamma dy = \rho \frac{\pi}{4} b \Gamma_0 V_0 = \rho V_0^2 S \frac{k\alpha}{1 + \mu_0}, \\ R = \rho w_0 \int_B^A \Gamma dy = \frac{w_0}{V_0} P = \frac{\rho}{2} V_0^2 S \frac{\mu_0}{2k} \left(\frac{2k\alpha}{1 + \mu_0}\right)^2. \end{cases}$$

Inlocuind w_0 prin expresia sa (16.26) și Γ_0 în funcție de portanță (16.39), se poate obține o altă formulă pentru rezistență:

$$(16.40) \quad R = \frac{w_0}{V_0} P = \frac{\Gamma_0}{2bV_0} P = \frac{P^2}{\pi \frac{\rho}{2} V_0^2 b^2}$$

Iar pentru coeficienții unitari rezultă formulele respective:

$$(16.41) \quad C_z = \frac{P}{\frac{1}{2} \rho S V_0^2} = 2 \frac{k}{1 + \mu_0} = 2k\lambda \alpha, \\ C_x = \frac{R}{\frac{1}{2} \rho S V_0^2} = \frac{P^2}{\left(\frac{1}{2} \rho S V_0^2\right)^2 \pi \frac{b^2}{S}} = \frac{C_z^2}{\pi \lambda}$$

Pentru o aripă eliptică vom avea, după (16.30):

$$(16.42) \quad \mu_0 = \frac{kc_0}{2b} = \frac{k}{2} \frac{c_0 b}{S} \frac{1}{\lambda} = \frac{2k}{\pi \lambda};$$

putem scrie prin urmare:

$$(16.43) \quad C_z = \frac{2k}{1 + \frac{2}{\pi} \frac{k}{\lambda}} \alpha = 2k\lambda \alpha, \quad C_x = \frac{C_z^2}{\pi \lambda}, \quad \frac{w_0}{V_0} = i = \frac{C_z}{\pi \lambda}$$

Legea de variație a portanței unitare este lineară, ca și pentru aripa de anvergură infinită, însă panta $2k\lambda$ depinde de alungire:

$$(16.44) \quad k\lambda = \frac{k}{1 + \frac{2k}{\pi \lambda}}$$

Am văzut mai sus că valoarea teoretică a coeficientului k , fie k_t , este egală cu $4 \frac{a}{c} \pi = \pi(1 + \varepsilon)$, unde ε variază între 0% și 10%. Valoarea experimentală sau reală, fie k_e , este aproximativ 0,87% din valoarea teoretică, însă se poate admite în mod general:

$$(16.45) \quad k_e \approx 0,9 \pi,$$

sau se poate lua direct valoarea sa experimentală, ori de câte ori este posibil. Variația rezistenței unitare induse C_x în funcție de C_z este parabolică; de aceea, se și numește parabolă indusă. Dacă se adaugă lui C_x rezistența de formă sau de profil (5.24), vom avea formula rezistenței unitare totale:

$$(16.46) \quad C_x = C_{x0} + \frac{C_z^2}{\pi \lambda}$$

Curba $C_x = f(C_z)$ se numește polara aripii și formula precedentă (10.46) ne permite să trecem de la o polară corespunzătoare unei aripi de alungire λ_1 , la o altă polară corespunzătoare unei alungiri λ_2 .

Intr'adevăr, pentru o aceeași portanță unitară C_z , observând că C_{x0} are aceeași valoare pentru amândouă aripile, putem calcula diferența de rezistență indusă:

$$(16.47) \quad C_{x1} - C_{x2} = \frac{C_z^2}{\pi} \left(\frac{1}{\lambda_1} - \frac{1}{\lambda_2} \right)$$

În mod analog se poate stabili legea incidențelor: dacă pentru o aripă de anvergură infinită incidența α_0 corespunde unei portanțe unitare C_z dată, pentru aripa de alungire λ incidența necesară pentru a produce aceeași portanță va fi mărită față de α_0 cu unghiul indus. Vom avea astfel:

$$(16.48) \quad \alpha = \alpha_0 + \frac{w_0}{V_0} = \alpha_0 + \frac{C_z}{\pi \lambda}$$

Rezultă că, pentru cele două aripi de alungire λ_1 și λ_2 , diferența dintre unghiurile de incidență, pentru aceeași portanță, va fi dată de formula

$$(16.49) \quad \alpha_1 - \alpha_2 = \frac{C_z}{\pi} \left(\frac{1}{\lambda_1} - \frac{1}{\lambda_2} \right).$$

16.6. Formule practice privind aripile de anvergură finită

Deși aripile eliptice nu constituie decât un caz particular al problemei aripilor de anvergură finită, totuși formulele (16.46), (16.47), (16.48) și (16.49) sunt fundamentale pentru aplicații în tehnica aeronautică.

Intr'adevăr, așa după cum vom vedea mai departe, formulele similare care corespund aripilor obișnuite neeliptice, nu diferă decât foarte puțin de cele stabilite mai sus, așa încât utilizarea acestor formule este perfect justificată pentru orice aripă de anvergură finită cu contur obișnuit. Prin urmare, formulele precedente vor fi întrebuintate în mod curent în aplicațiile practice.

17. METODE DIVERSE PENTRU CALCULUL ARIPILOR DE CONTUR DAT

Pentru aripile de formă generală, determinarea circulației este mai complicată. Aplicația ecuației lui PRANDTL (15.38) prezintă dificultăți insurmontabile pe care vom căuta să le evităm prin aproximații simplificatoare.

Numeroși autori au studiat această ecuație prin metode mai mult sau mai puțin laborioase, dând soluții interesante pentru câteva forme de aripi, în general însă pentru cazuri limitate.

Printre aceste studii putem cita lucrările lui BETZ, care se ocupă cu aripa dreptunghiulară, FUCHS, MUNK, TREFFTZ.

Vom menționa în același timp lucrările lui PERES și MALAVARD, care dau o metodă experimentală bazată pe analogia fenomenelor hidrodinamice și electrodinamice

Metoda primilor doi autori constă în a desfășura pe Γ într'o serie de forma :

$$(17.1) \quad \Gamma = \sqrt{1 - \left(\frac{2y}{b}\right)^2} \left(\Gamma_0 + \Gamma_2 y^2 + \Gamma_4 y^4 + \dots \right),$$

unde termenul de sub radical reprezintă distribuția eliptică iar ceilalți cuprinși în paranteză sunt termeni aditivi suplimentari, care se presupun în general mici. Calculele foarte laborioase și desfășurările destul de puțin convergente au limitat aplicația acestei metode la câteva cazuri simple.

Metoda lui TREFFTZ a fost mai fecundă. Intr'adevăr, pe o cale diferită și originală ea a fost pusă la punct și dezvoltată de GLAUERT, ale cărui lucrări referitoare la această problemă au o mare importanță pentru aplicații.

De aceea vom descrie mai jos principiile acestei ultime metode și ale altora care rezultă din ea.

17.1. Metoda lui GLAUERT

Această metodă constă în a desfășura pe Γ în serie FOURIER, așa cum am mai făcut (16.8) :

$$(17.2) \quad \Gamma = 2bV_0 \sum_1^n A_n \sin n\theta,$$

unde θ este definit de relația :

$$(17.3) \quad y = -\frac{b}{2} \cos \theta.$$

Viteza indusă într'un punct $\eta = -\frac{b}{2} \cos \psi$ va fi dată de formula găsită mai sus (16.12) :

$$(17.4) \quad w = \frac{1}{4\pi} \int_B^A \frac{d\Gamma}{dy} \cdot \frac{dy}{\eta - y} = \frac{V_0}{\pi} \int_0^\pi \frac{\sum_1^n n A_n \cos n\theta}{\cos \theta - \cos \psi} d\theta = \\ = V_0 \sum_1^n n A_n \frac{\sin n\psi}{\sin \psi}.$$

Introducând din nou variabila curentă θ în locul lui ψ și înlocuind această valoare a vitezei în ecuația (15.38), este ușor de văzut că vom obține o altă ecuație în θ :

$$(17.5) \quad \sin \theta \sum_1^n A_n \sin n\theta + \mu \sum_1^n n A_n \sin n\theta = \mu \alpha \sin \theta,$$

unde am însemnat cu μ următoarea expresie :

$$(17.6) \quad \mu = \frac{k}{2} \frac{c}{b} = \frac{k}{2} \frac{c_0}{b} \frac{c}{c_0} = \mu_0 \frac{c}{c_0}.$$

În ceea ce privește constanta μ_0 , ea are aceeași semnificație ca și în (16.30) :

$$(17.7) \quad \mu_0 = \frac{k}{2} \frac{c_0}{b} = \frac{k}{2} \frac{c_0 b}{S} \frac{1}{\lambda}.$$

Această ecuație a constituit pivotul a numeroase cercetări — începând cu cele ale autorului însuși — care tratează problema aripilor dreptunghiulare și trapezoidale.

O mulțime de alți autori au folosit în mod curent această metodă, foarte fecundă de altfel în ceea ce privește soluționarea câtorva probleme speciale. Ea constă în a lua un număr de n puncte pe aripă, iar ecuația

(17.5) trebuind să fie satisfăcută în fiecare punct astfel ales, se obțin n ecuații cu n necunoscute A_1, A_2, \dots, A_n . Dacă conturul aripii este simplu și aripa însăși nu este deformată de aripioare, numărul n este mic (3 sau 4) și soluția sistemului de n ecuații este simplă. Dacă numărul n este în mod necesar mare, pentru câteva probleme speciale, soluția devine aproape imposibilă. În acest caz este necesar să se folosească metode adecuate pentru fiecare din aceste probleme.

17.2. Metoda lui I. LOTZ

O soluție a ecuației (17.5) a fost dată de I. LOTZ folosind o metodă de iterație aplicată cu succes de însăși autorul și de alți autori pentru diferite probleme ale aripiilor de anvergură finită.

Metoda constă în a împărți fiecare termen al ecuației (17.5) prin $\frac{c}{c_0}$:

$$(17.8) \quad \frac{c_0}{c} \sin \theta \sum_1^n A_n \sin n\theta + \mu_0 \sum_1^n n A_n \sin n\theta = \mu_0 \alpha \sin \theta$$

și a desfășura în serie FOURIER termenii $\frac{c_0}{c} \sin \theta$ și $\alpha \sin \theta$. Se poate scrie astfel

$$(17.9) \quad \frac{c_0}{c} \sin \theta = \beta_0 + \beta_1 \cos \theta + \dots + \beta_n \cos n\theta = \sum_1^n \beta_n \cos n\theta$$

pentru primul termen și

$$(17.10) \quad \alpha \sin \theta = \alpha_1 \sin \theta + \alpha_2 \sin 2\theta + \dots + \alpha_n \sin n\theta = \sum_1^n \alpha_n \sin n\theta$$

pentru cel de al doilea. Efectuând apoi calculele, se obține o expresie în $\sin n\theta$, în care fiecare coeficient din primul membru trebuie să fie egal cu cel din membrul al doilea (cu α_n). Se obține astfel un număr infinit de ecuații cu un număr infinit de necunoscute: A_1, A_2, \dots, A_n .

Prin simplificări adecuate se găsește soluții prime aproximative. Mai departe, printr-o metodă de iterație se determină, în a doua aproximație, un număr n de coeficienți presupus destul de mare pentru a reprezenta convenabil fenomenul; și cu valorile acestei evaluări se reîncepe calculul pentru determinarea coeficienților cu o nouă aproximație mai bună și suficientă.

Această metodă foarte ingenioasă și fecundă prezintă totuși câteva inconveniente: nu este posibil să se determine numărul de termeni ce trebuie luați pentru a obține cea mai bună aproximație; calculul este foarte laborios și trebuie repetat pentru fiecare caz particular în parte, deoarece nu se poate obține o expresie analitică simplă care să ne dea soluția generală a problemei.

17.3. Metoda lui FUCHS

Metoda lui FUCHS remediază în parte aceste câteva dificultăți și dă o serie de rezultate foarte interesante. Ea constă în reprezentarea contu-

rului aripii printr'un polinom trigonometric și ecuația (17.5) se transformă într'un sistem mai mult sau mai puțin complicat de ecuații cu diferențe finite, a căror soluție este aproximativă. Cu toate dificultățile calculului, nu s'a putut ajunge la o soluție generală exprimată printr'o expresie algebrică, care să permită calculul ușor al caracteristicilor aerodinamice ale unei aripi oarecare.

17.4. Metoda generală

Dăm mai jos o metodă generală[2] care ajunge la soluții explicite simple și ușor de aplicat la toate cazurile care interesează aviația, fiind în același timp riguroasă.

Principiul metodei constă în a reprezenta pe $\frac{c_0}{c} \sin \theta$, simetrică în raport cu $\frac{\pi}{2}$ pentru cazurile obișnuite, prin următorul polinom trigonometric finit:

$$(17.11) \quad \frac{c_0}{c} \sin \theta = F(\theta) = \beta_0 + 2\beta_2 \cos 2\theta + \dots + 2\beta_{2m} \cos 2m\theta,$$

sau

$$(17.12) \quad \frac{c}{c_0} = \frac{\sin \theta}{F(\theta)}$$

Coarda c a aripii, fiind simetrică în raport cu originea ($y = 0, \theta = \frac{\pi}{2}$), coeficienții β_{2m} , pe care îi vom numi coeficienți de formă, au indice par, condiție necesară pentru obținerea acelorași valori pentru θ și $\pi - \theta$.

Expresia lui $F(\theta) = \frac{c_0}{c} \sin \theta$ introdusă în ecuația (17.5), ne dă:

$$(17.13) \quad \mu_0 \sum_1^n n A_n \sin n\theta + \left(\beta_0 + \sum_1^m 2\beta_{2m} \cos 2m\theta \right) \sum_1^n A_n \sin n\theta = \mu_0 \alpha \sin \theta.$$

Dacă α variază dealungul anvergurii, vom pune:

$$(17.14) \quad \alpha \sin \theta = \alpha_1 \sin \theta + \alpha_2 \sin 2\theta + \dots + \alpha_n \sin n\theta.$$

Remarcând mai departe că putem scrie

$$(17.15) \quad 2 \sin n\theta \cos 2m\theta = \sin (n + 2m)\theta + \sin (n - 2m)\theta$$

și că, coeficienții lui $\sin n\theta$ din primul și al doilea membru sunt egali, se obține o ecuație cu diferențe finite de grad $4m$:

$$(17.16) \quad (n\mu_0 + \beta_0)A_n + \beta_2 (A_{n-2} + A_{n+2}) + \dots + \beta_{2m} (A_{n-2m} + A_{n+2m}) = \mu_0 \alpha_n.$$

Această ecuație simetrică nu este omogenă, însă poate fi transformată într'una omogenă dacă unghiul de incidență α este constant dealungul anvergurii.

În acest caz putem scrie

$$(17.17) \quad (n\mu_0 + \beta_0) A_n + \beta_2 (A_{n-2} + A_{n+2}) \dots + \beta_{2m} (A_{n-2m} + A_{n+2m}) = 0$$

sau, adăugând $2m$ la fiecare indice, pentru a aduce ecuația la forma obișnuită

$$(17.18) \quad \beta_{2m} A_n + \dots + \beta_2 A_{n-2+2m} + [n\mu_0 + (2m\mu_0 + \beta_0)] A_{n+2m} + \beta_2 A_{n+2+2m} + \dots + \beta_{2m} A_{n+4m} = 0,$$

obținem o ecuație omogenă cu coeficienți variabili, de gradul $4m$, care se poate reduce la gradul $2m$, după cum vom vedea imediat.

Se vede de altfel, după forma acestei ecuații, că termenii pari se separă de termenii impari și se obțin astfel două ecuații diferite.

Este dificil de rezolvat această ecuație prin mijloace obișnuite, în afară de cazul $m = 1$.

Intr'adevăr, în acest caz, expresia (17.17) se reduce la o ecuație cilindrică :

$$(17.19) \quad (n\mu_0 + \beta_0) A_n + \beta_2 (A_{n-2} + A_{n+2}) = 0,$$

a cărei soluție va fi dată de o integrală a lui LAPLACE de forma

$$(17.20) \quad A_n = \int_p^q t^{n-1} f(t) dt.$$

Pentru aripile simetrice, circulația trebuind să fie aceeași pentru θ și $\pi - \theta$, termenii sunt impari : $n = 2p - 1$ și integrala lui LAPLACE devine :

$$(17.21) \quad A_n = A_{2p-1} = \frac{1}{2\mu_0} \int \tau^{p + \frac{\beta_0 - \mu_0}{2\mu_0} - 1} e^{\frac{\beta_2}{2\mu_0} \left(\tau - \frac{1}{\tau} \right)} d\tau = \frac{1}{2\mu_0} \int \tau^{p + \frac{b}{a} - 1} e^{\frac{1}{2a} \left(\tau - \frac{1}{\tau} \right)} d\tau,$$

cu

$$(17.22) \quad \frac{\beta_0 - \mu_0}{2\mu_0} = \frac{b}{a}, \quad \frac{\beta_2}{2\mu_0} = \frac{1}{2a}.$$

Soluția acestei integrale este dată de o funcție BESSEL :

$$(17.23) \quad A_n = A_{2p-1} = C \int_{\left(p + \frac{b}{a}\right)} \left(-\frac{1}{a}\right),$$

care se poate exprima printr'o serie convergentă

$$(17.24) \quad A_n = A_{2p-1} = \frac{C}{(-2a)^p} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{(4a^2)^m \cdot m! \Gamma\left(p + \frac{b}{a} + m + 1\right)} = \frac{C}{(-2a^p) \Gamma\left(p + \frac{b}{a} + 1\right)} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{(4a^2)^m m! \left(p + \frac{b}{a} + 1\right) \dots \left(p + \frac{b}{a} + m\right)},$$

unde Γ este funcția Gamma iar C o constantă ce va fi determinată de prima ecuație neomogenă :

$$(17.25) \quad (\mu_0 + \beta_0) A_1 + \beta_2 (A_3 - A_1) = \mu_0 \alpha.$$

Din expresia (17.24), se vede că termenii descresc rapid, ceea ce ne permite să limităm numărul termenilor la 3 sau cel mult 4.

Însă această expresie transcendentă este departe de a prezenta avantajele unei expresii algebrice, a cărei analiză să fie posibilă prin mijloace elementare.

Dacă am vrea să rezolvăm cazurile mai complicate, de un grad mai mare, dificultățile ar fi foarte mari și eventualele soluții n'ar prezenta nici un avantaj în ceea ce privește aplicația lor practică.

Deaceia, în cele ce urmează vom da o metodă aproximativă elementară pentru rezolvarea ecuației cu diferențe finite (17.17).

17.5. Soluția aproximativă a problemei generale

Exemplul precedent tratat cu ajutorul funcțiilor BESSEL ne arată natura coeficienților A_1, \dots, A_n și ne dă aspectul variației lor. Acești coeficienți descresc mai mult sau mai puțin repede.

Exemplul tratat nu este decât un caz particular și nu reprezintă decât o categorie restrânsă de contururi de aripi (formă în plan) reprezentate în diagramele din figura (17.1), unde coarda într'un punct al aripii, în raport cu aceea a secțiunii mediane, este dată de relația :

$$(17.26) \quad \frac{c}{c_0} = \frac{\sin \theta}{\beta_0 + 2\beta_2 \cos 2\theta}.$$

De îndată ce este vorba de o altă formă în plan utilizată în aviație, ca de exemplu : aripi dreptunghiulare, trapezoidale, dublu-trapezoidale, quasi-eliptice, contururi regulat deformate, etc., trebuie să recurgem la soluții aproximative.

Pentru aceasta, vom remarca dela început și vom demonstra mai târziu, că toate aceste forme sunt susceptibile de a fi reprezentate prin polinomul trigonometric :

$$(17.27) \quad \frac{c_0}{c} \sin \theta = \beta_0 + 2\beta_2 \cos 2\theta + 2\beta_4 \cos 4\theta + 2\beta_6 \cos 6\theta.$$

În acest caz sistemul (17.17) devine :

$$(17.28) \left\{ \begin{aligned} & (n\mu_0 + \beta_0) A_n + \beta_2(A_{n-2} + A_{n+2}) + \beta_4(A_{n-4} + A_{n+4}) + \beta_6(A_{n-6} + A_{n+6}) = 0, \\ & [(n+2)\mu_0 + \beta_0] A_{n+2} + \beta_2(A_n + A_{n+4}) + \beta_4(A_{n-2} + A_{n+6}) + \\ & \quad + \beta_6(A_{n-4} + A_{n+8}) = 0, \\ & [(n+4)\mu_0 + \beta_0] A_{n+4} + \beta_2(A_{n+2} + A_{n+6}) + \beta_4(A_n + A_{n+8}) + \\ & \quad + \beta_6(A_{n-2} + A_{n+10}) = 0, \\ & [(n+6)\mu_0 + \beta_0] A_{n+6} + \beta_2(A_{n+4} + A_{n+8}) + \beta_4(A_{n+2} + A_{n+10}) + \\ & \quad + \beta_6(A_n + A_{n+12}) = 0, \end{aligned} \right.$$

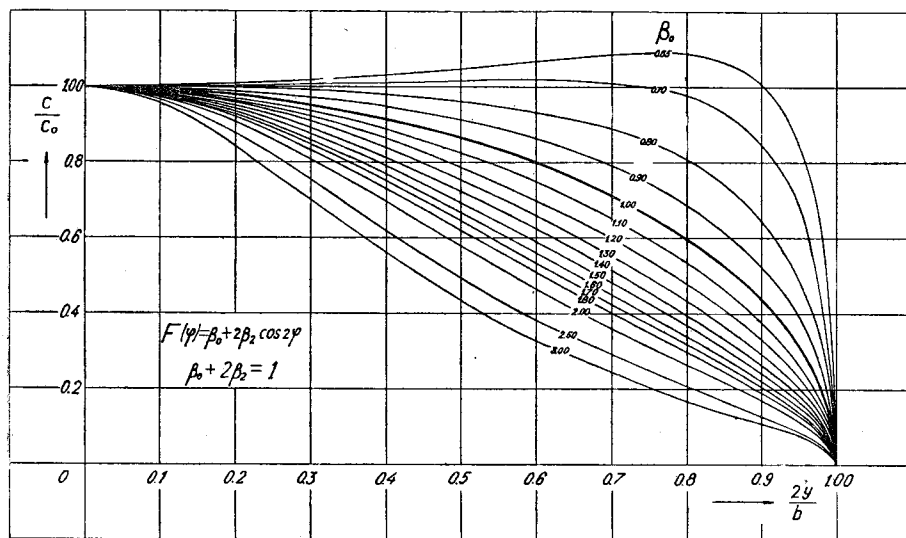


Fig. 17.1

Dela un anumit indice $n + 2$, coeficienții A_{n+2}, A_{n+4}, \dots sunt suficient de mici pentru a putea neglija, în a doua ecuație (17.28), coeficientul A_{n+4} în raport cu A_n , A_{n+6} în raport cu A_{n-2} , A_{n+8} în raport cu A_{n+4} , etc. și a putea scrie în cele din urmă :

$$(17.29) \left\{ \begin{aligned} & [(n+2)\mu_0 + \beta_0] A_{n+2} + \beta_2 A_n + \beta_4 A_{n-2} + \beta_6 A_{n-4} = 0, \\ & [(n+4)\mu_0 + \beta_0] A_{n+4} + \beta_2 A_{n+2} + \beta_4 A_n + \beta_6 A_{n-2} = 0, \\ & [(n+6)\mu_0 + \beta_0] A_{n+6} + \beta_2 A_{n+4} + \beta_4 A_{n+2} + \beta_6 A_n = 0, \end{aligned} \right.$$

Dacă înlocuim pe A_{n+2} din ecuația a doua prin valoarea sa scoasă din prima, ca și A_{n+4} și A_{n+6} din a treia ecuație prin valorile respective scoase din prima și a doua ecuație, putem exprima $A_{n+2}, A_{n+4}, A_{n+6}$ în funcție de A_n, A_{n-2} și A_{n-4} . Aceste valori ale lui $A_{n+2}, A_{n+4}, A_{n+6}$, introduse în prima ecuație generală a sistemului (17.28), ne conduc la o formulă de recurență pentru termenul A_n :

$$(17.30) \quad b_{0n} A_n + b_{2n} A_{n-2} + b_{4n} A_{n-4} + b_{6n} A_{n-6} = 0.$$

Să punem mai departe

$$(17.31) \quad N_i = (n+i)\mu_0 + \beta_0,$$

coeficienții $b_{0n}, b_{2n}, b_{4n}, b_{6n}$ sunt dați de expresiile următoare :

$$(17.32) \left\{ \begin{aligned} & b_{0n} = n\mu_0 + \beta_0 - \frac{\beta_2^2}{N_2} - \frac{\beta_4^2}{N_4} - \frac{\beta_6^2}{N_6} + \frac{\beta_2^2 \beta_4}{N_2 N_4} + \frac{\beta_2 \beta_4 \beta_6}{N_4 N_6} + \\ & \quad + \frac{\beta_2 \beta_4 \beta_6}{N_2 N_6} - \frac{\beta_2^3 \beta_6}{N_2 N_4 N_6}, \\ & b_{2n} = \beta_2 - \frac{\beta_2 \beta_4}{N_4} - \frac{\beta_4 \beta_6}{N_4} + \frac{\beta_2 \beta_4^2}{N_2 N_4} - \frac{\beta_2^2 \beta_4 \beta_6}{N_2 N_4 N_6} + \frac{\beta_2 \beta_6^2}{N_4 N_6} + \frac{\beta_4^2 \beta_6}{N_2 N_6}, \\ & b_{4n} = \beta_4 - \frac{\beta_2 \beta_6}{N_2} + \frac{\beta_2 \beta_4 \beta_6}{N_2 N_4} - \frac{\beta_2^2 \beta_6^2}{N_2 N_4 N_6} - \frac{\beta_4 \beta_6^2}{N_2 N_4}, \\ & b_{6n} = \beta_6. \end{aligned} \right.$$

Vom vedea mai departe că, pentru cazurile practice, expresiile precedente sunt simple, însă am dat forma (17.32) pentru a conserva generalitatea problemei.

Aplicând formula de recurență (17.30) pentru $n = 1, 3, 5$, se constată că primele trei ecuații nu au aceeași formă. Într'adevăr, dacă observăm că $A_{-1} = -A_1, A_{-3} = -A_3, A_{-5} = -A_5$, obținem :

$$(17.33) \left\{ \begin{aligned} & b_{01} A_{-1} - b_{21} A_1 - b_{41} A_3 - b_{61} A_5 = \mu_0 \alpha, \\ & b_{03} A_3 + b_{23} A_1 - b_{43} A_1 - b_{63} A_3 = 0, \\ & b_{05} A_5 + b_{25} A_3 + b_{45} A_1 - b_{65} A_1 = 0. \end{aligned} \right.$$

Din a doua și a treia ecuație, se scoate ușor :

$$(17.34) \quad A_3 = -\frac{b_{23} - b_{43}}{b_{03} - b_{63}} A_1, \quad A_5 = -\left[\frac{b_{45} - b_{65}}{b_{05}} - \frac{b_{25}}{b_{05}} \frac{b_{23} - b_{43}}{b_{03} - b_{63}} \right] A_1.$$

Introducând aceste expresii în prima ecuație (17.33), obținem coeficientul A_1 , ceea ce ne permite să scriem mai departe :

$$(17.35) \quad \left\{ \begin{array}{l} \left[b_{01} - b_{21} + b_{41} \frac{b_{23} - b_{43}}{b_{03} - b_{63}} - b_{61} \frac{b_{25} - b_{45}}{b_{05} - b_{65}} + \right. \\ \left. + b_{61} \frac{b_{45} - b_{65}}{b_{05}} \right] A_1 = \mu_0 \alpha, \\ (b_{03} - b_{63})A_3 + (b_{23} - b_{43})A_1 = 0, \\ b_{05}A_5 + b_{25}A_3 + (b_{45} - b_{65})A_1 = 0, \\ \dots \\ b_{0n} A_n + b_{2n} A_{n-2} + b_{4n} A_{n-4} + b_{6n} A_{n-6} = 0. \end{array} \right.$$

Aceste formule reprezintă soluția generală a problemei, care se poate aplica, dacă se cunosc coeficienții de formă : $\beta_0, \beta_2, \beta_4, \beta_6$. Totuși determinarea circulației (determinarea coeficienților A_n) este extrem de grea dacă se aplică formulele (17.35) sub această formă.

De aceea, am făcut mai jos o analiză mai profundă a formelor de aripi utilizate în practică și am dedus pentru fiecare categorie formule simplificate.

18. STUDIUL ARIPILOR INTREBUINȚATE ÎN AVIAȚIE

Aripile întrebuintate în tehnica aeronautică au forme în plan, care se încadrează aproape riguros în desfășurarea cu patru termeni, dată de expresia (17.27). După numărul termenilor, vom distinge patru categorii mai importante de forme utilizate în mod obișnuit în aviație : forme simple cu doi termeni, aripi dreptunghiulare și trapezoidale, aripi dublu-trapezoidale și aripi de formă oarecare.

18.1. Contur cu doi termeni

Aceste forme sunt definite de relațiile :

$$(18.1) \quad \frac{c}{c_0} = \frac{\sin \theta}{\beta_0 + 2\beta_2 \cos 2\theta}, \quad \frac{-c}{c_0} = \frac{\sin \theta}{\beta_0 + 2\beta_4 \cos 4\theta},$$

în care variația lui β_2 , respectiv β_4 , ne dă diferitele forme ale conturului, astfel cum sunt indicate pe diagramele din figurile 17.1 și 18.1. Dacă se pune $\beta_2 = 0$, respectiv $\beta_4 = 0$, și $\beta_0 = 1$, se obține conturul eliptic pe care l-am studiat deja în paragraful precedent.

Se poate vedea de altfel direct, din expresiile (17.16) și (17.17), că avem $A_3 = A_5 = \dots = A_n = 0$ și că nu ne rămâne decât un singur termen :

$$(18.2) \quad A_1 = \frac{\mu_0 \alpha}{1 + \mu_0}.$$

Vom avea mai departe, aplicând relațiile (17.32) și (17.35) și neglijând termenii de al doilea ordin :

$$(18.3) \quad \left\{ \begin{array}{l} \left(\mu_0 + \beta_0 - \beta_2 - \frac{\beta_2^2}{3\mu_0 + \beta_0} \right) A_1 = \mu_0 \alpha, \\ \left(n\mu_0 + \beta_0 - \frac{\beta_2^2}{(n+2)\mu_0 + \beta_0} \right) A_n + \beta_2 A_{n-2} = 0 \end{array} \right.$$

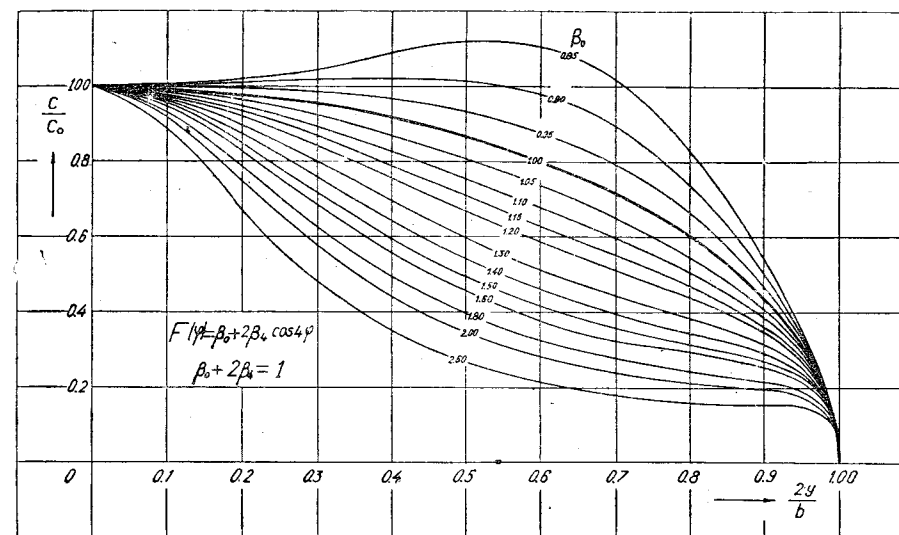


Fig. 18.1.

pentru aripile reprezentate de diagramele din figura 17.1 și respectiv :

$$(18.4) \quad \left\{ \begin{array}{l} \left(\mu_0 + \beta_0 - \frac{\beta_4^2}{3\mu_0 + \beta_0} - \frac{\beta_4^2}{5\mu_0 + \beta_0} \right) A_1 = \mu_0 \alpha, \\ \left(3\mu_0 + \beta_0 - \frac{\beta_4^2}{7\mu_0 + \beta_0} \right) A_3 - \beta_4 A_1 = 0, \\ \left(n\mu_0 + \beta_0 - \frac{\beta_4^2}{(n+4)\mu_0 + \beta_0} \right) A_n + \beta_4 A_{n-4} = 0 \end{array} \right.$$

pentru aripile reprezentate de diagramele din figura 18.1.

Forma acestei categorii de aripi are un domeniu de aplicații mai restrâns, între forma dreptunghiulară și o formă quasi-eliptică turtită la extremități.

18.2. Aripi dreptunghiulare și trapezoidale

Studiul aripilor dreptunghiulare și trapezoidale este cel mai important prin faptul că aceste aripi sunt cele mai întrebunțate în tehnica aeronautică. Ele sunt reprezentate aproape perfect printr'un polinom trigonometric cu trei termeni de forma (17.11), în care coeficienții de formă depind de raportul între coarda extremală și coarda mediană. Formulele care dau coeficienții A_n sunt foarte simple dacă se neglijează, în prealabil, termenii de ordinul al doilea :

$$(18.5) \quad \begin{cases} \left(\mu_0 + \beta_0 - \beta_2 - \frac{(\beta_2 - \beta_4)^2}{3(\mu_0 + \beta_0)} \right) A_1 = \mu_0 \alpha, \\ \left(3\mu_0 + \beta_0 - \frac{\beta_2^2}{5\mu_0 + \beta_0} - \frac{\beta_4^2}{7\mu_0 + \beta_0} \right) A_3 + \left(\beta_2 - \beta_4 - \frac{\beta_2 \beta_4}{5\mu_0 + \beta_0} \right) A_1 = 0 \\ \left((n\mu_0 + \beta_0 - \frac{\beta_2^2}{(n+2)\mu_0 + \beta_0} - \frac{\beta_4^2}{(n+4)\mu_0 + \beta_0}) A_n + \right. \\ \left. + \beta_2 \left(1 - \frac{\beta_4}{(n+2)\mu_0 + \beta_0} \right) A_{n-2} + \beta_4 A_{n-4} = 0. \right. \end{cases}$$

Dat fiind câmpul lor de aplicație, vom face o analiză mai profundă a acestei categorii de aripi. Să remarcăm de la început că desfășurarea în polinom trigonometric a expresiei

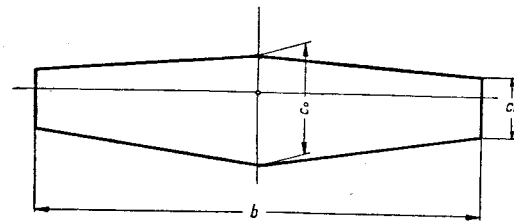


Fig. 18.2.

siei $\frac{c_0}{c} \sin \theta$ pentru conturul trapezoidal și rectangular este foarte ușoară și trei termeni sunt suficienți pentru a obține o aproximație foarte bună*). În consecință, luând trei puncte convenabil alese pe semi-anvergura aripii, fiecare trebuind să satisfacă relația

$$(18.6) \quad \frac{c_0}{c} \sin \theta = \beta_0 + \beta_2 \cos 2\theta + 2\beta_4 \cos 4\theta,$$

obținem cele trei ecuații necesare pentru determinarea coeficienților de formă. Cele mai bune rezultate vor fi obținute dacă alegem următoarele puncte :

$$(18.7) \quad \begin{cases} \frac{by}{2} = 0,924, & 0,707, & 0,383 \\ \theta = 22^\circ 30' & 45^\circ & 67^\circ 30'. \end{cases}$$

*) Aceasta este o coincidență fericită care ne permite astfel să obținem o soluție simplă și riguroasă a problemei aripilor dreptunghiulare și trapezoidale.

Dacă însemnăm cu $\frac{c_e}{c_0}$ (fig. 18.2) raportul coardei extremale față de cea centrală și prin q un coeficient egal cu

$$(18.8) \quad q = 1 - \frac{c_e}{c_0},$$

coeficienții de formă $\beta_0, \beta_2, \beta_4$, rezultând din aceste trei ecuații, vor fi dați de expresiile :

$$(18.9) \quad \begin{cases} \beta_0 = 0,5 \left(\frac{0,383}{1 - 0,924q} + \frac{0,924}{1 - 0,383q} \right), \\ 2\beta_2 = 0,707 \left(\frac{0,383}{1 - 0,924q} - \frac{0,924}{1 - 0,383q} \right), \\ 2\beta_4 = 0,5 \left(\frac{0,383}{1 - 0,924q} + \frac{0,924}{1 - 0,383q} \right) - \frac{0,707}{1 - 0,707q}. \end{cases}$$

Astfel, de exemplu, aplicând formulele precedente cazurilor particulare : $\frac{c_e}{c_0} = 1$ (aripă dreptunghiulară), $\frac{c_e}{c_0} = 0,75; 0,50; 0,25; 0,10$, formele respective sunt reprezentate perfect prin expresia trigonometrică :

$$(18.10) \quad \frac{c}{c_0} = \frac{\sin \theta}{\beta_0 + 2\beta_2 \cos 2\theta + 2\beta_4 \cos 4\theta},$$

astfel după cum se poate constata din fig. 18.3 a, b, c, d, e. Deasemenea, pentru cazul unei aripi triunghiulare (caz extrem $\frac{c_e}{c_0} = 0$) s'ar putea determina coeficienții după relațiile (18.9), însă este de preferat pentru acest caz special să căutăm coeficienți puțin diferiți :

$$(18.11) \quad \beta_0 = 2,673, \quad 2\beta_2 = 1,71, \quad 2\beta_4 = 0,171,$$

care pot reprezenta mai bine conturul aripii triunghiulare, după cum se constată din fig. 18.4.

Să aplicăm formulele (18.5) la aripa dreptunghiulară care a format obiectul principalelor cercetări executate de diferiți autori. Luând ca alungire valorile :

$$\lambda = k; 1,5k; 2k; 2,5k; 3k; 3,5k;$$

se găsește pentru $\mu_0 = \frac{k}{2\lambda}$, respectiv :

$$\mu_0 = \frac{1}{2}; \frac{1}{3}; \frac{1}{4}; \frac{1}{5}; \frac{1}{6}; \frac{1}{7}.$$

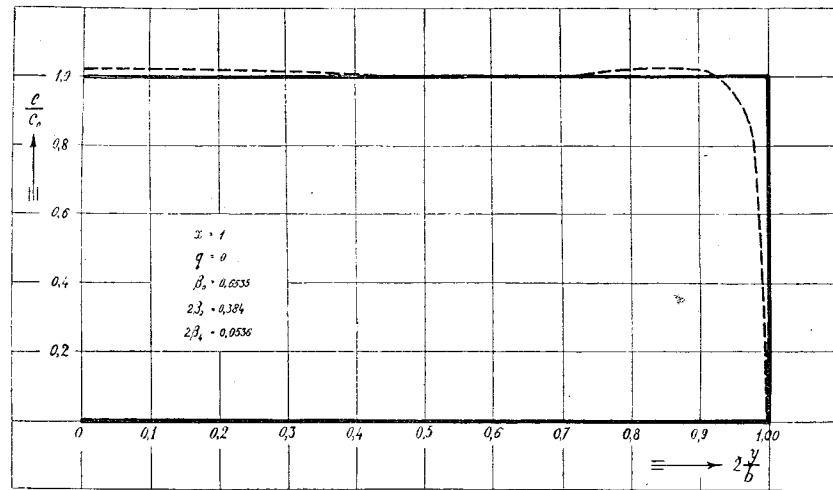


Fig. 18.3 a.

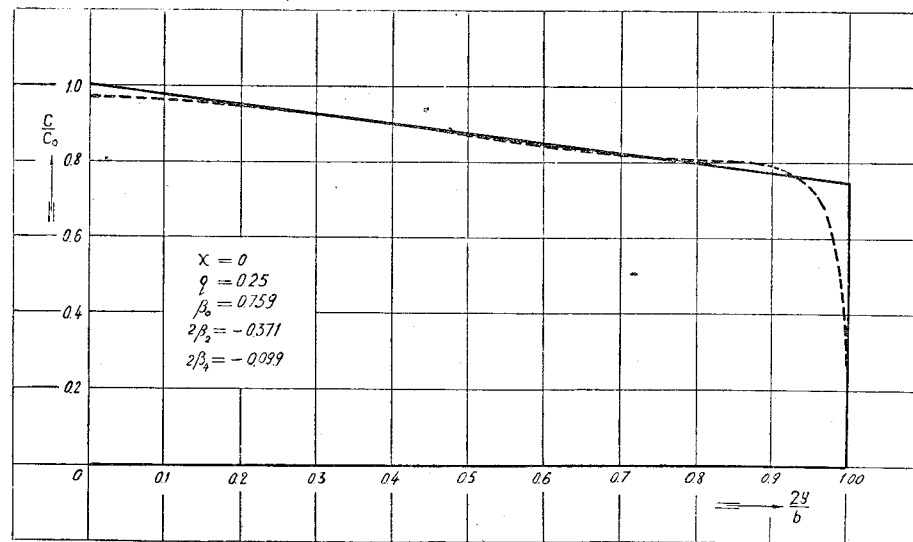


Fig. 18.3 b.

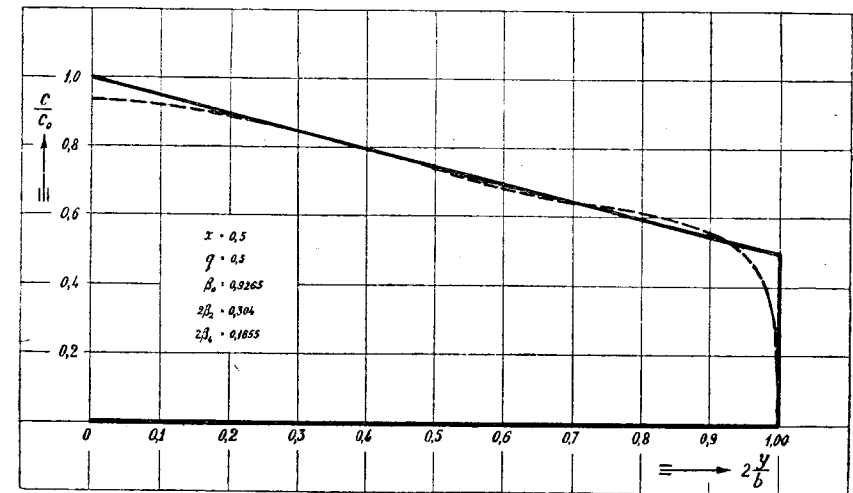


Fig. 18.3 c.

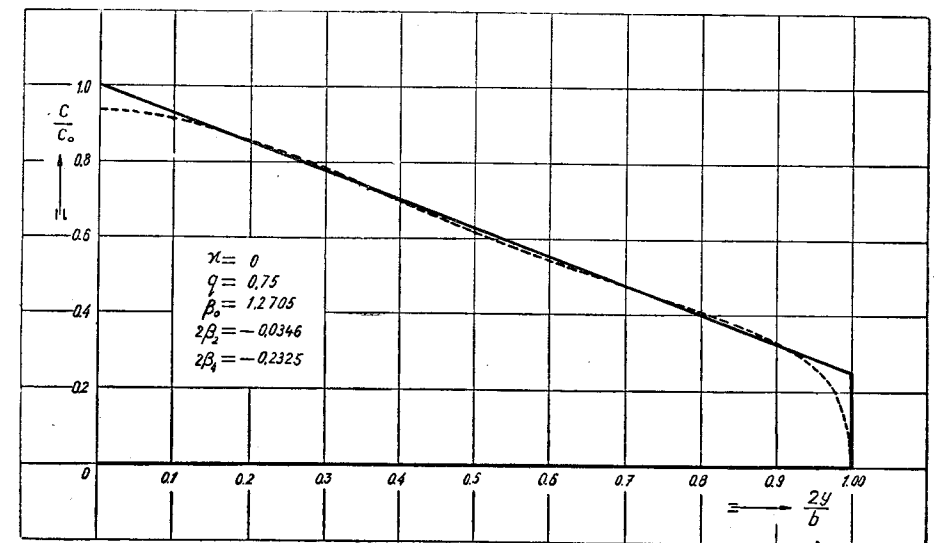


Fig. 18.3 d.

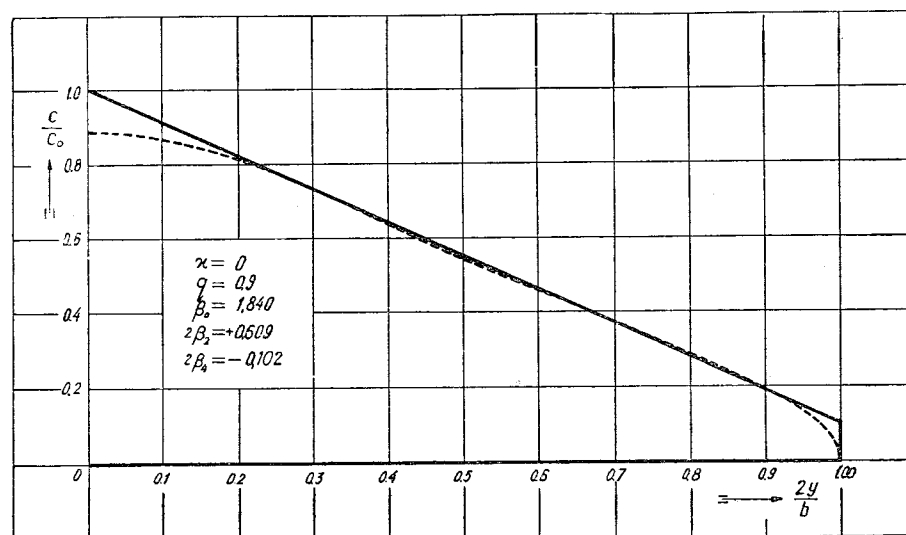


Fig. 18.3 c.

Am exprimat alungirea în funcție de coeficientul k :

$$(18.12) \quad k = \frac{1}{2} \left(\frac{dC_z}{d\alpha} \right)_{\infty},$$

care depinde, după cum se vede, de panta portanței unitare corespunzătoare unei aripi de anvergură infinită. Această pantă, care va fi teoretic egală cu $2\pi(1 + \varepsilon)$, după cum am demonstrat în capitolele precedente, se reduce practic la 0,85 – 0,90 din această valoare. Astfel, pentru calculele numerice se va lua pentru k valoarea aproximativă dată de relația (16.45):

$$(18.13) \quad k \approx 0,90 \pi,$$

în afară de cazurile când se cunoaște panta experimentală (reală) a profilului care generează aripa de anvergură infinită.

Aceasta ne permite să scriem alungirile alese în funcție de k .

Coeficienții de formă ai unei aripi dreptunghiulare sunt: $\beta_0 = 0,6535$, $2\beta_2 = -0,384$, $2\beta_4 = -0,0536$. Introducând acești coeficienți în expresiile (18.5) se obțin valorile indicate în tabela 18.I, care concordă bine cu rezultatele obținute de alți autori.

Pentru a împinge comparația și mai departe, am calculat deasemenea și coeficienții aripiilor trapezoidale având următoarele caracteristici:

$$q = 0,25; 0,50; 0,75; 1 \text{ pentru } \lambda = 2k.$$

Rezultă pentru μ_0 , care poate fi pus în funcție de q ,

$$(18.14) \quad \mu_0 = \frac{k c_0 b}{2 S \lambda} = \frac{1}{4} \frac{c_0 b}{S} = \frac{1}{2(2-q)},$$

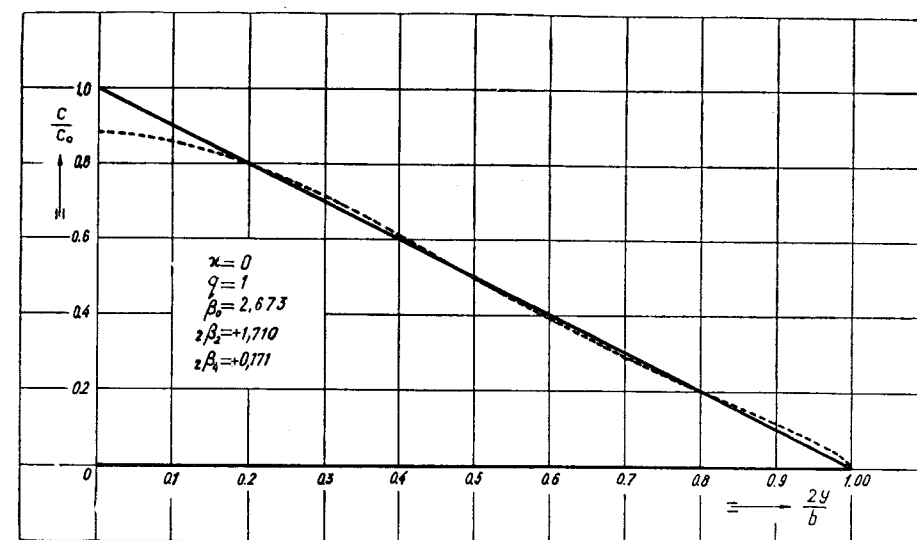


Fig. 18.4.

valorile respective:

$$\frac{1}{3,5}; \frac{1}{3}; \frac{1}{2,5}; \frac{1}{2}$$

Tabela 18.I

$\frac{1}{\mu_0}$	$\frac{A_1}{\mu_0 \alpha}$	$\frac{A_3}{\mu_0 \alpha}$	$\frac{A_5}{\mu_0 \alpha}$	$\frac{A_7}{\mu_0 \alpha}$	τ	δ
2	0,750	0,0585	0,0100	0,00086	0,100	0,023
3	0,859	0,0881	0,0177	0,00196	0,138	0,036
4	0,929	0,113	0,0250	0,00336	0,171	0,049
5	0,976	0,134	0,0324	0,00490	0,203	0,061
6	1,001	0,151	0,0393	0,00655	0,232	0,072
7	1,037	0,167	0,0489	0,00867	0,260	0,082

Rezultatele sunt indicate în tabela 18.II, unde se pot compara cu cele calculate de alți autori. Se constată un bun acord, ceea ce ne permit

să conchidem că formulele (18.5) au un caracter general și dau soluția generală a problemei aripilor dreptunghiulare și trapezoidale.

Tabela 18. II

q	$\frac{A_1}{\alpha}$	$\frac{A_3}{\alpha}$	$\frac{A_5}{\alpha}$	$\frac{A_7}{\alpha}$	τ	δ
0,00	0,2323	0,02825	0,00625	0,000840	0,17100	0,04900
0,25	0,2342	0,02045	0,00765	0,000893	0,12341	0,02562
0,50	0,2366	0,00924	0,00810	0,000624	0,08141	0,00974
0,75	0,2377	-0,00957	0,00849	-0,000240	0,06841	0,01146
1,00	0,2298	-0,04310	0,00331	0,000150	0,20891	0,10807

18.3. Contur quasi-eliptic

Trebuie să remarcăm că o anumită categorie de forme continui și quasi-eliptice este reprezentată, deasemenea, printr'un polinom cu trei termeni,

$$(18.15) \quad F(\theta) = \beta_0 + 2\beta_2 \cos 2\theta + 2\beta_4 \cos 4\theta,$$

în care coeficienții de formă sunt dați de expresiile :

$$(18.16) \quad \left\{ \begin{array}{l} \beta_0 = 0,1915 \frac{c_0}{c_3} + 0,462 \frac{c_0}{c_1}, \\ 2\beta_2 = \frac{1}{0,707} \left(\beta_0 - 0,924 \frac{c_0}{c_1} \right), \\ 2\beta_4 = \beta_0 - 0,707 \frac{c_0}{c_2} \end{array} \right.$$

și unde c_0 este coarda mediană, iar c_1, c_2, c_3 sunt respectiv coardele de abscise

$$\frac{2y}{b} = 0,383; \quad 0,707; \quad 0,924;$$

$$\theta^0 = 67^{\circ}30'; \quad 45^{\circ}; \quad 22^{\circ},30';$$

Vom reveni asupra acestui subiect în paragraful următor, care tratează cazul general.

18.4. Aripi dublu-trapezoidale

Aceste aripi, folosite curent în aviație, sunt reprezentate în general prin patru termeni :

$$(18.17) \quad F(\theta) = \beta_0 + 2\beta_2 \cos 2\theta + 2\beta_4 \cos 4\theta + 2\beta_6 \cos 6\theta$$

cu coeficienți de formă convenabil aleși.

În general β_6 este mic, după cum se va putea constata din exemplele considerate; același lucru se poate spune și despre β_4 . Aducând simplificările obișnuite și neglijând termenii de al doilea ordin, se obțin următoarele formule generale :

$$(18.18) \quad \left\{ \begin{array}{l} \left[\mu_0 + \beta_0 - \beta_2 - \frac{(\beta_2 - \beta_4)^2}{3\mu_0 + \beta_0} + \beta_6 \frac{\beta_4 - \beta_6}{5\mu_0 + \beta_0} \left(1 - \frac{\beta_2}{5\mu_0 + \beta_0} \right) - \frac{\beta_6^2}{7\mu_0 + \beta_0} \right] A_1 = \mu_0 \alpha, \\ \left[3\mu_0 + \beta_0 - \beta_6 - \frac{\beta_2^2}{5\mu_0 + \beta_0} \left(1 - \frac{\beta_1}{7\mu_0 + \beta_0} \right) - \frac{\beta_4^2}{7\mu_0 + \beta_0} - \frac{\beta_6^2}{9\mu_0 + \beta_0} \right] A_3 + \left[\beta_2 - \beta_4 - \frac{\beta_2(\beta_4 - \beta_6)}{5\mu_0 + \beta_0} \right] A_1 = 0, \\ \left[5\mu_0 + \beta_0 - \frac{\beta_2^2}{7\mu_0 + \beta_0} - \frac{\beta_4^2}{9\mu_0 + \beta_0} - \frac{\beta_6^2}{11\mu_0 + \beta_0} \right] A_5 + \\ + \beta_2 \left[1 - \frac{\beta_4}{7\mu_0 + \beta_0} \right] A_3 + \left[\beta_4 - \beta_6 - \frac{\beta_2\beta_6}{7\mu_0 + \beta_0} \right] A_1 = 0, \\ \dots \dots \dots \\ \left[n\mu_0 + \beta_0 - \frac{\beta_2^2}{(n+2)\mu_0 + \beta_0} - \frac{\beta_4^2}{(n+4)\mu_0 + \beta_0} - \frac{\beta_6^2}{(n+6)\mu_0 + \beta_0} \right] A_n + \beta_2 \left[1 - \frac{\beta_4}{(n+2)\mu_0 + \beta_0} \right] A_{n-2} + \\ + \left[\beta_4 - \frac{\beta_2\beta_6}{(n+2)\mu_0 + \beta_0} \right] A_{n-4} + \beta_6 A_{n-6} = 0. \end{array} \right.$$

Dela caz la caz, aceste formule se mai pot simplifica neglijând termenii foarte mici. Într'adevăr, pentru cazurile normale, β_4 și β_6 fiind foarte mici, se neglijează β_4^2, β_6^2 , precum și produsul lor $\beta_4\beta_6$.

Dacă notăm cu

$$(18.19) \quad x = \frac{b_1}{b}$$

raportul între partea centrală dreptunghiulară și anvergura aripii (fig. 18.5) și prin q aceeași relație ca și mai sus (18.8)

$$q = 1 - \frac{c_e}{c_0},$$

se va putea scrie pentru coarda dintr'un punct al porțiunii trapezoidale :

$$(18.20) \quad \frac{c}{c_0} = 1 - (\cos \theta - \kappa) \frac{q}{1 - \kappa}$$

Această relație este valabilă pentru porțiunea trapezoidală, iar pentru porțiunea dreptunghiulară raportul este egal cu unitatea.

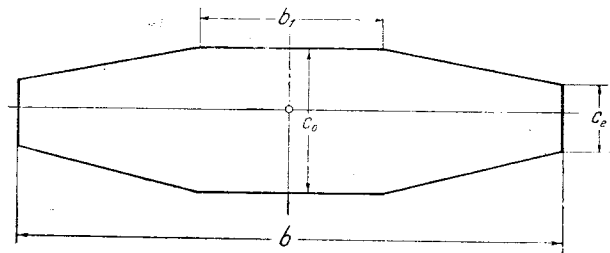


Fig. 18.5.

Notând cu e inversul acestui raport,

$$(18.21) \quad e = \frac{c_0}{c} = \frac{1 - \kappa}{1 - \kappa - (\cos \theta - \kappa)q}$$

coeficienții de formă vor fi dați de următoarele formule :

$$(18.22) \quad \begin{cases} \beta_0 = 0,0637 e_1 + 0,347 e_2 + 0,0935 e_3 + 0,1467 e_4, \\ 2\beta_2 = -0,449 e_1 - 0,201 e_3 + 0,2508 e_4, \\ 2\beta_4 = 0,0637 e_1 + 0,347 e_2 - 0,614 e_3 + 0,1467 e_4, \\ 2\beta_6 = -0,539 e_1 + 0,815 e_2 - 0,334 e_3 + 0,0434 e_4, \end{cases}$$

în care e_1, e_2, e_3, e_4 sunt scoși din expresia (18.21), luând pentru θ și $\cos \theta$ respectiv :

$$\theta = 84^\circ; 67^\circ30'; 45^\circ; 20^\circ;$$

$$(18.23) \quad \frac{2y}{b} = \cos \theta = 0,105; 0,383; 0,707; 0,940.$$

Pentru punctele care cad în porțiunea dreptunghiulară, valorile corespunzătoare ale lui e_1, e_2 sunt egale cu unitatea.

Aplicând formulele (18.22), am trasat diagramele reprezentate prin figurile 18.6 a, b, c, d, e, f, respectiv pentru $\kappa = 0,2, 0,4, 0,8$.

Se observă un acord foarte bun între formele reale și cele trasate cu coeficienții de formă scoși din expresiile (18.22).

Aceste expresii au deci un caracter general și se pot aplica pentru orice contur dublu-trapezoidal, precum și pentru aripile de formă generală pe care le vom trata mai jos.

Totuși, pentru valorile lui κ situate în jurul punctului $\kappa = 0,6$ este preferabil să se aleagă alte puncte pe anvergură și anume :

$$(18.24) \quad \begin{cases} \frac{2y}{b} = 0,105; 0,500; 0,707; 0,924 \\ \theta = 84^\circ; 60^\circ; 45^\circ; 22^\circ30'. \end{cases}$$

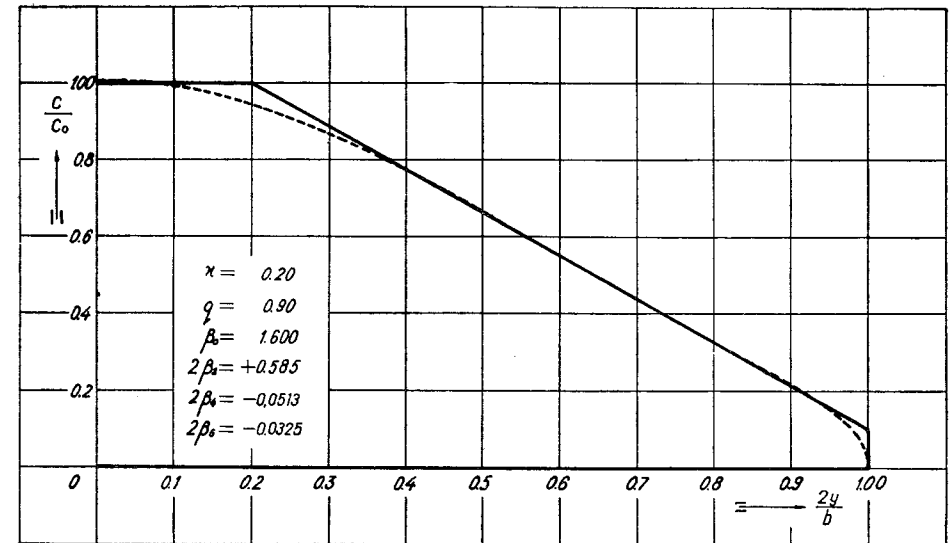


Fig. 18.6 a.

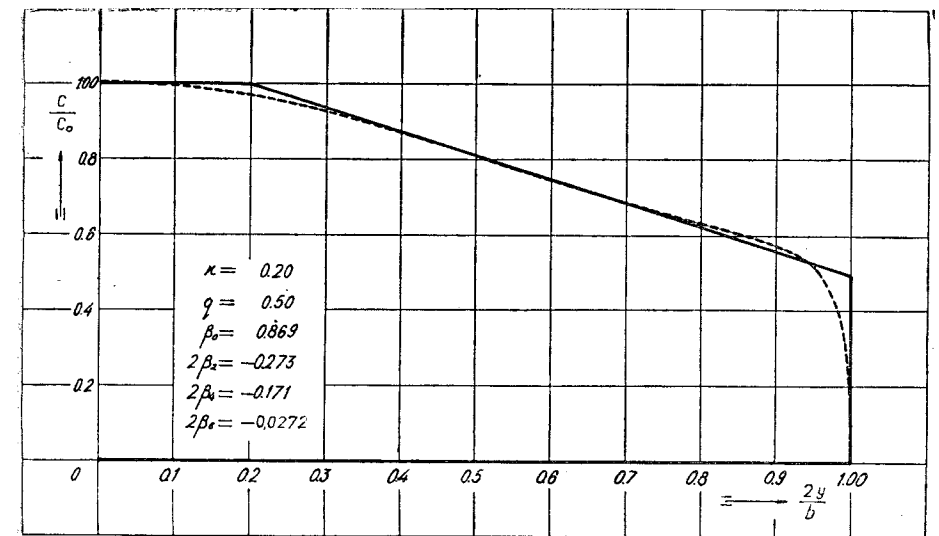


Fig. 18.6 b.

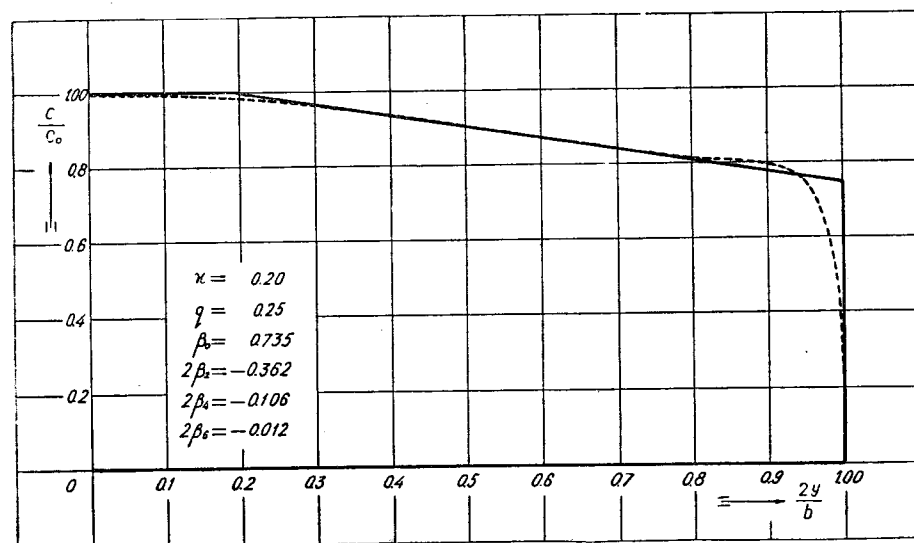


Fig. 18.6 c.

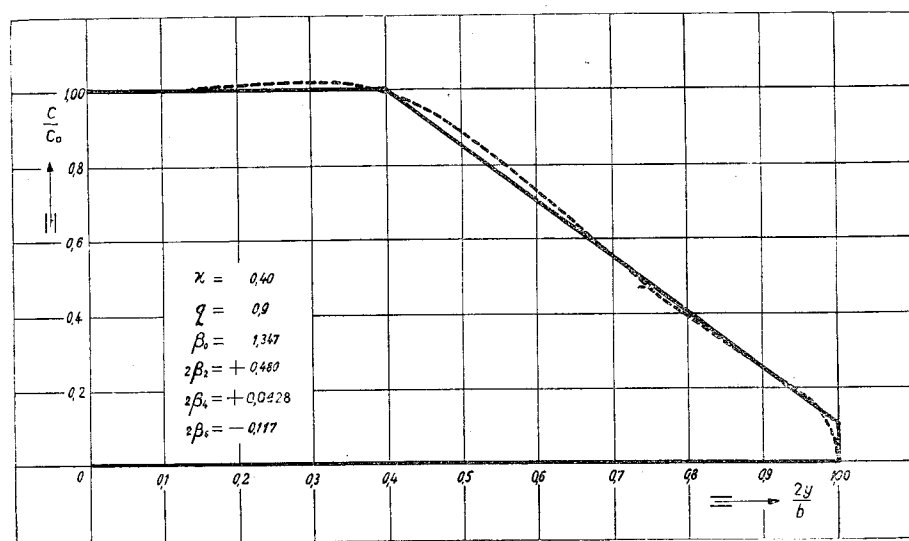


Fig. 18.6 d.

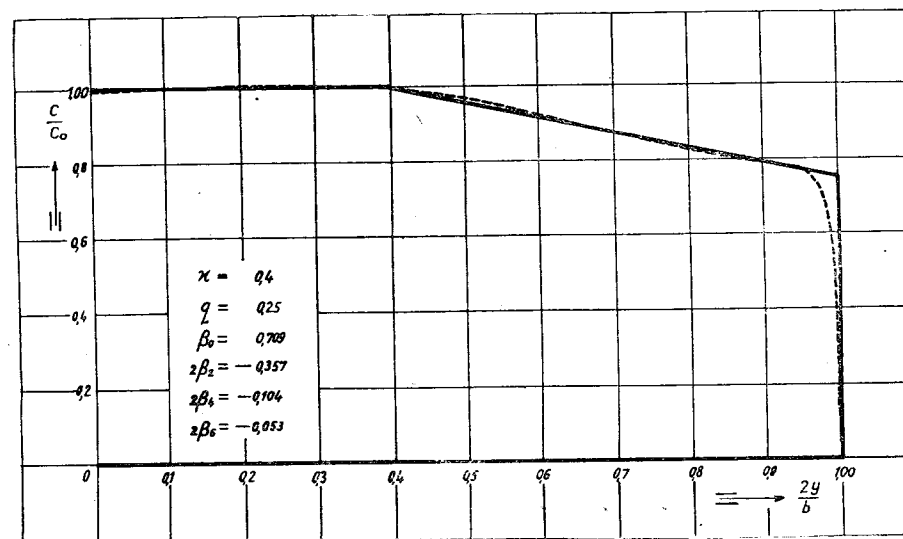


Fig. 18.6 e.

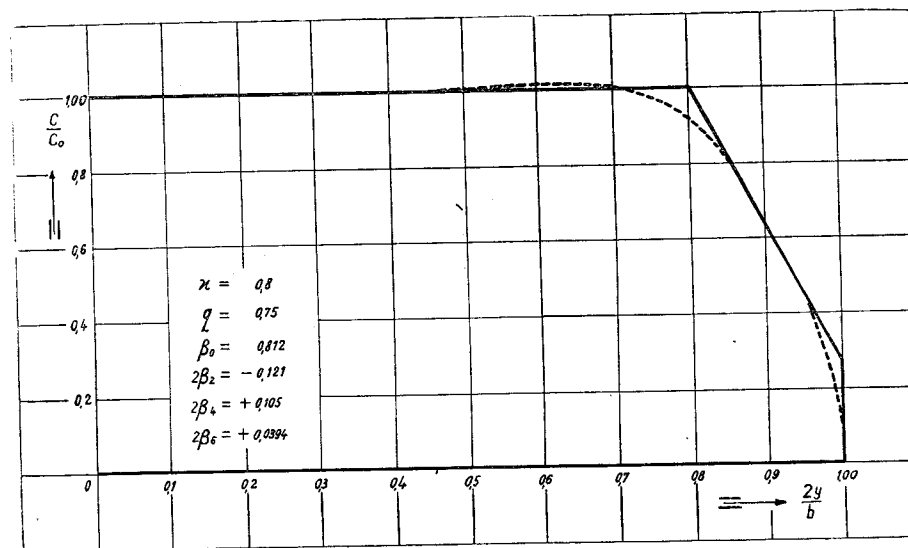


Fig. 18.6 f.

Coeficienții de formă vor fi dați în acest caz de următoarele formulă puțin diferite de cele precedente :

$$(18.25) \begin{cases} \beta_0 = + 0,1304 e_1 + 0,4085 e_2 - 0,0792 e_3 + 0,1972 e_4, \\ 2\beta_2 = - 0,502 e_1 + 0,175 e_2 - 0,397 e_3 + 0,330 e_4, \\ 2\beta_4 = + 0,1304 e_1 + 0,4085 e_2 - 0,787 e_3 + 0,1972 e_4, \\ 2\beta_6 = - 0,3155 e_1 + 0,750 e_2 - 0,511 e_3 + 0,0665 e_4. \end{cases}$$

Diagramele obținute pentru $\kappa = 0,6$ reprezentate pe fig. 18.7 a, b, c, d, ne arată un acord remarcabil între cele două forme, cea reală și cea calculată.

18.5. Aripi de formă oarecare

Adesea, formele în plan ale aripilor sunt diferite de cele studiate mai sus. În acest caz, este necesar să se determine, pe o cale oarecare, coeficienții de formă. În general, orice contur regulat sau uniform deformat (fig. 18.8) poate fi reprezentat ușor printr'un polinom $F(\theta)$ cu patru termeni, ai cărui coeficienți sunt dați de expresiile (18.22) din cazul precedent. Aceste formule dau rezultate foarte bune, după cum se constată din fig. 18.8, unde se poate compara conturul real cu diagrama calculată. Ca și în cazurile prece-

dente, e_1, e_2, e_3, e_4 reprezintă raportul $\frac{c_0}{c}$, luând pentru c coarda corespunzătoare punctelor indicate în tabloul (18.23). Adesea însă, conturul poate fi reprezentat prin trei termeni și coeficienții de formă sunt dați în acest caz de relațiile (18.16).

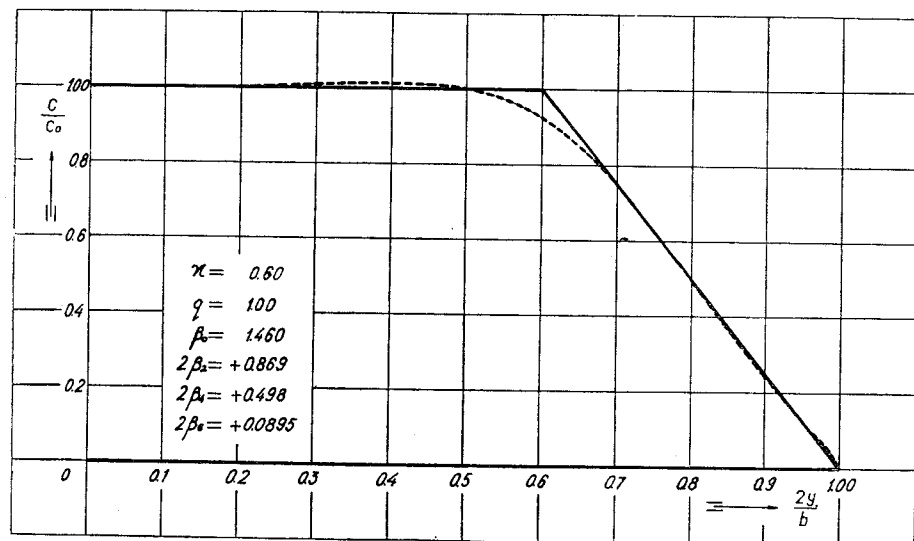


Fig. 18.7 a.

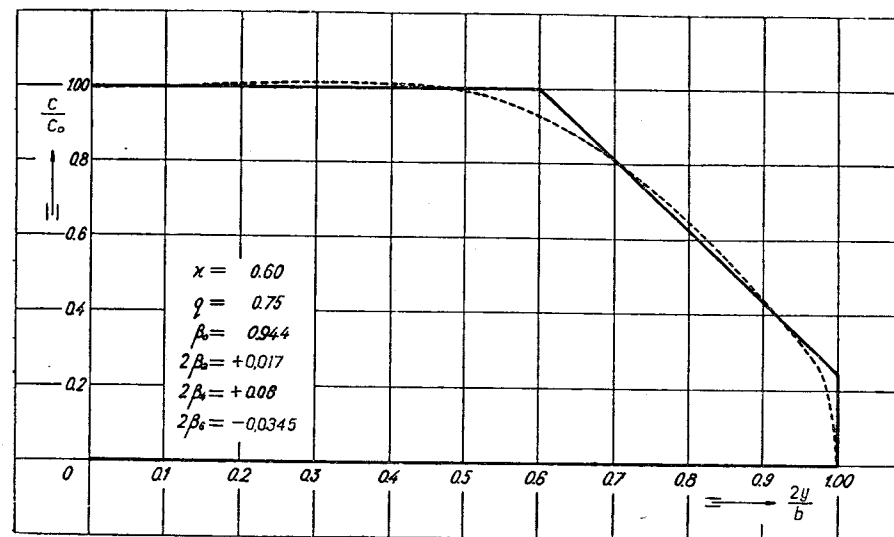


Fig. 18.7 b.

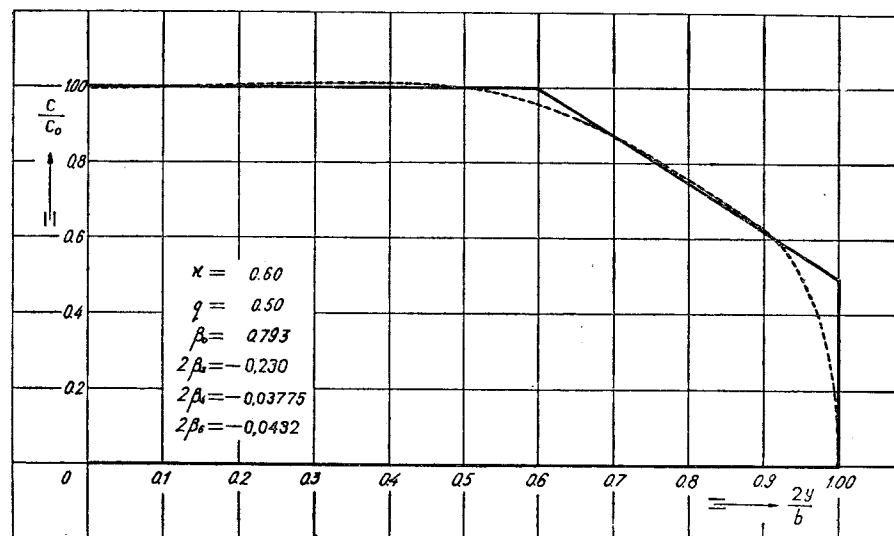


Fig. 18.7 c.

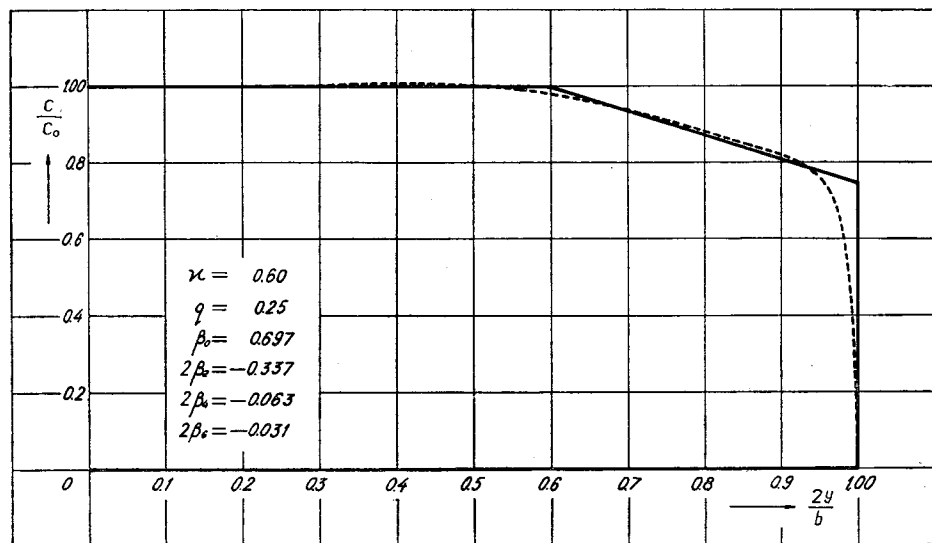


Fig. 18.7 d.

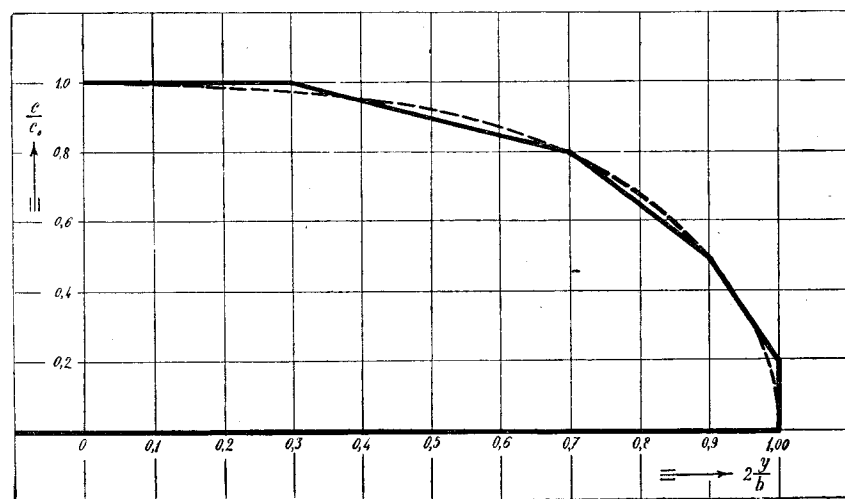


Fig. 18.8.

19. FORȚE ȘI MOMENTE AERODINAMICE

Integralele care dau forțele și momentele aerodinamice sunt ușor de efectuat prin transformarea $y = -\frac{b}{2} \cos \theta$, după cum vom vedea mai jos.

19.1. Portanța

Portanța nu depinde decât de termenul A_1 :

$$(19.1) \quad P = \rho V_0 \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \Gamma dy = \rho b^2 V_0^2 \int_0^\pi (\Sigma A_n \sin n\theta) \sin \theta d\theta = \frac{\rho}{2} V_0^2 b^2 \pi A_1.$$

Notând cu S suprafața aripii și cu λ alungirea,

$$(19.2) \quad \lambda = \frac{b^2}{S},$$

se găsește pentru portanța unitară C_z o expresie foarte simplă:

$$(19.3) \quad C_z = \frac{P}{\frac{1}{2} \rho S V_0^2} = \pi \lambda A_1 = \pi \lambda \mu_0 \frac{A_1}{\mu_0 \alpha} \alpha = 2k_\lambda \alpha.$$

Am notat cu $2k_\lambda$ panta lui C_z pentru o aripă de alungire λ , care va fi dată de formula următoare:

$$(19.4) \quad k_\lambda = \frac{\pi \lambda \mu_0}{2} \frac{A_1}{\mu_0 \alpha} = \frac{1}{2} \frac{\pi \lambda \mu_0}{\mu_0 + \beta_0 - \beta_2 - \frac{(\beta_2 - \beta_4)^2}{3\mu_0 + \beta_0}},$$

unde am înlocuit pe A_1 prin valoarea sa scoasă din ecuațiile (18.5), care reprezintă aripile dreptunghiulare, trapezoidale sau quasi-eliptice, cele mai folosite în practică. Deaceia le vom folosi curent pentru problemele ce le vom trata și vom face o mențiune specială dacă va fi vorba de alte forme. Astfel de exemplu, dacă vom avea de a face cu aripi dublu-trapezoidale sau de contur oarecare, coeficientul A_1 va fi dat de ecuațiile generale (18.18). Cele două valori nu diferă decât prin termeni de al doilea ordin.

Înlocuind pe μ_0 prin valoarea sa stabilită precedent (16.30),

$$(19.5) \quad \mu_0 = \frac{k}{2} \frac{c_0 b}{S} \frac{1}{\lambda},$$

vom putea scrie în cele din urmă o relație foarte importantă care ne va servi la trasarea variației lui C_z în funcție de unghiul de incidență:

$$(19.6) \quad \frac{k_\lambda}{k} = \frac{\pi c_0 b}{4 S} \frac{1}{\mu_0 + \beta_0 - \beta_2 - \frac{(\beta_2 - \beta_4)^2}{3\mu_0 + \beta_0}}.$$

Unghiul indus diferă în fiecare secțiune. Pentru aripa eliptică unghiul indus este constant. Prin analogie, vom defini un unghi indus mijlociu al aripii, unghiul i , care trebuie să fie scăzut din valoarea unghiului geometric α pentru a obține un unghi efectiv :

$$(19.7) \quad \alpha_e = \alpha - i.$$

Acesta corespunde pentru o aripă de anvergură infinită aceluiaș C_z obținut pentru o aripă de alungire λ :

$$(19.8) \quad C_z = 2k_\lambda \alpha = 2k\alpha_e = 2k(\alpha - i).$$

Vom avea prin urmare :

$$(19.10) \quad i = \alpha - \alpha_e = \frac{C_z}{2k_\lambda} - \frac{C_z}{2k} = \frac{\pi\lambda}{2} \left[\frac{1}{k_\lambda} - \frac{1}{k} \right] \frac{C_z}{\pi\lambda} = (1 + \tau) \frac{C_z}{\pi\lambda}.$$

Această relație fundamentală se scrie în general sub forma

$$(19.11) \quad \alpha = \alpha_e + (1 + \tau) \frac{C_z}{\pi\lambda},$$

unde τ va fi definit prin relația următoare :

$$(19.12) \quad 1 + \tau = \frac{\pi\lambda}{2} \left(\frac{1}{k_\lambda} - \frac{1}{k} \right) = \frac{1}{\mu_0} \left[\mu_0 + \beta_0 - \beta_2 - \frac{(\beta_2 - \beta_4)^2}{3\mu_0 + \beta_0} - \frac{\pi}{4} \frac{c_0 b}{S} \right]$$

sau

$$(19.13) \quad \tau = \frac{1}{\mu_0} \left[\beta_0 - \beta_2 - \frac{(\beta_2 - \beta_4)^2}{3\mu_0 + \beta_0} - \frac{\pi}{4} \frac{c_0 b}{S} \right].$$

Această expresie a lui τ este foarte importantă, deoarece ea permite să se stabilească curba C_z a unei aripi de alungire λ' în funcție de cea a unei aripi de alungire λ .

Intr'adevăr, diferența dintre incidențele geometrice $\alpha' - \alpha$ ale celor două aripi, pentru aceeași portanță unitară C_z , se scrie :

$$(19.14) \quad \alpha' - \alpha = \frac{C_z}{\pi} \left(\frac{1 + \tau'}{\lambda'} - \frac{1 + \tau}{\lambda} \right).$$

În cazul general, dacă observăm că β_6 este suficient de mare, i se poate da lui τ o expresie mai generală, care ține seamă de coeficientul A_1 scos din prima ecuație (18.18) :

$$(19.15) \quad \tau = \frac{1}{\mu_0} \left[\beta_0 - \beta_2 - \frac{(\beta_2 - \beta_4)^2}{3\mu_0 + \beta_0} - \frac{\beta_6(\beta_4 - \beta_6)}{5\mu_0 + \beta_0} \left(1 - \frac{\beta_2}{5\mu_0 + \beta_0} \right) - \frac{\beta_6^2}{7\mu_0 + \beta_0} - \frac{\pi}{4} \frac{c_0 b}{S} \right]^*)$$

*) Pentru aripile trapezoidale, se poate înlocui $\frac{c_0 b}{S}$ prin $\frac{2}{2-q}$, q fiind definit prin expresia (18.18).

Am calculat pe τ pentru aripile dreptunghiulare și trapezoidale (tabelele 18.I și 18.II pag. 227, 228), aplicând formula (19.13).

O altă formulă care se folosește adesea este următoarea :

$$(19.16) \quad \frac{4\lambda\alpha}{C_z} = \frac{4}{\pi} \frac{\mu_0\alpha}{A_1 \mu_0} = \frac{4}{\pi\mu_0} \left[\mu_0 + \beta_0 - \beta_2 - \frac{(\beta_2 - \beta_4)^2}{3\mu_0 + \beta_0} \right] = \frac{4}{\pi} \left\{ 1 + \frac{1}{\mu_0} \left[\beta_0 - \beta_2 - \frac{(\beta_2 - \beta_4)^2}{3\mu_0 + \beta_0} \right] \right\}.$$

Pentru aripa dreptunghiulară, formula devine

$$(19.17) \quad \frac{4\lambda\alpha}{C_z} = 1,273 + \frac{1,08}{\mu_0} - \frac{0,035}{\mu_0(3\mu_0 + 0,65)} = 1,273 + \frac{1,0265}{\mu_0} - \frac{0,0535}{\mu_0 + 0,22}$$

și pentru a o pune sub o formă indicată în anumite lucrări de specialitate, vom pune termenul al treilea (de altfel neglijabil), al celui de al doilea membru luând pentru μ_0 o valoare mijlocie $\mu_0 \approx 0,25$, sub forma :

$$(19.18) \quad \frac{0,0535}{\mu_0 + 0,22} \approx \frac{0,02675}{\mu_0 \left(1 + \frac{0,22}{0,25} \right)} + \frac{0,0275}{0,22 \left(1 + \frac{0,25}{0,22} \right)} = \frac{0,014}{\mu_0} + 0,057$$

și vom obține astfel formula

$$(19.19) \quad \frac{4\lambda\alpha}{C_z} = 1,33 + \frac{1,04}{\mu_0}.$$

Deasemenea, este necesar câteodată să se stabilească valoarea raportului $\frac{\lambda}{k_\lambda}$ pentru aripa dreptunghiulară, scoasă ușor din formula (19.4) :

$$(19.20) \quad \frac{\lambda}{k_\lambda} = \frac{2}{\pi} \left(1 + \frac{0,8043}{\mu_0} + \frac{0,0422}{\mu_0 + 0,22} \right),$$

sau încă,

$$(19.21) \quad \frac{\lambda}{k_\lambda} = \frac{2}{\pi} + 1,025 \frac{\lambda}{k} + \frac{0,0269}{\mu_0 + 0,22} \approx \frac{2}{\pi} + 1,05 \frac{\lambda}{k}.$$

19.2. Rezistența

Dacă se notează cu w viteza indusă, se poate scrie pentru rezistența indusă, pe care o vom nota cu R_i :

$$(19.22) \quad R_i = \rho \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} w \Gamma dy = \rho b^2 V_0^2 \int_0^{\pi} (\sum n A_n \sin n\theta) (\sum A_n \sin n\theta) d\theta = \\ = \frac{\rho}{2} b^2 V_0^2 \pi \sum n A_n^2 = \frac{\rho}{2} b^2 V_0^2 \pi A_1^2 \sum_1^n n \frac{A_n^2}{A_1^2}$$

sau, pentru rezistența indusă unitară:

$$(19.23) \quad C_{xi} = \frac{R_i}{\frac{1}{2} \rho S V_0^2} = \frac{C_z^2}{\pi \lambda} \sum_1^n \frac{n A_n^2}{A_1^2} = (1 + \delta) \frac{C_z^2}{\pi \lambda},$$

coeficientul $(1 + \delta)$ fiind dat de expresia

$$(19.24) \quad 1 + \delta = \sum_1^n \frac{n A_n^2}{A_1^2}.$$

Se vede, sub această formă, că rezistența minimă pentru o portanță dată corespunde aripii eliptice. Relația precedentă (19.24) poate fi scrisă încă:

$$(19.25) \quad \delta = \sum_2^n \frac{n A_n^2}{A_1^2}.$$

Vom observa că, pentru aripile simetrice, coeficienții de indice par sunt nuli și că, dela un număr n oarecare, coeficienții A_n^2 sunt neglijabili, astfel că expresia lui δ devine ținând seama de (18.18):

$$(19.26) \quad \delta = 3 \left[\frac{\beta_2 - \beta_4 - \frac{\beta_2(\beta_4 - \beta_6)}{5\mu_0 + \beta_0}}{3\mu_0 + \beta_0 - \beta_6 - \frac{\beta_2^2}{5\mu_0 + \beta_0}} \right]^2 + \\ + 5 \left[\frac{\beta_2}{5\mu_0 + \beta_0} \cdot \frac{\beta_2 - \beta_4 - \frac{\beta_2(\beta_4 - \beta_6)}{5\mu_0 + \beta_0}}{3\mu_0 + \beta_0 - \beta_6 - \frac{\beta_2^2}{5\mu_0 + \beta_0}} - \frac{\beta_4 - \beta_6 - \frac{\beta_2\beta_6}{7\mu_0 + \beta_0}}{5\mu_0 + \beta_0} \right]^2.$$

Pentru aripile dreptunghiulare și trapezoidale, neglijând termenii de al doilea ordin, vom avea o expresie mai simplă:

$$(19.27) \quad \delta = 3 \left(\frac{\beta_2 - \beta_4}{3\mu_0 + \beta_0} \right)^2 + 5 \left(\frac{\beta_2}{5\mu_0 + \beta_0} \cdot \frac{\beta_2 - \beta_4}{3\mu_0 + \beta_0} - \frac{\beta_4}{5\mu_0 + \beta_0} \right)^2.$$

Aplicând această ultimă formulă, obținem rezultatele indicate în tabelele 18.I și 18.II, pag. 227, 228.

19.2.1. Aripa trapezoidală optimă. Este interesant să stabilim care este trapezul de rezistență minimă. Pentru aceasta trebuie să egalăm cu zero derivata ecuației (19.27).

Trebuie să remarcăm mai întâi că valoarea minimă a lui δ , după această expresie, se găsește în ju-

rul raportului $\frac{c_e}{c_0}$, pentru

care $\beta_2 \approx \beta_4$. Din expresiile lui β_2 și β_4 (18.9), se poate găsi ușor că în acest caz avem $\beta_2 = \beta_4 = -0,105$ și $\beta_0 = 1,07$.

Dacă punem pe δ în funcție de ε :

$$(19.28) \quad \varepsilon = \beta_2 - \beta_4,$$

vom avea, presupunând că se ia în considerație numai variația lui ε ,

$$(19.29) \quad \delta = 3 \frac{\varepsilon^2}{(3\mu_0 + \beta_0)^2} + 5 \left[\frac{\varepsilon\beta_2}{(3\mu_0 + \beta_0)(5\mu_0 + \beta_0)} - \frac{\beta_4}{5\mu_0 + \beta_0} \right]^2,$$

de unde

$$(19.30) \quad \frac{d\delta}{d\varepsilon} \approx \frac{6\varepsilon}{(3\mu_0 + \beta_0)^2} + \frac{10\beta_2}{(3\mu_0 + \beta_0)(5\mu_0 + \beta_0)} \left[\frac{\varepsilon\beta_2}{(3\mu_0 + \beta_0)(5\mu_0 + \beta_0)} - \frac{\beta_4}{5\mu_0 + \beta_0} \right] = 0$$

și în consecință

$$(19.31) \quad \varepsilon \approx \frac{10}{6} \frac{3\mu_0 + \beta_0}{(5\mu_0 + \beta_0)^2} \beta_2\beta_4 \approx 0,0183 \frac{3\mu_0 + 1,07}{(5\mu_0 + 1,07)^2},$$

unde, pentru o valoare corespunzătoare unei alungiri mijlocii $\lambda = 2k$ ($\mu_0 = \frac{k}{2} \cdot \frac{1}{\lambda} = 0,25$), înlocuind pe μ_0 în expresia precedentă, se găsește în cele din urmă:

$$(19.32) \quad \varepsilon = \beta_2 - \beta_4 = 0,00623.$$

Este ușor de calculat, din relațiile (18.9), raportul $\frac{c_e}{c_0}$ care să satisfacă la această condiție. Se găsește astfel valoarea optimă a acestui raport:

$$(19.33) \quad \frac{c_e}{c_0} \approx 0,35.$$

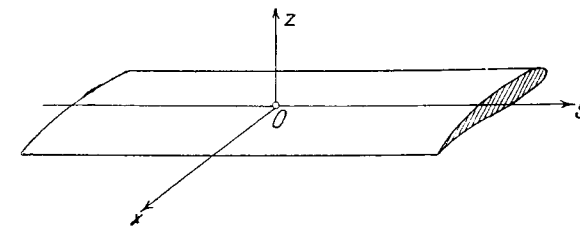


Fig. 19.1.

19.2.2. Rezistența totală. Pentru a obține rezistența totală, trebuie să adăugăm la rezistența indusă și rezistența de formă sau rezistența de profil, datorită frecării și perturbațiilor de pe extradados

$$(19.34) \quad R_0 = \frac{\rho}{2} S V_0^2 C_{x0}$$

astfel încât, vom putea scrie pentru expresia rezistenței totale :

$$(19.35) \quad R = R_0 + R_t = \frac{\rho}{2} S V_0^2 C_x,$$

în care coeficientul unitar de rezistență se va pune sub forma :

$$(19.36) \quad C_x = C_{x0} + (1 + \delta) \frac{C_z^2}{\pi \lambda}.$$

Astfel, de exemplu, dacă vrem să stabilim rezistența C'_x a unei aripi de alungire λ' în funcție de aceea a unei aripi asemănătoare de alungire λ , este ușor de văzut că putem scrie :

$$(19.37) \quad C'_x - C_x = \frac{C_z^2}{\pi} \left(\frac{1 + \delta'}{\lambda'} - \frac{1 + \delta}{\lambda} \right).$$

Această formulă ne permite să trecem dela o aripă de alungire λ la o aripă de alungire λ' .

Formulele (19.14) și (19.37) sunt formulele fundamentale ale aripilor monoplane de anvergură finită și diferă foarte puțin de formulele practice (16.47) și (16.49) pe care le-am stabilit mai înainte.

19.3. Momente aerodinamice

Dacă aripa este raportată la un sistem drept $Oxyz$ (fig. 19.1) având axa Ox paralelă cu axa longitudinală a avionului, Oz normală pe această axă (axă verticală) și Oy paralelă cu anvergura, momentele aerodinamice L , M și N în raport cu aceste axe vor fi stabilite după cum urmează :

19.3.1. Momentul în jurul axei Ox : L . Acest moment, care se numește moment de ruluu, este dat de integrala :

$$(19.38) \quad L = \rho V_0 \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} y \Gamma dy = -\frac{\rho}{2} V_0^2 b^3 \int_0^\pi (\Sigma A_n \sin n\theta) \sin \theta \cos \theta d\theta = \\ = -\frac{\rho}{2} V_0^2 b^3 \frac{\pi}{4} A_2.$$

Notând cu c_m coarda mijlocie, momentul unitar are o expresie foarte simplă :

$$(19.39) \quad K_l = \frac{L}{\frac{1}{2} \rho S V_0^2 c_0} = \frac{c_m}{c_0} \frac{\pi}{4} \lambda^2 A_2.$$

Vom aplica aceste formule mai departe ; trebuie să remarcăm numai că pentru aripile simetrice acest moment este nul ($A_2 = 0$).

19.3.2. Momentul în jurul axei Oy : M . Axa în raport cu care se exprimă momentul M , numit moment de tangaj sau picaaj, este paralelă cu anvergura. Să luăm ca punct de reper focarul profilului din secțiunea mediană.

Momentul de portanță nulă M_0 sau coeficientul unitar K_{m0} este dat de integrala următoare, unde s'a notat cu C_{m0} momentul unitar al profilului din fiecare secțiune :

$$(19.40) \quad K_{m0} = \frac{M_0}{\frac{1}{2} \rho S V_0^2 c_0} = \frac{1}{S c_0} \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} C_{m0} c^2 dy = \frac{c_0 b}{S} \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} C_{m0} \left(\frac{c}{c_0} \right)^2 \frac{dy}{b}.$$

Dacă profilele sunt geometrice asemenea ($C_m z = ct$) și dacă punem

$$(19.41) \quad \gamma = \frac{c}{c_0}, \quad \eta = \frac{y}{b},$$

vom avea

$$(19.42) \quad K_{m0} = C_{m0} \frac{c_0 b}{S} \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \gamma^2 d\eta.$$

În cece privește focarul F_a al aripii, el este în planul său de simetrie la o distanță f_a de focarul secțiunii mediane, dată de expresia :

$$(19.43) \quad f_a P = \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} f dP = \rho V_0 \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} f \Gamma dy = \rho V_0^2 b^2 \int_0^\pi f (\Sigma A_n \sin n\theta) \sin \theta d\theta,$$

în care f reprezintă distanța focarului F al fiecărei secțiuni (F se află aproximativ la o distanță egală cu 0,25 din coardă începând dela bordul de atac) la o dreaptă paralelă cu Oy și trecând prin focarul secțiunii mediane F_0 .

Se vede că focarul F_a este centrul de greutate al liniei focarelor având Γ drept densitate în fiecare punct.

Expresia (19.43) se mai poate pune sub forma următoare :

$$(19.44) \quad f_a = \frac{2\lambda}{C_z} \int_0^\pi f (\Sigma A_n \sin n\theta) \sin \theta d\theta$$

și dacă presupunem că linia focarelor este o dreaptă care face unghiul ν cu axa F_0y (aripa trapezoidală sau aripa dreptunghiulară în săgeată, etc.) se poate pune

$$(19.45) \quad f = \gamma \operatorname{tg} \nu = -\frac{b}{2} \operatorname{tg} \nu \cos \theta$$

și integrala precedentă devine :

$$(19.46) \quad \left\{ \begin{aligned} f_a &= \frac{2\lambda b \operatorname{tg} \nu}{C_z} \left(\frac{A_1}{3} + \frac{A_3}{5} - \frac{A_5}{21} + \frac{A_7}{45} + \dots \right) \approx \\ &\approx \frac{2b \operatorname{tg} \nu}{3\pi} \left[1 - \frac{3}{5} \frac{\beta_2 - \beta_4}{3\mu_0 + \beta_0} \right] \end{aligned} \right.$$

Astfel, prin urmare, momentul unitar de tangaj $K_m(F_0)$ în raport cu axa de referință (trecând prin focarul secțiunii mediane) este dată de expresia :

$$(19.47) \quad K_m(F_0) = K_{m_0} + \frac{f_a}{c_0} C_z = K_{m_0} + 2 \frac{c_m}{c_0} \lambda^2 \operatorname{tg} \nu \left(\frac{A_1}{3} + \frac{A_3}{5} - \frac{A_5}{21} + \frac{A_7}{45} \right) \\ = K_{m_0} + \frac{2}{3} \frac{b}{c_0} \frac{\operatorname{tg} \nu}{\pi} C_z \left[1 - \frac{3}{5} \frac{\beta_2 - \beta_4}{3\mu_0 + \beta_0} \right],$$

în care c_m este coarda medie.

19.3.3. Moment în jurul axei Oz : N . Intr'un mod analog se calculează momentul în jurul axei Oz ; acest moment se numește moment de girație și este dat de formula următoare :

$$(19.48) \quad N = \rho \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} w \Gamma y dy = \frac{\rho}{2} V_0^2 b^3 \int_0^\pi (\sum_n A_n \sin n\theta) (\sum_n A_n \sin n\theta) \cos \theta d\theta = \\ = \frac{\rho}{2} V_0^2 b^3 \frac{\pi}{4} \sum_{p=1}^{n-1} (2p+1) A_p A_{p+1}.$$

În general, expresia momentului de girație se pune sub forma următoare :

$$(19.49) \quad \frac{N}{L} = \frac{1}{A_2} \sum_{p=1}^{n-1} (2p+1) A_p A_{p+1} = 3A_1 + 5A_3 + \frac{A_4}{A_2} (7A_3 + 9A_5) + \\ + \frac{A_6}{A_2} (11A_5 + 13A_7) + \dots$$

Pentru aripile simetrice momentul N este nul, ca și L de altfel; nu este tot astfel pentru aripile deformate de aripioare pentru care formulele precedente găsesc o aplicație directă. În general, pentru orice perturbație sau fenomen care face ca mișcarea să fie asimetrică, momentele L și N sunt diferite de zero și vor fi date de formulele (19.48) și (19.49).

20. VERIFICĂRI EXPERIMENTALE ASUPRA ARIPILOR DE ANVERGURĂ FINITĂ

Formulele teoretice pe care le-am stabilit în paragrafele precedente sunt în foarte bun acord cu experiența, după cum vom vedea mai jos, comparând rezultatele experimentale cu rezultatele teoretice. Astfel, de exemplu, referindu-ne la cercetările experimentale pe care le-am executat la Institutul Aerotehnic de la Saint-Cyr [4] vom compara diferitele formule teoretice referitoare la distribuția portanței dealungul anvergurii, variația presiunii în funcție de alungire, portanță, rezistență indusă, momente, etc., cu rezultatele corespunzătoare experimentale.

20.1. Distribuția portanței

Aripa eliptică, după cum am văzut mai sus, prezintă un interes deosebit, atât practic cât și teoretic; de aceea, am considerat ca foarte important să verificăm dacă distribuția circulației este eliptică, după cum o arată riguros teoria. Pentru a evita influența micșorării portanței experimentale față de cea teoretică a unei aripi de alungire infinită, care a fost pusă în evidență de altfel în paragraful 9, se consideră portanța totală experimentală și se compară distribuția teoretică a acestei portanțe cu cea reală. Avem în fiecare secțiune, notând cu Γ_e circulația experimentală :

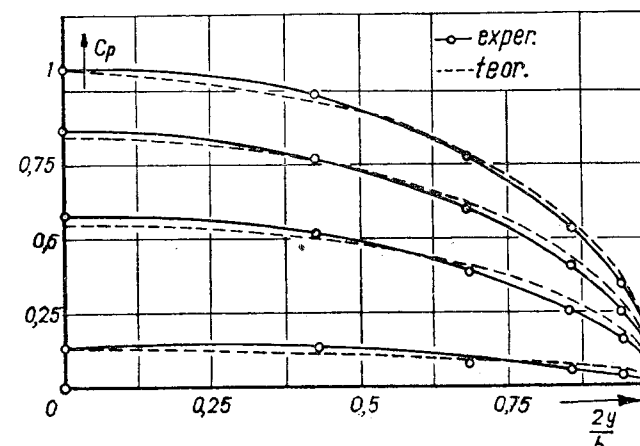


Fig. 20.1.

$$(20.1) \quad \frac{dP}{dy} = \rho V_0 \Gamma_e,$$

unde $\frac{dP}{dy}$ se poate determina prin integrarea grafică a presiunilor. Pentru a obține coeficienți fără dimensiuni, vom pune

$$(20.2) \quad C_p = \frac{1}{\frac{1}{2} \rho V_0^2 c_0} \cdot \frac{dP}{dy},$$

relație care exprimă variația experimentală a portanței unitare. Se poate constata pe fig. 20.1 că există un acord foarte bun între curbele teoretice și cele experimentale.

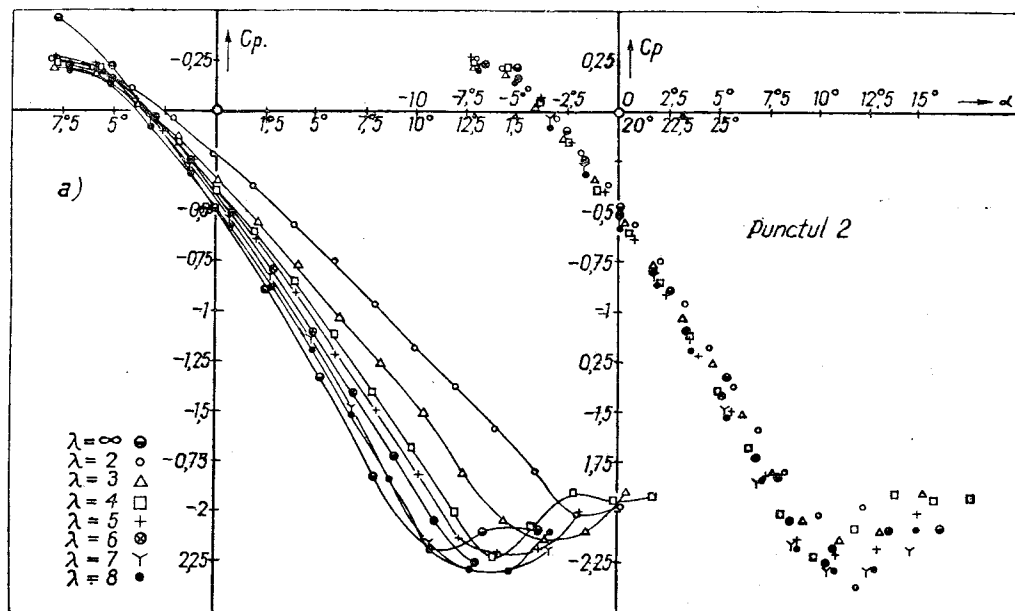


Fig. 20.2 a.

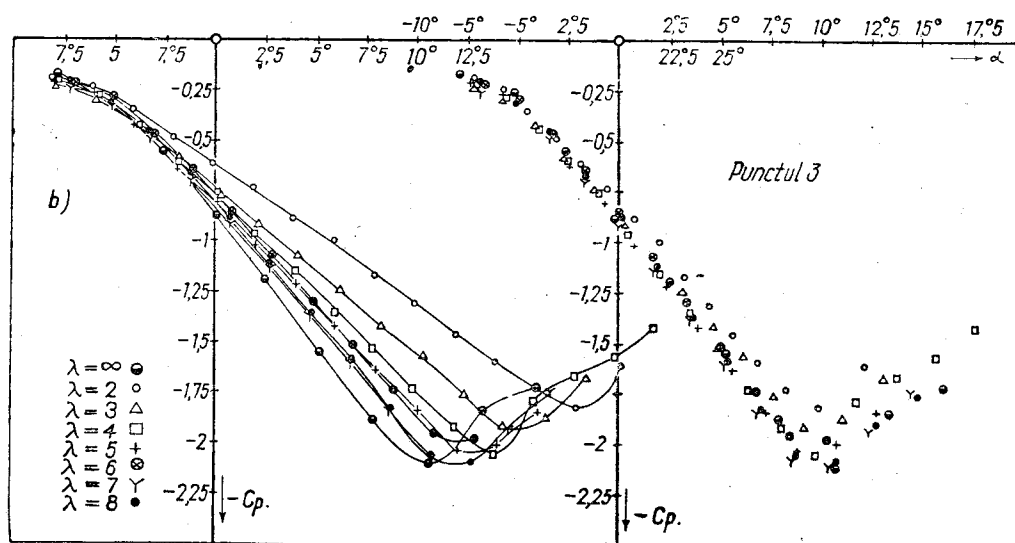


Fig. 20.2 b.

20.2. Variația presiunii în funcție de alungire

Să considerăm o secțiune oarecare a unei aripi dreptunghiulare de alungire λ , fie de exemplu secțiunea mediană, și să trasăm variația presiunii într'un punct al conturului în funcție de unghiul de incidență. Această variație depinde de alungire. Într'adevăr, luând acelaș profil arătat în fig. 9.1 și presiunile în punctele 2 și 3 pe extrados, se vede (fig. 20.2 a,b), că variația coeficientului unitar de presiune:

$$(20.3) \quad C_p = \frac{p - p_0}{\frac{1}{2} \rho V_0^2} = 1 - \frac{V^2}{V_0^2},$$

în funcție de unghiul de incidență α , este diferită pentru fiecare alungire. Dacă se trasează aceleași presiuni (adică coeficientul unitar C_p) în funcție de unghiul de incidență efectiv $\alpha_e = \alpha - i$, în care incidența indusă diferă dela o alungire la alta, punctele se regrupează aproximativ în jurul unei aceleași curbe, ceea ce este conform cu teoria.

20.3. Portanța globală

În fig. 20.3 sunt reprezentate diagramele $C_z = f(\alpha)$ pentru aripile dreptunghiulare de diferite alungiri, dela $\lambda = 2$ până la $\lambda = \infty$. Aplicând

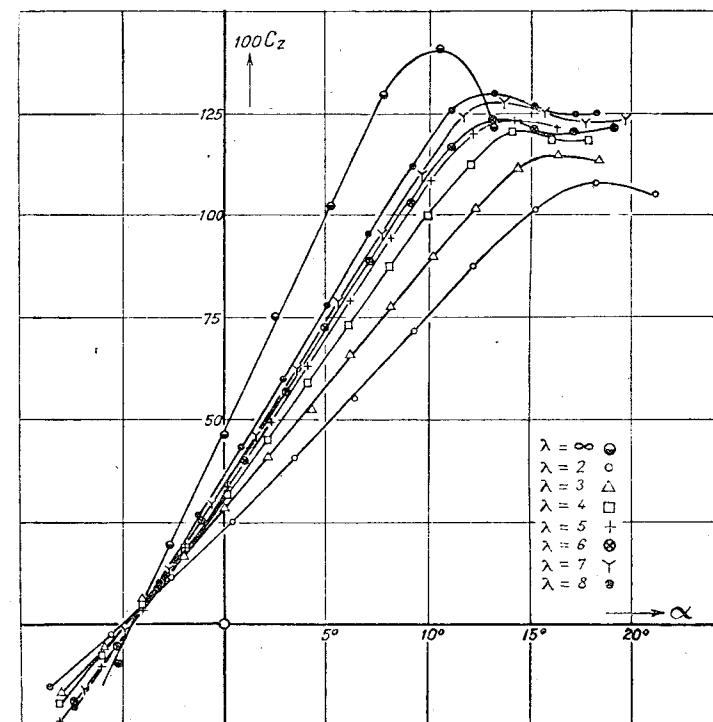


Fig. 20.3.

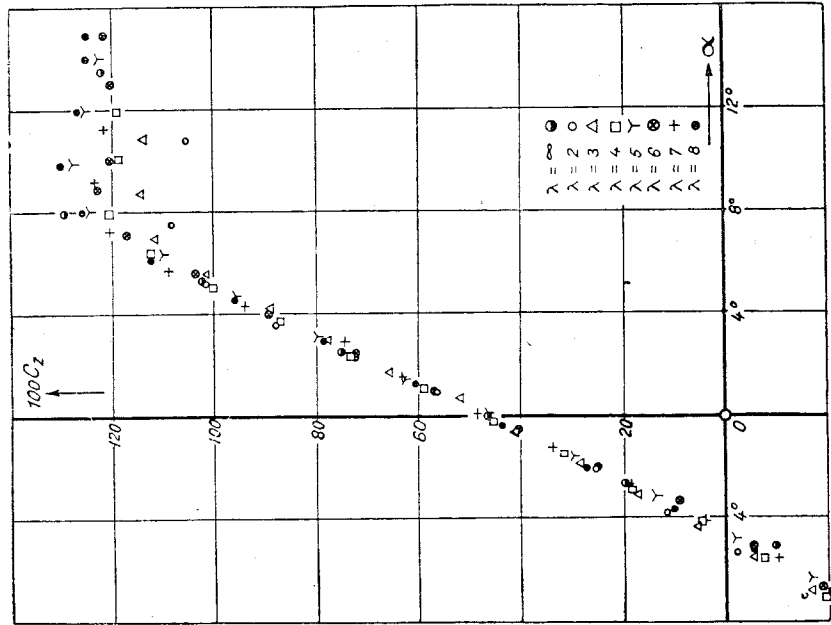


Fig. 20.4 a

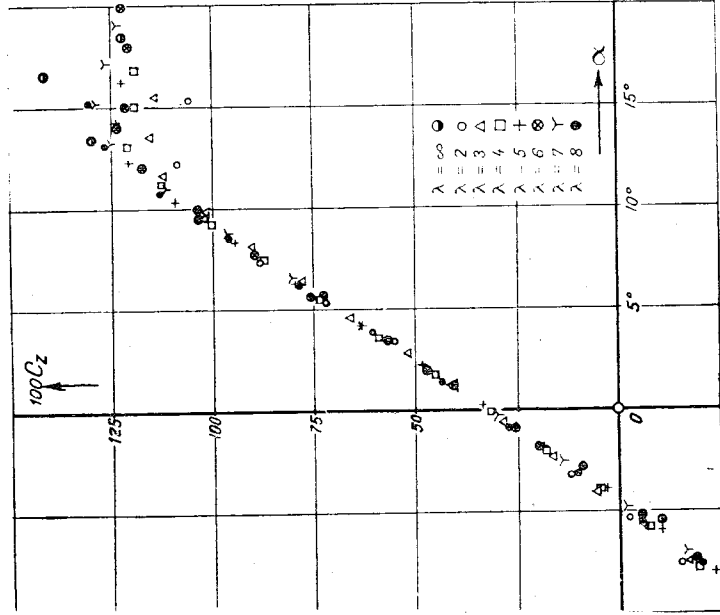


Fig. 20.4 b.

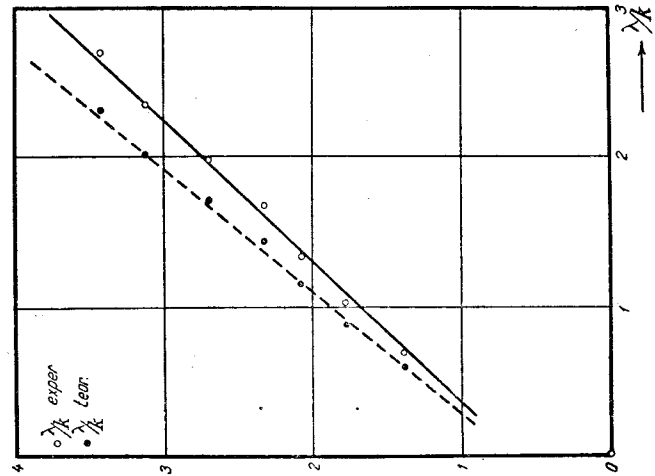


Fig. 20.5.

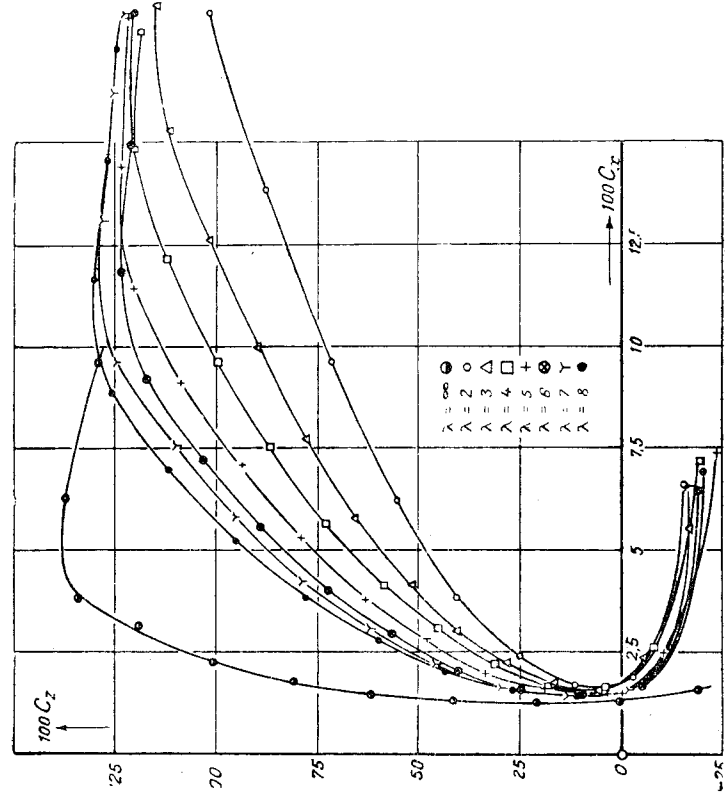


Fig. 20.6.

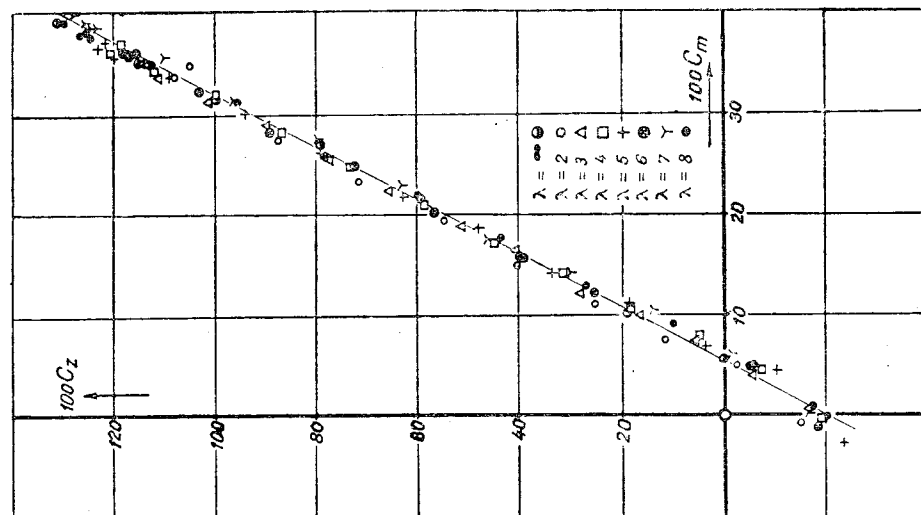


Fig. 20.8.

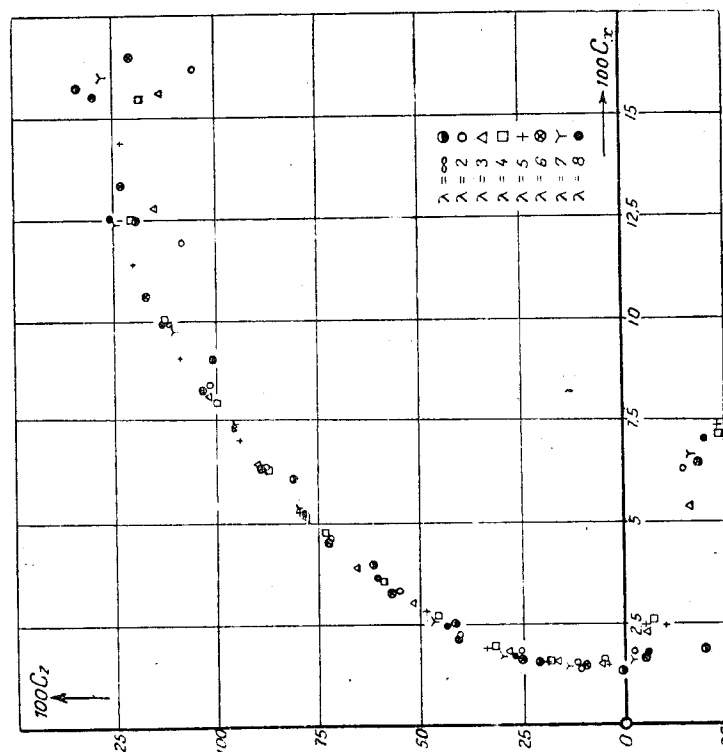


Fig. 20.7.

formula (19.14), punctele experimentale corespunzătoare acestor diverse alungiri se reduc la valorile respective ale alungirii $\lambda = 5$ (fig. 20.4 b). Se constată un acord foarte bun între teorie și experiență, de unde rezultă că formulele teoretice pot fi aplicate riguros la toate problemele practice ale tehnicii aeronautice. O altă verificare interesantă este formula (19.21)

$$(20.4) \quad \frac{\lambda}{k_\lambda} = \frac{2}{\pi} + 1,05 \frac{\lambda}{k}$$

Panta experimentală k_e dedusă din măsurile globale $C_z = f(\alpha)$ pe o aripă de anvergură infinită (fig. 19.1) este egală cu 3,01, aproximativ 0,86 din cea teoretică. Luând deci $k_e = 3,01$ iar pentru k_λ panta care rezultă din curbele experimentale, valorile $\frac{\lambda}{k_\lambda}$ găsite, puse în funcție de $\frac{\lambda}{k_e}$, cad riguros pe curba teoretică (fig. 20.5).

20.4. Rezistența indusă

Curbele $C_z = f(C_x)$, care se numesc polare, sunt reprezentate în fig. 20.6. Cu ajutorul formulei (19.37), punctele experimentale se reduc în jurul unei curbe corespunzătoare alungirii $\lambda = 5$ (fig. 20.7). Și aici acordul este foarte satisfăcător, iar formulele teoretice stabilite sunt perfect valabile pentru aplicațiile practice.

20.5. Momentul M

După formula (19.40), momentul unitar K_{m_0} al aripii este egal cu momentul C_{m_0} al profilului pentru toate alungirile. Pentru aripile dreptunghiulare drepte focarul F_a al aripii se suprapune pe cel al secțiunii mediane F_0 , astfel că momentul unitar C_{m_0} are aceeași expresie, $C_m = C_{m_0} + 0,25 C_z$, pentru toate alungirile. Aceasta este de altfel confirmat de experiență (fig. 20.8).

20.6. Observație finală

Concordanța teoriei aripilor de anvergură finită cu experiența este foarte bună pentru incidențele obișnuite. Totuși, substituirea unei linii portante în locul unei suprafețe portante este o aproximație destul de îndrăzneată.

Experiențele arată totuși că pentru alungirile $\lambda \geq 2$ influența profunzimii este neglijabilă, această ipoteză este deci apropiată de fenomenul real. Pentru $\lambda < 2$ ipoteza n'ar fi valabilă și aproximația făcută ar putea fi prohibitivă, după cum vom vedea mai jos la tratarea problemei alungirilor mici.

21. CÂMP DE VITESE INDUSE ȘI DE FLECȚIUNEA CURENTULUI IN AVAL

Pentru diversele aplicații, ca de exemplu pentru biplanul de anvergură finită sau pentru studiul scurgerii în dreptul ampenajelor, este necesar să cunoaștem câmpul de viteze induse produs de sistemul de vârtejuri legate și libere. Pentru aceasta vom stabili câteva formule privitoare la această problemă, tratând diversele cazuri care se prezintă în practică.

Trebuie să remarcăm, dela început, că sistemul de vârtejuri legate și libere este foarte complex și că simplificările pe care le-am adus, considerând un filet turbionar portant (ipoteza liniei portante) și o pânză plană de vârtejuri în spatele aripii, nu reprezintă decât o primă aproximație a problemei, care duce la o soluție tot aproximativă, însă suficientă pentru aplicațiile practice.

Această aproximație va fi utilizată curent pentru a stabili câmpul de viteze în jurul aripii. Se mai poate aduce încă o aproximație, considerând două nuclee marginale de vârtejuri, care înlocuiesc pânza de vârtejuri. Această ultimă aproximație este bazată pe un fenomen real pe care îl vom studia mai jos.

21.1. Transformarea pânzei de vârtejuri libere în două nuclee turbionare marginale.

Vârtejurile libere care formează teoretic o pânză plană nu rămân în echilibru stabil; pânza se destramă, se înfășoară în jurul ei însăși și la o distanță mică în spatele aripii se transformă în două nuclee turbionare (fig. 21.1). La o distanță mare în aval, mișcarea într'un plan normal la axele vârtejurilor este aceea studiată anterior (§ 3.6); în consecință, câmpul de viteze este ușor de stabilit atâta timp cât distanța este suficient de mare pentru a neglija influența vârtejurilor legate.

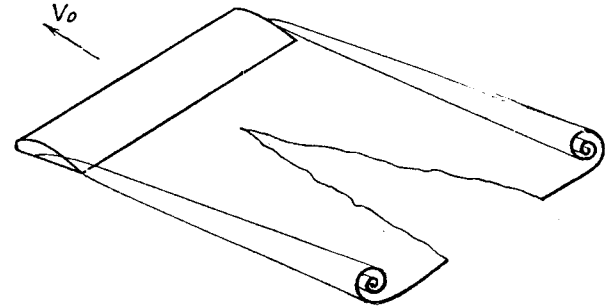


Fig. 21.1.

În planul aripii fenomenul poate fi reprezentat schematic ca în fig. 21.2, unde distanța între axele nucleelor va fi dată printr'un raționament simplu. Într'adevăr, intensitatea turbionară a unui nucleu este egală cu circulația secțiunii mediane, Γ_0 . Se poate deci asimila aripa cu un filet turbionar de intensitate constantă și egală cu Γ_0 dealungul anvergurii reduse b' , de unde rezultă pentru portanță

$$(21.1) \quad P = \rho V_0 \Gamma_0 b' = \rho V_0 \int_B^A \Gamma dy = \frac{\rho}{2} V_0^2 b^2 \pi A_1.$$

Mai departe, înlocuind pe Γ_0 prin valoarea sa scoasă din expresia (17.2), unde $\theta = \frac{\pi}{2}$,

$$(21.2) \quad \Gamma_0 = 2V_0 b (A_1 - A_3 + A_5 - A_7 + \dots),$$

obținem următorul raport între anvergura redusă b' și anvergura reală b :

$$(21.3) \quad z = \frac{b'}{b} = \frac{\pi}{4} \frac{A_1}{A_1 - A_3 + A_5 - A_7 + \dots}$$

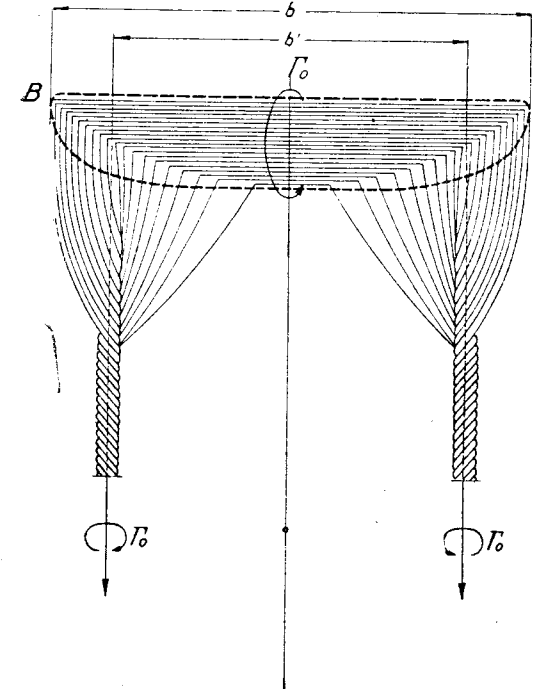


Fig. 21.2.

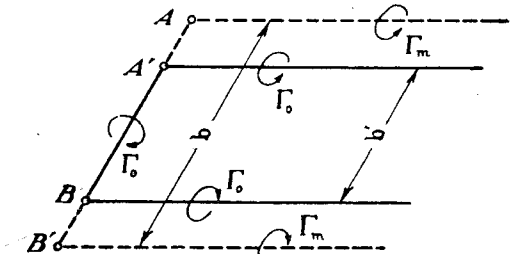


Fig. 21.3.

Așa dar, pentru a determina câmpul de viteze în jurul unei aripi, putem asimila sistemul de vârtejuri libere legate cu un filet turbionar în formă de potcoavă de anvergură egală cu b' și intensitate Γ_0 , egală cu circulația din secțiunea mediană (fig. 21.3).

Pentru problemele speciale totuși, pe care le vom menționa când va fi cazul, potcoava va avea b ca anvergură și Γ_m ca intensitate turbionară; această

intensitate va fi egală cu circulația mijlocie, repartizată uniform pe toată anvergura.

21.1.1. Diametrul nucleului turbionar. Pentru a cunoaște câmpul de viteze real, este necesar adesea să se calculeze raza nucleelor marginale. În acest scop ne vom referi la expresia (3.59) a energiei cinetice datorită a două nuclee turbionare și la relația (16.6) între energia cinetică și rezistența indusă. Din aceste două formule rezultă, punând $b' = \alpha b$,

$$(21.4) \quad \rho \frac{\Gamma_0^2}{2\pi} \left[\ln \frac{\alpha b - r_0}{r_0} + \frac{1}{4} \right] = R_i = \frac{\rho}{2} b^2 V_0^2 \pi A_1^2 (1 + \delta),$$

unde δ este dat de formula (19.25).

Avem însă, din (19.1) și (21.1):

$$(21.5) \quad \Gamma_0 = \frac{P}{\rho V_0 b'} = \frac{\frac{1}{2} \rho V_0^2 b^2 \pi A_1}{\rho V_0 \kappa b} = \frac{\pi}{2\kappa} V_0 b A_1,$$

de unde rezultă A_1 în funcție de Γ_0 , pe care îl înlocuim în expresia (21.4) pentru a obține în cele din urmă:

$$(21.6) \quad \ln\left(\kappa \frac{b}{r_0} - 1\right) + \frac{1}{4} = 4\kappa^2 (1 + \delta).$$

Să aplicăm această formulă la aripa eliptică, unde $\kappa = \frac{\pi}{4}$ și $\delta = 0$; vom avea, notând cu $d = 2r_0$ diametrul nucleului:

$$(21.6 \text{ bis}) \quad \frac{d}{b} = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{10} = 0,157.$$

Observând că coeficientul κ corespunzător altor forme de aripi variază foarte puțin în jurul lui $\frac{\pi}{4}$ și că δ este neglijabil, formula (21.6) poate fi considerată ca valabilă pentru orice aripă simetrică de anvergură finită.

21.2. Viteze induse în cazul unei circulații uniform repartizate pe anvergură

Dacă circulația este uniformă dealungul anvergurii, am văzut că sistemul se reduce la o potcoavă formată de aripă și de două vârtejuri marginale de aceeași intensitate turbionară. În general vom nota cu Γ circulația și cu b anvergura; vom face mențiune specială când va fi vorba de circulația mediană Γ_0 și de anvergura redusă b' .

Să considerăm acum un punct P de coordonate x, y, z ; vom scrie relațiile următoare (fig. 21.4):

$$(21.7) \quad \left\{ \begin{array}{l} \operatorname{tg} \gamma_1 = \frac{\sqrt{x^2 + z^2}}{\frac{b}{2} - y}, \quad \operatorname{tg} \gamma_2 = \frac{\sqrt{x^2 + z^2}}{\frac{b}{2} + y}, \\ \operatorname{tg} \gamma_3 = \frac{\sqrt{\left(\frac{b}{2} - y\right)^2 + z^2}}{x}, \quad \operatorname{tg} \gamma_4 = \frac{\sqrt{\left(\frac{b}{2} + y\right)^2 + z^2}}{x}, \\ \operatorname{tg} \sigma_1 = \frac{z}{x}, \quad \operatorname{tg} \sigma_2 = \frac{z}{\frac{b}{2} - y}, \quad \operatorname{tg} \sigma_3 = \frac{z}{\frac{b}{2} + y}. \end{array} \right.$$

Să aplicăm acum formula lui BIOT-SAVART fiecărui vârtej rectiliniu BA, AA', BB' ; vom avea:

$$(21.8) \quad V_1 = \frac{\Gamma}{4\pi \sqrt{x^2 + z^2}} (\cos \gamma_1 + \cos \gamma_2)$$

îndreptată după normala la planul PAB ,

$$(21.9) \quad V_2 = \frac{\Gamma}{4\pi \sqrt{\left(\frac{b}{2} - y\right)^2 + z^2}} (1 + \cos \gamma_3)$$

îndreptată după normala la planul PAA' și

$$(21.10) \quad V_3 = \frac{\Gamma}{4\pi \sqrt{\left(\frac{b}{2} + y\right)^2 + z^2}} (1 + \cos \gamma_4)$$

îndreptată după normala la planul PBB' . Să notăm cu u, v, w componentele vitesei totale ($\vec{V} = \vec{V}_1 + \vec{V}_2 + \vec{V}_3$) după axele Ox, Oy, Oz ; vom avea (fig. 21.4) respectiv

$$(21.11) \quad \begin{aligned} u &= V_1 \sin \sigma_1, \\ v &= -V_2 \sin \sigma_2 + V_3 \sin \sigma_3, \\ w &= -V_1 \cos \sigma_1 - \\ &\quad - V_2 \cos \sigma_2 - V_3 \cos \sigma_3. \end{aligned}$$

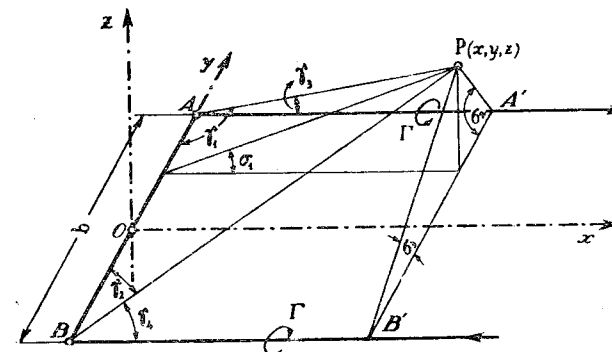


Fig. 21.4.

Se pot înlocui funcțiile trigonometrice prin relațiile precedente (21.7) și obținem astfel pentru componentele vitesei totale (u, v, w) expresii în funcție de x, y, z .

Dacă punctul P se află pe planul Oxy , avem $u = v = 0$ și viteza totală se reduce la o singură componentă w :

$$(21.12) \quad w = -\frac{\Gamma}{4\pi} \left[\frac{1 \pm \sqrt{1 + \frac{\left(\frac{b}{2} - y\right)^2}{x^2}}}{\frac{b}{2} + y} + \frac{1 \pm \sqrt{1 + \frac{\left(\frac{b}{2} + y\right)^2}{x^2}}}{\frac{b}{2} + y} \right],$$

unde semnul plus corespunde unui x pozitiv iar semnul minus unui x negativ.

Dacă punctul P se găsește chiar pe axa Ox ($y = 0$), formula precedentă devine :

$$(21.13) \quad w = -\frac{\Gamma}{\pi b} \left[1 \pm \sqrt{1 + \left(\frac{b}{2x}\right)^2} \right] = -\frac{\Gamma}{\pi b} \left[1 \pm \frac{\sqrt{1 + \left(\frac{2x}{b}\right)^2}}{\frac{2x}{b}} \right].$$

Aceste formule ne vor servi pentru determinarea deflecțiunii curentului în spatele aripii.

Foarte departe în aval influența vârtejului legat este neglijabilă și mișcarea plană care rezultă este aceea datorită a două vârtejuri indefinite. În acest caz, notând cu $x = y + iz$ variabila complexă, se poate scrie expresia bine cunoscută a vitesei complexe :

$$(21.14) \quad \frac{df}{dx} = v - iw = -\frac{i\Gamma}{2\pi} \left(\frac{1}{x - \frac{b}{2}} - \frac{1}{x + \frac{b}{2}} \right) =$$

$$= -\frac{i\Gamma}{2\pi} \left[\frac{1}{\left(y - \frac{b}{2}\right) + iz} - \frac{1}{\left(y + \frac{b}{2}\right) + iz} \right] =$$

$$= -\frac{i\Gamma}{2\pi} \left[\frac{\left(y - \frac{b}{2}\right) - iz}{\left(y - \frac{b}{2}\right)^2 + z^2} - \frac{\left(y + \frac{b}{2}\right) - iz}{\left(y + \frac{b}{2}\right)^2 + z^2} \right],$$

de unde se deduce ușor v și w :

$$(21.15) \quad v = \frac{\Gamma}{2\pi} \left[\frac{z}{\left(\frac{b}{2} + y\right)^2 + z^2} - \frac{z}{\left(\frac{b}{2} - y\right)^2 + z^2} \right],$$

$$w = -\frac{\Gamma}{2\pi} \left[\frac{\frac{b}{2} - y}{\left(\frac{b}{2} - y\right)^2 + z^2} + \frac{\frac{b}{2} + y}{\left(\frac{b}{2} + y\right)^2 + z^2} \right].$$

Aceste formule vor fi folosite la studiul biplanului. Trebuie să observăm că viteza indusă în planul Oyz (fig. 21.4) este jumătate din valoarea precedentă.

21.3. Viteze induse în cazul unei distribuții eliptice a circulației.

Este foarte greu să se stabilească o formulă generală pentru viteza indusă într'un punct oarecare; această problemă este însă foarte simplă

dacă punctul se găsește departe în spatele aripii. În acest caz influența vârtejului legat este neglijabilă și mișcarea devine plană.

Potențialul mișcării este identic cu acela al unei plăci subțiri normală pe curentul $2w_0$, însă trebuie să scădem potențialul datorit acestei viteze însăși :

$$(21.16) \quad f(x) = -i2w_0 \sqrt{x^2 - \frac{b^2}{4}} + i2w_0 x = -i2w_0 \left(\sqrt{x^2 - \frac{b^2}{4}} - x \right),$$

de unde rezultă

$$(21.17) \quad \frac{df}{dx} = v - iw = -i2w_0 \left(\frac{x}{\sqrt{x^2 - \frac{b^2}{4}}} - 1 \right) =$$

$$= -i2w_0 \left[\frac{y + iz}{\sqrt{(y + iz)^2 - \frac{b^2}{4}}} - 1 \right].$$

Să punem (fig. 21.5)

$$(21.18) \quad x = y + iz = re^{i\theta}, \quad x - \frac{b}{4} = r_1 e^{i\theta_1}, \quad x + \frac{b}{4} = r_2 e^{i\theta_2};$$

vom putea scrie, astfel

$$(21.19) \quad v - iw = -i2w_0 \left[\frac{re^{i\theta}}{\sqrt{r_1 r_2} \cdot e^{i\frac{\theta_1 + \theta_2}{2}}} - 1 \right] =$$

$$= -i2w_0 \left[\frac{r}{\sqrt{r_1 r_2}} \cos\left(\theta - \frac{\theta_1 + \theta_2}{2}\right) - 1 \right] +$$

$$+ 2w_0 \frac{r}{\sqrt{r_1 r_2}} \sin\left(\theta - \frac{\theta_1 + \theta_2}{2}\right).$$

Pe AB avem $\theta = \frac{\theta_1 + \theta_2}{2} = \pm \frac{\pi}{2}$ și în cosecintă $w = -2w_0$, ceea ce este în concordanță cu punctul de plecare.

Pentru a pune expresia vitesei în funcție de circulația centrală, se aplică relația (16.26)

$$(21.20) \quad w_0 = \frac{\Gamma_0}{2b}.$$

În afară de AB , însă tot pe Oy , vom avea $v = 0$ și

$$(21.21) \quad w = 2w_0 \left(\frac{y}{\sqrt{y^2 - \frac{b^2}{4}}} - 1 \right)$$

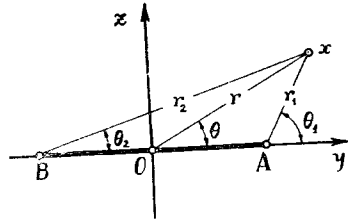


Fig. 21.5.

21.4. Deflecțiunea curentului în dreptul ampenajelor

Este de mare importanță pentru Mecanica Avionului să cunoaștem acțiunea curentului asupra ampenajelor. Acestea se găsesc într'un câmp de viteze datorit vârtejurilor legate și libere ale aripii așezate în față. Problema constă deci în a stabili influența acestor viteze induse, în afară bine înțeles de curentul general V_0 . Fie u, v, w , aceste viteze induse pe care le presupunem foarte mici față de V_0 ; mărirea pe care ele o aduc curentului general este neglijabilă chiar pentru u care este paralelă cu V_0 . Viteza laterală v nu dă decât o deviație laterală, care n'are nici o influență asupra ampenajului orizontal; deasemenea nu are nici o influență asupra ampenajului vertical dacă el este așezat în centru, deoarece $v = 0$ în acest punct, și dă o mică incidență laterală, dacă el este așezat lateral, la o oarecare distanță.

Cât despre viteza indusă verticală w , care nu joacă niciun rol pentru ampenajele verticale, ea are o influență directă și foarte importantă asupra ampenajelor orizontale.

Intr'adevăr, viteza w abate în jos curentul V_0 cu un unghi δ care se numește unghi de deflecțiune,

$$(21.22) \quad \delta \approx \frac{w}{V_0}$$

Pentru a calcula acest unghi, vom trata problema în două ipoteze:

a) Prima constă în a presupune că vârtejurile libere formează o pânză turbionară în spatele aripii, astfel cum am considerat până acum în problemele precedente.

b) A doua se bazează pe faptul că pânza de vârtejuri, din cauza instabilității, se desface în două și fiecare parte se înfășoară în jurul ei însăși formând astfel două nuclee de vârtejuri marginale, pe care le-am studiat în început (21.1).

21.4.1. Deflecțiunea curentului în ipoteza unei pânze plane de vârtejuri. Astfel, după cum am mai arătat, se formează în spatele aripii o pânză de vârtejuri care se desprinde dela bordul de fugă și se îndreaptă paralel cu curentul înspre infinit aval. Presupunem că ampenajul se găsește într'un punct E ; să calculăm componenta w a vitezei induse în acest punct. În general problema este foarte complicată, pe de o parte fiindcă distribuția circulației dealungul anvergurii este oarecare și pe de altă parte, din cauză că distanța ampenajului în spatele aripii nu poate fi considerată suficient de mare pentru a admite o scurgere plană în jurul pânzei de vârtejuri.

În cazul însă când ampenajul se găsește chiar pe axa pânzei, calculele duc la rezultate explicite.

Intr'adevăr, să considerăm o fâșie $d\Gamma$ la distanța y de centru și fie D distanța la punctul E în spatele aripii (fig. 21.6); viteza indusă normală pe planul pânzei este dată de formula cunoscută:

$$(21.23) \quad w_1 = -\frac{1}{4\pi} \int_B^A \frac{1 + \cos \gamma}{y} d\Gamma$$

Vârtejul legat ne dă o viteză indusă de aceeași direcție cu cea precedentă și egală cu

$$(21.24) \quad w_2 = \frac{1}{4\pi} \int_B^A \frac{\Gamma \cos \gamma}{r^2} dy = \frac{1}{4\pi D} \int_B^A \Gamma \cos \gamma d\gamma,$$

unde γ este unghiul făcut de dreapta care unește punctul E cu punctul y de pe anvergura și de EO . Aripa este materializată prin linia portantă reprezentând vârtejul Γ . Prin ipoteză, se va lua ca linie portantă locul geometric al centrelor de presiune. Această linie variază după forma aripii și după unghiul de incidență; pentru a simplifica problema, este necesar să se stabilească o linie mijlocie rectilinie, paralelă cu anvergura (normală la planul de simetrie) și trecând prin centrul de greutate al liniei portante a aripii reale, la aproximativ o treime dela bordul de atac al secțiunii mediane. Astfel, prin urmare, distanța D nu are

sens decât dela bordul de ieșire al secțiunii mediane*) unde valoarea sa D_0 pentru o aripă normală de alungire $\lambda = 6$ va fi aproximativ:

$$(21.25) \quad D_0 = \frac{2}{3} c_m = \frac{2}{3} \frac{b}{\lambda} = \frac{1}{9} b.$$

*) Vom calcula mai jos pe o altă cale viteza indusă în apropiere de aripă.

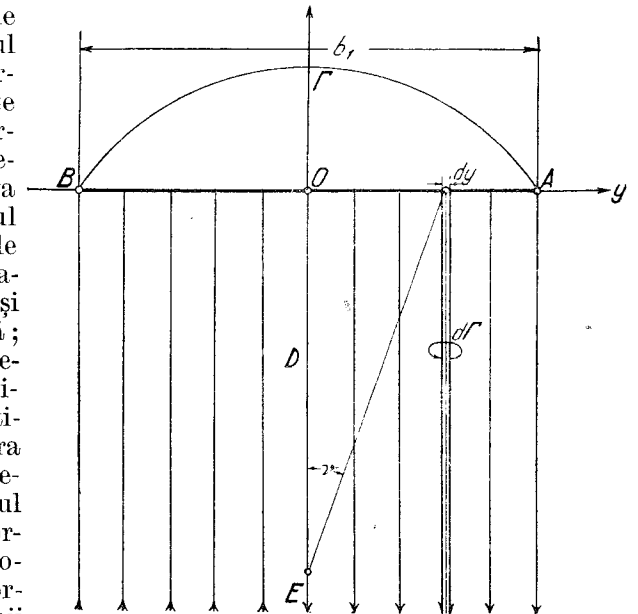


Fig. 21.6.

Cu această remarcă să revenim la viteza indusă și să observăm că ea imprimă curentului în aval o deflecțiune δ :

$$(21.26) \quad \delta \approx \frac{w}{V_0} = \frac{w_1}{V_0} + \frac{w_2}{V_0} = \delta_1 + \delta_2.$$

Pentru calculul viteselor w_1 și w_2 , înlocuind Γ prin expresia sa (17.2), vom avea respectiv:

$$(21.27) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{w_1}{V_0} &= A_1 - 3A_3 + 5A_5 - \dots + (-1)^{\frac{n-1}{2}} nA_n - \\ &\quad - \frac{1}{4\pi V_0} \int_B^A \frac{\cos \gamma}{y} d\Gamma = \sum_1^n (-1)^{\frac{n-1}{2}} nA_n + \\ &\quad + \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \frac{\sum nA_n \cos n\theta d\theta}{\cos \theta \sqrt{1 + \frac{b^2}{4D^2} \cos^2 \theta}}, \\ \frac{w_2}{V_0} &= -\frac{1}{4\pi DV_0} \int_B^A \sin \gamma d\Gamma = \frac{1}{\pi} \frac{b^2}{4D^2} \int_0^\pi \frac{\cos \theta \sum nA_n \cos n\theta}{\sqrt{1 + \frac{b^2}{4D^2} \cos^2 \theta}} d\theta. \end{aligned} \right.$$

Unghiul total de deflecțiune, punând

$$(21.28) \quad \varepsilon = \frac{2D}{b},$$

va avea expresia:

$$(21.29) \quad \delta = \sum (-1)^{\frac{n-1}{2}} nA_n + \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \left(1 + \frac{\cos^2 \theta}{\varepsilon^2}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum nA_n \frac{\cos n\theta}{\cos \theta}\right) d\theta.$$

Remarcând mai departe că numărul n este impar ($n = 2p + 1$ pentru aripile simetrice), vom avea

$$(21.30) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{\cos n\theta}{\cos \theta} &= \frac{\cos(2p+1)\theta}{\cos \theta} = 2 [\cos 2p\theta - \cos(2p-2)\theta + \\ &\quad + \cos(2p-4)\theta - \dots], \end{aligned} \right.$$

de unde rezultă

$$(21.31) \quad \begin{aligned} \sum nA_n \frac{\cos n\theta}{\cos \theta} &= (A_1 - 3A_3 + 5A_5 - 7A_7 + \dots) + \\ &\quad + 2(3A_3 - 5A_5 + 7A_7 - \dots) \cos 2\theta + 2(5A_5 - 7A_7 + \\ &\quad + 9A_9 - \dots) \cos 4\theta + 2(7A_7 - 9A_9 + \dots) \cos 6\theta + \dots \end{aligned}$$

Desfășurând pe de altă parte în serie FOURIER expresia de sub semnul radical (21.29),

$$(21.32) \quad \left(1 + \frac{\cos^2 \theta}{\varepsilon^2}\right)^{\frac{1}{2}} = \left(1 + \frac{1}{2\varepsilon^2}\right)^{\frac{1}{2}} \left(1 + \frac{\cos 2\theta}{1 + 2\varepsilon^2}\right)^{\frac{1}{2}} = \\ = \left(1 + \frac{1}{2\varepsilon^2}\right)^{\frac{1}{2}} \sum_0^m C_{2m} \cos 2m\theta,$$

vom avea în definitiv:

$$(21.33) \quad \delta = A_1 \left\{ \left(1 - 3\frac{A_3}{A_1} + 5\frac{A_5}{A_1} - 7\frac{A_7}{A_1} + \dots\right) + \sqrt{1 + \frac{1}{2\varepsilon^2}} \left[\left(1 - 3\frac{A_3}{A_1} + \right. \right. \right. \\ \left. \left. + 5\frac{A_5}{A_1} - 7\frac{A_7}{A_1} + \dots\right) C_0 + \left(3\frac{A_3}{A_1} - 5\frac{A_5}{A_1} + 7\frac{A_7}{A_1} - \dots\right) C_2 + \right. \\ \left. \left. + \left(5\frac{A_5}{A_1} - 7\frac{A_7}{A_1} + \dots\right) C_4 + \left(7\frac{A_7}{A_1} - 9\frac{A_9}{A_1} + \dots\right) C_6 \right] \right\},$$

sau încă

$$(21.34) \quad \delta = \frac{C_z}{\pi\lambda} \left\{ \left(1 - 3\frac{A_3}{A_1} + 5\frac{A_5}{A_1} - 7\frac{A_7}{A_1} \dots\right) + \right. \\ \left. + \sqrt{1 + \frac{1}{2\varepsilon^2}} \left[C_0 - 3\frac{A_3}{A_1} (C_0 - C_2) + 5\frac{A_5}{A_1} (C_0 - C_2 + C_4) - \right. \right. \\ \left. \left. - 7\frac{A_7}{A_1} (C_0 - C_2 + C_4 - C_6) + \dots \right] \right\}.$$

Să observăm mai departe că $5\frac{A_5}{A_1}$, $7\frac{A_7}{A_1}$, etc., sunt mici și că termenii C_4 , C_6 , C_8 , etc., devin de asemenea din ce în ce mai mici așa că se poate înlocui a doua paranteză prin

$$\left[\left(1 - 3\frac{A_3}{A_1} + 5\frac{A_5}{A_1} - 7\frac{A_7}{A_1}\right) (C_0 - C_2) + C_2 \right]$$

și se poate obține

$$(21.35) \quad \delta = \frac{C_z}{\pi\lambda} \left\{ \left[1 - 3\frac{A_3}{A_1} + 5\frac{A_5}{A_1} - 7\frac{A_7}{A_1} - \dots \right] \times \right. \\ \left. \times \left[1 + \left(1 + \frac{1}{2\varepsilon^2}\right)^{\frac{1}{2}} (C_0 - C_2) \right] + \left(1 + \frac{1}{2\varepsilon^2}\right)^{\frac{1}{2}} C_2 \right\}.$$

Este ușor de văzut că coeficienții C_0 și C_2 sunt dați de expresiile următoare :

$$(21.36) \quad \left\{ \begin{array}{l} C_0 = 1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{e^2}{2^2} \cdot \frac{2}{1} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{4 \cdot 6 \cdot 8} \cdot \frac{e^4}{2^4} \cdot \frac{4 \cdot 3}{1 \cdot 2} - \\ \quad - \frac{1}{2} \cdot \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9}{4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 10 \cdot 12} \cdot \frac{e^6}{2^6} \cdot \frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} + \dots, \\ C_2 = \frac{1}{2} e + \frac{1}{2} \cdot \frac{1 \cdot 3}{4 \cdot 6} \cdot \frac{e^3}{2^3} \cdot \frac{4 \cdot 3}{1 \cdot 2} + \\ \quad + \frac{1}{2} \cdot \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7}{4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 10} \cdot \frac{e^5}{2^5} \cdot \frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} + \dots, \end{array} \right.$$

unde

$$(21.37) \quad e = \frac{1}{1 + 2\varepsilon^2}.$$

Valoarea maximă a lui e , după (21.25), este

$$e = \frac{1}{1 + 2\varepsilon^2} = \frac{\frac{b^2}{4D^2}}{2 + \frac{b^2}{4D^2}} = 0,91$$

și cum pe de altă parte valorile practice ale lui $\frac{b}{2D}$ sunt foarte apropiate

de unitate și în consecință $e \approx \frac{1}{3}$, se poate pune pentru C_0 și C_2 , respectiv :

$$(21.38) \quad C_0 = 1 - \frac{e^2}{16}, \quad C_2 = \frac{e}{2}.$$

Înlocuind mai departe coeficienții A_1, \dots, A_n prin valorile lor stabilite anterior, se obține în cele din urmă relația următoare :

$$(21.39) \quad \delta = \frac{C_z}{\pi\lambda} \left\{ \left[1 + \frac{\sqrt{1+2\varepsilon^2}}{\sqrt{2\varepsilon}} \left(1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1+2\varepsilon^2} - \frac{1}{16} \cdot \frac{1}{(1+2\varepsilon^2)^2} \right) \right] a + \frac{1}{2\sqrt{2\varepsilon}\sqrt{1+2\varepsilon^2}} \right\},$$

unde a este egal cu expresia de mai jos :

$$(21.40) \quad a = 1 - 3 \frac{A_3}{A_1} + 5 \frac{A_5}{A_1} - \dots = \\ = 1 + \frac{\beta_2 - \beta_4}{3\mu_0 + \beta_0} \left[3 + \frac{\beta_2}{5\mu_0 + \beta_0} \left(5 + 7 \frac{\beta_0}{7\mu_0 + \beta_0} \right) - 7 \frac{\beta_4}{7\mu_0 + \beta_0} \right] - \\ - \frac{\beta_4}{5\mu_0 + \beta_0} \left(5 + 7 \frac{\beta_2}{7\mu_0 + \beta_0} \right).$$

Pentru cazul când variația circulației este eliptică, această expresie se reduce la

$$(21.41) \quad \delta = \frac{C_z}{\pi\lambda} \left[1 + \sqrt{1 + \frac{1}{2\varepsilon^2}} \left(1 - \frac{1}{16} \cdot \frac{1}{(1+2\varepsilon^2)^2} \right) \right] \approx \\ \approx \frac{C_z}{\pi\lambda} \left(1 + \sqrt{1 + \frac{1}{2\varepsilon^2}} \right).$$

Tabela 21.1.

ε	Coeficient de deflecțiune : $\frac{\pi\lambda}{c_z} \delta$					
	$q = 1$	$q = 0,75$	$q = 0,50$	$q = 0,25$	$q = 0$	elipsă
0,2	6,2062	5,3303	4,6119	4,1331	3,8016	4,4868
0,4	4,3192	3,6288	3,0627	2,6853	2,4241	2,9641
0,6	3,7949	3,1439	3,6101	2,2542	2,0079	2,5171
0,8	3,5763	2,9373	2,4133	2,0639	1,8221	2,3220
1	3,4682	2,8331	2,3122	1,9650	1,7246	2,2215
1,2	3,4028	2,7698	2,2504	1,9043	1,6647	2,1600
1,4	3,3632	2,7308	2,2122	1,8664	1,6271	2,1218
1,6	3,3344	2,7028	2,1849	1,8397	1,6007	2,0947
1,8	3,3153	2,6840	2,1664	1,8213	1,5824	2,0762
2	3,0077	2,6697	2,1523	1,8074	1,5687	2,0622
∞	3,2366	2,6066	2,0700	1,7456	1,5072	2
a	1,6183	1,3033	1,0450	0,8728	0,7536	1

Ca aplicație a formulelor precedente, s'au calculat valorile lui δ pentru cazul aripilor dreptunghiulare, eliptice și trapezoidale. Rezultatele obținute s'au trecut în tabela 21.1 și sunt indicate în diagramele din fig. 21.7. Trebuie să remarcăm totuși că, pentru a determina pe a (expresia 21.40), este necesar să aducem o aproximație luând pentru λ o valoare mijlocie egală cu 2π . Influența alungirii este destul de mică pentru valorile acestuia utilizate în practică, astfel încât eroarea este neglijabilă.

21.4.2. Deflecțiunea curentului în ipoteza vârtejurilor marginale. După cum am spus mai sus, pânza de vârtejuri nu rămâne plană și identică cu ea

însăși până la infinit aval, ei se desface la mijloc și fiecare jumătate se înfășoară în jurul ei însăși, formând două nuclee turbionare de intensitate Γ_0 egală cu circulația din secțiunea mediană (fig. 21.2). În acest caz, viteza indusă în punctul E este datorită celor două vârtejuri marginale libere, situate fiecare la o distanță $\frac{b'}{2}$ și vârtejurii legat de aripă, de lungime b' și de aceeași intensitate Γ_0 , ca și cele dintâi. Este foarte ușor de stabilit expresia acestei viteze induse și unghiul de deflecțiune este dat de

$$(21.42) \quad \delta = \frac{\Gamma_0}{\pi b'} \left(1 + \frac{\sqrt{1 + \varepsilon'^2}}{\varepsilon'} \right) = \frac{C_z}{\pi \lambda'} \cdot \frac{\varepsilon' + \sqrt{1 + \varepsilon'^2}}{2\varepsilon'}$$

Ținând seamă de relațiile (21.3) și (21.28), se poate scrie

$$(21.43) \quad \varepsilon' = \frac{2D}{b'} = \frac{2D}{\kappa b} = \frac{\varepsilon}{\kappa}, \quad \lambda' = \frac{b'^2}{S} = \frac{\kappa^2 b^2}{S} = \kappa^2 \lambda,$$

unde κ are următoarea expresie în funcție de coeficienții de formă*):

$$(21.44) \quad \kappa = \frac{\pi}{4} \cdot \frac{A_1}{A_1 - A_3 + A_5 - A_7 + \dots} \approx \frac{\pi}{4} \cdot \frac{1}{1 + \frac{\beta_2 - \beta_4}{3\mu_0 + \beta_0} \left(1 + \frac{\beta_2}{5\mu_0 + \beta_0} - \frac{\beta_4}{7\mu_0 + \beta_0} \right) - \frac{\beta_4}{5\mu_0 + \beta_0}}$$

Înlocuind mai departe în expresia (21.42) pe ε' și λ' dați de relațiile (21.43), se obține pentru unghiul de deflecțiune o expresie în funcție de ε , κ și λ :

$$(21.45) \quad \delta = \frac{C_z}{\pi \lambda} \cdot \frac{1}{2\kappa^2} \left(1 + \sqrt{1 + \frac{\kappa^2}{\varepsilon^2}} \right)$$

Această formulă, comparată cu expresiile (21.39) și (21.41), dă valori mai mici, astfel după cum se poate constata din tabela 21. II și diagramele respective din fig. 21.8.

*) Câteodată este necesar să avem o expresie mai exactă pentru κ :

$$\kappa = \frac{\pi}{4} \cdot \frac{1}{1 + \frac{\beta_2 - \beta_4}{3\mu_0 + \beta_0} \left[1 + \frac{\beta_2}{5\mu_0 + \beta_0} \left(1 + \frac{\beta_2}{7\mu_0 + \beta_0} \right) - \frac{\beta_4}{7\mu_0 + \beta_0} \right] - \frac{\beta_4}{5\mu_0 + \beta_0} \left(1 + \frac{\beta_2}{7\mu_0 + \beta_0} \right)}$$

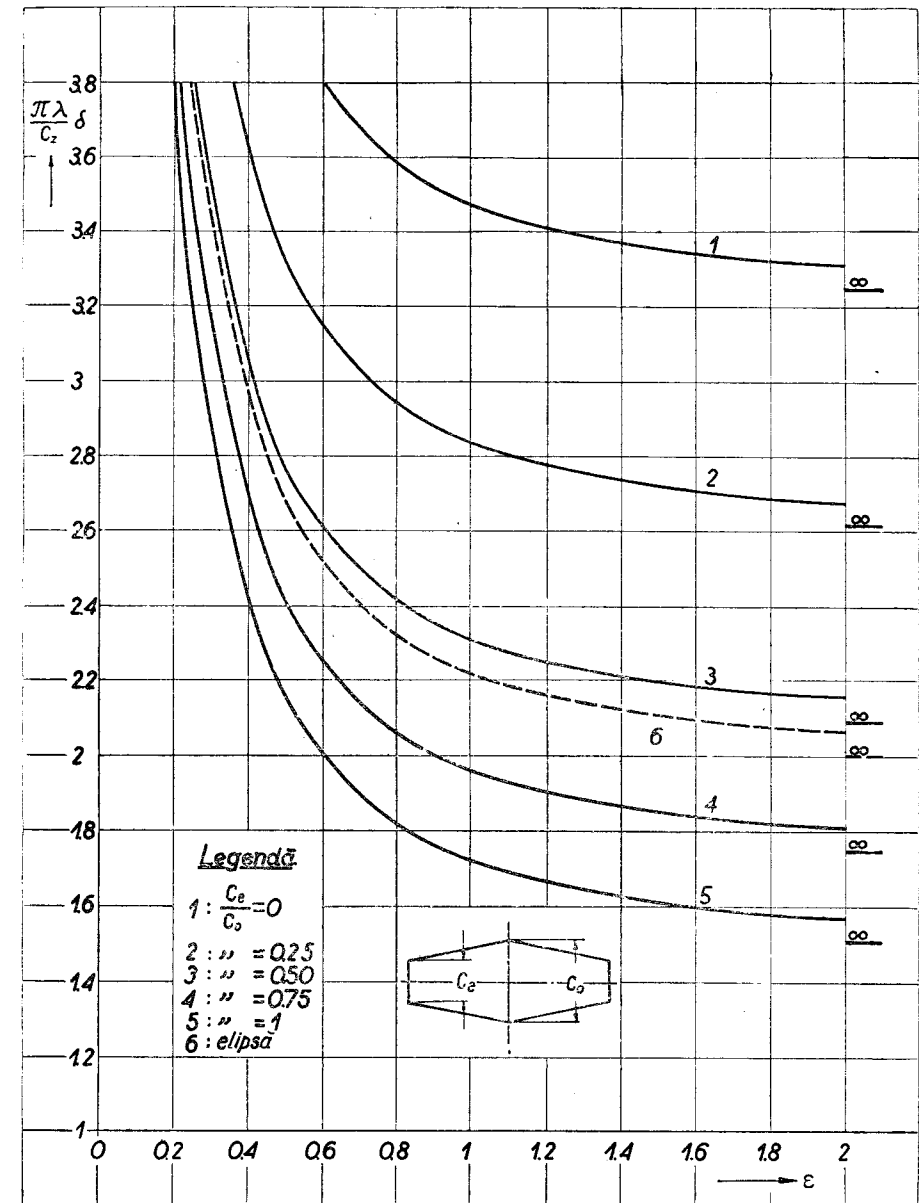


Fig. 21.7.

Tabela 21.II

ε	Coeficient de deflecțiune : $\frac{\pi\lambda}{c_z} \delta$					elipsă
	$q = 1$	$q = 0,75$	$q = 0,50$	$q = 0,25$	$q = 0$	
0,2	3,950	3,646	3,450	3,390	3,275	3,455
0,4	2,924	2,513	2,330	2,200	2,108	2,335
0,6	2,655	2,246	2,010	1,860	1,761	2,011
0,8	2,540	2,120	1,870	1,712	1,607	1,871
1,0	2,484	2,050	1,793	1,625	1,525	1,796
1,2	2,444	2,006	1,749	1,581	1,473	1,750
1,4	2,416	1,980	1,718	1,552	1,440	1,720
1,6	2,398	1,960	1,695	1,528	1,420	1,700
1,8	2,385	1,943	1,674	1,513	1,403	1,685
2,0	2,372	1,932	1,666	1,500	1,390	1,670
∞	2,316	1,876	1,612	1,446	1,332	1,618
∞	0,657	0,730	0,786	0,832	0,866	0,7854

Trebuie să facem aceeași remarcă în ceea ce privește determinarea lui ε ; pentru λ este necesar să luăm o alungire mijlocie egală cu 2π , așa cum am făcut deja pentru a (21.40).

Observație. În ceea ce privește influența vârtejului legat, în locul unei lungimi b' și unei intensități turbionare Γ_0 , ar fi la fel de exact să se ia anvergura totală b și intensitatea mijlocie Γ_m . În acest caz, deflecțiunea curentului are o formă diferită, care este ușor de stabilit :

$$(21.46) \quad \delta = \frac{C_z}{\pi\lambda} \cdot \frac{1}{2\varepsilon^2} \left(1 + \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{\varepsilon^2}{\lambda^2}}} + \frac{\frac{\varepsilon^2}{\lambda^2}}{\sqrt{1 + \frac{1}{\varepsilon^2}}} \right)$$

Aplicarea acestei formule (a se vedea diagramele din fig. 21.8) ne dă rezultate mai mici pentru valorile mici ale lui ε .

21.5. Influența înălțimii

Expresiile precedente dau unghiul de deflecțiune în planul pânzei de vârtejuri, plan materializat aproximativ prin bordul de fugă al aripii și direcția vitezei.

Locul ampenajelor nu este în general în acest plan, astfel încât este necesar să stabilim deflecțiunea curentului într'un punct E_h situat la o înălțime h deasupra lui E .

Vom face aceeași ipoteză ca și înainte, considerând sistemul turbionar format de vârtejurile $B'A'$ legat de aripa de lungime b' și două vârtejuri marginale libere $A'A$ și $B'B$ de aceeași intensitate, Γ_0 . Vom avea astfel o problemă asemănătoare cu cea precedentă (fig. 21.4), în care punctul P , notat aici cu E_h , se găsește în planul median. Notând deasemenea prin D_1 și $\frac{b_1}{2}$ distanțele dela E_h la vârtejurile legate și la cele libere (fig. 21.9), este

ușor de văzut că componenta verticală a vitezei induse, datorită sistemului turbionar în formă de potcoavă, va fi dată de formulele (21.8) și (21.11), unde γ_1 și γ_2 vor fi înlocuiți prin γ_a , σ_1 prin σ_a , σ_2 și σ_3 prin σ_l , γ_3 și γ_4 prin γ_l :

$$(21.47) \quad w_h = \frac{\Gamma_0}{\pi b_1} (1 + \cos \gamma_e) \cos \sigma_l + \frac{\Gamma_0}{2\pi D_1} \cos \gamma_a \cos \sigma_a.$$

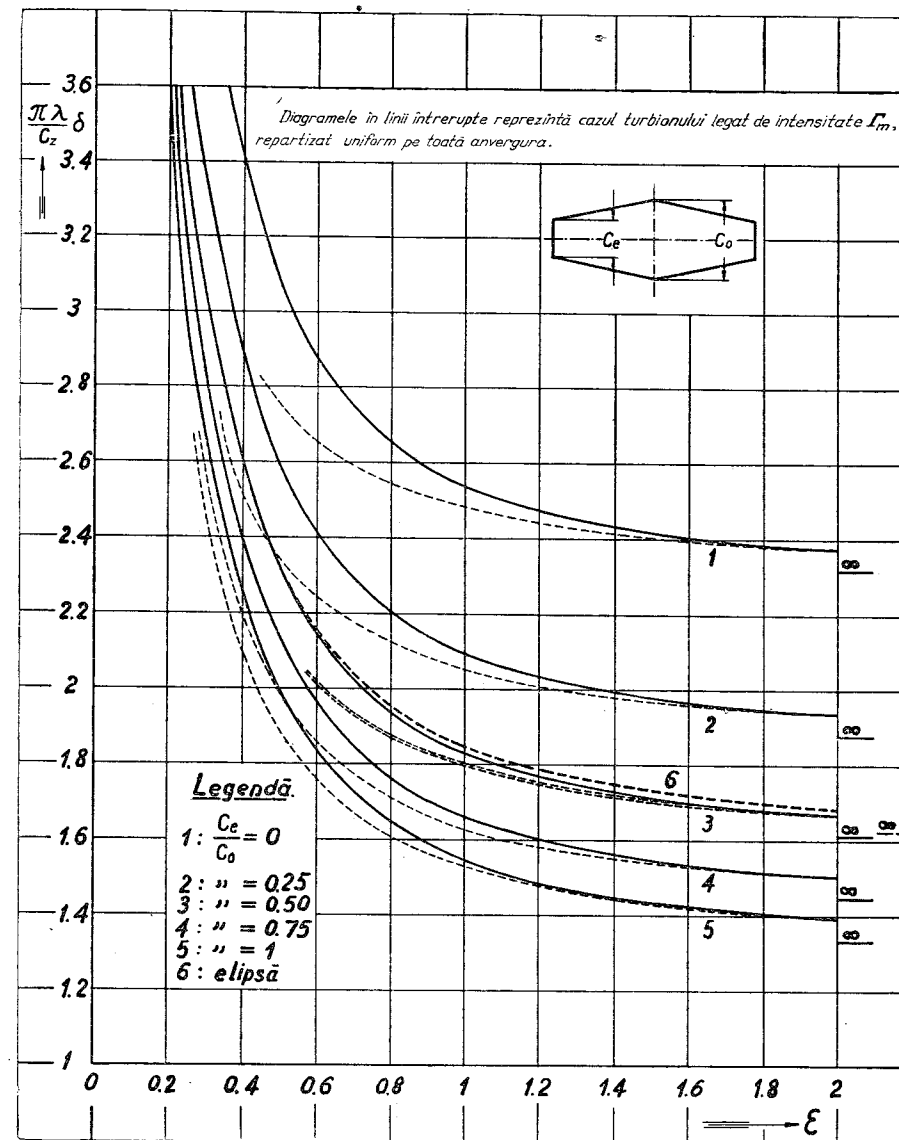


Fig. 21.8

În această formulă sensul descendent al vitezei se consideră ca sens pozitiv.

Să înlocuim mai întâi pe b_1 și D_1 prin expresiile lor în funcție de b și ε ; vom avea, ținând seama de relațiile precedente,

$$(21.48) \quad b_1 = \frac{b'}{\cos \sigma_l} = \frac{\kappa b}{\cos \sigma_l}, \quad D_1 = \frac{D}{\cos \sigma_a} = \frac{\varepsilon b}{2 \cos \sigma_a}$$

și în consecință :

$$(21.49) \quad w_h = \frac{\Gamma_0}{\pi \kappa b} (1 + \cos \gamma_l) (1 - \sin^2 \sigma_l) + \frac{\Gamma_0}{\pi \varepsilon b} \cos \gamma_a (1 - \sin^2 \sigma_a).$$

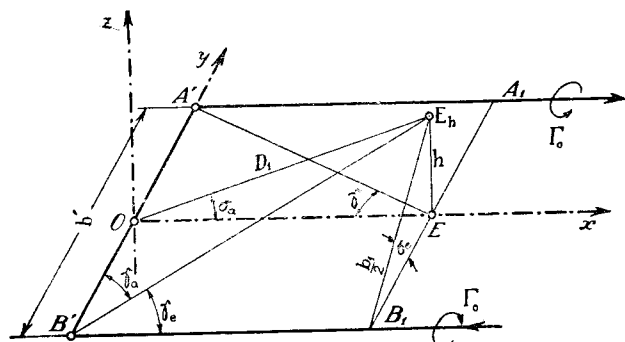


Fig. 21.9.

Vom putea scrie mai departe, admițând că h este mic în raport cu $\frac{b}{2}$ și D , ceea ce corespunde de altfel realității și punând

$$(21.50) \quad \chi = \frac{2h}{b},$$

avem următoarele relații succesive :

$$(21.51) \quad \left\{ \begin{aligned} \sin \sigma_l &\approx \operatorname{tg} \sigma_l = \frac{2h}{b} = \frac{\chi}{\kappa}, & \sin \sigma_a &\approx \operatorname{tg} \sigma_a = \frac{h}{D} = \frac{\chi}{\varepsilon}, \\ \operatorname{tg} \gamma_e &= \frac{b_1}{2D} = \frac{\kappa b}{2D} \cdot \frac{1}{\cos \sigma_l} = \frac{\kappa}{\varepsilon} \cdot \frac{1}{\cos \sigma_l}, \\ \cos \gamma_l &= \frac{\varepsilon \cos \sigma_l}{\sqrt{\kappa^2 + \varepsilon^2 \cos^2 \sigma_l}} \approx \frac{\varepsilon}{\sqrt{\kappa^2 + \varepsilon^2}} \sqrt{1 - \frac{\kappa^2}{\kappa^2 + \varepsilon^2} \sin^2 \sigma_l} \approx \\ &\approx \frac{\varepsilon}{\sqrt{\kappa^2 + \varepsilon^2}} \left[1 - \frac{1}{2} \frac{\chi^2}{\kappa^2 + \varepsilon^2} \right], \\ \operatorname{tg} \gamma_a &= \frac{2D_1}{b'} = \frac{2D}{\kappa b} \cdot \frac{1}{\cos \sigma_a} = \frac{\varepsilon}{\kappa} \frac{1}{\cos \sigma_a}, \\ \cos \gamma_a &= \frac{\kappa \cos \sigma_a}{\sqrt{\varepsilon^2 + \kappa^2 \cos^2 \sigma_a}} \approx \frac{\kappa}{\sqrt{\kappa^2 + \varepsilon^2}} \sqrt{1 - \frac{\varepsilon^2}{\kappa^2 + \varepsilon^2} \sin^2 \sigma_a} \approx \\ &\approx \frac{\kappa}{\sqrt{\kappa^2 + \varepsilon^2}} \left[1 - \frac{1}{2} \frac{\chi^2}{\kappa^2 + \varepsilon^2} \right]. \end{aligned} \right.$$

Introducând aceste relații în expresia vitezei induse, se obține pentru unghiul de deflecțiune următoarea formulă :

$$(21.52) \quad \delta_h = \frac{\Gamma_0}{\pi \kappa V_0 b} \left(1 + \frac{\varepsilon}{\sqrt{\kappa^2 + \varepsilon^2}} \right) \left(1 - \frac{1}{2} \frac{\chi^2}{\kappa^2 + \varepsilon^2} \cdot \frac{\varepsilon}{\varepsilon + \sqrt{\kappa^2 + \varepsilon^2}} \right) \times \\ \times \left(1 - \frac{\chi^2}{\kappa^2} \right) + \frac{\Gamma_0}{\pi \varepsilon V_0 b} \cdot \frac{\kappa}{\sqrt{\varepsilon^2 + \kappa^2}} \left(1 - \frac{1}{2} \frac{\chi^2}{\kappa^2 + \varepsilon^2} \right) \left(1 - \frac{\chi^2}{\varepsilon^2} \right).$$

Să punem pentru simplificare

$$(21.53) \quad \tau = \sqrt{1 + \frac{\kappa^2}{\varepsilon^2}};$$

în acest caz, expresia lui δ_h va putea fi scrisă sub următoarea formă generală :

$$(21.54) \quad \frac{\delta_h}{\delta} = \frac{1}{\tau} \left(1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\tau^2} \cdot \frac{1}{1 + \tau} \cdot \frac{\chi^2}{\kappa^2} \right) \left(1 - \frac{\chi^2}{\kappa^2} \right) + \\ + \frac{\tau - 1}{\tau} \left(1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\tau^2} \cdot \frac{\chi^2}{\varepsilon^2} \right) \left(1 - \frac{\chi^2}{\kappa^2} \right),$$

care este susceptibilă de a fi simplificată încă, dacă se dezvoltă parantezele conținând pe χ și dacă se neglijează χ^4 , a cărei valoare este foarte mică. Vom avea astfel o formulă mai simplă și foarte practică pentru aplicații :

$$(21.55) \quad \delta_h = \delta \left(1 - \frac{3 - \tau - 2\tau^2 + 2\tau^3}{2\tau(\tau^2 - 1)} \cdot \frac{\chi^2}{\varepsilon^2} \right).$$

Din această expresie se poate vedea ușor că influența înălțimii este practic neglijabilă pentru poziția ampenajului, așa cum este uzitată curent în construcțiile aeronautice.

BIBLIOGRAFIA CAP. IV.

- 1) BETZ A. : Beiträge zur Tragflügeltheorie mit besondere Berücksichtigung des einfachen recht. eckigen Flügels, Dissertation Göttingen, 1919.
- 2) CARAFOLI E. : Théorie des ailes monoplanes d'envergure finie. Memoriile Academiei Române. Imprimeria Națională București 1945.
- 3) CARAFOLI E. : Sur les caractéristiques aérodynamiques des ailes trapézoïdales et rectangulaires. Communicatione făcută la Academia de Științe din România, 19 Martie, 1943.
- 4) CARAFOLI E. : Recherches expérimentales sur les ailes monoplanes d'envergure finie. Publications Scientifiques, et Techniques du Ministère de l'Air, Librairie Gauthier-Villars, Paris 1932.
- 5) CEAPLĂGHIN S.A. : Rezultatele cercetărilor teoretice despre mișcarea aeroplanului, Culegere de opere, vol. II, 1933.
- 6) FUCHS R. : Aerodynamik, Theorie der Luftkräfte, II Band. Verlag. Julius Springer, Berlin 1930.
- 7) GLAUERT H. : The elements of Aerofoil and Airscrew theory, Cambridge, University press London 1930.

- 8) *GOLUBEV V.V.*: Teoria aripei aeroplanului de anvergură finită. Lucrările TAGHI Nr. 108, 1931.
- 9) *GOLUBEV V.V.*: Lectiuni din teoria aripei, Editura de Stat a literaturii tehnice și teoretice. Moscova, Leningrad, 1949.
- 10) *JUCOVSKI N.E.*: Théorie tourbillonnaire de l'hélice propulsive traduit par A. Apostol. revue par Wettchinkine et W. Margoulis, Gauthier-Villars, Paris 1929.
- 11) *LOTZ IRMGARD*: Berechnung der Auftriebverteilung beliebiggeformter Flügel, Zeitschrift für Flugtechnik und Motorluftschiffahrt, 14 April 1941, J. Heft.
- 12) *MALAVARD L.*: Applications des analogies électriques à la solution de quelques problèmes de l'Hydrodynamique, Paris 1936.
- 13) *MUNK M.*: Elements of the Wing section theory and of the wing theory, NACA, Report 191, Washington.
- 14) *ROY M.*: Sur l'Aérodynamique des ailes sustentatrices et des Hélices, Gauthier-Villars, Paris, 1928.
- 15) *TREFFTZ E.*: Prandtl'sche Tragflächen und Propellertheorie Z.A.M.M. 1921.

CAPITOLUL V

TEORIA ARIPILOR DEFORMATE

TEORIA MIȘCĂRILOR UNIFORME NERECTILINII

În acest capitol vom trata aripile cu incidență variabilă, aripile deformată din cauza aripioarelor și în fine cele prevăzute cu scobituri sau cu gondolele motorului. Aripile studiate până în prezent au fost considerate ca având conturul bine definit și incidență constantă dealungul anvergurii, ceea ce nu este totdeauna exact. Într'adevăr, în timpul zborului, aripile au deformații care schimbă complet caracteristicile lor aerodinamice și tocmai determinarea acestor caracteristici formează obiectul acestui capitol.

22. ARIPI CU INCIDENȚĂ VARIABILĂ

În general, unghiul de incidență α variază dealungul anvergurii-fie din motive de construcție, fie datorită torsiunii aripii sub acțiunea momentelor aerodinamice, fie în fine din cauza aripioarelor, al căror braț într'un sens sau altul schimbă unghiul de incidență în porțiunea unde se află aceste aripioare.

22.1. Formule principale

Pentru a stabili influența variației unghiului de incidență, să revenim la ecuația (17.16) și s'o aplicăm la cazul conturului general cu patru termeni (17.27):

$$(22.1) \quad (n\mu_0 + \beta_0)A_n + \beta_2(A_{n-2} + A_{n+2}) + \beta_4(A_{n-4} + A_{n+4}) + \\ + \beta_6(A_{n-6} + A_{n+6}) = \mu_0\alpha_n.$$

Coefficienții α_n provin din desfășurarea în serie FOURIER (17.14),

$$(22.2) \quad \alpha \sin \theta = \alpha_1 \sin \theta + \alpha_2 \sin 2\theta + \alpha_3 \sin 3\theta + \dots + \alpha_n \sin n\theta,$$

unde unghiul de incidență α variază după o lege determinată dealungul anvergurii.

Reluând același raționament ca pentru aripa cu incidență constantă, vom admite că, începând dela un anumit indice ($n+2$), coeficienții A_{n+2} , A_{n+4} , ... sunt suficient de mici pentru a putea neglija în parantezele expresiei (22.1) termenul de grad superior față de cel de grad inferior și să se scrie astfel relația

$$(22.3) \quad [(n+i)\mu_0 + \beta_0] A_{n+i} + \beta_2 A_{n+i-2} + \beta_4 A_{n+i-4} + \beta_6 A_{n+i-6} = \mu_0 \alpha_{n+i}.$$

Punând $i = 2, 4, 6$, se obține un sistem de trei ecuații care ne permite să determinăm pe A_{n+2} , A_{n+4} și A_{n+6} :

$$(22.4) \quad \begin{cases} [(n+2)\mu_0 + \beta_0] A_{n+2} + \beta_2 A_n + \beta_4 A_{n-2} + \beta_6 A_{n-4} = \mu_0 \alpha_{n+2}, \\ [(n+4)\mu_0 + \beta_0] A_{n+4} + \beta_2 A_{n+2} + \beta_4 A_n + \beta_6 A_{n-2} = \mu_0 \alpha_{n+4}, \\ [(n+6)\mu_0 + \beta_0] A_{n+6} + \beta_2 A_{n+4} + \beta_4 A_{n+2} + \beta_6 A_n = \mu_0 \alpha_{n+6}, \end{cases}$$

de unde se vede că prima ecuație dă pe A_{n+2} , a doua pe A_{n+4} și a treia pe A_{n+6} .

Dacă se introduc acești coeficienți care conțin deasemenea pe α_{n+2} , α_{n+4} , α_{n+6} , în ecuația (22.1), se obține următoarea formulă de recurență:

$$(22.5) \quad \left(n\mu_0 + \beta_0 - \frac{\beta_2^2}{(n+2)\mu_0 + \beta_0} - \frac{\beta_4^2}{(n+4)\mu_0 + \beta_0} - \frac{\beta_6^2}{(n+6)\mu_0 + \beta_0} \right) A_n + \\ + \beta_2 \left[1 - \frac{\beta_4}{(n+2)\mu_0 + \beta_0} \right] A_{n-2} + \\ + \left[\beta_4 - \frac{\beta_2 \beta_6}{(n+2)\mu_0 + \beta_0} \right] A_{n-4} + \beta_6 A_{n-6} = \mu_0 \omega_n,$$

unde ω_n va fi dat de o expresie de forma

$$(22.6) \quad \omega_n = \alpha_n - \left[\beta_2 - \frac{\beta_2 \beta_4}{N_4} + \frac{\beta_2^2 \beta_6}{N_4 N_6} - \frac{\beta_4 \beta_6}{N_6} \right] \frac{\alpha_{n+2}}{N_2} - \\ - \left[\beta_4 - \frac{\beta_2 \beta_6}{N_6} \right] \frac{\alpha_{n+4}}{N_4} - \beta_6 \frac{\alpha_{n+6}}{N_6}$$

și unde N_i are aceeași semnificație ca și mai înainte:

$$(22.7) \quad N_i = (n+i)\mu_0 + \beta_0.$$

Pentru a determina primii cinci termeni care n'au aceeași formă, trebuie să observăm mai întâi că avem $A_{-1} = -A_1$, $A_{-2} = -A_2$, etc. și că termenii impari sunt complet separați de termenii pari. Rezultă astfel următoarele formule pentru primii trei termeni impari:

$$(22.8) \quad \begin{cases} \left[\mu_0 + \beta_0 - \beta_2 - \frac{(\beta_2 - \beta_4)^2}{3\mu_0 + \beta_0} + \beta_6 \frac{\beta_4 - \beta_6}{5\mu_0 + \beta_0} \left(1 - \frac{\beta_2}{5\mu_0 + \beta_0} \right) - \frac{\beta_4^2}{7\mu_0 + \beta_0} \right] A_1 = \\ = \mu_0 \left[\omega_1 + \left(\beta_4 - \frac{\beta_2 \beta_6}{3\mu_0 + \beta_0} - \frac{\beta_2^2 \beta_6}{5\mu_0 + \beta_0} \right) \frac{\omega_3}{3\mu_0 + \beta_0} + \right. \\ \left. + \beta_6 \frac{\omega_5}{5\mu_0 + \beta_0} \right], \\ \left[3\mu_0 + \beta_0 - \beta_6 - \frac{\beta_2^2}{5\mu_0 + \beta_0} \left(1 - \frac{\beta_4}{7\mu_0 + \beta_0} \right) - \frac{\beta_4^2}{7\mu_0 + \beta_0} - \frac{\beta_6^2}{9\mu_0 + \beta_0} \right] A_3 + \\ + \left[\beta_2 - \beta_4 - \frac{\beta_2(\beta_4 - \beta_6)}{5\mu_0 + \beta_0} \right] A_1 = \mu_0 \omega_3, \\ \left[5\mu_0 + \beta_0 - \frac{\beta_2^2}{7\mu_0 + \beta_0} - \frac{\beta_4^2}{9\mu_0 + \beta_0} - \frac{\beta_6^2}{11\mu_0 + \beta_0} \right] A_5 + \beta_2 \left(1 - \frac{\beta_4}{7\mu_0 + \beta_0} \right) A_3 + \\ + \left(\beta_4 - \beta_6 - \frac{\beta_2 \beta_6}{7\mu_0 + \beta_0} \right) A_1 = \mu_0 \omega_5 \end{cases}$$

și două alte formule pentru termenii pari:

$$(22.9) \quad \begin{cases} \left[2\mu_0 + \beta_0 - \beta_4 - \frac{(\beta_2 - \beta_6)^2}{4\mu_0 + \beta_0} - \frac{\beta_4^2}{6\mu_0 + \beta_0} - \frac{\beta_6^2}{8\mu_0 + \beta_0} \right] A_2 = \\ = \mu_0 \left[\omega_2 + \beta_6 \frac{\omega_4}{4\mu_0 + \beta_0} \right], \\ \left[4\mu_0 + \beta_0 - \frac{\beta_2^2}{6\mu_0 + \beta_0} - \frac{\beta_4^2}{8\mu_0 + \beta_0} - \frac{\beta_6^2}{10\mu_0 + \beta_0} \right] A_4 + \\ + \left[\beta_2 - \beta_6 - \frac{\beta_2 \beta_4}{6\mu_0 + \beta_0} \right] A_2 = \mu_0 \omega_4. \end{cases}$$

Aceasta este soluția generală a problemei. Pentru aplicații vom simplifica aceste expresii observând că β_6 este foarte mic precum și β_4 și că generalitatea se păstrează dacă vom stabili formulele numai pentru aripile dreptunghiulare, trapezoidale, quasieliptice, etc., care sunt cele mai

utilizate în aviație. Așa dar expresiile precedente devin :

$$(22.10) \left\{ \begin{array}{l} \left[\mu_0 + \beta_0 - \beta_2 - \frac{(\beta_2 - \beta_4)^2}{3\mu_0 + \beta_0} \right] A_1 = \mu_0 \left(\omega_1 + \beta_4 \frac{\omega_3}{3\mu_0 + \beta_0} \right), \\ \left(2\mu_0 + \beta_0 - \beta_4 - \frac{\beta_2^2}{4\mu_0 + \beta_0} - \frac{\beta_4^2}{6\mu_0 + \beta_0} \right) A_2 = \mu_0 \omega_2, \\ \left(3\mu_0 + \beta_0 - \frac{\beta_2^2}{5\mu_0 + \beta_0} - \frac{\beta_4^2}{7\mu_0 + \beta_0} \right) A_3 + \\ \quad + \left(\beta_2 - \beta_4 - \frac{\beta_2 \beta_4}{5\mu_0 + \beta_0} \right) A_1 = \mu_0 \omega_3, \\ \left(4\mu_0 + \beta_0 - \frac{\beta_2^2}{6\mu_0 + \beta_0} - \frac{\beta_4^2}{8\mu_0 + \beta_0} \right) A_4 + \\ \quad + \beta_2 \left[1 - \frac{\beta_4}{6\mu_0 + \beta_0} \right] A_2 = \mu_0 \omega_4, \\ \dots \\ \left(n\mu_0 + \beta_0 - \frac{\beta_2^2}{(n+2)\mu_0 + \beta_0} - \frac{\beta_4^2}{(n+4)\mu_0 + \beta_0} \right) A_n + \\ \quad + \beta_2 \left[1 - \frac{\beta_4}{(n+2)\mu_0 + \beta_0} \right] A_{n-2} + \beta_4 A_{n-4} = \mu_0 \omega_n, \end{array} \right.$$

unde

$$(22.11) \quad \omega_n = \alpha_n - \beta_2 \left[1 - \frac{\beta_4}{(n+2)\mu_0 + \beta_0} \right] \frac{\alpha_{n+2}}{(n+2)\mu_0 + \beta_0} - \\ - \beta_4 \frac{\alpha_{n+4}}{(n+4)\mu_0 + \beta_0}.$$

Este ușor de văzut că termenii impari reprezintă o repartiție simetrică a circulației, pe când termenii pari reprezintă o repartiție antisimetrică. Într'adevăr, pentru θ și $\pi - \theta$ avem respectiv :

$$(22.12) \quad \sin(2p+1)\theta = \sin[\pi - (2p+1)\theta], \quad \sin 2p\theta = -\sin[2p(\pi-\theta)].$$

După forma acestor expresii, vedem că termenii impari și termenii pari formează două sisteme diferite, care sunt independente unul de celălalt.

Din această cauză, vom trata aceste probleme în mod separat: variația simetrică și variația anti-simetrică.

Observație importantă. Formulele (22.5), (22.8), (22.9) și (22.10) nu diferă de formulele stabilite anterior pentru incidența constantă decât prin membrul al doilea.

22.2. Variație simetrică

Să presupunem că secțiunea centrală rămâne neschimbată și că secțiunile extreme sunt rotite în sensul pozitiv al incidențelor cu un unghi ε_0 . La coeficienții A'_1, \dots, A'_n , stabiliți pentru cazul unei incidențe constante α , trebuie să adăugăm coeficienții A''_1, \dots, A''_n datoriti torsionii simetrice de unghi ε_0 .

Să presupunem că această incidență suplimentară variază după relațiile

$$(22.13) \quad \left\{ \begin{array}{l} \varepsilon = \varepsilon_0 \frac{2y}{b} = -\varepsilon_0 \cos \theta \quad \text{dela } \frac{\pi}{2} \text{ la } \pi \text{ și} \\ \varepsilon = -\varepsilon_0 \frac{2y}{b} = \varepsilon_0 \cos \theta \quad \text{dela } 0 \text{ la } \frac{\pi}{2}, \end{array} \right.$$

luându-se valori negative pentru o torsionare care micșorează unghiurile de incidență.

Desfășurarea în serie FOURIER a lui $\varepsilon \sin \theta^*$, punând $n = 2p + 1$, ne dă

$$(22.14) \quad \varepsilon \sin \theta = \varepsilon_1 \sin \theta + \varepsilon_3 \sin 3\theta + \dots + \varepsilon_n \sin n\theta = \\ = -\frac{4}{\pi} \frac{\varepsilon_0}{3} \sin \theta - \frac{4}{\pi} \frac{\varepsilon_0}{5} \sin 3\theta + \frac{4}{\pi} \frac{\varepsilon_0}{21} \sin 5\theta - \frac{4}{\pi} \frac{\varepsilon_0}{45} \sin 7\theta + \\ + \frac{4}{\pi} \frac{\varepsilon_0}{77} \sin 9\theta - \dots + (-1)^{p+1} \frac{4}{\pi} \frac{\varepsilon_0 \sin(2p+1)\theta}{(2p+3)(2p-1)}$$

și în consecință :

$$(22.15) \quad \left\{ \begin{array}{l} \omega_1 = -\frac{4}{\pi} \varepsilon_0 \left[\frac{1}{3} - \frac{\beta_2}{3\mu_0 + \beta_0} \left(1 - \frac{\beta_4}{3\mu_0 + \beta_0} \right) \frac{1}{5} + \frac{\beta_4}{5\mu_0 + \beta_0} \frac{1}{21} \right], \\ \omega_3 = -\frac{4}{\pi} \varepsilon_0 \left[\frac{1}{5} + \frac{\beta_2}{5\mu_0 + \beta_0} \left(1 - \frac{\beta_4}{5\mu_0 + \beta_0} \right) \frac{1}{21} - \frac{\beta_4}{7\mu_0 + \beta_0} \frac{1}{45} \right], \\ \omega_5 = -\frac{4}{\pi} \varepsilon_0 \left[\frac{1}{21} + \frac{\beta_2}{7\mu_0 + \beta_0} \left(1 - \frac{\beta_4}{7\mu_0 + \beta_0} \right) \frac{1}{45} - \frac{\beta_4}{9\mu_0 + \beta_0} \frac{1}{77} \right], \\ \omega_7 = -\frac{4}{\pi} \varepsilon_0 \left[\frac{1}{45} + \frac{\beta_2}{9\mu_0 + \beta_0} \left(1 - \frac{\beta_4}{9\mu_0 + \beta_0} \right) \frac{1}{77} - \frac{\beta_4}{11\mu_0 + \beta_0} \frac{1}{117} \right]. \end{array} \right.$$

Aceste valori ale lui ω_n , introduse în (22.10), ne dau coeficienții A''_n în funcție de ε_0 . Pentru aripa dreptunghiulară de alungire $\lambda = 2k$, ($\mu_0 = 0,25$), se găsește

$$(22.16) \quad A'' = -0,105 \varepsilon_0, \quad A'' = -0,058 \varepsilon_0, \quad A'' = 0,0032 \varepsilon_0, \\ A''_7 = -0,0033 \varepsilon_0$$

* Litera ε înlocuiește pe α din expresiile (17.14).

și coeficientul total devine prin urmare :

$$(22.17) \quad A_1 = A'_1 + A''_1 = 0,232\alpha - 0,105\varepsilon_0, \text{ etc.}$$

Se pot multiplica exemplele, soluțiile fiind ușor de obținut : este suficient pentru aceasta să se stabilească valorile lui ω_n .

22.3. Variația anti-simetrică

Să presupunem că avem o torsiune liniară

$$(22.18) \quad \varepsilon = -\varepsilon_0 \frac{2y}{b} = \varepsilon_0 \cos \theta ;$$

rezultă numai de cânt :

$$(22.19) \quad \varepsilon \sin \theta = \varepsilon_2 \sin 2\theta + \dots + \varepsilon_n \sin n\theta = \frac{\varepsilon_0}{2} \sin 2\theta$$

și prin urmare :

$$(22.20) \quad \omega_2 = \frac{\varepsilon_0}{2}, \quad \omega_4 = \dots = \omega_{2p} = 0.$$

Pentru o aripă dreptunghiulară de alungire $\lambda = 7$, luând pentru k o valoare medie $k = 0,85 \pi$, cecace ne dă $\mu_0 = 0,1905$, se găsește :

$$(22.21) \quad A_2 = 0,184 \frac{\varepsilon_0}{2}, \quad A_4 = 0,0254 \frac{\varepsilon_0}{2}, \quad A_6 = 0,0055 \frac{\varepsilon_0}{2}.$$

22.4. Aplicație la aripa eliptică

La aripa eliptică, $\beta_0 = 1$, $\beta_2 = \beta_4 = 0$ și formulele (22.10) se reduc la o expresie foarte simplă :

$$(22.22) \quad (n\mu_0 + 1)A_n = \mu_0\omega_n, \quad \omega_n = \alpha_n, \quad A_n = \frac{\mu_0\alpha_n}{n\mu_0 + 1}.$$

23. TEORIA ARIPIOARELOR

Deformarea aripilor prin bracașul aripioarelor este o problemă care se reduce la cea din paragraful precedent. Într'adevăr, bracașul aripioarelor modifică unghiul de incidență pe întreaga porțiune unde sunt situate și dă o variație simetrică, dacă aripioarele sunt bracașate în același sens, sau anti-simetrică, dacă bracașul aripioarelor este egal însă de sens opus.

Fie β bracașul efectuat în sensul incidențelor pozitive ; se știe că unghiul de incidență al unei secțiuni se mărește cu

$$(23.1) \quad \sigma = \frac{2}{\pi} \left[\arcsin \sqrt{\frac{c_1}{c}} + \sqrt{\frac{c_1}{c} \left(1 - \frac{c_1}{c} \right)} \right] \beta,$$

unde c_1 este partea mobilă și c coarda profilului în secțiunea respectivă. Practic, unghiul este dat de o expresie mai simplă (10.101) :

$$(23.2) \quad \sigma = \sqrt{\frac{c_1}{c}} \beta.$$

Vom admite, după cum este cazul în practică, că aripioarele sunt așezate simetric față de axa longitudinală și că raportul este constant pe toată porțiunea cu aripioare. Dacă acesta nu este constant, vom lua o valoare mijlocie. După cum am mai spus, trebuie să distingem două cazuri :

- aripioare de curbura, cu bracașul în același sens,
- aripioare de direcție, la care bracașul se face în sens contrar.

Este evident că bracașul, în cele două cazuri, adaugă o circulație suplimentară care se determină independent de incidența constantă inițială a aripii.

23.1. Aripioare de curbura

Variația incidenței este discontinuă și anume :

$$(23.3) \quad \begin{cases} \varepsilon = 0 \text{ dela } y = -\frac{b}{2} (\theta = 0) \text{ până la } y = -y_1 (\theta = \theta_1), \\ \varepsilon \approx \beta \sqrt{\frac{c_1}{c}} = \sigma \text{ dela } y = -y_1 (\theta = \theta_1) \text{ până la } y = y_1 (\theta = \pi - \theta_1), \\ \varepsilon = 0 \text{ dela } y = y_1 (\theta = \pi - \theta_1) \text{ până la } y = \frac{b}{2} (\theta = \pi), \end{cases}$$

pentru aripioare centrale (fig. 23.1)

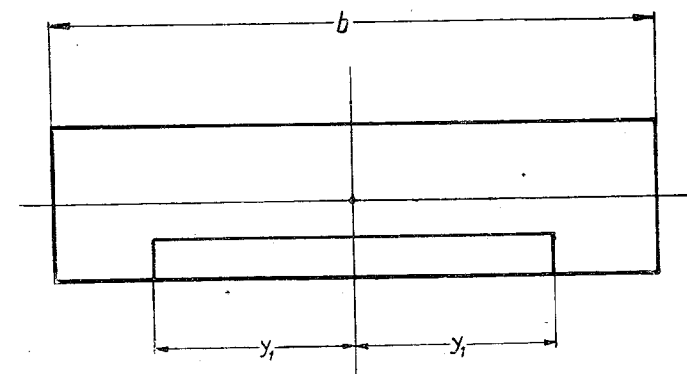


Fig. 23.1.

și respectiv

$$(23.3 \text{ bis}) \quad \beta \sqrt{\frac{c_1}{c}} = \sigma, \quad 0, \quad \beta \sqrt{\frac{c_1}{c}} = \sigma,$$

pentru aripioarele laterale (fig. 23.2). Punctul $y_1 = -\frac{b}{2} \cos \theta_1$ indică începutul sau sfârșitul porțiunii cu aripioare și dezvoltarea în serie a lui $\varepsilon \sin \theta$:

$$(23.4) \quad \varepsilon \sin \theta = \varepsilon_1 \sin \theta + \varepsilon_3 \sin 3\theta + \dots + \varepsilon_{2p+1} \sin (2p+1)\theta,$$

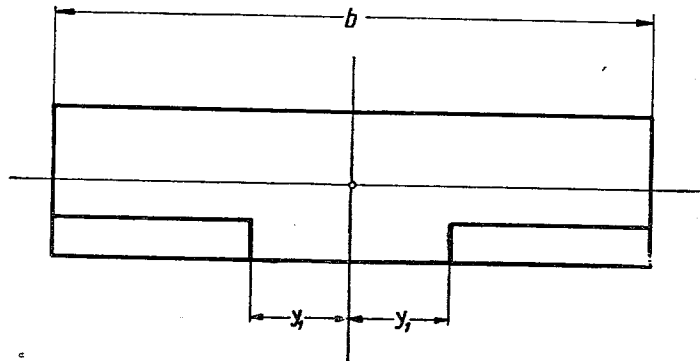


Fig. 23.2.

ne dă

$$(23.5) \quad \left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_1 = \sigma + \frac{2\sigma}{\pi} \left[\frac{\sin 2\theta_1}{2} - \theta_1 \right], \quad \varepsilon_3 = \frac{2\sigma}{\pi} \left[\frac{\sin 4\theta_1}{4} - \frac{\sin 2\theta_1}{2} \right], \dots \\ \dots \quad \varepsilon_n = \frac{2\sigma}{\pi} \left[\frac{\sin (n+1)\theta_1}{n+1} - \frac{\sin (n-1)\theta_1}{n-1} \right], \end{array} \right.$$

pentru aripioare de curbură centrale și

$$(23.6) \quad \left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_1 = \frac{2\sigma}{\pi} \left[\theta_1 - \frac{\sin 2\theta_1}{2} \right], \quad \varepsilon_3 = \frac{2\sigma}{\pi} \left[\frac{\sin 2\theta_1}{2} - \frac{\sin 4\theta_1}{4} \right], \dots \\ \dots \quad \varepsilon_n = \frac{2\sigma}{\pi} \left[\frac{\sin (n-1)\theta_1}{n-1} - \frac{\sin (n+1)\theta_1}{n+1} \right], \end{array} \right.$$

pentru aripioare de curbură laterale.

Trebuie să remarcăm din nou că am pus ε în loc de α (17.14) pentru a evita o confuzie cu incidența inițială a aripii.

Din relațiile (22.11) este ușor să formăm expresiile lui ω_n :

$$(23.7) \quad \omega_1 = \frac{2\sigma}{\pi} \left\{ \frac{\pi}{2} - \theta_1 + \left[1 + \frac{\beta_2}{3\mu_0 + \beta_0} \left(1 - \frac{\beta_4}{3\mu_0 + \beta_0} \right) \right] \frac{\sin 2\theta_1}{2} - \left[\frac{\beta_2}{3\mu_0 + \beta_0} \left(1 - \frac{\beta_4}{3\mu_0 + \beta_0} \right) - \frac{\beta_4}{5\mu_0 + \beta_0} \right] \frac{\sin 4\theta_1}{4} - \frac{\beta_4}{5\mu_0 + \beta_0} \cdot \frac{\sin 6\theta_1}{6} \right\},$$

pentru primul caz și

$$(23.8) \quad \omega_1 = \frac{2\sigma}{\pi} \left\{ \theta_1 - \left[1 + \frac{\beta_2}{3\mu_0 + \beta_0} \left(1 - \frac{\beta_4}{3\mu_0 + \beta_0} \right) \right] \frac{\sin 2\theta_1}{2} + \left[\frac{\beta_2}{3\mu_0 + \beta_0} \left(1 - \frac{\beta_4}{3\mu_0 + \beta_0} \right) - \frac{\beta_4}{5\mu_0 + \beta_0} \right] \frac{\sin 4\theta_1}{4} + \frac{\beta_4}{5\mu_0 + \beta_0} \cdot \frac{\sin 6\theta_1}{6} \right\},$$

pentru al doilea caz. Ceilalți termeni se deduc mai ușor:

$$(23.9) \quad \left\{ \begin{array}{l} \omega_3 = \frac{2\sigma}{\pi} \left\{ \mp \frac{\sin 2\theta_1}{2} \pm \left[1 + \frac{\beta_2}{5\mu_0 + \beta_0} \left(1 - \frac{\beta_4}{5\mu_0 + \beta_0} \right) \right] \frac{\sin 4\theta_1}{4} \mp \left[\frac{\beta_2}{5\mu_0 + \beta_0} \left(1 - \frac{\beta_4}{5\mu_0 + \beta_0} \right) - \frac{\beta_4}{7\mu_0 + \beta_0} \right] \frac{\sin 6\theta_1}{6} \mp \frac{\beta_4}{7\mu_0 + \beta_0} \cdot \frac{\sin 8\theta_1}{8} \right\} \\ \dots \\ \omega_n = \frac{2\sigma}{\pi} \left\{ \mp \frac{\sin (n-1)\theta_1}{n-1} \pm \left[1 + \frac{\beta_2}{(n+2)\mu_0 + \beta_0} \times \left(1 - \frac{\beta_4}{(n+2)\mu_0 + \beta_0} \right) \right] \frac{\sin (n+1)\theta_1}{n+1} \mp \left[\frac{\beta_2}{(n+2)\mu_0 + \beta_0} \times \left(1 - \frac{\beta_4}{(n+2)\mu_0 + \beta_0} \right) - \frac{\beta_4}{(n+4)\mu_0 + \beta_0} \right] \frac{\sin (n+3)\theta_1}{n+3} \mp \frac{\beta_4}{(n+4)\mu_0 + \beta_0} \cdot \frac{\sin (n+5)\theta_1}{n+5} \right\}, \end{array} \right.$$

unde primul semn corespunde aripioarelor situate în partea centrală și al doilea semn corespunde cazului aripioarelor simetrice laterale. Trebuie să remarcăm din nou că numărul n este impar: $n = 2p + 1$.

Se poate aduce o simplificare neglijând $\frac{\beta_4}{(n+2)\mu_0 + \beta_0}$ față de unitate.

Mai departe, dacă introducem expresiile lui ω_n în ecuațiile (22.10), vom obține coeficienții circulației.

Să aplicăm aceste rezultate în cazul unei aripi de alungire $\lambda = 2k$, cu aripioare laterale care se întind până în punctul $y_1 = 0,5 \frac{b}{2} \left(\theta_1 = \frac{\pi}{3} \right)$;

vom obține ușor

$$(23.10) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{A_1}{\sigma} = 0,1015, \quad \frac{A_3}{\sigma} = 0,0842, \quad \frac{A_5}{\sigma} = -0,00875, \\ \frac{A_7}{\sigma} = -0,0061, \quad \frac{A_9}{\sigma} = 0,00994, \quad \frac{A_{11}}{\sigma} = -0,00366, \\ \frac{A_{13}}{\sigma} = -0,00245, \quad \frac{A_{15}}{\sigma} = 0,004, \quad \frac{A_{17}}{\sigma} = -0,00165, \end{array} \right.$$

iar variația circulației dealungul anvergurii este reprezentată în fig. 23.3.

Verificând rezultatele pe care le-am obținut mai sus, se constată că ele satisfac în mod riguros formula de bază (22.1), ceea ce indică că aceste rezultate sunt exacte.

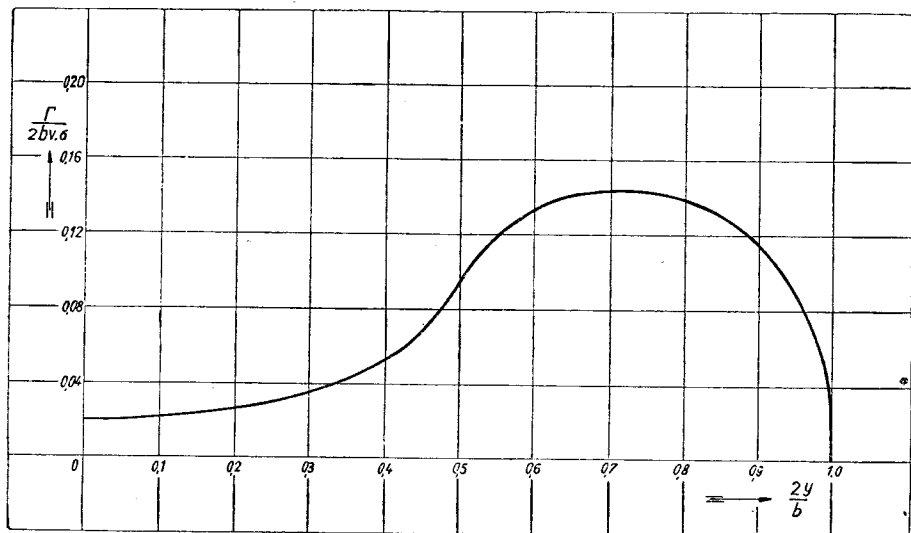


Fig. 23.3.

Portanța unitară suplimentară C_z se poate pune în funcție de σ :

$$(23.11) \quad C_z = \pi \lambda A'_1 = \pi \lambda \mu_0 \left(\frac{A'_1}{\mu_0 \sigma} \right) \sigma = \pi \lambda \mu_0 \left(\frac{A_1}{\mu_0 \alpha} \right) \sigma',$$

unde s'a notat cu A'_1 primul coeficient datorit bracajului aripioarelor, pentru a se evita confuzia cu A_1 , acelaș coeficient al aripii nedeformate. Prin analogie cu o aripă normală nedeformată, a cărei parte mobilă s'ar întinde pe toată anvergura și la care bracajul sporește incidența cu $\sigma = \sqrt{\frac{c_1}{c}} \beta$,

vom defini un unghi σ' care ar reprezenta creșterea unghiului de incidență al unei aripi prevăzută cu aripioare numai pe o parte a anvergurii, așa cum s'a pus problema mai sus.

Acest unghi σ' este o fracțiune din σ , după cum este ușor de văzut din expresia sa:

$$(23.12) \quad \sigma' = \frac{A'_1}{A_1} \sigma = \omega_1 + \frac{\beta_4}{3\mu_0 + \beta_0} \omega_3.$$

În ceea ce privește rezistența indusă, nu este ușor de găsit o expresie generală simplă ca pentru aripa nedeformată, din cauza termenilor multipli și complicați.

Această rezistență este

$$(23.13) \quad C_{xi} = \frac{C_z^2}{\pi \lambda} \sum_1^n \frac{n (A_n + A'_n)^2}{(A_1 + A'_n)^2} = \left[1 + \sum_3^n \frac{n (A_n + A'_n)^2}{(A_1 + A'_1)^2} \right] \frac{C_z^2}{\pi \lambda},$$

unde

$$(23.14) \quad \delta = \sum_3^n \frac{n (A_n + A'_n)^2}{(A_1 + A'_1)^2}.$$

Observație. Rezistența de formă crește și ea cu bracajul, astfel că și coeficientul unitar C_{x0} crește cu o valoare ΔC_{x0} , determinată prin experiență.

23.2. Aripioare de direcție

Cele două aripioare de direcție așezate întotdeauna una la dreapta și cealaltă la stânga, spre exterior (fig. 23.4), au o importanță capitală pentru comanda laterală a avionului. Deaceia am făcut o analiză amănunțită a efectului lor asupra portanței, rezistenței și în special asupra momentelor aerodinamice. Variația incidenței este anti-simetrică și desvoltarea lui $\varepsilon \sin \theta$:

$$(23.15) \quad \varepsilon \sin \theta = \varepsilon_2 \sin 2\theta + \varepsilon_4 \sin 4\theta + \dots + \varepsilon_n \sin n\theta,$$

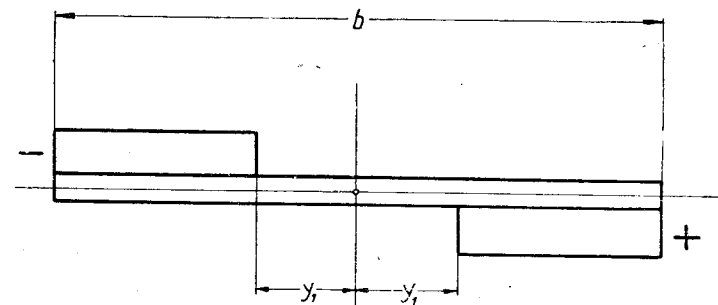


Fig. 23.4.

unde n este un număr par ($n = 2p$), dă pentru coeficienții $\varepsilon_2, \varepsilon_4, \dots, \varepsilon_n$ următoarele expresii:

$$(23.16) \quad \varepsilon_2 = \frac{2\sigma}{\pi} \left[\frac{\sin \theta_1}{1} - \frac{\sin 3\theta_1}{3} \right], \quad \varepsilon_4 = \frac{2\sigma}{\pi} \left[\frac{\sin 3\theta_1}{3} - \frac{\sin 5\theta_1}{5} \right], \dots$$

$$\dots \varepsilon_n = \varepsilon_{2p} = \frac{2\sigma}{\pi} \left[\frac{\sin (n-1)\theta_1}{n-1} - \frac{\sin (n+1)\theta_1}{n+1} \right].$$

Rezultă de aici :

$$(23.17) \left\{ \begin{aligned} \omega_2 &= \frac{2\sigma}{\pi} \left\{ \sin \theta_1 - \left[1 + \frac{\beta_2}{4\mu_0 + \beta_0} \left(1 - \frac{\beta_4}{4\mu_0 + \beta_0} \right) \right] \frac{\sin 3\theta_1}{3} + \right. \\ &\quad \left. + \left[\frac{\beta_2}{4\mu_0 + \beta_0} \left(1 - \frac{\beta_4}{4\mu_0 + \beta_0} \right) - \frac{\beta_4}{6\mu_0 + \beta_0} \right] \frac{\sin 5\theta_1}{5} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\beta_4}{6\mu_0 + \beta_0} \cdot \frac{\sin 7\theta_1}{7} \right\}, \\ \omega_n &= \frac{2\sigma}{\pi} \left\{ \frac{\sin (n-1)\theta_1}{n-1} - \left[1 + \frac{\beta_2}{(n+2)\mu_0 + \beta_0} \times \right. \right. \\ &\quad \times \left(1 - \frac{\beta_4}{(n+2)\mu_0 + \beta_0} \right) \frac{\sin (n+1)\theta_1}{n+1} + \left[\frac{\beta_2}{(n+2)\mu_0 + \beta_0} \times \right. \\ &\quad \times \left. \left. \left(1 - \frac{\beta_4}{(n+2)\mu_0 + \beta_0} \right) - \frac{\beta_4}{(n+4)\mu_0 + \beta_0} \right] \frac{\sin (n+3)\theta_1}{n+3} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\beta_4}{(n+4)\mu_0 + \beta_0} \cdot \frac{\sin (n+5)\theta_1}{n+5} \right\}. \end{aligned} \right.$$

Aceste expresii, introduse în ecuațiile (22.10) care se referă la coeficienții pari, ne dau soluția generală a problemei aripioarelor de direcție.

Să aplicăm aceste rezultate la aripa dreptunghiulară de alungire

$\lambda = 2k$ și cu $y_1 = 0,5 \frac{b}{2} \left(\theta_1 = \frac{\pi}{3} \right)$; vom obține :

$$(23.18) \left\{ \begin{aligned} \frac{A_2}{\sigma} &= 0,1215, & \frac{A_4}{\sigma} &= 0,002885, & \frac{A_6}{\sigma} &= -0,01738, \\ & & & & \frac{A_8}{\sigma} &= 0,00668, \\ \frac{A_{10}}{\sigma} &= 0,00388, & \frac{A_{12}}{\sigma} &= -0,00595, & \frac{A_{14}}{\sigma} &= 0,00236, \\ & & & & \frac{A_{16}}{\sigma} &= 0,00169 \end{aligned} \right.$$

iar diagrama din fig. 23.5 reprezintă variația circulației.

Aceste rezultate verifică riguros formula exactă de bază (22.1), ceea ce arată până la ce punct ele sunt corecte.

Expresiile precedente pot fi încă simplificate neglijând pe β_4 față de unitate. Fiindcă termenul A_1 nu există, rezultă că aripioarele de direcție

nu au nici o influență asupra portanței. Dimpotrivă, rezistența crește cu termenii pari găsiți mai sus.

Astfel, de exemplu, se adaugă la coeficientul δ din expresiile (19.24) și (19.25) care privesc aripa nedeformată, un nou coeficient δ' care reprezintă influența aripioarelor :

$$(23.19) \quad \delta' = 2 \frac{A_2^2}{A_1^2} + 4 \frac{A_4^2}{A_1^2} + \dots + 2p \frac{A_{2p}^2}{A_1^2} = \sum_2^{2\sigma} \frac{2p A_{2p}^2}{A_1^2}.$$

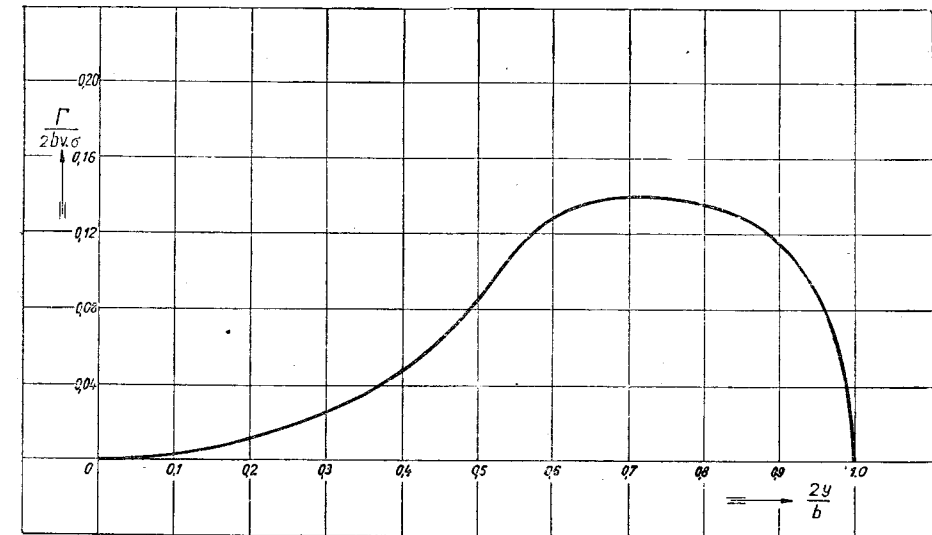


Fig. 23.5.

Observație. Ca și pentru cazul precedent trebuie să remarcăm că brăcajul modifică rezistența de formă. Este foarte greu să determinăm această modificare, deoarece variația rezistenței este diferită, după cum brăcajul este pozitiv sau negativ.

23.3. Momente aerodinamice

Efectul cel mai important al aripioarelor de direcție este acel care privește momentele aerodinamice.

Momentul în jurul axei Ox , adică momentul de ruluu, pe care l-am notat cu L și care va fi calculat după relația (19.38), este proporțional numai cu coeficientul A_2 ; se definește de obicei un alt coeficient ξ , a cărui expresie se deduce ușor din relațiile următoare :

$$(23.20.) \quad L = \frac{\rho}{2} V_0^2 b^3 \xi \sigma = \frac{\rho}{2} V_0^2 b^3 \frac{\pi}{4} A_2,$$

de unde rezultă, ținând seama de ecuațiile (22.10) și neglijând pe β_4 față de unitate :

$$(23.21) \quad \xi = \frac{\pi}{4} \cdot \frac{A_2}{\sigma} = \frac{\mu_0}{2} \cdot \frac{\sin \theta_1 - \left(1 + \frac{\beta_2}{4\mu_0 + \beta_0}\right) \frac{\sin 3\theta_1}{3} + \left(\frac{\beta_2}{4\mu_0 + \beta_0} - \frac{\beta_4}{6\mu_0 + \beta_0}\right) \frac{\sin 5\theta_1}{5} + \frac{\beta_4}{6\mu_0 + \beta_0} \cdot \frac{\sin 7\theta_1}{7}}{2\mu_0 + \beta_0 - \beta - \frac{\beta_2^2}{4\mu_0 + \beta_0} - \frac{\beta_4^2}{6\mu_0 + \beta_0}}$$

Această formulă este foarte importantă pentru aplicații în tehnica aeronautică. Pentru aripa dreptunghiulară din exemplul precedent am obținut valorile notate în tabela 23.I.

Pentru momentul în jurul axei Oz , sau momentul de rotație, pe care l-am notat cu N , se definește tot astfel un coeficient ζ a cărui expresie se scoate din relația următoare, care ține seama de (19.48) :

$$(23.22) \quad N = \frac{\rho}{2} V_0^2 b^3 \zeta (\sigma \alpha) = \frac{\rho}{2} V_0^2 b^3 \frac{\pi}{4} \sum_{p=1}^{n-1} (2p+1) A_p A_{p+1},$$

prin urmare :

$$(23.23) \quad \zeta = \frac{\pi}{4} \cdot \frac{1}{\alpha \sigma} \sum_{p=1}^{n-1} (2p+1) A_p A_{p+1}.$$

Pentru aplicații este mai important să se determine raportul dintre cele două momente, așa cum este dat de formula (19.49) :

$$(23.24) \quad \frac{N}{L} = \alpha \eta = \alpha \frac{\zeta}{\xi} = 3A_1 + 5A_3 + (7A_3 + 9A_5) \frac{A_4}{A_2} + (11A_5 + 13A_7) \frac{A_6}{A_2} + \dots$$

Pentru coeficienții $A_1, A_3, A_5, A_7, \dots$ ai aripii nedeformate, se va putea scrie respectiv :

$$(23.25) \quad \left\{ \begin{aligned} 3A_1 + 5A_3 &= \left(3 - 5 \frac{\beta_2 - \beta_4}{3\mu_0 + \beta_0}\right) A_1 = 3 \left(1 - \frac{5}{3} \frac{\beta_2 - \beta_4}{3\mu_0 + \beta_0}\right) A_1, \\ 7A_3 + 9A_5 &= - \left[\frac{\beta_2 - \beta_4}{3\mu_0 + \beta_0} \left(7 - 9 \frac{\beta_2}{5\mu_0 + \beta_0}\right) + 9 \frac{\beta_4}{5\mu_0 + \beta_0} \right] A_1 \approx \\ &\approx - 7 \frac{\beta_2}{3\mu_0 + \beta_0} \left(1 - \frac{9}{7} \frac{\beta_2}{5\mu_0 + \beta_0}\right) A_1, \\ 11A_5 + 13A_7 &= 11 \left(1 - \frac{13}{11} \frac{\beta_2}{7\mu_0 + \beta_0}\right) \left[\frac{\beta_2^2}{(3\mu_0 + \beta_0)(5\mu_0 + \beta_0)} - \frac{\beta_4}{5\mu_0 + \beta_0} \right] A_1. \end{aligned} \right.$$

Mai departe, după câteva simplificări necesare, putem scoate din ecuațiile (22.10) :

$$(23.26) \quad \left\{ \begin{aligned} (2\mu_0 + \beta_0 - \beta_4)A_2 &= \mu_0 \omega_2, \\ (4\mu_0 + \beta_0)A_4 + \beta_2 A_2 &= \mu_0 \omega_4, \\ (6\mu_0 + \beta_0)A_6 + \beta_2 A_4 + \beta_4 A_2 &= \mu_0 \omega_6 \end{aligned} \right.$$

și prin urmare :

$$(23.27) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{A_4}{A_2} &= \frac{2\mu_0 + \beta_0 - \beta_4}{4\mu_0 + \beta_0} \cdot \frac{\omega_4}{\omega_2} - \frac{\beta_2}{4\mu_0 + \beta_0}, \\ \frac{A_6}{A_2} &= \frac{2\mu_0 + \beta_0 - \beta_4}{6\mu_0 + \beta_0} \cdot \frac{\omega_6}{\omega_2} - \frac{\beta_2}{6\mu_0 + \beta_0} \cdot \frac{2\mu_0 + \beta_0 - \beta_4}{4\mu_0 + \beta_0} \cdot \frac{\omega_4}{\omega_2} + \\ &+ \frac{\beta_2^2}{(4\mu_0 + \beta_0)(6\mu_0 + \beta_0)} - \frac{\beta_4}{6\mu_0 + \beta_0}. \end{aligned} \right.$$

Dacă se introduc aceste relații în expresia (19.49), se obține în cele din urmă :

$$(23.28) \quad \frac{N}{L} = \eta \alpha = 3A_1 \left\{ 1 - \frac{5}{3} \frac{\beta_2 - \beta_4}{3\mu_0 + \beta_0} - \frac{7}{3} \frac{\beta_2}{3\mu_0 + \beta_0} \times \left(1 - \frac{9}{7} \frac{\beta_2}{5\mu_0 + \beta_0}\right) \left(\frac{2\mu_0 + \beta_0}{4\mu_0 + \beta_0} \cdot \frac{\omega_4}{\omega_2} - \frac{\beta_2}{4\mu_0 + \beta_0}\right) + \frac{11}{3} \frac{1}{5\mu_0 + \beta_0} \times \right. \\ \left. \times \left(1 - \frac{13}{11} \frac{\beta_2}{7\mu_0 + \beta_0}\right) \left(\frac{\beta_2^2}{3\mu_0 + \beta_0} - \beta_4\right) \cdot \left[\frac{2\mu_0 + \beta_0}{6\mu_0 + \beta_0} \cdot \frac{\omega_6}{\omega_2} - \frac{\beta_2}{6\mu_0 + \beta_0} \cdot \frac{2\mu_0 + \beta_0}{4\mu_0 + \beta_0} \cdot \frac{\omega_4}{\omega_2} + \frac{1}{6\mu_0 + \beta_0} \left(\frac{\beta_2^2}{4\mu_0 + \beta_0} - \beta_4\right)\right] \right\},$$

sau

$$(23.29) \quad \eta \alpha = \frac{3C_z}{\pi \lambda} \cdot x,$$

notând cu x expresia dintre paranteze.

Pentru aripa eliptică se găsește formula lui MUNK :

$$(23.30) \quad \alpha \eta = 3A_1 = \frac{3C_z}{\pi \lambda}.$$

Tabela 23.I

θ_1	40°	60°	90°
ξ după (23.21).	0,0497	0,0954	0,1377
η după (23.31).	1,015	0,904	0,80

Deși ușor de aplicat, formula (23.28) este lungă ca formă; ea este susceptibilă de mari simplificări dacă observăm că al treilea grup de termeni este mic, în consecință neglijabil și că β_4 este de asemenea neglijabil pentru formele obișnuite ale aripilor. Cu aceste considerații, înlocuind pe ω_4 și ω_2 prin termenii lor principali, se ajunge la următoarea formulă simplă:

$$(23.31) \quad \eta = 3A_1 \left\{ 1 - \frac{\beta_2 - \beta_4}{3\mu_0 + \beta_0} \left[\frac{5}{3} + \frac{7}{9} \left(1 - \frac{9}{7} \frac{\beta_2}{5\mu_0 + \beta_0} \right) \times \right. \right. \\ \left. \left. \times \left(\frac{\sin 3\theta_1 - 0,6 \sin 5\theta_1}{\sin \theta_1 - 0,33 \sin 3\theta_1} - \frac{\beta_2}{4\mu_0 + \beta_0} \right) \right] \right\}$$

care se poate pune de altfel sub forma (23.29): $\eta \alpha = 3 \frac{C_z}{\pi \lambda} \alpha$.

Această formulă, aplicată la exemplul precedent al aripii dreptunghiulare ($\beta_0 = 0,654$, $\beta_2 = -0,192$, $\beta_4 = -0,0268$, $\lambda = 2k$), ne dă coeficienții indicați în tabloul 23.I.

Expresia lui η este foarte importantă deoarece permite calculul momentului de rotație N :

$$(23.32) \quad N = L\eta\alpha = \frac{\rho}{2} V_0^2 b^3 \xi \eta(\alpha\sigma) = \frac{\rho}{2} V_0^2 b^3 \zeta(\alpha\sigma)$$

și prin urmare $\zeta = \xi \eta$ (23.24).

Formulele precedente pot fi utilizate chiar pentru cazul general al conturilor de aripi cu patru termeni: β_0 , β_2 , β_4 și β_6 . Într'adevăr, coeficientul β_6 este foarte mic pentru formulele folosite curent în aviație și calculele, ținând seamă de acest coeficient, ne-ar duce la aceleași rezultate ca cele de mai sus.

Totuși, pentru cazuri cu totul speciale se vor aplica formulele (18.18), (22.9), (22.6).

Observație. Am menționat mai sus că, odată cu bracaajul aripioarelor, C_{x0} al porțiunii cu aripioare este de asemenea modificat (C_{x0} se mărește în general cu bracaajul); de aceea este necesar să se introducă influența acestei modificări, care se poate determina prin experiență. Este însă foarte dificil să se calculeze momentul adițional deoarece ΔC_{x0} nu are aceeași valoare pentru bracaajul pozitiv și cel negativ.

23.4. Forța și momentul de șarnieră pe aripioare

Am stabilit în paragraful 11.3 forța și momentul de șarnieră pe partea mobilă a unei aripi de anvergură infinită. Într'adevăr, dacă indicăm cu φ un unghi astfel încât, c_1 fiind partea mobilă (11.35), să avem

$$(23.33) \quad \cos \varphi = 1 - 2 \frac{c_1}{c},$$

atunci expresiile care dau forța și momentul:

$$(23.34) \quad \begin{cases} P'_1 = \rho c V_0^2 (\varphi - \sin \varphi) \alpha + \rho c V_0^2 \frac{\varphi^2}{\pi} \beta + P_{01}, \\ M'_1 = \frac{\rho}{2} c^2 V_0^2 \left(\varphi \cos \varphi - \frac{\sin 2\varphi}{4} - \sin \varphi + \frac{\varphi}{2} \right) \alpha + \\ + \frac{\rho}{2} c^2 V_0^2 \frac{\left(\varphi^2 \cos \varphi - \varphi \sin \varphi - \frac{\sin^2 \varphi}{2} + \frac{\varphi^2}{2} \right)}{\pi} \beta + M_{01} \end{cases}$$

unde β este bracaajul, P_{01} și M_{01} sunt două constante care depind exclusiv de forma profilului, fiind egale cu zero pentru profilele biconvexe simetrice.

23.4.1. Transformarea formulelor. Să transformăm relațiile precedente pentru o mai bună prezentare. Fie pentru aceasta $2k$ panta aripii de anvergură infinită astfel cum am definit-o la început; vom avea

$$(23.35) \quad P'_1 = \frac{\rho}{2} c V_0^2 \frac{\varphi - \sin \varphi}{k} 2k\alpha + \frac{\rho}{2} c V_0^2 \frac{\varphi^2}{\pi k} 2k\beta + \\ + P_{01} = \frac{\varphi - \sin \varphi}{\pi} P_\alpha + \frac{\varphi^2}{\pi^2} P_\beta + P_{01},$$

unde P_α este portanța totală a aripii de anvergură infinită corespunzătoare incidenței α și P_β cea corespunzătoare unei incidențe egală în valoare cu bracaajul β . Să observăm că incidența totală a aripii este egală cu α plus incidența σ datorită bracaajului a cărui expresie va fi dedusă din (11.39):

$$(23.36) \quad \sigma = \frac{\varphi + \sin \varphi}{\pi} \beta;$$

punând mai departe

$$(23.37) \quad \alpha' = \alpha + \sigma = \alpha + \frac{\varphi + \sin \varphi}{\pi} \beta,$$

expresia precedentă se poate scrie încă

$$(23.38) \quad P'_1 = \frac{\varphi - \sin \varphi}{\pi} P_{\alpha + \sigma} + \frac{\varphi^2}{\pi^2} P_\beta - \frac{\varphi - \sin \varphi}{\pi} \frac{\varphi + \sin \varphi}{\pi} P_\beta + \\ + P_\alpha = \frac{\varphi - \sin \varphi}{\pi} P + \frac{\sin^2 \varphi}{\pi^2} P_\beta + P_{01},$$

care, trecând la coeficienții unitari, devine

$$(23.39) \quad \frac{P'_1}{\frac{1}{2} \rho c V_0^2} = C_{z1} = \frac{\varphi - \sin \varphi}{\pi} C_z + \frac{\sin^2 \varphi}{\pi^2} C_\beta + C_{01},$$

unde P (respectiv C_z) este portanța totală a unei porțiuni de aripă egală cu unitatea, la incidența totală $\alpha' = \alpha + \sigma$ și P_β este portanța aceleiași porțiuni de aripă, la o incidență egală cu brăcajul β .

Pentru momentul de șarnieră se găsește o expresie analoagă, care se poate scrie, ținând seamă de relațiile (11.49):

$$(23.40) \quad M_1 = \frac{m}{2\pi} c P_\alpha + \frac{n}{2\pi^2} c P_\beta + M_{01} = \frac{m}{2\pi} c P + \\ + \frac{n-m(\varphi + \sin \varphi)}{2\pi^2} c P_\beta + M_{01} = \frac{m}{2\pi} c P - \frac{g}{4\pi^2} c P_\beta + M_{01},$$

sau încă

$$(23.41) \quad \frac{M_1'}{\frac{1}{2} \rho c^2 V_0^2} = C_{m1}' = \frac{m}{2\pi} C_z - \frac{g}{4\pi^2} C_{z\beta} + C_{m01},$$

unde

$$(23.42) \quad g = \sin \varphi (\varphi - \sin \varphi) (1 + \cos \varphi).$$

Să aplicăm aceste rezultate la aripa de anvergură finită.

23.4.2. Aripioare pe toată anvergura. Pentru aripa de anvergură finită, dacă aripioarele se întind pe toată anvergura, este ușor de văzut că se găsesc expresii analoage, observând că, în locul incidenței geometrice $\alpha' = \alpha + \sigma$, vom avea incidența efectivă $\alpha'_e = \alpha + \sigma - i$, unde i este unghiul indus în fiecare secțiune. Deaceia, formulele (23.38) și (23.39) se aplică identic în acest caz, însă P (respectiv C_z) reprezintă portanța totală a aripei de anvergură finită iar P_β (respectiv $C_{z\beta}$) portanța corespunzătoare unui unghi efectiv egal cu brăcajul β .

În același fel se pot stabili expresiile respective pentru momentul de șarnieră:

$$(23.43) \quad M_1' = \frac{m}{2\pi} \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} c dP - \frac{g}{4\pi^2} \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} c dP_\beta + M_{01} \approx \\ \approx \frac{m}{2\pi} c_m P - \frac{g}{4\pi^2} c_m P_\beta + M_{01},$$

unde, pentru a simplifica calculele, am înlocuit pe c prin coarda medie c_m . Rezultă deasemenea:

$$(23.44) \quad \frac{M_1'}{\frac{1}{2} \rho S V_0^2 c_m} = C_{m1}' = \frac{m}{2\pi} C_z - \frac{g}{4\pi^2} C_{z\beta} + C_{m01}$$

Este adevărat că, dacă variația coardei este foarte mare, aproximația nu mai este permisă și o integrare riguroasă este obligatorie:

$$(23.45) \quad \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} c dP = \rho V_0^2 \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} c \Gamma dy = \rho V_0^2 b^2 c_0 \int_0^\pi \frac{c}{c_0} \left(\sum A_n \sin n\theta \right) \sin \theta d\theta.$$

Pentru aripa trapezoidală, punând

$$(23.46) \quad q = \frac{c_0 - c_e}{c_0} = 1 - \frac{c_e}{c_0}$$

variația coardei se poate exprima prin formula următoare, unde se va lua semnul $-$ pentru θ variind de la 0 la $\frac{\pi}{2}$ și $+$ pentru θ variind de la $\frac{\pi}{2}$ la π :

$$(23.47) \quad c = c_0 (1 \mp q \cos \theta).$$

Integralele precedente devin în acest caz, respectiv:

$$(23.48) \quad \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} c dP = c_0 P - 4q\rho V_0^2 b^2 c_0 \left[\frac{A_1}{3} + \frac{A_3}{1 \cdot 5} - \frac{A_5}{3 \cdot 7} + \frac{A_7}{5 \cdot 9} - \dots + \right. \\ \left. + (1)^{p+1} \frac{A_{2p+1}}{(2p-1)(2p+3)} \right] = c_0 P \left\{ 1 - \frac{8q}{3\pi} \left[1 - \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{\beta_2 - \beta_4}{3\mu_0 + \beta_0} \left(\frac{3}{5} + \frac{1}{7} \cdot \frac{\beta_2}{5\mu_0 + \beta_0} \right) + \frac{1}{7} \cdot \frac{\beta_4}{5\mu_0 + \beta_0} \right] \right\} = \alpha c_0 P$$

și:

$$(23.49) \quad \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} c dP_\beta = c_0 P_\beta \left(1 - \frac{q}{3} \cdot \frac{1,5 - q}{1 - 0,5q} \right) = \alpha_\beta c_0 P.$$

Un calcul analog aplicat la aripa eliptică ne duce la următorul rezultat:

$$(23.50) \quad \alpha = \alpha_\beta = \frac{8}{3\pi}.$$

În fine, expresia (23.44) devine:

$$(23.51) \quad \frac{M_1'}{\frac{1}{2} \rho S V_0^2 c_0} = C_{m1}' = \frac{m}{2\pi} \alpha C_z - \frac{g}{4\pi^2} \alpha_\beta C_{z\beta} + C_{m01}.$$

23.4.3. Aripioare pe o porțiune a anvergurii. Pentru aripioarele ocupând numai o porțiune a anvergurii, fie b_a (fig. 23.6), vom avea la fel:

$$(23.52) \quad \left\{ \begin{array}{l} P'_1 = \frac{\varphi - \sin \varphi}{\pi} P_a + \frac{\sin^2 \varphi}{\pi^2} P_{a\beta} + P_{01a}, \\ \frac{P'_1}{\frac{\rho}{2} S V_0^2} = C'_{z1} = \frac{\varphi - \sin \varphi}{\pi} \cdot \frac{S_a}{S} C_{za} + \frac{\sin^2 \varphi}{\pi^2} \cdot \frac{S_a}{S} C_{za\beta} + \\ + C_{01a} \end{array} \right.$$

pentru forțe și

$$(23.53) \quad \left\{ \begin{array}{l} M'_1 = \frac{m}{2\pi} \cdot \frac{S_a}{b_a} P_a - \frac{g}{4\pi^2} \cdot \frac{S_a}{b_a} P_{a\beta} + M_{01a}, \\ \frac{M'_1}{\frac{\rho}{2} S V_0^2 c_0} = C'_{m1} = \frac{m}{2\pi} \cdot \frac{S_a}{c_0 b_a} \cdot \frac{S_a}{S} C_{za} - \frac{g}{4\pi^2} \cdot \frac{S_a S_a}{c_0 b_a S} C_{za\beta} + \\ + C_{m(01a)} \end{array} \right.$$

pentru momentul de șarnieră, unde s'a însemnat cu P_a portanța totală a suprafeței cu aripioare, S_a această suprafață și $P_{a\beta}$ portanța acestei suprafețe datorită bracaajului β . Pentru integralele:

$$\int_0^{\theta_1} c dP, \quad \int_0^{\theta} c dP_\beta$$

am luat pentru coardă, o valoare medie $c_m = \frac{S_a}{b_a}$, spre a nu complica formulele. Totuși, portanța P_a corespunzătoare suprafeței cu aripioare S_a nu are o formă simplă:

$$(23.54) \quad \frac{P_a}{\frac{1}{2} \rho S V_0} = \frac{S_a}{S} C_{za} = \lambda \left\{ A_1 \left(\theta_1 - \frac{\sin 2\theta_1}{2} \right) + \right. \\ \left. + \sum_{n=2}^n A_n \left[\frac{\sin (n-1)\theta_1}{n-1} - \frac{\sin (n+1)\theta_1}{n+1} \right] \right\},$$

unde coeficienții A_1, A_2, \dots, A_n , conțin atât termenii datoriti incidentei α cât și cei datoriti bracaajului aripioarelor.

24. INFLUENȚA SCOBITURILOR ȘI A NACELELOR PENTRU MOTOARE

În tehnica aeronautică este necesar adesea, din motive de construcție sau pilotaj, să se prevadă pe aripile avionului scobituri centrale (fig. 24.1) sau construcții laterale (fig. 24.2) reprezentând nacelele motoarelor. Caracteristicile aerodinamice ale unei astfel de aripi sunt desigur modificate față de cele corespunzătoare aripii inițiale fără aceste neregularități de contur. Pentru a stabili noile caracteristici, vom determina mai întâi pentru fiecare secțiune a porțiunii perturbate a conturului, axa de portanță nulă a profilului corespunzător și vom aplica apoi metodele cunoscute pentru calculul circulației dealungul anvergurii.

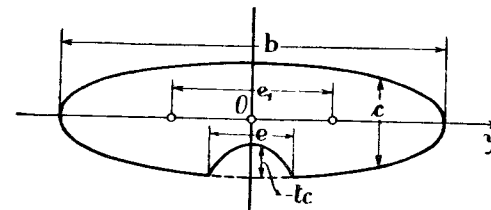


Fig. 24.1.

24.1. Punerea problemei și formule generale.

Pentru ca să se poată aplica metoda lui GLAUERT, ar fi necesar să se prevadă un număr foarte mare de secțiuni care să satisfacă relația (17.5); ar rezulta prin urmare tot atâtea necunoscute și ecuații de rezolvat; aceasta nu este comod și este chiar imposibil de rezolvat prin mijloacele elementare curente. Prin metoda lui I. LOTZ este posibil să se rezolve problema, însă este foarte greu de găsit o soluție generală explicită, cu toate calculele foarte laborioase pe care le comportă; este așa dar necesar să se reia calculele pentru fiecare caz particular. Deaceea, pentru a evita în parte cel puțin aceste dificultăți, vom expune mai jos o metodă analogă cu cele expuse în paragrafele precedente, care duce la o soluție aproximativă explicită. Fie pentru aceasta o aripă cu conturul definit relația de bază (17.27):

$$(24.1) \quad \frac{c_0}{c} \sin \theta = \beta_0 + 2\beta_2 \cos 2\theta + 2\beta_4 \cos 4\theta + 2\beta_6 \cos 6\theta$$

și să presupunem că coarda c' a aripii deformată de accidente de contur este pusă sub forma

$$(24.2) \quad c' = c(1 + t),$$

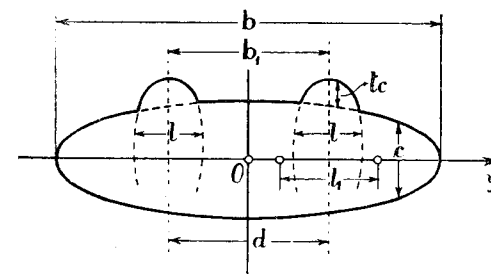


Fig. 24.2.

unde t nu este diferit de zero decât pe porțiunea deformată a conturului (scobitură sau nacele).

Mai departe, notând cu α incidența aripilor normale, fără deformare, și cu ε variația incidenței pe porțiunea deformată, vom putea scrie pentru incidența totală α' :

$$(24.3) \quad \alpha' = \alpha + \varepsilon.$$

Intr'un mod analog, viteza indusă totală w' va fi împărțită în două, viteza indusă referitoare la aripa normală, fie w , și cea datorită deformării pe care o vom nota cu w_s :

$$(24.4) \quad w' = w + w_s;$$

ecuația lui PRANDTL devine în acest caz:

$$(24.5) \quad \Gamma = kV_0c' \left(\alpha' - \frac{w'}{V_0} \right) = kV_0c \left(\alpha - \frac{w}{V_0} \right) + \\ + kV_0c \left[\varepsilon + t \left(\alpha - \frac{w}{V_0} + \varepsilon - \frac{w_s}{V_0} \right) - \frac{w_s}{V_0} \right],$$

de unde se vede că deformarea conturului nu face decât să introducă în plus o incidență ε' variabilă dealungul anvergurii:

$$(24.6) \quad \varepsilon' = \varepsilon + t \left(\alpha - \frac{w}{V_0} \right) + t \left(\varepsilon - \frac{w_s}{V_0} \right).$$

Problema este redusă astfel la cazul unei variații de incidență. Pentru aripile obișnuite incidența α , precum și incidența indusă nu variază prea mult în jurul unui punct de pe anvergură; din această cauză, se pot admite pentru α și w valorile din axa scobiturii sau a nacelei, fie α_a și w_a . Pentru incidența ε a porțiunii deformată vom ține seama de variația acestei incidențe numai în primul termen al membrului al doilea din (24.6); însă, pentru termenul al treilea, observând că t este mic în raport cu unitatea, se poate admite pentru ε o valoare mijlocie ε_m sau, ca mai sus, valoarea ε_a din centrul perturbației.

Totuși este foarte greu să determinăm viteza indusă suplimentară w_s care depinde tocmai de distribuția circulației dealungul anvergurii. Să punem circulația suplimentară sub forma obișnuită (17.2):

$$(24.7) \quad \Gamma_s = 2bV_0 \sum_1^n a_n \sin n\theta;$$

viteza indusă suplimentară în centrul perturbației ($\theta = \theta_a$, $w_s = w_{sa}$) va avea ca expresie în acest caz (17.4):

$$(24.7 \text{ bis}) \quad \frac{w_{sa}}{V_0} = \sum_1^n na_n \frac{\sin n\theta_a}{\sin \theta_a},$$

de unde se vede că această viteză depinde de coeficienții a_1, a_2, \dots, a_n , care sunt tocmai necunoscutele problemei. Acești coeficienți sunt puțin convergenți și calculele ar fi foarte laborioase, chiar pentru aripa eliptică pentru care s'ar putea obține eventual o soluție riguroasă.

În cazul general nu este admisibil să ne limităm la câțiva termeni, deaceia, suntem obligați să ocolim dificultatea luând pentru w_{sa} o valoare aproximativă, pe care o vom stabili prin raționamentul următor. Putem presupune, într'adevăr, că micșorarea circulației datorită scobiturii sau măriră circulației datorită nacelelor este concentrată și uniform repartizată pe o lungime e_1 , care va depinde de lățimea e a scobiturii sau pe lungimea l_1 , funcție de lățimea l a nacelelor. Notând pe de altă parte cu d distanța între cele două nacele în cazul unui avion bimotor, viteza indusă aproximativă w_{sa} în aceste două cazuri obișnuite va fi respectiv:

$$(24.8) \quad w_{sa} \approx 2 \frac{\Gamma_m}{4\pi} \cdot \frac{2}{e_1} = \frac{\Gamma_m}{\pi e_1},$$

în cazul scobiturii *) și

$$(24.9) \quad w'_{sa} \approx 2 \frac{\Gamma'_m}{4\pi} \cdot \frac{2}{l_1} + \frac{\Gamma'_m}{4\pi} \left(\frac{1}{d + \frac{l_1}{2}} - \frac{1}{d - \frac{l_1}{2}} \right) = \\ = \frac{\Gamma'_m}{\pi l_1} - \frac{\Gamma'_m}{4\pi} \cdot \frac{l_1}{d^2 - \frac{l_1^2}{4}} \approx \frac{\Gamma'_m}{\pi l_1},$$

în cazul nacelelor. Valorile lui Γ_m și Γ'_m vor fi deduse din portanța totală suplimentară, după (19.1) și din cele ipotetice uniform repartizate pe e_1 sau $2l_1$:

$$(24.10) \quad \rho V_0 \Gamma_m e_1 = \frac{\rho}{2} V_0^2 b^2 \pi a_1, \quad \rho V_0 \Gamma'_m \cdot 2l_1 = \frac{\rho}{2} V_0^2 b^2 \pi a_1,$$

de unde rezultă în fine:

$$(24.11) \quad \frac{w_{sa}}{V_0} = \frac{1}{2} \cdot \frac{b^2}{e_1^2} a_1 = k a_1, \quad \frac{w'_{sa}}{V_0} = \frac{1}{4} \cdot \frac{b^2}{l_1^2} a_1 = k' a_1.$$

În cazul unei singure nacele (perturbație disimetrică) vom avea:

$$(24.12) \quad \frac{w''_{sa}}{V_0} = \frac{1}{2} \cdot \frac{b^2}{l_1^2} a_1 = k'' a_1.$$

*) Am considerat perturbații simetrice sau eventual o singură nacele situată pe semi-anvergura aripilor (perturbație disimetrică). Printr'un raționament analog se poate ajunge la formule similare pentru cazul perturbațiilor antisimetrice.

Să observăm mai departe că α_a , w_a , ε_a și w_{sa} au fost luate în axa perturbației și să punem

$$(24.13) \quad \alpha_t = \alpha_a - \frac{w_a}{V_0} + \varepsilon_a, \quad \frac{w_{sa}}{V_0} = k a_1;$$

expresia (24.6) devine :

$$(24.14) \quad \varepsilon' = \varepsilon + t \left(\alpha_t - \frac{w_{sa}}{V_0} \right) = \varepsilon + \alpha_t t - k a_1 t$$

și desfășurarea în serie FOURIER a expresiilor $\varepsilon \sin \theta$ și $t \sin \theta$:

$$(24.15) \quad \begin{cases} \varepsilon \sin \theta = \varepsilon_1 \sin \theta + \varepsilon_2 \sin 2\theta + \dots + \varepsilon_n \sin n\theta, \\ t \sin \theta = t_1 \sin \theta + t_2 \sin 2\theta + \dots + t_n \sin n\theta, \end{cases}$$

ne dă soluția problemei. Vom putea scrie după (22.11), limitându-ne prin urmare la aripile eliptice, quasi-eliptice, trapezoidale și dreptunghiulare :

$$(24.16) \quad \omega_n \approx (\varepsilon_n + \alpha_t t_n) - \beta_2 \frac{\varepsilon_{n+2} + \alpha_t t_{n+2}}{(n+2)\mu_0 + \beta_0} - \beta_4 \frac{\varepsilon_{n+4} + \alpha_t t_{n+4}}{(n+4)\mu_0 + \beta_0} - k a_1 \left[t_n - \beta_2 \frac{t_{n+2}}{(n+2)\mu_0 + \beta_0} - \beta_4 \frac{t_{n+4}}{(n+4)\mu_0 + \beta_0} \right] = \omega'_n - a_1 \tau_n,$$

unde am înlocuit prin ω'_n și τ_n expresiile următoare :

$$(24.16 \text{ bis}) \quad \begin{cases} \omega'_n = (\varepsilon_n + \alpha_t t_n) - \beta_2 \frac{\varepsilon_{n+2} + \alpha_t t_{n+2}}{(n+2)\mu_0 + \beta_0} - \beta_4 \frac{\varepsilon_{n+4} + \alpha_t t_{n+4}}{(n+4)\mu_0 + \beta_0}, \\ \tau_n = k \left[t_n - \beta_2 \frac{t_{n+2}}{(n+2)\mu_0 + \beta_0} - \beta_4 \frac{t_{n+4}}{(n+4)\mu_0 + \beta_0} \right]. \end{cases}$$

Să introducem aceste valori în formulele (22.10); vom obține în cele din urmă :

$$(24.17) \quad \begin{cases} \left[\mu_0 + \beta_0 - \beta_2 - \frac{(\beta_2 - \beta_4)^2}{3\mu_0 + \beta_0} + \mu_0 \left(\tau_1 + \tau_3 \frac{\beta_4}{3\mu_0 + \beta_0} \right) \right] a_1 = \mu_0 \left(\omega'_1 + \beta_4 \frac{\omega'_3}{3\mu_0 + \beta_0} \right), \\ \left(2\mu_0 + \beta_0 - \beta_4 - \frac{\beta_2^2 + \beta_4^2}{4\mu_0 + \beta_0} \right) a_2 + \mu_0 \tau_2 a_1 = \mu_0 \omega'_2, \\ \left(3\mu_0 + \beta_0 - \frac{\beta_2^2 - \beta_4^2}{5\mu_0 + \beta_0} \right) a_3 + \left(\beta_2 - \beta_4 - \frac{\beta_2 \beta_4}{5\mu_0 + \beta_0} + \mu_0 \tau_3 \right) a_1 = \mu_0 \omega'_3, \\ \dots \\ \left(n\mu_0 + \beta_0 - \frac{\beta_2^2 + \beta_4^2}{(n+2)(\mu_0 + \beta_0)} \right) a_n + \beta_2 a_{n-2} + \beta_4 a_{n-4} + \mu_0 \tau_n a_1 = \mu_0 \omega_n. \end{cases}$$

Aceste formule sunt susceptibile de a fi simplificate dacă neglijăm din ambii membri termenii de ordin secundar β_2^2 , β_4^2 , $\beta_2 \beta_4$ și β_4 .

Observație. Pentru a calcula pe k și k' din formulele (24.11), trebuie să determinăm lungimile e_1 și l_1 . Vom face ipoteza că înafara lărgimilor e sau l , o bună parte a anvergurii, de o parte și de alta, suferă o micșorare a portanței în cazul scobiturii sau o mărire a portanței în cazul nacelelor de motor. Un raționament simplu și practic ne conduce la formulele următoare :

$$(24.18) \quad e_1 = \frac{1}{n} \left[b + (n-1)e \right], \quad l_1 = \frac{1}{n} \left[\frac{b}{2} + (n-1)l \right],$$

unde n poate lua valori care depind de e , l și d .

Practic se poate admite : $n \geq 3$.

24.2. Aplicații la aripa eliptică

Pentru aripa eliptică $\beta_0 = 1$, $\beta_2 = \beta_4 = 0$ și formulele precedente devin

$$(24.19) \quad \begin{cases} (1 + \mu_0 + \mu_0 k t_1) a_1 = \mu_0 (\varepsilon_1 + \alpha_t t_1), \\ (1 + 2\mu_0) a_2 + \mu_0 k t_2 a_1 = \mu_0 (\varepsilon_2 + \alpha_t t_2), \\ \dots \\ (1 + n\mu_0) a_n + \mu_0 k t_n a_1 = \mu_0 (\varepsilon_n + \alpha_t t_n), \end{cases}$$

sau încă, efectuând câteva transformări elementare, se ajunge la relația următoare :

$$(24.20) \quad a_n = \frac{\mu_0}{1 + n\mu_0} \left[\frac{\varepsilon_1 t_n - \varepsilon_n t_1}{t_1} + (1 + \mu_0) \frac{t_n}{t_1} \frac{\varepsilon_1 + \alpha_t t_1}{1 + \mu_0(1 + k t_1)} \right].$$

Adesea, variația lui ε și aceea a lui t au aceeași formă și deci se poate scrie :

$$(24.21) \quad \varepsilon_1 t_n - \varepsilon_n t_1 \approx 0,$$

iar expresia lui a_n devine în acest caz mai simplă :

$$(24.22) \quad a_n = \frac{1 + \mu_0}{1 + n\mu_0} \frac{t_n}{t_1} \frac{(\varepsilon_1 + \alpha_t t_1) \mu_0}{1 + \mu_0(1 + k t_1)}.$$

Dacă aripa păstrează aceeași incidență inițială α pe toată anvergura, adică dacă $\varepsilon = 0$, vom avea :

$$(24.23) \quad a_n = \frac{1 + \mu_0}{1 + n\mu_0} \frac{\mu_0 \alpha t t_n}{1 + \mu_0(1 + k t_1)}.$$

24.2.1. Exemplu. Vom aplica formula de mai sus sub această ultimă formă la un caz concret : scobitură de profunzime constantă ($t = \text{ct.}$).

Desfășurarea în serie FOURIER ne dă

$$(24.24) \quad \left\{ \begin{array}{l} t_1 = -\frac{2t_0}{\pi} \left(\frac{\sin 2\varphi}{2} - \varphi + \frac{\pi}{2} \right), \quad t_3 = -\frac{2t_0}{\pi} \left(\frac{\sin 4\varphi}{4} - \frac{\sin 2\varphi}{2} \right) \\ \dots \\ t_n = -\frac{2t_0}{\pi} \left(\frac{\sin(n+1)\varphi}{n+1} - \frac{\sin(n-1)\varphi}{n-1} \right), \end{array} \right.$$

unde φ va fi dat în funcție de scobitură:

$$(24.25) \quad \cos \varphi = -\frac{e}{b}.$$

Vom avea mai departe, după ultimele formule (16.31), distribuția inițială a circulației,

$$(24.26) \quad \Gamma = 2bV_0A_1 \sin \theta = 2bV_0 \frac{\mu_0}{1 + \mu_0} \alpha \sin \theta,$$

de unde rezultă după (17.4):

$$(24.27) \quad \frac{w_a}{V_0} = \frac{w}{V_0} = A_1 = \frac{\mu_0 \alpha}{1 + \mu_0}$$

și prin urmare:

$$(24.28) \quad \alpha_t = \alpha - \frac{w_a}{V_0} = \frac{\alpha}{1 + \mu_0}.$$

Coefficientul a_n va avea în acest caz o expresie mai simplă:

$$(24.29) \quad a_n = \frac{t_n}{1 + n\mu_0} \frac{\mu_0 \alpha}{1 + \mu_0 + \mu_0 k t_1}.$$

24.3. Metodă aproximativă pentru calculul aripilor de contur dat.

Metoda pe care am expus-o mai sus pentru determinarea influenței scobiturilor sau a nacelelor de motor poate fi extinsă la aripile de contur dat. Fie, într'adevăr, o aripă a cărei coardă c' variază după o lege oarecare dealungul anvergurii; să considerăm în același timp o aripă eliptică având aceeași suprafață și aceeași anvergură ca și aripa reală (fig. 24.3); fie c coarda sa:

$$(24.30) \quad c = c_0 \sin \theta = \frac{4}{\pi} \frac{S}{b} \sin \theta,$$

unde S este suprafața aripii.

Să punem mai departe:

$$(24.31) \quad c' = c(1 + t);$$

rezultă imediat:

$$(24.32) \quad t = \frac{c'}{c_0} \frac{1}{\sin \theta} - 1, \quad t \sin \theta = \frac{c'}{c_0} - \sin \theta.$$

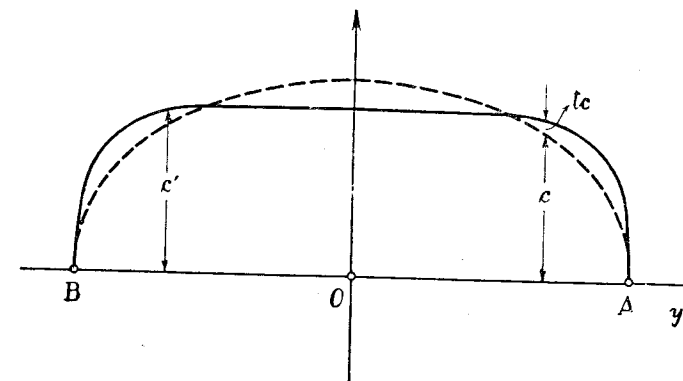


Fig. 24.3.

Putem desfășura coarda în serie FOURIER sau să o exprimăm printr'un polinom trigonometric finit (limitat de exemplu la patru termeni); vom avea în acest caz, considerând o aripă simetrică:

$$(24.33) \quad c' = \frac{4}{\pi} \frac{S}{b} [\sin \theta + t_3 \sin 3\theta + \dots + t_{2p+1} \sin (2p+1)\theta].$$

Să introducem această valoare a lui c' în a doua expresie (24.32) și, înmulțind cu $\sin \theta$, vom obține:

$$(24.34) \quad t \sin \theta = \sin \theta + t_3 \sin 3\theta + \dots + t_{2p+1} \sin (2p+1)\theta - \sin \theta = t_3 \sin 3\theta + \dots + t_{2p+1} \sin (2p+1)\theta.$$

Fie mai departe α incidența, w' viteza indusă a aripii reale, w viteza indusă a aripii eliptice echivalente, având aceeași incidență; dacă notăm cu w_s diferența lor,

$$(24.35) \quad w' = w + w_s,$$

ecuația (15.38) va putea fi pusă sub forma

$$(24.36) \quad \Gamma = kc'V_0 \left(\alpha - \frac{w'}{V_0} \right) = kcV_0 \left(\alpha - \frac{w}{V_0} \right) + kcV_0 \left[t \left(\alpha - \frac{w}{V_0} \right) - t \frac{w_s}{V_0} - \frac{w_s}{V_0} \right],$$

unde prima expresie din membru al doilea corespunde aripii eliptice normale, cu incidență constantă, iar a doua, unei aripii eliptice cu incidență variabilă

$$(24.37) \quad \tau = t \left(\alpha - \frac{w}{V_0} \right) - t \frac{w_s}{V_0}.$$

Pentru aripile eliptice vom avea

$$(24.38) \quad \alpha - \frac{w}{V_0} = \frac{\alpha}{1 + \mu_0};$$

în ceea ce privește viteza suplimentară w_s , se poate lua o valoare mijlocie :

$$(24.39) \quad \frac{w_{sm}}{V_0} = \frac{1}{b} \int_B^A \frac{w_s}{V_0} dy = a_1 + a_3 + \dots + a_{2p+1}.$$

Coefficienții a_n pentru aripile obișnuite descresc repede; observând pe de altă parte că a_1 este nul, ceea ce vom stabili mai jos, și că t este în general mic, se poate admite fără mare eroare :

$$(24.40) \quad \frac{w_{sm}}{V_0} = a_3 + a_5 + \dots = a,$$

de unde rezultă pentru expresia (24.37) :

$$(24.41) \quad \tau \sin \theta = \left(\frac{\alpha}{1 + \mu_0} - a \right) [t_3 \sin 3\theta + \dots + t_{2p+1} \sin (2p+1)\theta] = \\ = \tau_3 \sin 3\theta + \dots + \tau_{2p+1} \sin (2p+1)\theta,$$

unde

$$(24.42) \quad \tau_n = \left(\frac{\alpha}{1 + \mu_0} - a \right) t_n.$$

Prin urmare, notând cu Γ_s circulația suplimentară care trebuie adăugată la cea a aripii eliptice, vom scrie :

$$(24.43) \quad \Gamma_s = 2bV_0 \sum_1^n a_n \sin n\theta = kcV_0 \left(\tau - \frac{w_s}{V_0} \right) = kc_0V_0\tau \sin \theta - \\ - kc_0V_0 \sum_1^n na_n \sin n\theta.$$

Să punem mai departe

$$(24.44) \quad \mu_0 = \frac{k}{2} \cdot \frac{c_0}{b} = \frac{k}{2} \cdot \frac{c'_0}{b} \cdot \frac{c_0}{c'_0} = \mu'_0 \frac{c_0}{c'_0} = \frac{4}{\pi} \cdot \frac{S}{c'_0 b} \mu'_0,$$

unde μ'_0 precum și coarda mediană c'_0 , sunt cele ale aripii reale; ținând seama de (24.42) și (24.43), obținem în cele din urmă soluția problemei :

$$(24.45) \quad a_n = \frac{\mu_0 \tau_n}{1 + n\mu_0} = \frac{1 + 3\mu_0}{1 + n\mu_0} \cdot \frac{t_n}{t_3} a_3, \quad a_1 = 0.$$

Pentru a calcula pe a_3 , trebuie să determinăm mai întâi pe a ; dacă vom observa că pentru aripile obișnuite trei termeni ai desfășurării (24.34) sunt suficienți, se poate scrie :

$$(24.46) \quad a \approx a_3 + a_5 + a_7 = \mu_0 \left(\frac{\alpha}{1 + \mu_0} - a \right) \left[\frac{t_3}{1 + 3\mu_0} + \right. \\ \left. + \frac{t_5}{1 + 5\mu_0} + \frac{t_7}{1 + 7\mu_0} \right] \approx \mu_0 \left(\frac{\alpha}{1 + \mu_0} - a \right) \frac{t_3 + t_5 + t_7}{1 + 3\mu_0},$$

de unde rezultă :

$$(24.47) \quad \frac{\alpha}{1 + \mu_0} - a = \frac{\alpha}{1 + \mu_0} \cdot \frac{1 + 3\mu_0}{1 + (3 + t_3 + t_5 + t_7)\mu_0}$$

și prin urmare

$$(24.48) \quad a_3 = \frac{t_3}{1 + (3 + t_3 + t_5 + t_7)\mu_0} \cdot \frac{\mu_0 \alpha}{1 + \mu_0}.$$

24.3.1. Aplicație la aripile dreptunghiulare și trapezoidale. Să considerăm mai întâi o aripă trapezoidală sau dreptunghiulară și să ne limităm la patru termeni ai desfășurării (24.33)

$$(24.49) \quad c' = \frac{4}{\pi} \cdot \frac{S}{b} (\sin \theta + t_3 \sin 3\theta + t_5 \sin 5\theta + t_7 \sin 7\theta).$$

Notând cu c'_0 și c'_e , respectiv coardele mediane și extremale, punând ca în paragrafele precedente,

$$(24.50) \quad q = 1 - \frac{c'_e}{c'_0}$$

și făcând să treacă curba (24.49) prin puncte convenabil alese pe contur ($\theta = 22^\circ 30'$; 45° ; $67^\circ 30'$), suprafața rămânând aceeași, se găsește în cele din urmă :

$$(24.51) \quad t_3 = 0,274 - \frac{0,3 q}{1 - 0,5 q}; \quad t_5 = 0,135 - \frac{0,061 q}{1 - 0,5 q}; \\ t_7 = 0,029 - \frac{0,004 q}{1 - 0,5 q},$$

care reprezintă destul de bine conturul aripii trapezoidale.

Pentru primul termen al aripii eliptice echivalente, se găsește ușor :

$$(24.52) \quad A_1 = \frac{\mu_0 \alpha}{1 + \mu_0} = \frac{\frac{4}{\pi} \cdot \frac{S}{c'_0 b} \mu'_0 \alpha}{1 + \frac{4}{\pi} \cdot \frac{S}{c'_0 b} \mu'_0}$$

Pentru ceilalți termeni, se aplică formulele (24.45) și (24.48).

Să observăm mai departe că pentru coarda mediană avem :

$$(24.53) \quad c'_0 = \frac{4}{\pi} \cdot \frac{S}{b} (1 - t_3 + t_5 - t_7) = \frac{4}{\pi} \cdot \frac{S}{b} \left(0,83 + \frac{0,243 q}{1 - 0,5 q} \right),$$

de unde rezultă $c'_0 = 0,83 \frac{4}{\pi} \cdot \frac{S}{b}$ la aripa dreptunghiulară, unde calculele respective (cu $\mu'_0 = 0,25$) ne duc la rezultatele următoare :

$$\frac{A_1}{\mu'_0 \alpha} = 0,926; \quad \frac{a_3}{\mu'_0 \alpha} = 0,124; \quad \frac{a_5}{\mu'_0 \alpha} = 0,046; \quad \frac{a_7}{\mu'_0 \alpha} = 0,008.$$

Se vede că primii doi termeni sunt aproape identici cu cei găsiți înainte (tabela 18.I).

Ultimii doi, termeni prezintă abateri sensibile, însă neglijabile totuși față de valoarea primilor doi termeni.

24.3.2. Aplicații la aripi de formă oarecare. Ca și pentru cazul precedent, se poate face să treacă prin puncte convenabil alese o curbă foarte apropiată de conturul real, care să fie reprezentată printr'un polinom trigonometric (24.33) limitat la patru termeni.

După aceasta, calculele pentru determinarea coeficienților A_1, a_3, a_5, \dots sunt elementare.

25. ROTAȚIA ARIPII ÎN JURUL UNEI AXE

În acest paragraf vom trata câteva probleme speciale care au o aplicație imediată în mecanica avionului.

25.1. Aripă în viraj circular plan [2]

Să presupunem că aripa se rotește în jurul unei axe normale pe planul ei, această axă intersectând în același timp și linia anvergurii. Fie Ω viteza de rotație și R_0 raza virajului față de planul median al aripei.

Viteza în fiecare secțiune a aripii este

$$(25.1) \quad V = \Omega (R_0 + y) = \Omega R_0 \left(1 + \frac{y}{R_0} \right) = V_0 \left(1 - \frac{b}{2R_0} \cos \theta \right),$$

unde $V_0 = \Omega R_0$ este viteza secțiunii mediane.

Se vede astfel că viteza variază dealungul anvergurii și că, pe de altă parte, vârtejurile libere sunt dispuse în cercuri concentrice în jurul axei de rotație; rezultă o variație a incidenței și o viteză indusă diferite de cele datorite pânzei de vârtejuri rectilinii.

Prin ipoteză numai semi-cercul posterior al vârtejurii circular are influență în ceea ce privește viteza indusă, cealaltă jumătate fiind presupusă destrămată din cauza frecării, deformării, etc.

În aceste condiții, viteza indusă într'un punct oarecare datorită unui semi-cerc turbionar de intensitate $d\Gamma$ (notând cu x', y', z' coordonatele unui element al inelului (fig. 25.1) și prin ξ', η', ζ' , acelea ale punctului considerat) va fi dată de a treia relație (2.27) :

$$(25.2) \quad dw = \frac{d\Gamma}{4\pi} \int_S \frac{(x' - \xi') dy' - (y' - \eta') dx'}{[(x' - \xi')^2 + (y' - \eta')^2 + (z' - \zeta')^2]^{3/2}}.$$

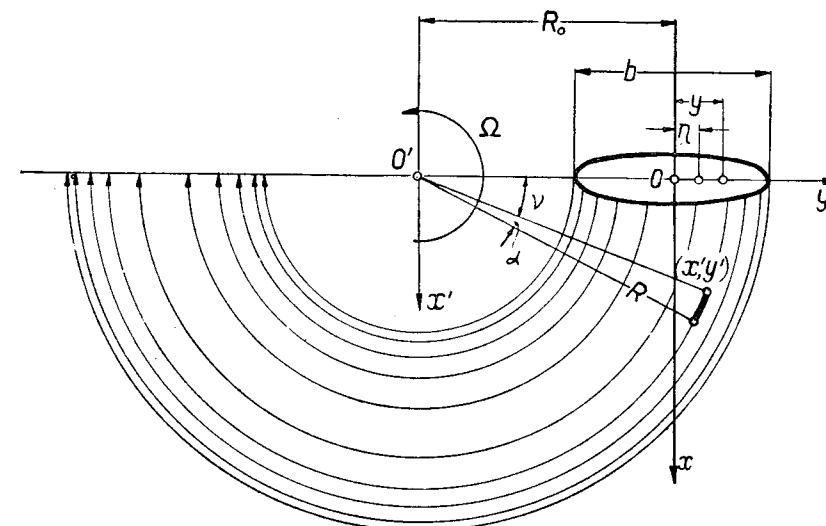


Fig. 25.1

Inelul fiind în planul $x'O'y'$ vom avea deci $z' = \zeta' = 0$ și cum pe de altă parte punctul considerat se găsește pe anvergură, avem în același timp $\xi' = 0$.

Să punem mai departe (fig. 25.1) :

$$(25.3) \quad x' = R \sin \nu, \quad y' = R \cos \nu$$

și integrala precedentă devine

$$(25.4) \quad dw = \frac{d\Gamma}{4\pi} \left\{ -R^2 \int_0^\pi \frac{d\nu}{(R^2 + \eta'^2 - 2R\eta' \cos \nu)^{3/2}} + R\eta' \int_0^\pi \frac{\cos \nu d\nu}{(R^2 + \eta'^2 - 2R\eta' \cos \nu)^{3/2}} \right\}.$$

Să punem încă :

$$(25.5) \quad p^2 = R^2 + \eta'^2, \quad q^2 = 2R\eta',$$

și vom avea pentru cele două integrale din membrul al doilea (25.4)

$$(25.6) \quad \int_0^\pi \frac{\cos v \, dv}{(p^2 - q^2 \cos v)^{3/2}} = \frac{p^2}{q^2} \int_0^\pi \frac{dv}{(p^2 - q^2 \cos v)^{3/2}} - \frac{1}{q^2} \int_0^\pi \frac{dv}{(p^2 - q^2 \cos v)^{1/2}}$$

și

$$(25.7) \quad \int_0^\pi \frac{dv}{(p^2 - q^2 \cos v)^{3/2}} = \frac{1}{p^4 - q^4} \int_0^\pi (p^2 - q^2 \cos v)^{1/2} dv.$$

Să înlocuim aceste relații în (25.4), punând apoi :

$$(25.8) \quad v = \pi - 2\varphi, \quad k^2 = \frac{2q^2}{p^2 + q^2} = \frac{4R\eta'}{(R + \eta')^2}, \quad k'^2 = 1 - k^2 = \frac{p^2 - q^2}{p^2 + q^2} = \frac{(R - \eta')^2}{(R + \eta')^2};$$

vom găsi în cele din urmă două integrale eliptice complete, de prima (K) și a doua (E) speță :

$$(25.9) \quad dw = \frac{d\Gamma}{4\pi} \left\{ \frac{1}{R + \eta'} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{(1 - k^2 \sin^2 \varphi)^{1/2}} + \frac{1}{R - \eta'} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - k^2 \sin^2 \varphi)^{1/2} d\varphi \right. \\ \left. = \frac{d\Gamma}{4\pi} \left(\frac{K}{R + \eta'} + \frac{E}{R - \eta'} \right) \right.$$

Se vede, după fig. 25.1, că avem respectiv :

$$(25.10) \quad R = R_0 + y, \quad \eta' = R_0 + \eta, \quad R - \eta' = y - \eta;$$

pe de altă parte valoarea lui k'^2 fiind foarte mică :

$$(25.11) \quad k'^2 = \frac{(R - \eta')^2}{(R + \eta')^2} = \frac{(y - \eta)^2}{(2R_0 + y + \eta)^2} \approx \left(\frac{y - \eta}{2R_0} \right)^2,$$

ceea ce ne permite să dezvoltăm pe K și E în funcție de k' , după LEGENDRE :

$$(25.12) \quad \begin{cases} K = \ln \frac{4}{|k'|} + \frac{l^2}{2^2} k'^2 \left(\ln \frac{4}{|k'|} - 1 \right) + \dots \approx \ln \frac{4}{|k'|}, \\ E = 1 + \frac{1}{2} k'^2 \left(\ln \frac{4}{|k'|} - \frac{1}{2} \right) + \dots \approx 1. \end{cases}$$

Înlocuind aceste valori în (25.9) și integrând, se găsește următoarea expresie pentru viteza indusă căutată :

$$(25.13) \quad w = \frac{1}{4\pi} \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \left(\frac{1}{\eta - y} + \frac{\ln |\eta - y|}{2R} \right) \frac{d\Gamma}{dy} dy.$$

Să observăm că putem scrie succesiv :

$$(25.14) \quad \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \ln |\eta - y| d\Gamma = (\ln |\eta - y|)^{\frac{b}{2}} + \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \frac{dy}{\eta - y} = \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \Gamma \frac{dy}{\eta - y};$$

dacă înlocuim mai departe pe Γ prin expresia sa în funcție de θ formula (25.13) a vitezei induse ia următoarea formă :

$$(25.15) \quad \frac{w}{V_0} = \frac{1}{\sin \theta} \sum_1^n n A_n \sin n\theta + \frac{b}{8R_0} \frac{1}{\sin \theta} \sum_1^n A_n [\sin(n-1)\theta - \sin(n+1)\theta]$$

și în consecință, introducând această valoare în noua ecuație a circulației,

$$(25.16) \quad \Gamma = kcV \left(\alpha - \frac{w}{V} \right) = kcV\alpha - kcw = \\ = kcV_0 \left[\left(1 - \frac{b}{2R_0} \cos \theta \right) \alpha - \frac{w}{V_0} \right],$$

vom ajunge, în sfârșit, la relația următoare :

$$(25.17) \quad \frac{c_0}{c} \sin \theta \sum_1^n A_n \sin n\theta + \mu_0 \sum_1^n n A_n \sin n\theta + \frac{\mu_0 b}{8R_0} \sum_1^n A_n [\sin(n-1)\theta - \sin(n+1)\theta] = \mu_0 \alpha \sin \theta - \frac{\mu_0 b}{4R_0} \alpha \sin 2\theta.$$

Este greu de rezolvat această ecuație în cazul general. De aceea vom trata mai întâi un caz particular : aripa eliptică ; vom da apoi o soluție aproximativă pentru cazul general.

25.1.1. Aripa eliptică. Pentru acest caz se ajunge ușor la o ecuație cu diferențe finite de al doilea ordin :

$$(25.18) \quad (1 + n\mu_0)A_n + \frac{\mu_0 b}{8R_0}(A_{n+1} - A_{n-1}) = 0$$

care pentru $n = 1$ și $n = 2$, ne dă următoarele două ecuații neomogene :

$$(25.19) \quad \begin{cases} (1 + \mu_0)A_1 + \frac{\mu_0 b}{8R_0} A_2 = \mu_0 \alpha, \\ (1 + 2\mu_0)A_2 + \frac{\mu_0 b}{8R_0} (A_3 - A_1) = -\frac{\mu_0 b}{4R_0} \alpha. \end{cases}$$

Utilizând aceeași metodă ca și în paragraful (17.4), este ușor de văzut că soluția va fi dată de integrala :

$$(25.20) \quad A_n = C \int_t^{n + \frac{1}{\mu_0} - 1} \frac{b}{8R_0} \left(t + \frac{1}{t} \right) dt,$$

care devine integrala caracteristică a funcției BESSEL, dacă se face schimbarea de variabilă $t = i\tau$:

$$(25.21) \quad A_n = C i^n \int_{\tau}^{\tau + \frac{1}{\mu_0} - 1} e^{-\frac{ib}{8R_0} \left(\tau - \frac{1}{\tau} \right)} d\tau,$$

sau încă

$$(25.22) \quad A_n = C i^n \int_{-(n + \frac{1}{\mu_0})}^{-\frac{ib}{4R_0}} = C \left(\frac{b}{8R_0} \right)^n \frac{1}{\Gamma\left(n + \frac{1}{\mu_0} + 1\right)} \times \\ \times \sum_{m=1}^{\infty} \left(\frac{b}{8R_0} \right)^{2m} \frac{1}{m! \left(n + \frac{1}{\mu_0} + 1\right) \dots \left(n + \frac{1}{\mu_0} + m\right)}$$

Să observăm că $\frac{b}{8R_0}$ fiind foarte mic, se poate scrie

$$(25.23) \quad A_n \approx C \frac{\left(\frac{b}{8R_0}\right)^n}{\Gamma\left(n + \frac{1}{\mu_0} + 1\right)},$$

unde Γ reprezintă funcția Gamma (să nu se confunde deci funcția Gamma cu notarea obișnuită a circulației).

În locul constantei C să luăm, drept constantă de determinat, termenul A_2 :

$$(25.24) \quad A_2 = C \left(\frac{b}{8R_0}\right)^2 \frac{1}{\Gamma\left(2 + \frac{1}{\mu_0} + 1\right)};$$

în acest caz termenul A_n este de forma:

$$(25.25) \quad A_n = \left(\frac{\mu_0 b}{8R_0}\right)^{n-2} \frac{A_2}{(1 + 3\mu_0) \dots (1 + n\mu_0)},$$

de unde se vede că coeficienții A_n descresc repede din cauza termenului $\frac{b}{8R_0}$, care este foarte mic.

Primul și al doilea termen (A_1, A_2) sunt deduși din ecuațiile (25.19):

$$(25.26) \quad \begin{cases} A_1 = \frac{\mu_0 \alpha}{1 + \mu_0} + \frac{1}{2} \left(\frac{\mu_0 b}{4R_0}\right)^2 \frac{(1 + 0,5\mu_0) \alpha}{(1 + \mu_0)^2 (1 + 2\mu_0)} \approx \frac{\mu_0 \alpha}{1 + \mu_0}, \\ A_2 = -\frac{\mu_0 b}{4R_0} \frac{(1 + 0,5\mu_0) \alpha}{(1 + \mu_0) (1 + 2\mu_0)}. \end{cases}$$

Dacă neglijăm termenii care conțin pe $\frac{\mu_0 b}{8R_0}$ la o putere egală sau superioară lui 2, ne putem limita, fără o eroare prea mare, la primii doi termeni și regăsim astfel rezultatele lui WIESELSBERGER

$$(25.27) \quad \Gamma = 2bV_0(A_1 \sin \theta + A_2 \sin 2\theta) = 2bV_0 A_1 \sin \theta \left(1 + 2 \frac{A_2}{A_1} \cos \theta\right) = \\ = 2bV_0 A_1 \sin \theta \left(1 + \frac{1 + 0,5\mu_0}{1 + 2\mu_0} \cdot \frac{y}{R_0}\right) = \Gamma_0 \sqrt{1 - \left(\frac{2y}{b}\right)^2} \cdot \left(1 + \frac{1 + 0,5\mu_0}{1 + 2\mu_0} \frac{y}{R_0}\right),$$

care presupune de la început o distribuție a circulației limitată la această ultimă formă:

$$(25.28) \quad \Gamma = \Gamma_0 \sqrt{1 - \left(\frac{2y}{b}\right)^2} \cdot \left(1 + \nu \frac{y}{R_0}\right),$$

unde coeficientul ν , care trebuie să fie determinat, este presupus cunoscut a priori.

Se poate obține același rezultat direct fără a trece prin funcțiile BESSEL, observând că în ecuația cu diferențe finite (25.18), A_{n+1} ar putea fi înlocuit printr-o valoare aproximativă care se obține neglijând pe A_{n+2} față de A_n :

$$(25.29) \quad [1 + (n+1)\mu_0] A_{n+1} - \frac{\mu_0 b}{8R_0} A_n = \mu_0 \alpha_{n+1}.$$

Vom avea prin urmare:

$$(25.30) \quad \left[1 + n\mu_0 + \left(\frac{\mu_0 b}{8R_0}\right)^2 \frac{1}{1 + (n+1)\mu_0}\right] A_n - \frac{\mu_0 b}{8R_0} A_{n+1} = \mu_0 \alpha_n - \\ - \frac{\mu_0 b}{8R_0} \frac{\mu_0 \alpha_{n+1}}{1 + (n+1)\mu_0},$$

unde

$$(25.31) \quad \alpha_1 = \alpha, \quad \alpha_2 = -\frac{b}{4R_0} \alpha, \quad \alpha_3 = \dots = \alpha_n = 0.$$

25.1.2. Aripi dreptunghiulare și trapezoidale. Să revenim la ecuația generală (25.17) și s'o punem sub forma următoare:

$$(25.32) \quad \frac{c_0}{c} \sin \theta \sum_1^n A_n \sin n\theta + \mu_0 \sum_1^n n A_n \sin n\theta = \mu_0 \alpha \sin \theta - \\ - \frac{\mu_0 b}{4R_0} \alpha \sin 2\theta + \frac{\mu_0 b}{8R_0} \sum_1^n A_n [\sin(n+1)\theta - \sin(n-1)\theta].$$

Să presupunem că al doilea membru reprezintă desfășurarea în serie FOURIER a unui produs $\alpha' \sin \theta$, unde α' ar fi o incidență variabilă

dealungul anvergurii :

$$(25.33) \quad \alpha' \sin \theta = \alpha_1 \sin \theta + \alpha_2 \sin 2\theta + \alpha_3 \sin 3\theta + \dots + \alpha_n \sin n\theta.$$

Coefficienții α_i vor fi respectiv :

$$(25.34) \quad \begin{cases} \alpha_1 = \alpha - \frac{A_2 b}{8R_0}, & \alpha_2 = \frac{(A_1 - A_3)b}{8R_0} - \frac{b\alpha}{4R_0}, & \alpha_3 = \frac{(A_2 - A_4)b}{8R_0}, \\ \alpha_4 = \frac{(A_3 - A_5)b}{8R_0}, & \dots, & \alpha_n = \frac{(A_{n-1} - A_{n+1})b}{8R_0} \end{cases}$$

și ecuațiile cu diferențe finite se separă, în acest caz, în două grupe, termenii pari și termenii impari :

$$(25.35) \quad \begin{cases} (2p\mu_0 + \beta_0) A_{2p} + \beta_2 (A_{2p-2} + A_{2p+2}) + \beta_4 (A_{2p-4} + A_{2p+4}) = \\ = \frac{(A_{2p-1} - A_{2p+1}) b \mu_0}{8R_0}, \\ [(2p+1)\mu_0 + \beta_0] A_{2p+1} + \beta_2 (A_{2p-1} + A_{2p+3}) + \beta_4 (A_{2p-3} + A_{2p+5}) = \\ = \frac{(A_{2p} - A_{2p+2}) b \mu_0}{8R_0}. \end{cases}$$

Din prima ecuație se vede că termenii pari sunt proporționali cu $\frac{\mu_0 b}{8R_0}$ și în consecință membrul al doilea din ecuația a doua este proporțional cu $\left(\frac{\mu_0 b}{8R_0}\right)^2$, deci neglijabil. Într'adevăr, $R_0 > \frac{b}{2}$ și deci, începând dela α_3 se poate neglija influența acestor termeni, precum și a termenului al doilea din expresia α_1 (25.34); astfel încât se poate admite că coeficienții $A_1, A_3, \dots, A_{2p+1}$ păstrează aceeași valoare ca și pentru aripa normală în translație rectilinie.

Rezultă aproximativ :

$$(25.36) \quad \begin{cases} A_1 - A_3 \approx A_1 \left(1 + \frac{\beta_2 - \beta_4}{3\mu_0 + \beta_0}\right), & A_3 - A_5 \approx -\frac{\beta_2 - 2\beta_4}{3\mu_0 + \beta_0} A_1, \\ A_5 - A_7 \approx -\frac{\beta_4}{5\mu_0 + \beta_0} A_1 \end{cases}$$

și ca urmare, după (25.34)

$$(25.37) \quad \begin{cases} \alpha_2 \approx \frac{A_1 b}{8R_0} \left(1 + \frac{\beta_2 - \beta_4}{3\mu_0 + \beta_0}\right) - \frac{b\alpha}{4R_0} \approx -\frac{A_1 b}{8R_0} \left(1 + 2\frac{\beta_0 - \beta_2}{\mu_0} - \frac{\beta_2 - \beta_4}{3\mu_0 + \beta_0}\right), \\ \alpha_4 \approx -\frac{A_1 b}{8R_0} \frac{\beta_2 - 2\beta_4}{3\mu_0 + \beta_0}, & \alpha_6 \approx -\frac{A_1 b}{8R_0} \frac{\beta_4}{5\mu_0 + \beta_0}. \end{cases}$$

Urmează numaidecât :

$$(25.38) \quad \begin{cases} A_2 \approx -\frac{\mu_0 b}{8R_0} \left(1 + 2\frac{\beta_0 - \beta_2}{\mu_0} - \frac{\beta_2 - \beta_4}{3\mu_0 + \beta_0}\right) \frac{A_1}{2\mu_0 + \beta_0 - \beta_4} \approx \\ \approx -\frac{\mu_0 b}{4R_0} \frac{[0,5\mu_0 + (\beta_0 - \beta_2)]}{\mu_0} \frac{A_1}{2\mu_0 + \beta_0 - \beta_4}, \\ A_4 \approx -\frac{\mu_0 b}{4R_0} \left[\frac{\beta_2 - \beta_4}{2\mu_0 + \beta_0} + \frac{\beta_2(\beta_0 - \beta_2)}{\mu_0(2\mu_0 + \beta_0)}\right] \frac{A_1}{4\mu_0 + \beta_0}, \text{ etc.} \end{cases}$$

unde A_1 ar putea fi înlocuit prin $\frac{\mu_0 \alpha}{\mu_0 + \beta_0 - \beta_2}$.

Pentru aripa eliptică ($\beta_0 = 1, \beta_2 = \beta_4 = 0$) se regăsesc și pe această cale rezultatele precedente (25.26).

25.2. Forțe și momente datorite virajului

Integrala portanței ne dă succesiv :

$$(25.39) \quad \begin{aligned} P &= \rho V_0 \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \left(1 + \frac{y}{R_0}\right) \Gamma dy = \frac{\rho}{2} S V_0^2 (\pi \lambda A_1) - \\ &- \frac{\rho}{2} S V_0^2 \left(\frac{b}{4R_0} \pi \lambda A_2\right) \end{aligned}$$

sau încă :

$$(25.40) \quad \begin{aligned} C_z &= \pi \lambda A_1 - \frac{b}{4R_0} \pi \lambda A_2 = \pi \lambda A_1 \left(1 - \frac{b}{4R_0} \frac{A_2}{A_1}\right) = \\ &= \pi \lambda A_1 \left[1 + \left(\frac{b}{4R_0}\right)^2 \frac{0,5\mu_0 + \beta_0 - \beta_2}{2\mu_0 + \beta_0 - \beta_4}\right]. \end{aligned}$$

Se vede că pentru portanță influența virajului este aproape neglijabilă. Pentru rezistență, vom observa că viteza indusă, care intră în integrala

$$(25.41) \quad R = \rho \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} w \Gamma dy,$$

diferă de viteza indusă din cazul mișcării de translație simplă prin următorul termen suplimentar :

$$(25.42) \quad \frac{w_s}{V_0} = \frac{b}{8R_0} \frac{1}{\sin \theta} \sum_1^n A_n [\sin(n-1)\theta - \sin(n+1)\theta],$$

dar integrala respectivă este nulă :

$$(25.43) \quad R' = \rho \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} w_s \Gamma dy = \rho b^2 V_0^2 \frac{b}{8R_0} \int_0^\pi \sum_1^n A_n [\sin(n-1)\theta - \sin(n+1)\theta] \left(\sum_1^n A_n \sin n\theta \right) d\theta = 0.$$

Prin urmare, expresia generală a lui δ este aceeași ca cea găsită anterior :

$$(25.44) \quad \delta = \sum_2^n n \frac{A_n^2}{A_1^2},$$

de unde se vede că influența termenilor pari, care se poate scrie sub forma :

$$(25.45) \quad \Delta \delta = 2 \frac{A_2^2}{A_1^2} + 4 \frac{A_4^2}{A_1^2} + \dots = \left(\frac{b}{4R_0} \right)^2 \left\{ 2 \left[\frac{0,5\mu_0 + \beta_0 - \beta_2}{2\mu_0 + \beta_0 - \beta_4} \right]^2 + 4 \left[\frac{\beta_2(\beta_0 - \beta_2)}{(2\mu_0 + \beta_0)(4\mu_0 + \beta_0)} \right]^2 \right\}$$

este neglijabilă din cauza factorului $\left(\frac{b}{4R_0} \right)^2$.

În același fel se găsește pentru momentul L :

$$(25.46) \quad L = \rho V_0 \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \left(1 + \frac{y}{R_0} \right) y \Gamma dy = - \frac{\rho}{2} V_0^2 \frac{b^3}{2} \int_0^\pi \left(1 - \frac{b}{2R_0} \cos \theta \right) \left(\sum_1^n A_n \sin n\theta \right) \sin 2\theta d\theta = - \frac{\rho}{2} V_0^2 b^3 \frac{\pi}{4} A_2 + \frac{\rho}{2} V_0^2 b^3 \frac{b}{4R_0} \cdot \frac{\pi}{4} (A_1 + A_3) = - \frac{\rho}{2} V_0^2 b^3 \xi \alpha$$

și în consecință :

$$(25.47) \quad \alpha \xi = \frac{\pi}{4} A_2 \left[1 - \frac{b}{4R_0} \left(\frac{A_1}{A_2} + \frac{A_3}{A_2} \right) \right],$$

de unde rezultă o formulă generală pentru ξ :

$$(25.48) \quad \xi = \frac{\pi}{4} \cdot \frac{\mu_0 b}{4R_0} \cdot \frac{1}{\mu_0 + \beta_0 - \beta_2} \left\{ \frac{0,55\mu_0 + \beta_0 - \beta_2}{2\mu_0 + \beta_0 - \beta_4} - \frac{\beta_2 - \beta_4}{3\mu_0 + \beta_0} + 1 \right\}.$$

Aplicând acest rezultat la o aripă dreptunghiulară, de alungire $\lambda = 2k$ ($\mu_0 = 0,25$), se găsește rezultatul următor :

$$(25.49) \quad \xi = 0,111 \pi \frac{b}{4R_0},$$

care concordă bine cu rezultatele găsite de alți autori.

Să trecem acum la momentul N : vom avea doi termeni, unul datorit primului termen al expresiei (25.15) iar celălalt celui de al doilea :

$$(25.50) \quad N = \rho \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} w \Gamma y dy = \frac{\rho}{2} V_0^2 b^3 \frac{\pi}{4} \sum_{p=1}^{n-1} (2p+1) A_p A_{p+1} + \frac{\rho}{2} V_0^2 b^3 \frac{b}{8R_0} \int_0^\pi \left\{ \sum_1^n A_n [\sin(n-1)\theta - \sin(n+1)\theta] \right\} \left(\sum_1^n A_n \sin n\theta \right) \cos \theta d\theta,$$

sau încă :

$$(25.51) \quad N = \frac{\rho}{2} V_0^2 b^3 \frac{\pi}{4} \left[\sum_{p=1}^{n-1} (2p+1) A_p A_{p+1} - \frac{b}{8R_0} A_1^2 \right] = \frac{\rho}{2} V_0^2 b^3 \zeta(\alpha^2),$$

cu

$$(25.52) \quad \zeta(\alpha^2) = \frac{\pi}{4} A_1^2 \left[\frac{A_2}{A_1} \left(3 + 5 \frac{A_3}{A_1} \right) - \frac{b}{8R_0} \right] \approx \frac{\pi}{4} \frac{b}{4R_0} A_1^2 \left\{ \left(3 - 5 \frac{\beta_2 - \beta_4}{3\mu_0 + \beta_0} \right) \frac{\mu_0 + \beta_0 - \beta_2}{2\mu_0 + \beta_0 - \beta_4} \left[1 - \frac{0,5\mu_0}{\mu_0 + \beta_0 - \beta_2} - \frac{0,5\mu_0(\beta_2 - \beta_4)}{(\mu_0 + \beta_0 - \beta_2)(3\mu_0 + \beta_0)} \right] + \frac{1}{2} \right\}.$$

Pentru aripa dreptunghiulară, cu aceleași caracteristici ca cea precedentă, se găsește :

$$(25.53) \quad \zeta = 0,0468 \pi \frac{b}{4R_0},$$

cea ce corespunde coeficientului F_2 al lui GLAUERT, pe care acesta îl definește punând momentul sub o altă formă :

$$(25.54) \quad N = \frac{\rho}{2} S V_0^2 \frac{C_z^2}{\pi \lambda} \cdot \frac{b^2}{4R_0} F_2.$$

Intr'adevăr, găsim pentru F_2 o valoare egală cu 0,870 în raport cu 0,864 dată de acest autor.

Trebue să observăm că momentul N are un nou termen N_0 , datorit rezistenței de formă, care se poate scrie :

$$(25.55) \quad N_0 = -\frac{\rho}{2} C_{x_0} \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} V^2 cy \, dy = -\frac{\rho}{2} C_{x_0} \frac{2V_0^2}{R_0} \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} cy^2 \, dy.$$

25.3. Rotația în jurul axei Oz

Aceasta este o problemă analoagă cu cea precedentă și intervine în special în studiul stabilității dinamice laterale a avioanelor.

Viteza variază dealungul anvergurii după aceeași lege :

$$(25.56) \quad V = V_0 + ry = V_0 \left(1 + \frac{r}{V_0} y \right) = V_0 \left(1 - \frac{rb}{2V_0} \cos \theta \right),$$

unde r este rotația în jurul lui Oz .

Dacă, împreună cu rotația, aripa face un viraj circular, revenim la problema precedentă; dacă, din contră, rotația nu provoacă virajul, mișcarea fiind la început*, se poate presupune că pânza rămâne rectilinie. În acest caz expresia vitezei induse (25.13) nu conține termenul logaritmă și păstrează aceeași formă ca și în cazul general. În aceste condiții problema se reduce a o variație anti-simetrică a incidenței :

$$(25.57) \quad \Gamma = kcV \left(\alpha - \frac{w}{V} \right) = kcV_0 \left(1 - \frac{rb}{2V_0} \cos \theta \right) \alpha - kcw = kcV_0 \left(\alpha' - \frac{w}{V_0} \right),$$

unde :

$$(25.58) \quad \alpha' \sin \theta = \alpha \left(1 - \frac{rb}{2V_0} \cos \theta \right) \sin \theta = \alpha \sin \theta - \alpha \frac{rb}{4V_0} \sin 2\theta.$$

Se obțin astfel două ecuații independente, una pentru termenii pari și alta pentru termenii impari. Aceasta din urmă este identică cu cea corespunzătoare aripii normale, fără rotație, ai cărei coeficienți i-am determinat în capitolele precedente.

Pentru termenii pari se aplică relația (22.9). Astfel, de exemplu, primii doi termeni vor fi dați de expresiile următoare :

$$(25.59) \quad \begin{cases} \left(2\mu_0 + \beta_0 - \beta_4 - \frac{\beta_2^2}{4\mu_0 + \beta_0} - \frac{\beta_4^2}{6\mu_0 + \beta_0} \right) A_2 = -\mu_0 \frac{br}{4V_0} \alpha, \\ \left(4\mu_0 + \beta_0 - \frac{\beta_2^2}{6\mu_0 + \beta_0} - \frac{\beta_4^2}{8\mu_0 + \beta_0} \right) A_4 + \beta_2 \left(1 - \frac{\beta_4}{6\mu_0 + \beta_0} \right) A_2 = 0. \end{cases}$$

*) Să observăm totuși că mișcarea încetează de a mai fi permanentă, însă noi vom neglija variația în raport cu timpul a sistemului turbionar și vom presupune că la momentul considerat mișcarea este permanentă.

Influența rotației asupra portanței și a rezistenței induse este neglijabilă; pentru momentele aerodinamice, respectiv pentru coeficienții unitari corespunzători, se obțin următoarele formule :

$$(25.60) \quad \begin{cases} \xi = \frac{\pi}{4} \frac{rb}{4V_0} \frac{1}{\mu_0 + \beta_0 - \beta_2} \left(\frac{\mu_0 + \beta_0 - \beta_2}{2\mu_0 + \beta_0 - \beta_4} - \frac{\beta_2 - \beta_4}{3\mu_0 + \beta_0} + 1 \right), \\ \zeta(x^2) = -\frac{\pi}{4} \frac{rb}{4V_0} A_1^2 \left(3 - 5 \frac{\beta_2 - \beta_4}{3\mu_0 + \beta_0} \right) \frac{\mu_0 + \beta_0 - \beta_2}{2\mu_0 + \beta_0 - \beta_4}. \end{cases}$$

Se adaugă bine înțeles momentul N_0 (25.55) datorit rezistenței de formă

25.4 Rotația în jurul axei Ox

Prin rotația p în jurul axei Ox , un punct y al anvergurii capătă o viteză suplimentară $py = -p \frac{b}{2} \cos \theta$, normală pe viteza V_0 a curentului general. Admitem ca ipoteză prealabilă, că viteza de rotație este mică față de curentul general și prin urmare creșterea vitezei totale este neglijabilă :

$$(25.61) \quad V = \sqrt{V_0^2 + p^2 y^2} \approx V_0 \left[1 + \frac{1}{2} \left(\frac{py}{V_0} \right)^2 \right] \approx V_0.$$

În schimb însă, unghiul de incidență suplimentar poate lua valori apreciabile dealungul anvergurii :

$$(25.62) \quad \varepsilon = -\frac{py}{V_0} = \frac{pb}{2V_0} \cos \theta,$$

de unde rezultă :

$$(25.63) \quad \varepsilon \sin \theta = \frac{pb}{2V_0} \sin 2\theta.$$

Această problemă, care interesează de asemenea stabilitatea dinamică laterală a avioanelor, se reduce astfel la o variație disimetrică lineară a incidenței și soluția este dată de expresiile (25.59) din cazul precedent, înlocuind bine înțeles al doilea membru al primei ecuații prin :

$$(25.64) \quad \varepsilon_2 = \frac{pb}{4V_0}.$$

Portanța nu se schimbă, iar rezistența indusă, se mărește cu :

$$(25.65) \quad \Delta C_{xi} = \pi \lambda (2A_2^2 + 4A_4^2 + \dots + 2p A_{2p}^2)$$

și cum termenii A_{2p}^2 sunt proporționali cu $\left[\frac{pb}{4V_0} \right]^2$, deci foarte mici, de al doilea ordin, această creștere este neglijabilă.

Momentul în jurul axei Ox , L , va avea ca expresie :

$$(25.66) \quad L = -\frac{\rho}{2} V_0^2 b^3 \frac{\pi}{4} A_2 \approx -\frac{\rho}{2} V_0^2 b^3 \frac{\frac{\pi}{4} \mu_0 p b}{2\mu_0 + \beta_0 - \beta_4}$$

În ceea ce privește momentul în jurul axei Oz , el va fi

$$(25.67) \quad \frac{N}{L} \approx -3A_1 \left[\left(1 - \frac{5}{3} \frac{\beta_2 - \beta_4}{3\mu_0 + \beta_0} \right) + \frac{7}{3} \frac{\beta_2^2}{(3\mu_0 + \beta_0)(4\mu_0 + \beta_0)} \right]$$

BIBLIOGRAFIE CAP. V.

- 1) CARAFOLI E. : Sur la théorie des ailerons. Comunicare la Academia de Științe din România, Ianuarie 1944, București.
- 2) CARAFOLI E. : Influence du virage circulaire plan sur les propriétés aérodynamiques des ailes. Comunicare la Academia Română, Septembrie 1944, Buletinul Secției Științifice Nr. 2, tom. XXVII.
- 3) CARAFOLI E. : Metodă practică pentru calculul aripilor de avion. Buletinul Științific al Academiei R.P.R., T.I, Nr. 9, 1949.
- 4) CEAPLĂGHIN S.A. și GOLUBEV V.V. : Asupra teoriei aripioarelor. Lucrările TAGHI, Nr. 171, 1935.
- 5) GOLUBEV V.V. : Lecțiuni din teoria aripei. Editura de Stat a literaturii tehnice și teoretice, Moscova, Leningrad, 1949.
- 6) KÁRMÁN and BURGERS : Aerodynamic Theory vol. II, Durand Editor, Julius Springer, Berlin 1945.
- 7) WIESELSBERGER C. : Zeit f. Angew. Matem. u. Mech. 1922.

CAPITOLUL VI

REPARTIȚIA ÎN SUPRAFAȚĂ A VÂRTEJURILOR LEGATE ȘI TEORIA POTENȚIALĂ A MIȘCĂRII ÎN JURUL ARIPIILOR

În acest capitol vom trata câteva probleme privitoare la aripa de anvergură finită, pe care o vom înlocui printr'o pătură echivalentă de vârtejuri legate, distribuite pe toată suprafața aripii. Această metodă ne permite să calculăm ușor aripile de alungire mică cât și cele de alungire foarte mică.

26. ARIPIA ÎNLOCUITĂ PRINTR'UN STRAT SUBȚIRE DE VÂRTEJURI

Până în prezent am asimilat suprafața portantă a aripii cu o linie portantă, reprezentată printr'un filet de vârtej de intensitate variabilă de-a lungul anvergurii. Într'un punct oarecare al acesteia, această variație este egală cu intensitatea vârtejurilor libere care se desprind în acel punct. Această ipoteză simplificatoare este perfect valabilă atâta timp cât raportul dintre anvergură și coarda medie (alungirea), este destul de mare; drept urmare, rezultatele obținute pe baza acestei ipoteze sunt confirmate de experiență. În realitate totuși, vârtejurile sunt repartizate pe suprafața aripii (extrados și intrados) de o manieră compatibilă cu condițiile scurgerii.

26.1. Punerea problemei

Să presupunem că grosimea aripii este foarte mică; o putem asimila cu un strat subțire de vârtejuri, de aceeași formă în plan ca și aripa, având, drept secțiune, scheletul profilului real.

Repartiția în suprafață a intensității turbionare cât și direcția vârtejurilor este foarte complicată; de aceea pentru a rezolva problema, suntem obligați să facem anumite aproximații. Se poate presupune de exemplu că, dacă anvergura este mare față de profunzime, vârtejurile legate ar fi întinse dela o extremitate la alta, în fileture elementare de vârtejuri de intensitate γdx , unde γ este funcție de x și de y .

Pentru calculele viteșelor induse se poate neglija curbura acestor file-turi, acestea fiind considerate rectilinii.

Se admite astfel implicit că aripa este aproximativ dreptunghiulară. Această ipoteză ar putea fi realizată, fie considerând un dreptunghi c_0b , unde c_0 este coarda mediană (fig. 26.1 a), fie considerând un dreptunghi $c_m b$, unde c_m este coarda medie (26.1 b). În primul caz intensitatea γ , înafara aripii însă în interiorul dreptunghiului c_0b , va fi nulă; în al doilea caz distri-buția lui γ va fi continuă și diferită de zero dela o extremitate laalta.

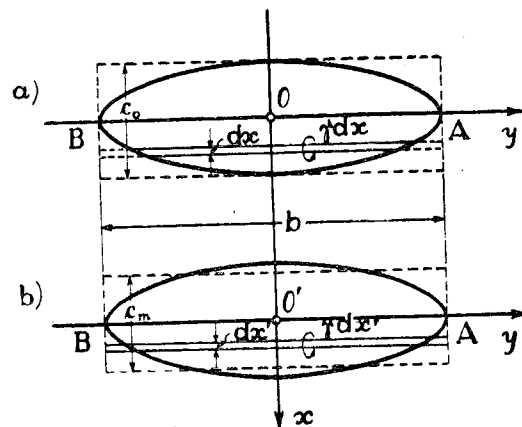


Fig. 26.1 a și b.

Însă, în acest din urmă caz, trebuie observat totuși că poziția reală a unui punct P de coordonate x, y , în dreptunghiul mediu asimilat cu aripa ar putea fi definit prin relațiile următoare :

$$(26.1) \quad \begin{aligned} x' &= \frac{c}{c_m} x, \\ y' &= \frac{c}{c_m} y, \end{aligned}$$

unde c este coarda în dreptul punctului P . Această ultimă ipoteză are desavantajul de a se adapta foarte greu la aripile de alungire

mică, în timp ce prima prezintă mai multă precizie în această privință. Cum de altfel problema alungirilor mici va fi tratată pe o altă cale, vom folosi pentru alungirile mari metoda dreptunghiului mediu, cum este arătat în figura 26.1 b. Aripa va fi reprezentată printr'o pânză de vârtajuri quasi-rectilinii. În fiecare punct al acestor file-turi, se desprinde în direcția axei Ox un vârtaj liber (fig. 26.2), de intensitate $-\frac{\partial \gamma}{\partial y} dx dy$.

Filetul turbionar γdx joacă, într'un fel, rolul unei aripi elementare de alungire foarte mare. Într'o secțiune oarecare CD suma intensităților elementare răspândite pe coarda respectivă este egală cu circulația totală :

$$(26.2) \quad \Gamma = \int_c^D \gamma dx$$

iar fâșia vârtajurilor libere care se desprind din aceeași secțiune, dela bordul de atac până la bordul de fugă, va avea ca intensitate totală :

$$(26.3) \quad -\frac{d\Gamma}{dy} dy = -\int_c^D dx \frac{\partial \gamma}{\partial y} dy = -dy \int_c^D \frac{\partial \gamma}{\partial y} dx.$$

Aceasta este, într'un mod aproximativ, schema mișcării în jurul unei aripi, adică: a) un strat subțire de vârtajuri având

acelaș contur cu al aripii, forțat să-și păstreze poziția, constituie sistemul de vârtajuri legate; b) vârtajurile libere care se desprind din fiecare punct al stratului de vârtajuri și care sunt paralele la vitesa generală în acelaș punct, formează o pânză întinsă până la infinit aval; c) în fine, un curent general de vitesă V_0 .

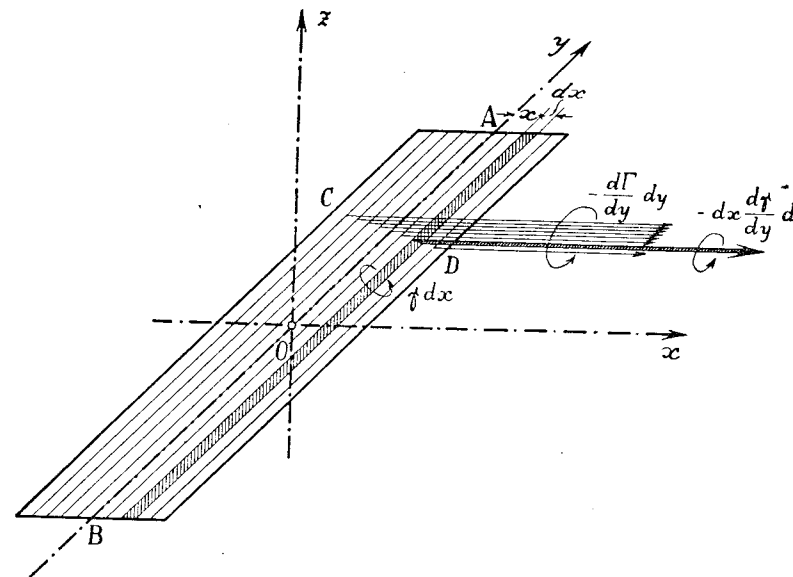


Fig. 26.2.

În toată rigoarea ar trebui să ținem seamă de grosimea aripii și în consecință de influența distribuției în înălțime a fileturilor turbionare. Problema devine în acest caz aproape insolubilă din cauza complicațiilor care intervin în calculul efectiv al viteșelor induse. Deaceea, ipoteza simplificatoare pe care am făcut-o mai sus, neglijând grosimea, permite să se rezolve problema destul de riguros.

Într'adevăr, fie P un punct al aripii, de coordonate x, y [curbura profilelor fiind o dimensiune de al doilea ordin față de coardă, cotele în înălțime (Z) ale suprafeței vor fi de asemenea de al doilea ordin față de x și y]; vitesa indusă în acest punct, presupusă foarte mică față de curentul general V_0 , va avea drept componente u, v, w . Dacă Ox este paralelă cu curentul general, componentele viteșei totale vor fi respectiv :

$$(26.4) \quad U = V_0 + u, v, w.$$

Viteșele u și v n'au decât o influență slabă asupra rezultantei aerodinamice, în timp ce w are o influență capitală în distribuția incidentei efective de-a-lungul anvergurii, din care cauză are un efect direct asupra

rezultantei aerodinamice. Să presupunem deci că cunoaștem această viteză w în punctul $P(x, y, Z=0)$, al suprafeței; unghiul vitesei rezultante cu curențul general este:

$$(26.5) \quad \operatorname{tg} i = \frac{w}{V_0} \approx i.$$

Acest unghi este egal cu cel al tangentei la profil, trecând tot prin punctul P , cu axa Ox .
Fie Z cota suprafeței deasupra planului xOy ; vom avea astfel:

$$(26.6) \quad \frac{\partial Z}{\partial x} = \frac{w}{V_0}, \quad Z = \frac{1}{V_0} \int_C^D w dx.$$

Dacă considerăm axa Ox' , paralelă cu coarda, vom avea

$$(26.7) \quad \frac{\partial Z}{\partial x'} = \frac{w}{V_0} - \alpha.$$

Revenim oarecum la aceeași problemă ca cea a profilelor subțiri în mișcare plană (11.9); însă viteza indusă este dată aici de un sistem mai complex de vârtejuri și anume:

a) **Vârtejurile legate**, considerate aproximativ rectilinii în cazul aripilor drepte, de alungire mare. Prin extensiune se poate face aceeași ipoteză simplificatoare și pentru alungirile mici (fig. 26.1).

b) **Vârtejurile libere**, care se desprind din fiecare secțiune, pornind de la bordul de atac, progresiv, până la bordul de fugă, paralel cu viteza și care se întind până la infinit aval. Este de la sine înțeles că vârtejurile legate și libere sunt unite pe suprafața aripii într'un mod continuu, formând o curbă fără unghiuri ascuțite, însă,

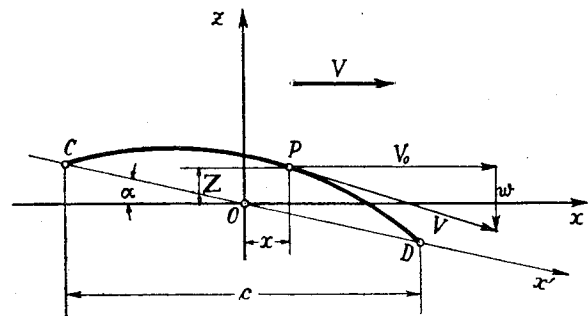


Fig. 26.3.

dificultățile de calcul ne împiedică să luăm în considerație distribuția fileturilor de vârtejuri, astfel cum este în realitate. Dispoziția în potcoavă este o schemă simplificatoare după cum am mai arătat. Această simplificare ar fi eronată pentru formele foarte neregulate. Pentru aripile în săgeată, dispoziția vârtejurilor legate va fi diferită, astfel cum se arată de exemplu în fig. 26.4.

În cazul general se va ține seama de vitezele induse u, v, w și condițiile la limită se vor exprima prin condiția ca viteza să fie paralelă la suprafața aripei, ca de altfel și aceea ca vârtejel liber sau legat să fie paralel la aceeași suprafață.

Dacă Z reprezintă cotele în înălțime ale acestei suprafețe, deasupra planului xOy , aceste condiții vor fi:

$$(26.8) \quad \begin{cases} (V_0 + u) \frac{\partial Z}{\partial x} + v \frac{\partial Z}{\partial y} - w \frac{\partial Z}{\partial z} = 0, \\ \lambda \frac{\partial Z}{\partial x} + \mu \frac{\partial Z}{\partial y} + \gamma \frac{\partial Z}{\partial z} = 0, \end{cases}$$

unde λ, μ, v sunt proiecțiile vârtejelui $\bar{\Omega}$ iar w este considerată ca îndreptată în jos, în direcția negativă. Dacă ținem seama că u, v sunt foarte mici, că $\frac{\partial Z}{\partial y}$ este neglijabilă, varia-

ția lui \bar{Z} dealungul anvergurii fiind foarte redusă și că $\frac{\partial Z}{\partial z} = 1$, se ajunge la ecuația (26.6), pe care am considerat-o de la început pornind de la ipotezele simplificatoare.

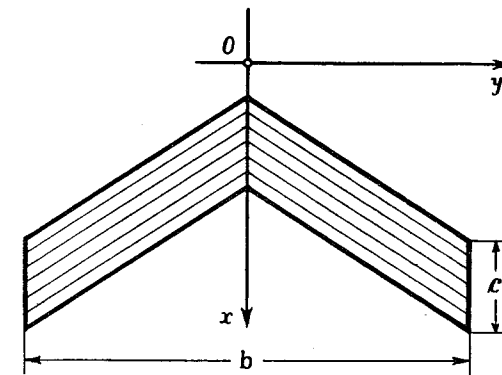


Fig. 26.4.

26.2. Calculul vitezelor induse

Să revenim la ecuația (26.6); problema constă în a calcula pe w după dispoziția dreptunghiulară a sistemului turbionar, astfel cum este indicat în fig. 26.5. Fie ξ, η coordonatele punctului P pe suprafața aripii ($\zeta \approx 0$), x distanța la axa Oy a vârtejelui rectiliniu legat, γdx și y distanța la axa Ox a fascicolului de vârtejuri libere care se desprind din secțiunea y a aripii, de la bordul de atac până la bordul de fugă. Intensitatea unui element al fascicolului care se desprinde în punctul x, y este

$$- dx \frac{\partial \gamma}{\partial y} dy$$

iar intensitatea totală a fascicolului care se formează de la 0 la x

$$(26.9) \quad - \frac{d\Gamma_x}{dy} dy = - dy \int_0^x \frac{\partial \gamma}{\partial y} dx,$$

care devine pe toată anvergura, așa cum am arătat-o mai sus (26.3):

$$(26.10) \quad - \frac{d\Gamma}{dy} dy = - dy \int_0^c \frac{\partial \gamma}{\partial y} dx.$$

După această schemă (fig. 26.5), este ușor de calculat viteza indusă prin aplicarea formulei lui BIOT-SAVART. Această viteză va fi consti- tuită din doi termeni, w_1 și w_2 , deduși după cum urmează :

1. Primul termen este datorit vârtejurilor legate, paralele cu anver- gura. Un filet de vârtej elemental situat la distanța x de bordul de atac, va avea ca intensitate γdx , unde γ variază de-a lungul anvergurii ; viteza ele- mentară în punctul P (ξ, η) va fi dată de formula următoare :

$$(26.11) \quad dw_1 = \frac{1}{4\pi} \cdot \frac{dx}{x - \xi} \int_B^A \gamma \sin \nu dv = - \frac{1}{4\pi} \int_B^A \frac{\gamma (x - \xi) dy}{[(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2]^{3/2}}$$

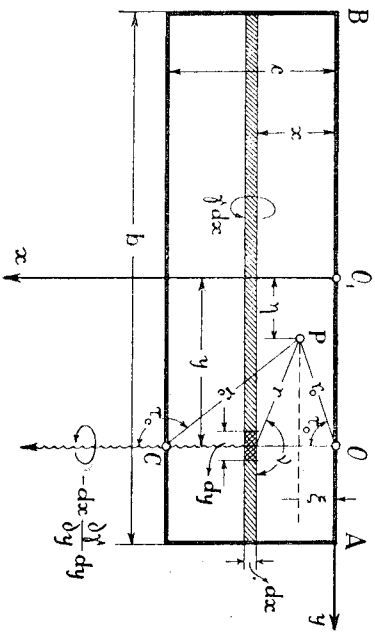


Fig. 26.5.

de unde se obține — dacă integrăm pe toată coarda — viteza indusă totală :

$$(26.12) \quad w_1 = \frac{1}{4\pi} \int_0^c \frac{dx}{x - \xi} \int_B^A \gamma \sin \nu dv = - \frac{1}{4\pi} \int_0^c \int_B^A \frac{\gamma (x - \xi) dy}{[(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2]^{3/2}}$$

Dacă anvergura este destul de mare față de coardă și dacă punctul P este destul de îndepărtat de extremitățile A și B , se poate admite pentru γ o valoare mijlocie și integrala precedentă (26.12) devine :

$$(26.13) \quad w_1 = \frac{1}{2\pi} \int_0^c \frac{\gamma dx}{x - \xi}$$

Vom remarca totuși că în vecinătatea extremităților A și B , chiar pentru aripile de alungire mare, această formulă nu mai este valabilă și viteza în aceste puncte se reduce la o valoare mai mică decât jumătatea valorii sale din centru.

Pentru alungirile mici, influența extremităților se face simțită în toate punctele aripii ; deaceia, este necesar în acest caz să se aplice, în toată ri- goarea, formula (26.12).

2. Al doilea termen este datorit vârtejurilor libere, per- pendiculare pe anvergura, care se desprind dintr'un punct al suprafeței și se întind până la infinit aval.

Considerând tubul de vârtej legat γdx , în punctul (x, y) se desface o fascie elementală — $dx \frac{\partial \gamma}{\partial y} dy$; viteza indusă într'un punct $P(\xi, \eta)$, dato- rită fascicoului de suvițe desprinse în secțiunea y (fig. 26.5), are valoarea

$$(26.14) \quad dw_2 = \frac{1}{4\pi} \cdot \frac{dy}{y - \eta} \int_0^c \frac{\partial \gamma}{\partial y} (1 - \sin \nu) dx =$$

$$= \frac{1}{4\pi} \cdot \frac{dy}{y - \eta} \int_0^c \frac{\partial \gamma}{\partial y} \left[1 - \frac{x - \xi}{\sqrt{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2}} \right] dx$$

și în consecință viteza totală va fi

$$(26.15) \quad w_2 = \frac{1}{4\pi} \int_B^A \frac{dy}{y - \eta} \int_0^c \frac{\partial \gamma}{\partial y} (1 - \sin \nu) dx =$$

$$= \frac{1}{4\pi} \int_0^c \int_B^A \frac{\partial \gamma}{\partial y} \left[1 - \frac{x - \xi}{\sqrt{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2}} \right] \frac{dx dy}{y - \eta}$$

Din cauza variației lui γ în funcție de x și de y , expresia vitesei w_2 este foarte complicată, integrala (26.15) fiind de altfel foarte greu de efec- tuat. Pentru problemele speciale pe care le vom trata mai departe, vom face o simplificare, considerând o repartiție uniformă pentru γ de-a lungul cozii. În acest caz, observând că se poate scrie :

$$(26.16) \quad \int_0^c \sin \nu dx = (y - \eta) \int_0^c \frac{\sin \nu dv}{\cos^2 \nu} = \left(\frac{y - \eta}{\cos \nu} \right)_0^c =$$

$$= - \left(\frac{x - \xi}{\sin \nu} \right)_0^c = - (r_0 - r_c),$$

integrala (26.15) se reduce la o expresie mai simplă :

$$(26.17) \quad w_2 = \frac{1}{4\pi} \int_B^A \left[1 + \frac{1}{\cos \tau_c} + \frac{\xi}{e} \left(\frac{1}{\cos \tau_0} - \frac{1}{\cos \tau_c} \right) \right] \frac{dT}{dy} \cdot \frac{dy}{y - \eta} = \frac{1}{4\pi} \int_B^A \left(1 + \frac{r_0 - r_c}{e} \right) \frac{dT}{dy} \cdot \frac{dy}{y - \eta}$$

În ipoteza liniei portante, se obține expresia găsită anterior :

$$(26.18) \quad w_2 = \frac{1}{4\pi} \int_B^A \frac{dT}{dy} \cdot \frac{dy}{y - \eta}$$

În ceea ce privește semnul, se vede că semnul unei fascii $\frac{dT}{dy}$ este ne- gativ, dacă Γ crește, și în acest caz viteza indusă este pozitivă.

Viteza totală în punctul $P(\xi, \eta)$, care trebuie să satisfacă relațiile (26.6) și (26.7), va avea ca expresie finală :

$$(26.19) \quad w = w_1 + w_2 = \frac{1}{4\pi} \int_0^c \frac{dx}{x-\xi} \int_B^A \gamma \sin \nu \, d\nu + \frac{1}{4\pi} \int_0^c \frac{\partial \gamma}{\partial y} (1 + \cos \tau) dx \int_B^A \frac{dy}{y-\eta} = -\frac{1}{4\pi} \int_0^c \int_B^A \frac{\gamma (x-\xi) dx dy}{[(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2]^{3/2}} - \frac{1}{4\pi} \int_0^c \int_B^A \frac{\partial \gamma}{\partial y} \left\{ 1 - \frac{x-\xi}{[(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2]^{3/2}} \right\} \frac{dx dy}{y-\eta}.$$

Sub această formă, cu toată schema simplificatoare (fig. 26.5), calculul vitezei este foarte complicat. Simplificarea adusă prin formula :

$$(26.20) \quad w = \frac{1}{4\pi} \int_B^A \frac{d\Gamma}{dy} \cdot \frac{dy}{y-\eta} + \frac{1}{2\pi} \int_0^c \frac{\gamma dx}{x-\xi},$$

reduce problema la teoria clasică simplificată a liniei portante.

26.3. Aplicații la aripile dreptunghiulare. Metoda lui Blenk.

După ce consideră o variație a circulației în funcție de y , de aceeași formă cu cea preconizată de BETZ, BLENK pornește dela expresia

$$(26.21) \quad \gamma = \sqrt{1 - \left(\frac{2y}{b}\right)^2} \cdot \sum_0^n \alpha_n \left(\frac{2y}{b}\right)^n,$$

unde

$$(26.22) \quad \alpha_n = a_n \sqrt{\frac{c-x}{x}} + b_n \sqrt{\frac{x}{c} \left(1 - \frac{x}{c}\right)} + c_n \left(\frac{x}{c} - \frac{1}{2}\right) \sqrt{\frac{x}{c} \left(1 - \frac{x}{c}\right)}$$

și unde n este un număr întreg pozitiv ; el calculează astfel viteza indusă într'un punct $P(\xi, \eta)$ și introduce apoi această viteză în expresia (26.7), unde x' va fi înlocuită prin variabila curentă x , axa Ox fiind dirijată după coarda profilului :

$$(26.23) \quad \frac{w}{V_0} = \alpha + \frac{\partial Z}{\partial x}.$$

Ca aplicație, autorul ia un profil cunoscut, determină scheletul său după metodele cunoscute, ceea ce-i permite să calculeze $\frac{\partial Z}{\partial x}$ în fiecare punct ; punând condiția ca ecuația (26.23) să fie satisfăcută în șase puncte :

$$(26.24) \quad y = \frac{b}{8}, \quad y = \frac{3b}{8}, \quad x = \frac{c}{2}, \quad x = \frac{c}{2} \left(1 \pm \frac{1}{2}\sqrt{3}\right),$$

luând pe de altă parte pentru n valorile $n = 0$ și $n = 2$, se găsesc șase ecuații cu șase necunoscute : $a_0, b_0, c_0, a_2, b_2, c_2$, care depind de unghiul de incidență α . Cunoscând acești coeficienți se poate determina portanța C_z și rezistența indusă C_{xi} .

Pentru aripile dreptunghiulare de alungire $\lambda = 6, 4, 2$, se găsesc aceleași caracteristici aerodinamice ca și prin metoda liniei portante. Pentru alungiri mai mici decât 2, rezultatele nu mai sunt identice cu cele ale teoriei lineare și metoda expusă mai sus permite în acest caz un calcul mai riguros.

Autorul tratează prin aceeași metodă și alte cazuri, ca de exemplu : aripa în derivă (26.6 b și c), aripa în săgeată (26.6 d) etc. Vom relua mai jos toate aceste probleme printr'o metodă mai simplă, care dă rezultate rapide și formule generale explicite.

Observație. Distribuția circulației dealungul corzii, în fiecare secțiune, așa cum este indicată de expresia (26.21), este un caz particular al expresiei generale (11.11) pe care am dat-o în paragraful (11). Intr'adevăr, considerând noua axă Ox ,

care pornește dela bordul de atac spre bordul de fugă, — în comparație cu orientarea axelor în problema tratată în paragraful menționat, unde axa Ox pornește dela bordul de fugă spre bordul de atac — se poate scrie

$$(26.25) \quad x = \frac{c}{2} (1 + \cos \theta).$$

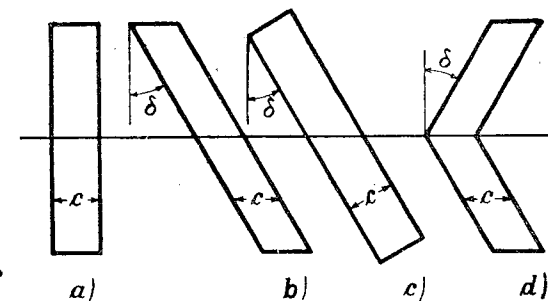


Fig. 26.6. a, b, c, d.

Rezultă pentru expresia (26.22) desfășurarea următoare în funcție de θ :

$$(26.26) \quad \alpha_n = a_n \operatorname{tg} \frac{\theta}{2} + \frac{b_n}{2} \sin \theta + \frac{c_n}{8} \sin 2\theta.$$

26.4. Aripă dreptunghiulară de alungire redusă

După cum am observat mai sus, rezultatele teoriei lineare nu sunt satisfăcătoare pentru aripile de alungire redusă. De aceea, repartitia în suprafață a vârtejurilor este necesară pentru obținerea de rezultate conforme cu experiența.

Și aici metoda lui BLENK ne permite să rezolvăm problema printr'o metodă aproximativă, admitând pentru circulație următoarea distribuție simplă, dedusă din (26.21) :

$$(26.27) \quad \gamma = \alpha_0 \sqrt{1 - \left(\frac{2y}{b}\right)^2} = \sqrt{1 - \left(\frac{2y}{b}\right)^2} \left[a_0 \sqrt{\frac{c-x}{x}} + b_0 \sqrt{\frac{x}{c} \left(1 - \frac{x}{c}\right)} + c_0 \left(\frac{x}{c} - \frac{1}{2}\right) \sqrt{\frac{x}{c} \left(1 - \frac{x}{c}\right)} \right].$$

Dacă se înlocuiește această valoare a lui γ în expresia (26.19) a vitesei, se obțin integrale de tip eliptic care sunt aproape imposibil de efectuat. De aceea, se poate ocoli dificultatea efectuând o integrare aproximativă a expresiei (26.19). Așa de exemplu, el desfășoară această expresie în funcție de y sub forma

$$(26.28) \quad \frac{dw}{dx} = x_0 \left[A + \frac{B}{x-\xi} + C(x-\xi) + D \ln(x-\xi) + E(x-\xi) \ln(x-\xi) \right]$$

unde coeficienții A, B, \dots sunt funcții de η :

$$(26.29) \quad \begin{cases} A = \frac{1}{2b}, & B = -\frac{1}{\pi c} \sqrt{1 - \left(\frac{2\eta}{b}\right)^2}, & D = 0, \\ E = \frac{c}{4\pi b^2 \sqrt{1 - \left(\frac{2\eta}{b}\right)^2}}, \\ C = \frac{-c}{2\pi b^2 \sqrt{1 - \left(\frac{2\eta}{b}\right)^2}} \left\{ \frac{1}{2} - \left(\frac{2\eta}{b}\right)^2 - \ln 4\lambda \left[1 - \left(\frac{2\eta}{b}\right)^2 \right] \right\}. \end{cases}$$

Înlocuind pe x_0 prin valoarea sa arătată mai sus (26.27) și integrând în raport cu x , se obține în fine viteza w care trebuie să satisfacă relația (26.23).

Se găsește în acest fel că curentul suferă o curbura și o nouă deflecțiune și că incidența indusă corespunzătoare, — în afară de cea care rezultă din ipoteza liniei portante, precum și raza de curbura vor fi date de formulele următoare:

$$(26.30) \quad \Delta \alpha = 0,059 \frac{C_z}{\lambda}, \quad \Delta \left(\frac{1}{\rho} \right) = 0,056 \frac{C_z}{b}.$$

Trebuie să remarcăm că această metodă greoaie, dar ingenioasă în acelaș timp, prezintă totuși inconvenientul de a introduce o incertitudine în privința viteselor la extremitățile aripei și prin aceasta un dubiu asupra valorii incidenței suplimentare (26.30) care ni se pare destul de mare.

26.5. Aripi de alungire foarte mică

Rezultatele precedente nu se mai aplică la aripile de alungire foarte mică, unde fenomenele sunt mai complexe și nu se supun teoriei liniare elementare. Este foarte greu să se țină seama de toate aceste fenomene și pentru a rezolva problema se introduc, aproximații care reduc problema la o schemă simplă, mai mult sau mai puțin apropiată de realitate, care se supune însă mai ușor analizei matematice.

Astfel, de exemplu, W. BOLLAY face ipoteza că vârtejurile legate de intensitate γ , constantă pe toată anvergura, se întind dela o extremitate la alta paralel cu aceasta. Fie o șuviță de vârtej γdx ; ea este în formă de potcoavă, $C'DD'$, cu latura CD sprijinită pe aripă și reprezentând

vârtejul legat iar CC', DD' vârtejurile libere care se desprind dela extremități și se întind spre infinit aval (fig. 26.7), fiind paralele în fiecare punct la viteza locală.

Deaceea, unghiul σ , pe care vârtejurile libere îl fac cu planul aripei, este variabil cu profunzimea și în consecință diferit de incidența α . Din această cauză, calculul vitesei induse devine foarte complicat, însă se poate lua la nevoie un unghi mijlociu pentru a simplifica operațiile.

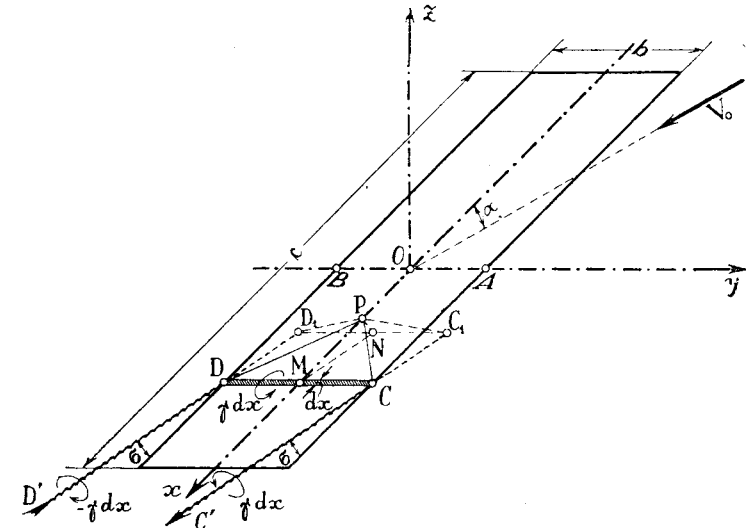


Fig. 26.7.

Această schemă simplificatoare nu permite totuși să se calculeze viteza indusă la extremități, unde ea devine infinită. Deaceea, trebuie să presupunem că sistemul de vârtejuri în potcoavă care înlocuiește aripa este echivalent cu sistemul real în ceea ce privește viteza medie, care se admite a fi aceea corespunzătoare punctelor de pe linia mediană Ox . Prin urmare, într'un punct $P(\xi, 0, 0)$ pe axa Ox , viteza indusă elementară datorită fâșiei γdx va fi, după formula lui BIOT-SAVART,

$$(26.31) \quad dw_1 = \frac{1}{4\pi} \cdot \frac{\gamma dx}{x-\xi} \cdot 2 \cos \widehat{PCD} = \frac{1}{4\pi} \cdot \frac{\gamma dx}{x-\xi} \cdot \frac{b}{\sqrt{(x-\xi)^2 + \frac{b^2}{4}}},$$

de unde se obține, integrând pe toată coarda,

$$(26.32) \quad w_1 = \frac{b}{4\pi} \int_{-\frac{c}{2}}^{\frac{c}{2}} \frac{\gamma dx}{(x-\xi) \sqrt{(x-\xi)^2 + \frac{b^2}{4}}}$$

Șuvița de vârtejuri libere CC' ne dă o vitesă elementară normală pe planul PCC' , a cărei valoare după fig. 26.7 va avea ca expresie

$$(26.33) \quad dV_2 = -\frac{1}{4\pi} \cdot \frac{\gamma dx}{PC_1} (1 - \cos \widehat{PCC_1}) =$$

$$= -\frac{1}{4\pi} \cdot \frac{\gamma dx}{\sqrt{(x - \xi)^2 \sin^2 \sigma + \frac{b^2}{4}}} \left[1 - \frac{(x - \xi) \cos \sigma}{\sqrt{(x - \xi)^2 + \frac{b^2}{4}}} \right].$$

Componenta după PN , normală la planul $CC' DD'$ a vârtejurilor libere, va fi

$$(26.34) \quad dV^2 = \cos \widehat{PC_1N} \cdot dV_2 = \frac{\frac{b}{2}}{\sqrt{(x - \xi)^2 \sin^2 \sigma + \frac{b^2}{4}}} dV_2$$

iar componenta sa, normală pe planul aripii :

$$(26.35) \quad dw_2 = \cos \sigma dV_2 =$$

$$= -\frac{b}{8\pi} \cdot \frac{\gamma \cos \sigma dx}{(x - \xi)^2 \sin^2 \sigma + \frac{b^2}{4}} \left[1 - \frac{(x - \xi) \cos \sigma}{\sqrt{(x - \xi)^2 + \frac{b^2}{4}}} \right].$$

Rezultă în cele din urmă, ținând seama și de cealaltă față, DD' , care dă exact aceeași componentă normală la plan, și luând integrala de-a lungul întregii profunzimi :

$$(26.36) \quad w_2 = -\frac{b}{4\pi} \int_{-\frac{c}{2}}^{\frac{c}{2}} \frac{\gamma \cos \sigma dx}{(x - \xi)^2 \sin^2 \sigma + \frac{b^2}{4}} \left[1 - \frac{(x - \xi) \cos \sigma}{\sqrt{(x - \xi)^2 + \frac{b^2}{4}}} \right].$$

Deoarece vitesa în punctele planului trebuie să fie tangentă la suprafață, viteșele normale, datorite respectiv curentului general ($V_0 \sin \alpha$) și sistemului de vârtejuri care înlocuiește aripi ($w_1 + w_2$), au o rezultantă nulă și prin urmare trebuie să avem neapărat

$$(26.37) \quad w_1 + w_2 = -V_0 \sin \alpha,$$

de unde rezultă următoarea ecuație integro-diferențială :

$$(26.38) \quad \frac{b}{4\pi} \int_{-\frac{c}{2}}^{\frac{c}{2}} \frac{\gamma \cos \sigma dx}{(x - \xi)^2 \sin^2 \sigma + \frac{b^2}{4}} \left[1 - \frac{(x - \xi) \cos \sigma}{\sqrt{(x - \xi)^2 + \frac{b^2}{4}}} \right] -$$

$$-\frac{b}{4\pi} \int_{-\frac{c}{2}}^{\frac{c}{2}} \frac{\gamma dx}{(x - \xi) \sqrt{(x - \xi)^2 + \frac{b^2}{4}}} = V_0 \sin \alpha.$$

Această ecuație este greu de manipulat, pe de o parte din cauza variației lui γ și pe de altă parte din cauza interdependenței lui σ și γ . Deaceia, W. BOLLAY admite pentru γ o distribuție de forma

$$(26.39) \quad \gamma = \gamma_0 \sqrt{\frac{1 + \frac{2x}{c}}{1 - \frac{2x}{c}}}$$

și efectuează calculele, de altfel foarte laborioase, luând pentru σ o valoare medie.

Cu toate simplificările care s'au adus, reducând fenomenele reale la o schemă elementară, rezultatele obținute sunt totuși foarte interesante, după cum se poate constata de pe diagrama din fig. 26.8, unde se pot compara experiențele cu rezultatele teoretice. Notând cu C_n coeficientul componente normale pe plan

$$(26.40) \quad C_n = \frac{F_n}{\frac{1}{2} \rho b c V_0^2},$$

se găsește, într'adevăr, că pentru o alungire $\lambda = \frac{1}{30}$, variația lui C_n ex-

perimental în funcție de incidență urmează într'un mod remarcabil curba teoretică. În aceeași chestiune trebuie să menționăm lucrarea lui GOLUBEV[6] care dă o teorie bazată pe o schemă mai practică și mai sugestivă. Este probabil că această schemă simplificatoare pe care o propune va căpăta mai departe o desfășurare matematică adecvată cu analiza unui fenomen atât de complex; mai ales că rezultatele obținute până acum sunt în bun acord cu experiența.

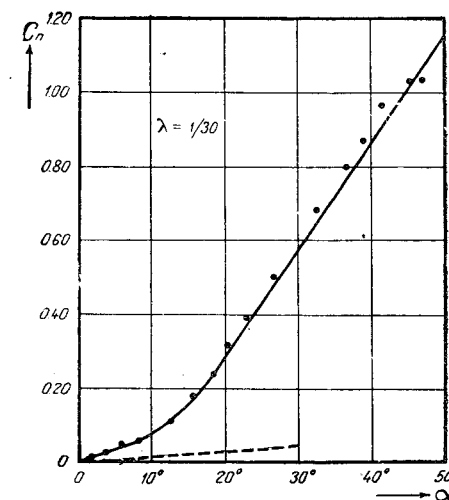


Fig. 26.8.

27. TEORIA POTENȚIALĂ A ARIPILOR DE ANVERGURĂ FINITĂ

Bazată pe teoria vârtejurilor, problema aripiilor de anvergură finită a fost tratată până acum prin teoria liniei portante sau prin repartitia în suprafață a vârtejurilor legate. Problema directă a mișcării în trei dimensiuni n'a fost încă atacată din cauza dificultăților insurmontabile pe care le comportă. Cu toate calculele foarte laborioase și foarte complicate, încercările în această direcție a câtorva autori au dus la rezultate concrete și foarte interesante pe care le vom expune pe scurt mai jos.

27.1. Punerea problemei

Fie \bar{V} viteza într'un punct al spațiului și să punem

$$(27.1) \quad \bar{V} = \bar{V}_0 + \bar{v}_a,$$

unde \bar{V}_0 este viteza curentului iar \bar{v}_a viteza adițională datorită prezenței aripii; fie u, v, w , proiecțiile lui \bar{v}_a pe axele Ox, Oy, Oz și să presupunem că axa Ox este dirijată după direcția negativă a curentului; componentele vitei totale vor fi respectiv :

$$(27.2) \quad -V_0 + u, \quad v, \quad w.$$

Să admitem pe de altă parte că viteza \bar{v}_a este foarte mică față de \bar{V}_0 . Prima ecuație a mișcării, dacă neglijăm greutatea aerului, va putea fi redusă în acest caz la următoarea formă simplă :

$$(27.3) \quad \frac{d\bar{V}}{dt} = \frac{\partial \bar{V}}{\partial x} (-V_0 + u) + \frac{\partial \bar{V}}{\partial y} v + \frac{\partial \bar{V}}{\partial z} w \approx \\ \approx -V_0 \frac{\partial \bar{V}}{\partial x} = -\frac{1}{\rho} \text{grad } p.$$

În afara aripii și a pânzei de vârtejuri, mișcarea este irotațională; există deci un potențial de viteze φ , fie

$$(27.4) \quad \bar{V} = \text{grad } \varphi$$

și ecuația precedentă devine :

$$(27.5) \quad \bar{g} = \frac{d\bar{V}}{dt} = -V_0 \frac{\partial}{\partial x} (\text{grad } \varphi) = -\text{grad} \left(V_0 \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) = -\text{grad } \Phi,$$

unde funcția

$$(27.6) \quad \Phi = V_0 \frac{\partial \varphi}{\partial x}$$

reprezintă astfel un potențial de accelerații. Este ușor de văzut că potențialul Φ satisface ecuația lui LAPLACE :

$$(27.7) \quad \nabla^2 \Phi = V_0 \frac{\partial}{\partial x} (\nabla^2 \varphi) = 0.$$

Din expresia (27.3), avem pe de altă parte :

$$(27.8) \quad V_0 \frac{\partial \bar{V}}{\partial x} = \text{grad } \Phi = \frac{1}{\rho} \text{grad } p,$$

de unde rezultă :

$$(27.9) \quad p - p_0 = \rho \Phi,$$

p_0 fiind o constantă pe care o vom lua egală cu valoarea presiunii la infinit.

Așa dar, dacă cunoaștem în fiecare punct potențialul Φ , vom avea în același timp valoarea presiunii și, prin aceasta, forțele și momentele. Într'adevăr, admitând pentru simplificare că grosimea aripii este foarte mică, adică aripa este redusă la o suprafață subțire, notând mai departe prin p_e, Φ_e respectiv p_i, Φ_i valorile presiunii și ale potențialului, pe extrados și intrados, vom putea scrie pentru portanță și moment relațiile următoare :

$$(27.10) \quad P = \rho \int_s (p_i - p_e) dS = \\ = \rho \int_s (\Phi_i - \Phi_e) dS, \\ M = \rho \int_s x (p_i - p_e) dS = \\ = \rho \int_s x (\Phi_i - \Phi_e) dS.$$

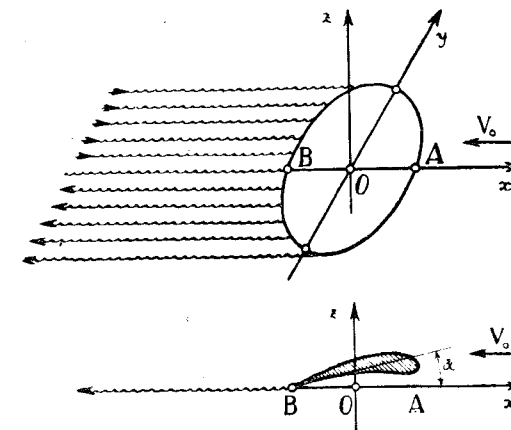


Fig. 27.1.

Pentru rezistența indusă, dacă w este viteza indusă după Oz , vom avea :

$$(27.11) \quad R_i = \int_s (p_i - p_e) \frac{w}{V_0} dS = \int_s (\Phi_i - \Phi_e) \frac{w}{V_0} dS.$$

Rămâne de determinat w , care se va deduce ușor din expresia (27.6), după cum urmează :

$$\frac{\partial \Phi}{\partial z} = V_0 \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) = V_0 \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z} \right) = V_0 \frac{\partial w}{\partial x}$$

și prin urmare, observând că $w = 0$ pentru $x = \infty$, vom avea

$$(27.12) \quad w = \frac{1}{V_0} \int_{\infty}^x \frac{\partial \Phi}{\partial z} dx.$$

Problema constă deci în căutarea potențialului accelerațiilor, pe care l-am notat cu Φ și care este o funcție armonică.

27.2. Aplicație la aripa circulară

Această problemă este tratată și dezvoltată de W. KINNER [8] și N. COCIN [4]. Printr'o schimbare convenabilă de variabile, și anume în locul coordonatelor x, y, z , se pun trei alte variabile λ, μ, ν , definite prin relațiile :

$$(27.13) \quad \begin{cases} x = a \sqrt{1 - \mu^2} \sqrt{1 + \nu^2} \cos \lambda, \\ y = a \sqrt{1 - \mu^2} \sqrt{1 + \nu^2} \sin \lambda, \\ z = a \mu \nu, \end{cases}$$

unde a este raza conturului circular ce se studiază. Se înlocuiesc astfel cele trei planuri ortogonale de referință (xOy , yOz , zOx) prin alte trei suprafețe: hiperboloizi de revoluție ($\mu = ct.$), elipsoizi de revoluție ($\nu = ct.$) și plane trecând prin Oz ($\lambda = ct.$).

Pentru orice punct x , y , z al spațiului, noile variabile sunt cuprinse între următoarele limite:

$$-1 \leq \mu \leq 1, 0 \leq \nu \leq \infty, 0 \leq \lambda < 2\pi,$$

Potențialul Φ pe care îl căutăm trebuie să satisfacă ecuația lui LAPLACE (27.7); este ușor de văzut că, față de noile variabile, această ecuație va fi

$$(27.14) \quad \frac{\partial}{\partial \mu} \left[(1 - \mu^2) \frac{\partial \Phi}{\partial \mu} \right] + \frac{\partial}{\partial \nu} \left[(1 + \nu^2) \frac{\partial \Phi}{\partial \nu} \right] + \left(\frac{1}{1 - \mu^2} - \frac{1}{1 + \nu^2} \right) \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \lambda^2} = 0.$$

Este adevărat că această ecuație nu este mai puțin greu de rezolvat, însă, prin calcule laborioase, se ajunge la soluții concrete. Se găsește astfel pentru aripa plană, luând ca referință tangenta incidenței și notând cu x_p abscisa centrului de presiune, rezultatele următoare:

$$(27.15) \quad C_z = 1,82 \operatorname{tg} \alpha, \quad C_m = 0,44 \operatorname{tg} \alpha, \quad C_{xi} = 0,82 \operatorname{tg}^2 \alpha, \\ x_p = 0,515 a = 0,26 c_0,$$

unde $c_0 = 2a$ este coarda mediană a aripei circulare.

Pentru o placă subțire, al cărei bord de atac este teoretic locul unei aspirații aceasta mărește rezistența indusă cu o valoare egală cu

$$(27.16) \quad C_{xs} = \operatorname{tg}^2 \alpha.$$

Cu titlu de comparație, dăm mai jos rezultatele obținute prin teoria liniei portante aceste rezultate sunt într'un acord mai bun cu experiența decât cele anterioare (27.15):

$$(27.17) \quad C_z = 2,44 \alpha, \quad C_m = \frac{1}{4} C_z, \quad C_{xi} = \frac{C_z^2}{\pi \lambda} = 1,49 \alpha^2.$$

27.3. Aplicații la aripa eliptică

Metoda pe care am expus-o mai sus, a fost dezvoltată de K. KRIENES [9], introducând funcțiile eliptice. Cu toate dificultățile întâlnite și calculele foarte laborioase, pe care nu le vom expune aici, autorul ajunge la rezultate interesante în ceea ce privește aripa eliptică. Fie, într'adevăr, c_0 și b , coarda centrală și anvergura aripii, care formează în același timp axele de coordonate ale conturului eliptic; rezultatele obținute sunt date în tabela următoare:

Tabela 27.I

$\frac{c_0}{b}$	λ	$\frac{c_z}{\operatorname{tg} \alpha}$	$\frac{c_z}{\alpha}$	$\frac{c_m}{c_z}$
		Metoda potențială	Metoda lineară	
0,0	∞	2π	2π	
0,2	6,37	4,55	4,77	0,435
0,5	2,55	2,99	3,55	0,466
1,0	1,27	1,82	2,44	0,242
2,0	0,64	0,99		

Se vede din această tabelă că metoda potențială se acordă foarte bine cu teoria lineară pentru alungirile mari. Comparate cu rezultatele experimentale, cele ale teoriei lineare apar mai concludente, după cum am indicat în paragraful 20.3.

Trebue să conchidem deci, că metoda potențială sub această formă nu prezintă încă un instrument precis de investigații cu toate calculele laborioase și complicate pe care le implică.

Trebue observat totuși că se poate trata prin această metodă problema aripei eliptice în derivă, ale cărei rezultate obținute de autor pentru alungirea $\lambda=6,37$ sunt înscrise în tabela următoare, unde δ este unghiul de derivă:

Tabela 27.II

δ	$\frac{c_z}{\operatorname{tg} \alpha}$	$\frac{c_m}{c_z}$	$\frac{C_l}{c_z}$
15°	4,16	0,440	0,009
30°	3,26	0,439	0,023

Am notat cu C_l coeficientul de moment în jurul axei Ox , astfel cum l'am definit anterior (19.39).

Ținând seama de faptul că pentru alungirile mari rezultatele concordă cu teoria lineară, prin urmare și cu experiența, se poate deasemenea conchide că rezultatele precedente privitoare la aripa eliptică în derivă exprimă convenabil rezultatele reale. Totuși, această problemă va fi tratată într'un mod special și pe o cale mai simplă în paragraful următor.

28. TEORIA ARIPILOR ÎN SĂGEATĂ SAU ÎN DERIVĂ

Am arătat în paragrafele precedente că ipoteza aripei reduse la linia portantă (aceasta fiind presupusă normală pe viteza curentului) este perfect valabilă pentru alungirile $\lambda > 1$, astfel cum s'a confirmat de altfel prin

cercetările experimentale pe care le-am menționat în paragraful 20. În aceste condițiuni s'ar părea că putem aplica aceeași metodă pentru cazul unei aripi a cărei linie mijlocie ar avea o formă arbitrară în raport cu direcția curentului și prin urmare linia portantă n'ar fi nici dreaptă, nici normală la vitesă. În acest caz însă, apare o dificultate, mare și anume: vitesa într'un punct al liniei portante devine infinită. Într'adevăr, într'un punct η al anvergurii, vitesa indusă elementară datorită unei fâșii $-\frac{d\Gamma}{dy} dy$ va fi respectiv

$$(28.1) \quad dw_1 = \frac{1}{4\pi} \cdot \frac{d\Gamma}{dy} \cdot \frac{dy}{|y - \eta|} (1 - \sin \delta),$$

dacă avem

$$y - \eta > 0$$

și

$$(28.2) \quad dw_2 = -\frac{1}{4\pi} \cdot \frac{d\Gamma}{dy} \cdot \frac{dy}{|y - \eta|} (1 + \sin \delta),$$

dacă avem

$$y - \eta < 0.$$

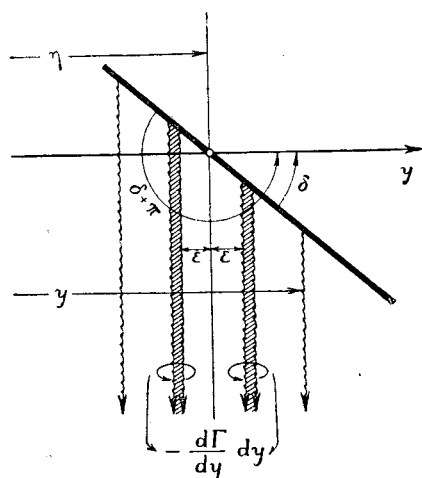


Fig. 28.1.

Pentru două fâșii simetrice, de aceeași intensitate $\frac{d\Gamma}{dy} dy \approx \left(\frac{d\Gamma}{dy} dy\right)_{y=\eta} =$

$$= \frac{d\Gamma}{d\eta} d\eta \text{ vom avea deasemenea (fig. 28.1):}$$

$$(28.3) \quad dw = d(w_1 + w_2) = -\frac{2 \sin \delta}{4\pi} \cdot \frac{d\Gamma}{d\eta} \cdot \frac{d\eta}{|y - \eta|},$$

de unde se vede că vitesa indusă crește peste orice limită pentru $|y - \eta| = \epsilon \rightarrow 0$.

Repartiția vârtejurilor în suprafață evită această imposibilitate, însă calculele sunt extrem de laborioase și câteva cazuri studiate (fig. 26.6) constituie cazuri particulare, fără posibilitatea găsirii unei formule practice și simple care să reprezinte rezultatul general.

Deaceia, vom urma o metodă mixtă: pe deoparte vom considera vitesa indusă în dreptul liniei portante, pe de altă parte, pentru a evita vitesa infinită, vom presupune că vârtejurile libere într'o secțiune oarecare se desprind progresiv, dela bordul de atac la bordul de fugă, pe toată profunzimea aripii, după o lege care ține seamă de repartiția vârtejurilor legate. Pentru a simplifica calculele, vom admite că vârtejurile legate sunt uniform repartizate pe coardă. Totuși, cu toate aceste simplificări, problema rămâne complicată. Vom încerca însă să stabilim formula vitesei induse,

într'un mod cât se poate de simplu, adoptând totuși o cale riguroasă de tratare.

28.1. Vitesa indusă

Să considerăm linia mijlocie a aripii ca linie portantă și fie γ distribuția uniformă a circulației pe toată profunzimea. Această ipoteză nu ridică generalitatea problemei, deoarece este vorba, înainte de toate, să se evite vitesa infinită dată de formula (28.3) și nu să căutăm influența distribuției în profunzime, care nu este de altfel prea importantă. Trebuie observat pe de altă parte că pentru profilele moderne zise laminare această distribuție este destul de conformă cu realitatea, cel puțin o bună parte din coardă începând dela bordul de atac.

Fie η secțiunea considerată și P punctul pe linia portantă. Vitesa indusă elementară, datorită vârtejurilor libere, care scapă dealungul secțiunii y va fi dată de elementul diferențial al expresiei (26.10), adică

$$(28.4) \quad dw_2 = \frac{1}{4\pi} \left(1 + \frac{r_0 - r_c}{c} \right) \frac{d\Gamma}{dy} \times \frac{dy}{y - \eta},$$

unde r_0 și r_c sunt razele vectoriale indicate în figura 28.2. În cazul liniei portante drepte ($r_0 = r_c$), această vitesă va avea ca expresie:

$$(28.5) \quad dw_1 = \frac{1}{4\pi} \cdot \frac{d\Gamma}{dy} \cdot \frac{dy}{y - \eta},$$

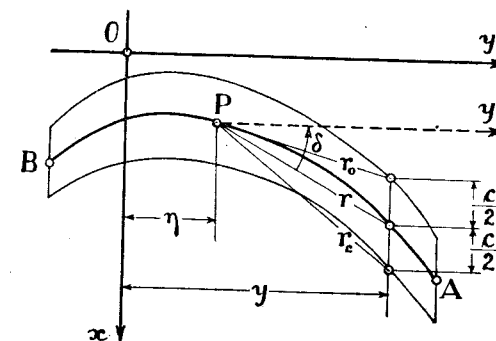


Fig. 28.2.

de unde rezultă o diferență de vitesă indusă:

$$(28.6) \quad d(w_2 - w_1) = dw_s = \frac{1}{4\pi} \cdot \frac{r_0 - r_c}{c} \cdot \frac{d\Gamma}{dy} \cdot \frac{dy}{y - \eta},$$

pe care o vom considera ca vitesă indusă suplimentară a aripii în săgeată, față de o aripă dreaptă de aceeași alungire.

Pentru a calcula diferența ($r_0 - r_c$) să observăm mai întâi că avem:

$$(28.7) \quad \begin{cases} r_0^2 = r^2 + \frac{c^2}{4} - 2 \frac{c}{2} r \sin \delta = \left(r^2 + \frac{c^2}{4} \right) \left(1 - \frac{cr}{r^2 + \frac{c^2}{4}} \sin \delta \right), \\ r_c^2 = r^2 + \frac{c^2}{4} + 2 \frac{c}{2} r \sin \delta = \left(r^2 + \frac{c^2}{4} \right) \left(1 + \frac{cr}{r^2 + \frac{c^2}{4}} \sin \delta \right). \end{cases}$$

Să observăm mai departe că valoarea lui $\sin \delta$ este mai mică decât unitatea, ea nu întrece, practic, $\sin 45^\circ \approx 0,71$; raportul $\frac{cr}{r^2 + \frac{c^2}{4}}$ este deose-

menea mai mic decât 1, în afară de cazul $r = \frac{c}{2}$, când acest raport este egal chiar cu 1 și atinge astfel valoarea sa maximă. În acest caz, se poate scrie riguros:

$$(28.8) \quad \left[\left(1 \mp \frac{cr}{r^2 + \frac{c^2}{4}} \right) \sin \delta \right]^{1/2} = 1 \mp \frac{1}{2} \cdot \frac{cr}{r^2 + \frac{c^2}{4}} \sin \delta - \frac{1}{8} \left(\frac{cr}{r^2 + \frac{c^2}{4}} \right)^2 \sin^2 \delta \mp \dots$$

și ca urmare:

$$(28.9) \quad r_0 - r_c \approx \left(r^2 + \frac{c^2}{4} \right)^{1/2} \left(- \frac{cr}{r^2 + \frac{c^2}{4}} \sin \delta - \dots \right)$$

sau încă

$$(28.10) \quad \frac{r_0 - r_c}{c} \approx - \frac{r \sin \delta}{\sqrt{r^2 + \frac{c^2}{4}}}$$

Să înlocuim pe r prin expresia sa în funcție de $y - \eta$,

$$(28.11) \quad r = \frac{y - \eta}{\cos \delta};$$

relația (28.10) se poate pune sub forma:

$$(28.12) \quad \frac{r_0 - r_c}{c} = - \frac{(y - \eta) \operatorname{tg} \delta}{\sqrt{\frac{(y - \eta)^2}{\cos^2 \delta} + \frac{c^2}{4}}}$$

de unde rezultă o viteză indusă suplimentară [3]:

$$(28.13) \quad w_2 - w_1 = w_s = - \frac{1}{4\pi} \int_B^A \frac{\operatorname{tg} \delta}{\sqrt{\frac{(y - \eta)^2}{\cos^2 \delta} + \frac{c^2}{4}}} \cdot \frac{d\Gamma}{dy} dy.$$

Această formulă diferă sensibil de cea a lui WEINIG [10] stabilită pe altă cale; cele două formule devin egale în cazul când δ este mic și putem pune deci $\cos \delta \approx 1$ și $\operatorname{tg} \delta \approx \sin \delta$. În general pentru avioanele rapide moderne, δ poate să atingă $35^\circ - 45^\circ$ și simplificările de mai sus nu mai sunt valabile.

Este sigur că se poate pleca dela o altă distribuție a intensității de vârtaj γ , ca de exemplu următoarea formă parabolică:

$$(28.14) \quad \gamma = \gamma_0 + \gamma_1 \frac{x}{c} + \gamma_2 \frac{x^2}{c^2};$$

calculele nu prezintă nicio dificultate, însă rezultatul ar fi mai complicat, ceea ce nu ușurează rezolvarea problemei. Dealtfel, forma distribuției nu trebuie să prezinte o importanță specială, deoarece viteza indusă în fiecare punct al liniei portante își datorează valoarea sa principală fascicolului total $\frac{d\Gamma}{dy}$ al întregii secțiuni și repartiția în profunzime a vârtejurilor legate n'ar avea o influență deosebită decât asupra termenilor secundari.

Se poate ține totuși seama de această distribuție într'un mod aproximativ, după cum urmează:

Să luăm, de exemplu, ca linie portantă, locul geometric al centrelor de greutate ale circulației dealungul cozii și să considerăm pe $\frac{c_1}{2}$ cea mai mică

distanță la bordul de atac sau de fugă.

În acest caz, putem presupune că circulația Γ este uniform repartizată pe coarda $c_1 < c$, astfel încât să înlocuim c prin c_1 în formula (28.13). Astfel, de exemplu, presupunând că distribuția circulației este de formă triunghiulară, având o valoare maximă la bordul de atac și zero la bordul de fugă, centrul de greutate este la o treime din coardă, și prin urmare $c_1 = \frac{2}{3} c$. Rezultă deci, că se poate pune sub semnul radical, termenul

$$(28.15) \quad \frac{c_1^2}{4} = \frac{c^2}{9}.$$

Așa dar, influența distribuției lui γ pe profunzimea aripei, se traduce printr'un coeficient k^2 care afectează termenul coardei în formula (28.3):

$$(28.16) \quad \frac{c_1^2}{4} = \frac{c^2}{4k^2}.$$

28.1.1. Raționalizarea formulei. Pentru unele aplicații este mai comod câte odată să avem o expresie rațională, cu condiția bine înțeles de a obține o formulă care să fie practic confundată, într'un interval determinat, cu formula riguroasă (28.13).

Să punem pentru aceasta:

$$(28.17) \quad \left\{ \begin{array}{l} r^2 + \frac{c^2}{4} = \left[k_1 r + \left(\frac{1}{2} + k_2 \right) c \right]^2 \times \\ \times \left\{ 1 + \frac{(1 - k_1^2) r^2 - k_1 (1 + 2k_2) cr - (k_2 + k_2^2) c^2}{\left[k_1 r + \left(\frac{1}{2} + k_2 \right) c \right]^2} \right\} \end{array} \right.$$

și să determinăm k_1 și k_2 , prin metoda celor mai mici pătrate, astfel încât al doilea membru din paranteza a doua să fie neglijabil. Se găsește aproximativ:

$$(28.18) \quad k_1 = 0,85, \quad k_2 = -0,04 \approx 0;$$

rezultă, pentru intervalul practic de aplicație:

$$(28.19) \quad \frac{1}{\sqrt{r^2 + \frac{c^2}{4}}} \approx \frac{1}{0,85r + 0,5c}$$

și prin urmare, expresia vitesei suplimentare devine în cele din urmă:

$$(28.20) \quad w_s = -\frac{1}{4\pi} \int_B^A \frac{\operatorname{tg} \delta}{0,85 \left| \frac{y-\eta}{\cos \delta} \right| + 0,5c} \cdot \frac{d\Gamma}{dy} dy.$$

28.2. Aripa în săgeată sau în derivă asimilată cu o aripă dreaptă având incidența variabilă

Să revenim la expresia (28.13) a vitesei induse suplimentare; unghiul indus corespunzător

$$(28.21) \quad i_s = \frac{w_s}{V_0}$$

va fi considerat ca o torsiune a aripei drepte pentru a corespunde identic la condițiile aripei în săgeată sau în derivă.

Pentru a rezolva problema vom aplica la aripa dreaptă de aceeași lungime formulele corespunzătoare unei variații a incidenței dealungul anvergurii.

Însă apare o dificultate mare în legătură cu integrala

$$(28.22) \quad i_s = \frac{w_s}{V_0} = -\frac{1}{4\pi V_0} \int_B^A \frac{\operatorname{tg} \delta}{\sqrt{\frac{(y-\eta)^2}{\cos^2 \delta} + \frac{c^2}{4}}} \cdot \frac{d\Gamma}{dy} dy,$$

care nu poate să fie efectuată decât prin metode aproximative.

Una din aceste metode constă în a considera circulația și coarda constante dealungul anvergurii și a înlocui prin urmare pânza plană de vârtejuri prin două vârtejuri marginale de intensitate medie Γ_m și coarda c prin c_m . În acest caz, elementul diferențial $d\Gamma$ devine Γ_m în A și $-\Gamma_m$ în B , astfel încât expresia unghiului indus suplimentar devine în cele din urmă:

$$(28.23) \quad i_s = \frac{1}{4\pi V_0} \left[\frac{\Gamma_m \operatorname{tg} \delta}{\sqrt{\frac{(y-\eta)^2}{\cos^2 \delta} + \frac{c_m^2}{4}}} \right]_B^A = \frac{\Gamma_m}{4\pi V_0} \left[\frac{\operatorname{tg} \delta_a}{\sqrt{\frac{(b_a-\eta)^2}{\cos^2 \delta_a} + \frac{c_m^2}{4}}} - \frac{\operatorname{tg} \delta_b}{\sqrt{\frac{(b_b-\eta)^2}{\cos^2 \delta_b} + \frac{c_m^2}{4}}} \right],$$

unde δ_a și δ_b sunt valorile lui δ la extremitățile A și B . (fig. 28.3).

Aripile obișnuite sunt în general simetrice; se poate pune prin urmare:

$$(28.24) \quad b_a = \frac{1}{2} b,$$

$$b_b = -\frac{1}{2} b.$$

Considerând mai departe pentru Γ o dezvoltare în $\sin n\theta$ ca cea indicată în expresia (16.8), unde n este impar, se găsește deasemenea:

$$(28.25) \quad \Gamma_m = \frac{1}{b} \int_B^A \Gamma dx = 2bV_0 \frac{\pi}{4} A_1.$$

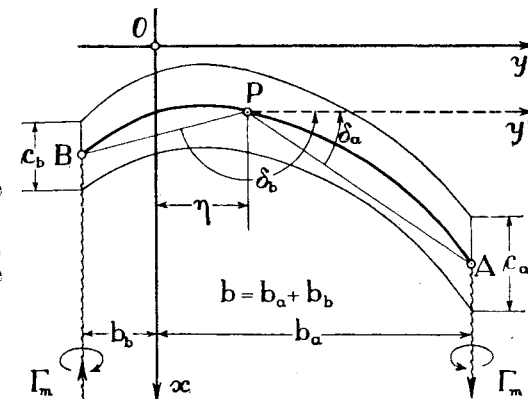


Fig. 28.3.

În sfârșit, se poate scrie pentru incidența suplimentară formula următoare:

$$(28.26) \quad i_s = \frac{b}{8} A_1 \left[\frac{\operatorname{tg} \delta_a}{\sqrt{\frac{(b-\eta)^2}{\cos^2 \delta_a} + \frac{c_m^2}{4}}} - \frac{\operatorname{tg} \delta_b}{\sqrt{\frac{(b+\eta)^2}{\cos^2 \delta_b} + \frac{c_m^2}{4}}} \right]$$

Observație. Pentru aripile drepte în derivă, este evident că, în afară de termenii impari ($n = 2p + 1$) din dezvoltarea (16.8) a lui Γ , sunt și termeni pari ($n = 2p$), care corespund fenomenului anti-simetric.

Pentru termenii impari, incidența suplimentară i_s este dată de formula (28.26). În ceea ce privește termenii pari, vom calcula mai jos incidența suplimentară corespunzătoare (i_s').

28.3. Aplicații la aripile în derivă

Este evident că δ_a și δ_b din formula (28.26) sunt respectiv (fig. 28.3 și fig. 28.4):

$$(28.27) \quad \delta_a = \delta, \quad \delta_b = \pi + \delta;$$

punând pe de altă parte,

$$(28.28) \quad \Lambda = \frac{b}{c_m} \cdot \frac{1}{\cos \delta}$$

și înlocuind pe η prin expresia sa în θ ($\eta = -\frac{b}{2} \cos \theta$), relația (28.26) devine:

$$(28.29) \quad i_s = \frac{1}{4} A_1 \Lambda \sin \delta \left[\frac{1}{\sqrt{1 + \Lambda^2 (1 + \cos \theta)^2}} - \frac{1}{\sqrt{1 + \Lambda^2 (1 - \cos \theta)^2}} \right].$$

Desvoltarea în serie FOURIER a acestei expresii este destul de laborioasă; de aceea o vom exprima printr'un polinom trigonometric simplu. Să observăm într'adevăr, că expresia între paranteze ar putea fi reprezentată într'o formă destul de riguroasă, prin relația următoare*):

$$(28.30) \quad \frac{1}{\sqrt{1 + \Lambda^2(1 + \cos \theta)^2}} - \frac{1}{\sqrt{1 + \Lambda^2(1 - \cos \theta)^2}} = \\ = -1,54 \sqrt[3]{\Lambda} \left(\sqrt[3]{1 + \cos \theta} - \sqrt[3]{1 - \cos \theta} \right) + \\ + (0,312 \Lambda - 0,01 \Lambda)^2 \cos \theta.$$

Avem pe de altă parte, succesiv:

$$(28.31) \quad \sqrt[3]{1 + \cos \theta} - \sqrt[3]{1 - \cos \theta} = 2 \left(\frac{1}{3} \cos \theta + \frac{5}{81} \cos^3 \theta + \right. \\ \left. + \frac{22}{729} \cos^5 \theta + \dots \right) \approx 2 (0,40 \cos \theta + 0,025 \cos^3 \theta + \\ + 0,0019 \cos^5 \theta + \dots) \approx 0,8 \cos \theta.$$

În locul expresiei (28.29), se va putea scrie în cele din urmă:

$$(28.32) \quad i_s \sin \theta \approx \frac{1}{4} \Lambda A_1 \sin \delta (0,156 \Lambda - 0,005 \Lambda^2 - 0,616 \sqrt[3]{\Lambda}) \sin 2\theta = \\ = i_2 \sin 2\theta.$$

Să notăm acum cu Γ_s circulația suplimentară care rezultă din această variație a incidenței:

$$(28.33) \quad \Gamma_s = 2bV_0(a_2 \sin 2\theta + a_4 \sin 4\theta + \dots + a_{2p} \sin 2p\theta);$$

aplicând ecuațiile (22.4), se pot găsi ușor coeficienții a_2, a_4, \dots, a_{2p} . Așa de exemplu, termenul principal este dat de relația:

$$(28.34) \quad a_2 = \frac{\mu_0 i_2}{2\mu_0 + \beta_0 - \beta_4 - \frac{\beta_2^2 + \beta_4^2}{4\mu_0 + \beta_0}} \approx \frac{\mu_0 i_2}{2\mu_0 + \beta_0 - \beta_4},$$

unde $\mu_0, \beta_0, \beta_2, \beta_4$ sunt caracteristicile geometrice ale aripii, așa cum au fost definite în capitolele precedente. Ceilalți coeficienți a_4, a_6, \dots , se deduc ușor, însă sunt neglijabili față de termenul principal.

*) Pentru x variind de la 0 la 20, expresia $\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ ar putea fi reprezentată într'un mod satisfăcător prin polinomul următor:

$$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}} = 2,1 - 1,54 \sqrt[3]{x} + 0,156 x - 0,0025 x^2.$$

28.3.1. Considerații geometrice-asupra aripii în derivă. Formulele stabilite mai sus, privitoare la aripa în derivă teoretică,

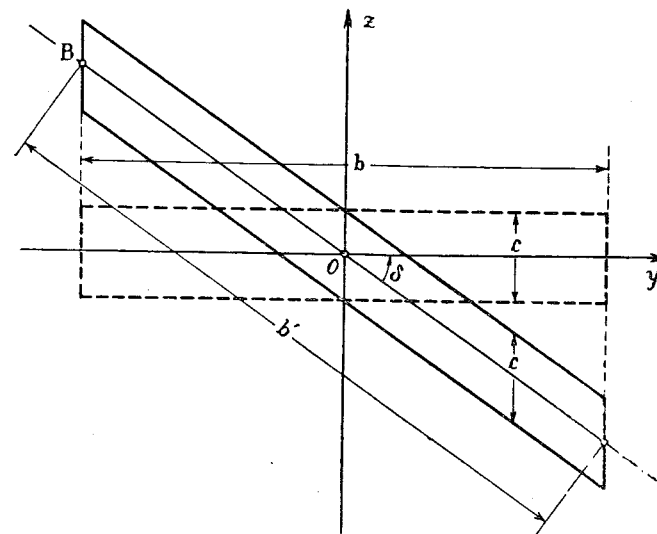


Fig. 28.4.

se obțin din cea dreaptă printr'o translație rectilinie a fiecărui profil,

proporțională cu y (fig. 28.4). Secțiunile paralele cu curentul (normale la Oy) dau aceleași profile pe aripa dreaptă sau pe aripa în derivă și variația corzii în funcție de y este identică. Anvergura b a aripii, astfel cum a fost introdusă în calcule, este proiecția anvergurii reale pe care o vom nota cu b' .

Însă acest caz ideal nu este întâlnit în aplicațiile obișnuite; de aceea, practic trebuie să asimilăm deriva cu o rotație a aripii de un unghi δ (fig. 28.5 și 28.6). Din acest fapt rezultă:

1) Secțiunile duse paralel cu curentul dau profile diferite față de profilele aripii în poziția inițială.

2) Pentru $\pm y$ secțiunile unei aripi eliptice de exemplu, nu sunt identice

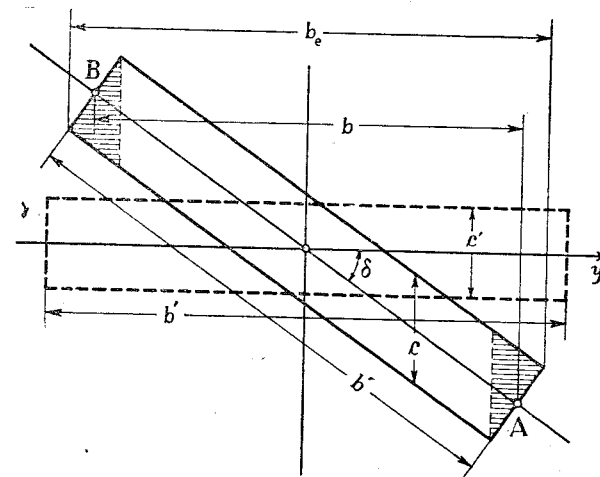


Fig. 28.5.

(fig. 28.6), ca dealtfel și părțile hașurate ale aripii dreptunghiulare (28.5); se admite totuși, într'un mod aproximativ, că variația corzii este simetrică față de direcția curentului.

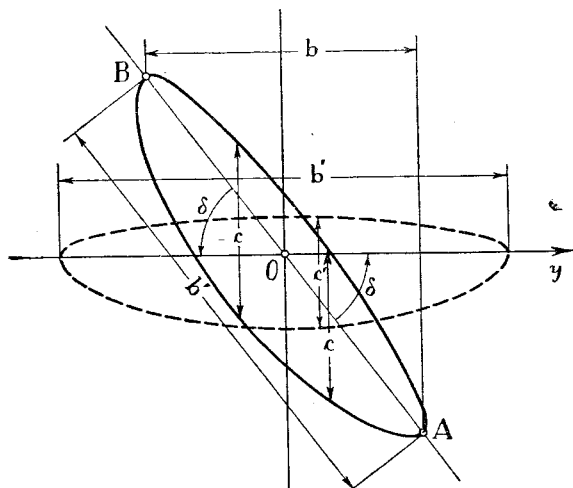


Fig. 28.6.

3) Anvergura aparentă b , proiecția anvergurei reale b' , nu este întotdeauna precisă, după cum se vede pe fig. 28.5, se poate lua însă proiecția anvergurii reale.

4) Unghiul de incidență suferă o modificare esențială. Așa de exemplu, dacă α' reprezintă incidența secțiunii drepte (s') față de viteza curentului conținută în planul aceleiași secțiuni, incidența α față de noua direcție a curentului, în secțiunea corespunzătoare S , va fi dată de relația (fig. 28.7) :

(28.35) $\alpha = \alpha' \cos \delta.$

Aceste considerații geometrice ne permit să scriem relațiile următoare :

(28.36) $c' = c \cos \delta,$
 $c'_m = c_m \cos \delta, \quad b = b' \cos \delta,$

de unde rezultă, notând cu λ_r alungirea reală a aripii :

(28.37) $\lambda = \frac{b}{c_m} \cdot \frac{1}{\cos \delta} =$
 $= \frac{b'}{c'_m} \cos \delta = \lambda_r \cos \delta.$

Vom avea mai departe :

(28.38) $\mu_0 = \frac{k}{2} \cdot \frac{c_0}{b} =$
 $= \frac{k}{2} \cdot \frac{c'_0}{b'} \cdot \frac{1}{\cos^2 \delta} = \mu'_0 \frac{1}{\cos^2 \delta},$

unde μ'_0 reprezintă coeficientul aripii reale. Coeficientul A_1 care intră în formulele precedente este deasemenea

diferit de A'_1 care corespunde aripii drepte. Intr'adevăr, prima formulă (18.5) ne dă :

(28.39) $\left[\frac{\mu'_0}{\cos^2 \delta} + \beta_0 - \beta_2 - \frac{(\beta_2 - \beta_4)^2}{\frac{3\mu'_0}{\cos^2 \delta} + \beta_0} \right] A_1 = \frac{\mu'_0}{\cos^2 \delta} \alpha = \frac{\mu'_0}{\cos \delta} \alpha'.$

Ceilalți termeni vor fi obținuți înlocuind pe μ_0 , în (18.5), prin $\frac{\mu'_0}{\cos^2 \delta}$ și α prin $\alpha' \cos \delta$.

28.3.2. Influența termenilor anti-simetrice. Pentru calculul integralei (28.22) am considerat mai sus o circulație simetrică și am obținut termenii pari ai unei variații antisimetrice : $2bV_0(a_2 \sin 2\theta + a_4 \sin 4\theta + \dots + a_{2p} \sin 2p\theta)$. Acești termeni, la rândul lor, dau o incidență suplimentară i_s simetrică, care modifică coeficienții $A_1, A_3, \dots, A_{2p+1}$ ai circulației simetrice inițiale. Această modificare este însă neînsemnată în ceea ce privește valoarea lui A_1 care intră în formulele precedente.

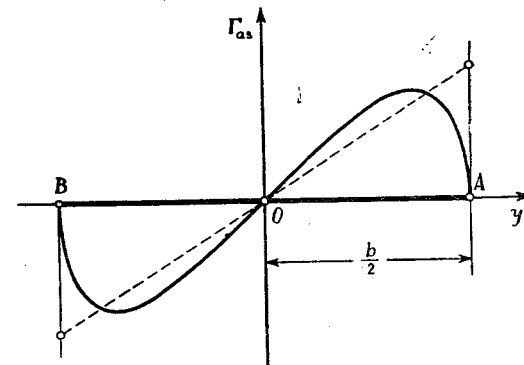


Fig. 28.8.

Pentru a arăta acest lucru, vom evalua aproximativ variația coeficienților A_1, \dots, A_{2p+1} , variație pe care o vom nota prin termenii aditivi : $a_1, a_3, \dots, a_{2p+1}$.

Să considerăm pentru aceasta, o variație anti-simetrică lineară :

(28.40) $\Gamma_{as} = \gamma \eta,$

unde γ poate fi ușor determinat, admitând că intensitatea mijlocie a circulației pe semi-anvergura aripii (fig. 28.8) este egală cu intensitatea mijlocie a repartiției reale, limitată totuși la primii doi termeni [$2bV_0(a_2 \sin 2\theta + a_4 \sin 4\theta)$]:

(28.41) $\frac{b}{2} \Gamma'_m = \frac{1}{2} \cdot \frac{b^2}{4} \gamma = 2bV_0 \frac{b}{2} \int_0^{\pi/2} (a_2 \sin 2\theta +$
 $+ a_4 \sin 4\theta) \sin \theta d\theta = b^2 V_0 \left(\frac{2}{3} a_2 + \frac{4}{15} a_4 \right).$

Rezultă :

$$(28.42) \quad \gamma = \frac{16}{3} V_0 \left(a_2 + \frac{2}{5} a_4 \right) = \frac{16}{3} V_0 a_2 \left[1 - \frac{2\beta_2}{5(4\mu_0 + \beta_0)} \right],$$

unde am înlocuit pe a_4 printr'o expresie aproximativă în funcție de a_2 scoasă din relațiile generale :

$$(28.42 \text{ bis}) \quad a_4 \approx - \frac{\beta_2}{4\mu_0 + \beta_0} a_2.$$

Admițând deci o variație lineară a circulației, integrala (28.22) devine succesiv, pentru porțiunea l i n e a r ă :

$$(28.43) \quad \begin{aligned} & - \frac{\gamma \operatorname{tg} \delta}{4\pi V_0} \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \frac{d\eta}{\sqrt{\frac{(\eta-y)^2}{\cos^2 \delta} + \frac{c^2}{4}}} = \\ & = - \frac{\gamma \sin \delta}{4\pi V_0} \ln \frac{\left(\frac{b}{2} - y \right) + \sqrt{\left(\frac{b}{2} - y \right)^2 + \frac{c_m^2}{4} \cos^2 \delta}}{- \left(\frac{b}{2} + y \right) + \sqrt{\left(\frac{b}{2} + y \right)^2 + \frac{c_m^2}{4} \cos^2 \delta}} = \\ & = - \frac{\gamma \sin \delta}{4\pi V_0} \ln \left\{ \left[\sqrt{1 + \Lambda^2 (1 + \cos \theta)^2} + \Lambda (1 + \cos \theta) \right] \left[\sqrt{1 + \Lambda'^2 (1 - \cos \theta)^2} + \Lambda (1 - \cos \theta) \right] \right\}. \end{aligned}$$

Pe de altă parte, pentru vârtejurile concentrate marginale, în A și B , un raționament analog cu cel precedent ne conduce la următorul rezultat :

$$(28.44) \quad \frac{\gamma \sin \delta}{4\pi V_0} \left[\frac{\Lambda}{\sqrt{1 + \Lambda^2 (1 + \cos \theta)^2}} + \frac{\Lambda}{\sqrt{1 + \Lambda'^2 (1 - \cos \theta)^2}} \right]$$

Suma celor două expresii (28.43) și (28.44) ne dă incidența suplimentară i'_s care este simetrică. Valoarea mijlocie a acestei incidențe este foarte mică. Într'adevăr, pentru o alungire reală mijlocie $\lambda_m = 6$, pentru $\delta \approx 30^\circ$, această incidență mijlocie este de ordinul 0,01 A_1 , deci neglijabilă.

Putem deci neglija influența distribuției anti-simetrice asupra repartiției portanței.

28.3.3. Exemplu de calcul. Pentru a verifica rezultatele obținute mai sus concretizate prin formulele (28.32) și (28.34), care sunt generale fiind totuși simple ca formă, vom face o aplicație la o aripă dreptunghiulară de alungire reală $\lambda_r = 6$ și o derivă $\delta = 0,5$. Calcule elementare ne conduc la rezultatul următor :

$$(28.45) \quad a_2 = -0,0575 A_1.$$

28.4. Aplicație la aripile în săgeată

Acest caz este foarte important pentru construcția avioanelor moderne de viteză mare. Într'adevăr, forma în săgeată evită într'o bună măsură supravitesele pe extradadosul aripii și prin aceasta este micșorată și rezistența.

Fie δ unghiul săgeții; vom avea (fig. 28.9) :

$$(28.46) \quad \delta_a = \delta \quad \delta_b = \pi - \delta'$$

și formula (28.26) devine, punând ca de obicei $\eta = - \frac{b}{2} \cos \theta$,

$$(28.47) \quad i_s = \frac{1}{4} \lambda A_1 \left[\frac{\operatorname{tg} \delta}{\sqrt{1 + \Lambda^2 (1 + \cos \theta)^2}} + \frac{\operatorname{tg} \delta'}{\sqrt{1 + \Lambda'^2 (1 - \cos \theta)^2}} \right],$$

unde

$$(28.48) \quad \Lambda = \frac{\lambda}{\cos \delta}$$

$$\Lambda' = \frac{\lambda'}{\cos \delta'}$$

Avem mai departe :

$$(28.49) \quad \operatorname{tg} \delta' = \frac{X - \xi}{\frac{b}{2} + \eta} = \frac{\frac{b}{2} - \eta}{\frac{b}{2} + \eta} \operatorname{tg} \delta = \frac{1 + \cos \theta}{1 - \cos \theta} \operatorname{tg} \delta$$

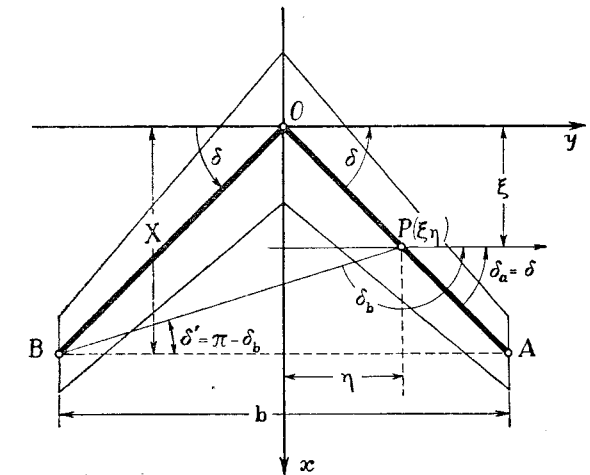


Fig. 28.9.

și prin urmare :

$$(28.50) \quad i_s = \frac{1}{4} \lambda A_1 \operatorname{tg} \delta \left[\frac{1}{\sqrt{1 + \Lambda^2 (1 + \cos \theta)^2}} + \frac{\frac{1 + \cos \theta}{1 - \cos \theta}}{\sqrt{1 + \Lambda'^2 (1 - \cos \theta)^2}} \right].$$

Această relație este valabilă pentru θ variind de la $\frac{\pi}{2}$ la π , pe partea dreaptă a aripii. Pentru partea stângă (θ variind de la 0 la $\frac{\pi}{2}$), un raționament

simplu ne conduce la formula următoare :

$$(28.51) \quad i_s = \frac{1}{4} \lambda A_1 \operatorname{tg} \delta \left[\frac{\frac{1 - \cos \theta}{1 + \cos \theta}}{\sqrt{1 + \Lambda^2(1 + \cos \theta)^2}} + \frac{1}{\sqrt{1 + \Lambda^2(1 - \cos \theta)^2}} \right]$$

În prima formulă, influența primului termen este preponderentă ($\cos \theta < 0$); pentru cea de a doua, influența termenului al doilea este preponderentă ($\cos \theta > 0$); rezulț de asemenea că valoarea lui Λ influențează rezulțatul într'un mod preponderent. Se poate pune, în aceste condiții,

$$(28.52) \quad \Lambda' \approx \Lambda = \frac{\lambda}{\cos \delta}$$

și unghiul indus suplimentar va fi dat de o singură formulă :

$$(28.53) \quad i_s = \frac{1}{4} \lambda A_1 \operatorname{tg} \delta \left[\frac{1 - \cos \theta}{\sqrt{1 + \Lambda^2(1 + \cos \theta)^2}} + \frac{1 + \cos \theta}{\sqrt{1 + \Lambda^2(1 - \cos \theta)^2}} \right] \frac{1}{1 + |\cos \theta|}$$

Să observăm din nou că putem scrie, pentru x variind dela 0 la 20, relația următoare :

$$(28.54) \quad \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}} \approx 2,1 - 1,54 \sqrt[3]{x} + 0,156x - 0,0025x^2 + \dots$$

Pe de altă parte, se poate pune aproximativ

$$(28.55) \quad \sqrt[3]{1 + \cos \theta} + \sqrt[3]{1 - \cos \theta} \approx 1,7 - 0,3 \cos 2\theta,$$

iar după (28.54) :

$$(28.56) \quad \frac{1}{\sqrt{1 + \Lambda^2(1 + \cos \theta)^2}} + \frac{1}{\sqrt{1 + \Lambda^2(1 - \cos \theta)^2}} \approx \\ \approx (4,2 - 2,78 \sqrt[3]{\Lambda} + 0,312\Lambda - 0,0075\Lambda^2) + \\ + (0,262 \sqrt[3]{\Lambda} - 0,0025\Lambda^2) \cos 2\theta + 0,03 \sqrt[3]{\Lambda} \cos 4\theta.$$

Ținând seamă de (28.30) și (28.31), vom avea mai departe :

$$(28.57) \quad \frac{\cos \theta}{\sqrt{1 + \Lambda^2(1 - \cos \theta)^2}} - \frac{\cos \theta}{\sqrt{1 + \Lambda^2(1 + \cos \theta)^2}} = \\ = (0,616 \sqrt[3]{\Lambda} - 0,156 \Lambda + 0,005 \Lambda^2) (1 + \cos 2\theta).$$

Să mai observăm că $\frac{\sin \theta}{1 + |\cos \theta|}$ s'ar putea reprezenta într'un mod destul de riguros printr'un polinom trigonometric simplu :

$$(28.58) \quad \frac{\sin \theta}{1 + |\cos \theta|} = 0,75 \sin \theta - 0,10 \sin 3\theta.$$

În cele din urmă, introducând aceste relații în expresia (28.53) și înlocuind pe λ prin $\Lambda \cos \delta$, se găsește :

$$(28.59) \quad i_s \sin \theta = i_1 \sin \theta + i_3 \sin 3\theta + i_5 \sin 5\theta + i_7 \sin 7\theta$$

unde

$$(28.60) \quad \begin{cases} i_1 = \frac{1}{4} \Lambda A_1 \sin \delta (3,15 - 1,99 \sqrt[3]{\Lambda} + 0,183\Lambda - 0,0029\Lambda^2) \\ i_3 = \frac{1}{4} \Lambda A_1 \sin \delta (-0,42 + 0,61 \sqrt[3]{\Lambda} - 0,074\Lambda + 0,0012\Lambda^2) \\ i_5 = \frac{1}{4} \Lambda A_1 \sin \delta (-0,034 \sqrt[3]{\Lambda} + 0,008\Lambda - 0,00013\Lambda^2) \\ i_7 = \frac{1}{4} \Lambda A_1 \sin \delta (-0,0015 \sqrt[3]{\Lambda}) \approx 0. \end{cases}$$

Dacă punem acum circulația suplimentară Γ_s sub forma sa obișnuită

$$(28.61) \quad \Gamma_s = 2bV_0(a_1 \sin \theta + a_3 \sin 3\theta + \dots),$$

determinarea coeficienților a_1, a_3, \dots se va face aplicând formulele (22.10) și (22.11).

28.4.1. Influența vârtejurilor legate. În considerațiile precedente nu s'a ținut seamă decât de vârtejurile libere. În realitate, de îndată ce linia portantă care reprezintă vârtejurile legate nu este dreaptă, se stabilește o influență mutuală între diversele părți ale acestei linii în ceea ce privește vitesa pe care și le induce reciproc. Astfel, de exemplu, vârtejul legat din partea stângă induce în punctul P al părții din dreapta (fig. 28.10) o viteză suplimentară care rezulță imediat, din legea lui BIOT-SAVART :

$$(28.62) \quad w'_s = - \frac{\Gamma_m}{4\pi PN} (\cos \beta - \cos 2\delta).$$

Se mai poate pune

$$(28.63) \quad \overline{PN} = \overline{OP} \sin 2\delta = 2\eta \sin \delta;$$

observând pe de altă parte că $\cos \beta$, care variază dela 1 până la $\cos \delta$ când η variază dela 0 la $\frac{b}{2}$, ar putea fi înlocuit prin relația lineară următoare :

$$(28.64) \quad \cos \beta = 1 - 2 \sin^2 \frac{\delta}{2} \cdot \frac{2\eta}{b},$$

putem scrie pentru noua incidență indusă suplimentară :

$$(28.65) \quad i'_s = -\frac{1}{8} A_1 \sin \delta \left(\frac{b}{\eta} - \frac{1}{1 + \cos \delta} \right).$$

Din cauza simetriei, în punctul $-\eta$ avem aceeași incidență indusă : trebuie să scriem prin urmare :

$$(28.66) \quad i'_s = -\frac{1}{8} A_1 \sin \delta \left[\frac{b}{|\eta|} - \frac{1}{1 + \cos \delta} \right] = -\frac{1}{4} A_1 \sin \delta \left[\frac{1}{|\cos \theta|} - \frac{1}{2(1 + \cos \delta)} \right].$$

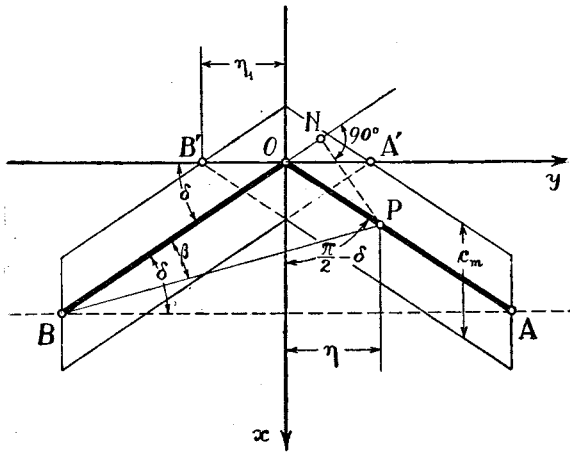


Fig. 28.10.

$$(28.64) \quad \overline{B'O} = \overline{OA'} = \eta_1 = \frac{c_m}{2} \cot \delta,$$

va fi introdusă în relația (28.66) pentru a obține în sfârșit valoarea incidenței induse pe porțiunea centrală $B'A'$:

$$(28.67) \quad i'_{s0} = -\frac{1}{4} A_1 \sin \delta \left[\Lambda \sin \delta - \frac{1}{2(1 + \cos \delta)} \right].$$

Ținând seama de această valoare în centru și de relația (28.66), considerând pe de altă parte alungirile uzuale, expresia $i'_s \sin \theta$ ar putea fi reprezentată într'un mod destul de satisfăcător prin următorul polinom trigonometric :

$$(28.68) \quad i'_s \sin \theta = -\frac{1}{8} A_1 \sin \delta \left[\left(\Lambda \sin \delta - \frac{1}{1 + \cos \delta} + 1,41 \right) \sin \theta - \frac{2}{3} (\Lambda \sin \delta - 1,15) \sin 3\theta + \frac{1}{3} (\Lambda \sin \delta - 1,92) \sin 5\theta \right],$$

care se obține prin calcule elementare.

Este ușor să se determine mai departe coeficienții circulației suplimentare :

$$(28.69) \quad \Gamma'_s = 2V_0 b (a'_1 \sin \theta + a'_3 \sin 3\theta + \dots + a'_n \sin n\theta),$$

prin metoda pe care am folosit-o în cazurile precedente.

Observație. Distribuția circulației totale Γ va fi egală cu suma circulațiilor datorite aripii drepte (Γ'), vârtejurilor libere (Γ_s) și vârtejurilor legate (Γ'_s) :

$$(28.70) \quad \Gamma = \Gamma' + \Gamma_s + \Gamma'_s,$$

de unde rezultă, notând cu A'_1, A'_3, \dots, A'_n , coeficienții corespunzători ai aripii drepte, coeficienții circulației totale :

$$(28.71) \quad A_n = A'_n + a_n + a'_n.$$

BIBLIOGRAFIA CAP. VI.

- 1) *BLENK H.* : Zeitsch. f. angew. Math. u. Mechanik, 5 pag. 36., 1925.
- 2) *BOLLAY W.* : Zeitsch. fur ang. Math. u. Mech. vol. 19 (1939).
- 3) *CARAFOLI E.* și *TIPEI N.* : Asupra teoriei aripiilor în săgeată sau în derivă. Buletinul Științific al Academiei R.P.R. t. Nr. 4. 1948.
- 4) *COCIN N.E.* : Teoria aripii de anvergură finită cu formă circulară în plan. „Priladnaia matematica i mehanika”, 1940, Nr. 1.
- 5) *DORODNITAN A.A.* : Generalizarea teoriei liniei portante pentru cazul aripii cu axa deformată și cu axă care nu este perpendiculară pe curent „Priladnaia matematica i mehanica” vol. VIII, 1944, Nr. 1.
- 6) *GOLUBEV V.V.* : Asupra teoriei aripii de alungire mică. Izvestia Akademii Nauk S.S.S.R., 1947, Nr. 3.
- 7) *GOLUBEV V.V.* : Lecții din teoria aripii, Editura de Stat a literaturii tehnice și teoretice, Moscova, Leningrad, 1949.
- 8) *KINNER W.* : Die Kreisförmigen Tragfläche auf potentialtheoretischer Grundlage, Zeit. für Angew. Mathem. u. Mechanik, 18, 1937.
- 9) *KRIENES K.* : Die elliptische Tragfläche auf potentialtheoretischer Grundlage, Zeit. für ang. Mathem. u. Mech., 20, 1940.
- 10) *WEINIG F.* : Schiebende und gepfeilte Tragflügel, Luftfahrtforschung, 20 Februarie 1937.

CAPITOLUL VII

TEORIA SUSTENTAȚIEI ÎN MIȘCAREA NEPERMANENTĂ

Mișcarea pe care am studiat-o până în prezent a fost presupusă permanentă, iar rezultatele obținute privesc prin urmare deplasarea rectilinie și uniformă a aripii. Dacă viteza acestuia nu este nici rectilinie, nici uniformă, sau dacă avem o mișcare mai generală, o translație asociată cu o rotație de exemplu, scurgerea fluidului înconjurător este nepermanentă. Această mișcare generală nu comportă de altfel nicio dificultate, cel puțin pentru problema plană, și soluțiile respective au fost indicate într-o lucrare anterioară [2][3] unde am tratat amplu și într-un mod special mișcarea de translație asociată cu o rotație.

Însă aceste soluții se referă exclusiv la potențialul uniform, iar termenul multiform datorit circulației, pe care l'am adăugat la rezultatul general, a fost considerat tot timpul invariabil, conform cu legea circulației, a lui KELVIN. Ori, această ipoteză nu este valabilă pentru anumite probleme ale aerodinamicii, ca de exemplu scurgerea în jurul unei aripi pornind din repaus, mișcarea în jurul aripilor batante, sborul păsărilor, etc., unde explicația sustentației și a efectului propulsiv se bazează pe existența circulației și pe variația ei.

29. CIRCULAȚIA ȘI POTENȚIALUL VITESELOR ÎN JURUL UNEI ARIPI ÎN MIȘCARE VARIATĂ

Teorema lui JUCOVSKI explică sustentația cu ajutorul circulației care ia naștere în jurul aripii. Determinarea circulației la rândul său este bazată pe necesitatea fizică de a avea o viteză finită la vârful din coada profilului. În mișcarea permanentă această circulație, odată determinată, rămâne mereu constantă. Însă cum ia naștere și care este legea variației sale în timp ce regimul tinde să se stabilească sau în timpul variației mișcării? Aceasta este problema pe care o vom trata mai jos.

29.1. Nașterea circulației și formarea unei pătri de vârtejuri în spatele aripii

Nulă la început, când fluidul este în repaus, circulația ia naștere și variază continuu cu timpul de îndată ce a început mișcarea. Această

variație a circulației, care trebuie să satisfacă totodată teorema lui KELVIN, are un mecanism destul de complicat, însă vom încerca să o explicăm pe o schemă simplă. Fie, într'adevăr, o aripă care este la momentul inițial în repaus și începe mișcarea sa cu o viteză care se poate presupune, pentru simplificare, rectilinie. În primul moment, scurgerea este determinată de potențialul uniform, care comportă după cum am văzut două puncte de viteză nulă în A și în B și o viteză infinită la vârf (fig. 29.1 a). Această viteză infinită nu poate să se producă în realitate în interiorul fluidului (depresiunea ar fi de asemenea infinită), însă particulele care se găsesc pe intrados, din cauza tendinței lor de a înconjura vârful de îndată ce acesta

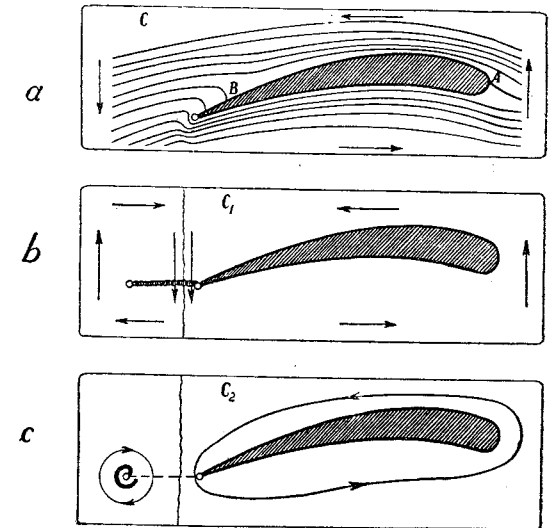


Fig. 29.1. a, b, c.

a început să se deplaseze, își mărește viteza și prin aceasta se stabilește în apropierea acestui vârf o discontinuitate de viteze, între filetele de pe extrados și intrados (fig. 29.1 b). Această suprafață de discontinuitate este în fapt un strat de vârtejuri a cărui intensitate totală — $\Delta\Gamma$ este compensată prin circulația $\Delta\Gamma$ ce se naște în jurul profilului și care, prin viteza pe care o produce pe contur, face ca punctul B de viteză nulă să se deplaseze spre coadă. Prin acest fapt, tendința de învâluire a vârfului dispăre și viteza devine finită și tangentă la coadă; însă stratul de vârtejuri se menține și se întinde de la punctul inițial ($t = 0$) până la noua poziție a vârfului ($t = t_1$). Fenomenul continuă astfel și circulația Γ care se formează în jurul profilului este egală cu intensitatea totală a stratului de vârtejuri. Particulele, care formau în starea inițială un circuit închis C , formează la momentul $t = t_1$ circuitul C_1 , în jurul căruia circulația totală rămâne mereu nulă, conform cu legea circulației. Când viteza atinge valoarea sa de regim, variația circulației Γ este datorită în acest caz exclusiv poziției relative a aripii față de stratul de vârtejuri.

Într'adevăr, acest strat presupus rectiliniu și paralel cu viteza, sau înfășurat în parte în forma unui nucleu turbionar (fig. 29.1 c), induce o viteză verticală în dreptul aripii, care produce la rândul său pe aripă o circulație suplimentară. Această circulație suplimentară provoacă la rândul său variația circulației, astfel că stratul de vârtejuri continuă să se formeze, însă intensitatea turbionară cât și variația circulației la care corespunde devin din ce în ce mai mici, tinzând spre zero odată cu îndepărtarea de aripă.

Când distanța la nucleul turbionar devine destul de mare, — și aceasta se întâmplă după câteva momente —, influența acestuia devine neglijabilă și se stabilește în jurul conturului o circulație de regim, a cărui studiu, sub toate aspectele sale, a fost făcut în paragrafele precedente.

În timpul regimului variabil, când se trece de la timpul t la timpul $t + dt$, circulația în jurul profilului variază cu $d\Gamma$; intensitatea stratului turbionar, care se formează în spatele vârfului, este în consecință $-d\Gamma$. În acest interval de timp, vârful profilului, care se deplasează cu viteza V presupusă aproximativ rectilinie, trece de la punctul s la punctul $s + ds = s + V dt$ pe traiectorie și dacă γ este intensitatea turbionară pe unitatea de lungime, vom avea :

$$(29.1) \quad \gamma ds = -d\Gamma.$$

Dacă circulația în jurul profilului este nulă la început, — cum ar fi cazul când aripa ar porni din repaus sau când mișcarea ei, presupusă periodică, ar începe cu o incidență nulă —, ea va deveni la momentul t , când aripa va fi parcurs distanța s :

$$(29.2) \quad \Gamma = - \int_0^s \gamma ds,$$

luând drept origine poziția inițială a vârfului.

Stratul de vârtejuri, care se întinde în formă de trenă în spatele aripii și a cărui intensitate totală este egală prin urmare cu $-\Gamma$, influențează la

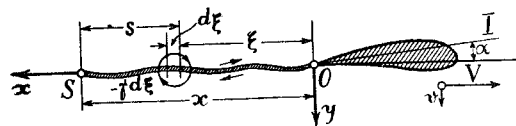


Fig. 29.2.

rândul său mișcarea în jurul aripii care se găsește astfel plasată în câmpul de viteze induse a întregului sistem de vârtejuri. Din această cauză, circulația, sferă influența lor și problema se complică astfel într'un mod considerabil. Totuși această problemă a fost abordabilă grație simplificărilor care s'au adus, iar rezultatele obținute de diferiți autori, între care vom cita pe PRANDTL, BIRNBAUM, WAGNER, GLAUERT, CEAPLĂGHIN, sunt remarcabile prin lumina pe care o aruncă asupra acestei probleme complicate și delicate. Acum în urmă, A. I. NECRASOV a făcut o sinteză a problemei și aduce în lucrarea sa o contribuție excepțională [9].

În general, acești autori tratează mișcarea plană. Se consideră că mișcarea aripii se îndepărtează foarte puțin de translația rectilinie, vitezele verticale sau oscilațiile în jurul unei axe fiind foarte reduse față de viteza de translație. Se admite prin acest fapt că suprafața aripii este paralelă cu direcția vitezei, iar stratul de vârtejuri presupus plan este în continuarea sa (fig. 29.2).

Să luăm drept origine a axelor vârful profilului și fie x distanța parcursă de vârful în timpul t . Se presupune că fâșia elementară $\gamma d\xi$, care a luat naștere atunci când vârful era în punctul $s = x - \xi$, rămâne mereu pe locul unde s'a format. Rezultă că intensitatea turbionară în punctul s va fi după (29.1) :

$$(29.3) \quad \gamma = - \left(\frac{d\Gamma}{dx} \right)_s = - \left(\frac{d\Gamma}{dx} \right)_{x-\xi} = - \frac{1}{V} \left(\frac{d\Gamma}{dt} \right)_{t-\tau},$$

unde τ este timpul necesar pentru ca vârful aripii să parcurgă distanța ξ . Această relație este ușor de dedus dacă se observă că $d\Gamma$ corespunde la pornirea vârfului din punctul $s = x - \xi$; în consecință, în locul lui x (respectiv t), în expresia derivatei, trebuie să punem $x - \xi$ (respectiv $t - \tau$).

29.2. Determinarea circulației în jurul profilului

Fie V viteza orizontală a profilului, pe care îl vom asimila cu o placă subțire, v viteza sa verticală și ω rotația în jurul axului său central. Aceste două viteze din urmă sunt mici față de V și au un caracter periodic. Să presupunem, pe de altă parte, că deplasarea verticală a aripii este îndreptată în jos astfel încât viteza relativă a aerului față de aripă să fie pozitivă; unghiul de incidență corespunzător, $\frac{v}{V}$, va fi de asemenea pozitiv. Dacă, la

un moment dat, α este incidența aripii față de curentul V , incidența totală a aripii va fi :

$$\beta = \alpha + \frac{v}{V}$$

și circulația corespunzătoare, considerând numai efectul vitezei de translație și notând cu c coada aripii, va fi :

$$(29.4) \quad \Gamma_1 = \pi c V \left(\alpha + \frac{v}{V} \right) = \pi c (V\alpha + v).$$

Tot astfel, rotația $\omega = \frac{d\alpha}{dt}$ dă o viteză infinită la vârf care va fi evitată, bine înțeles, dacă se introduce circulația corespunzătoare, dedusă din formula deja stabilită într'o lucrare anterioară [2] :

$$(29.5) \quad \Gamma_2 = \pi c \omega \frac{c}{4} = \frac{\pi}{4} c^2 \frac{d\alpha}{dt}.$$

Se poate stabili această expresie și pe altă cale bazată pe considerațiunile expuse în paragraful 11, unde s'a tratat teoria profilelor subțiri. Într'adevăr, luând drept axă a absciselor coada profilului însuși și drept

origină centrul ei, punând mai departe $x' = -\frac{c}{2} \cos \theta'$, viteza fiecărui element al plăcii, normală la aceasta, va fi dată de expresia :

$$(29.6) \quad v_n = \omega x' = -\frac{c}{2} \omega \cos \theta'.$$

Pe de altă parte, placa va fi înlocuită printr'o pătură turbionară de intensitate γ' (finită, chiar la extremități, unde viteza este de asemenea finită), care va putea fi dezvoltată în serie FOURIER :

$$(29.7) \quad \gamma' = \omega c \sum_1^n a_n \sin n\theta',$$

din care rezultă relația

$$(29.8) \quad \Gamma_2 = \int_{-\frac{c}{2}}^{\frac{c}{2}} \gamma' dx' = \frac{\pi}{4} \omega c^2 a_1.$$

Pe de altă parte, viteza indusă, care este normală pe placă, va avea ca expresie, după (11.23) :

$$(29.9) \quad v' = -\frac{c}{2} \omega \sum_1^n a_n \cos n\theta'.$$

Această expresie fiind identică cu v_n (29.6), se poate deduce ușor $a_1 = 1$ și în consecință relația (29.8) devine de asemenea identică cu (29.5), pe care am dedus-o pe o cale directă.

Rămâne acum de calculat influența trenei turbionare care însoțește aripa și care este datorită variației circulației în raport cu timpul.

Să urmăim pentru aceasta procedeul lui WAGNER, efectuând transformarea planului profilului rectiliniu în planul cercului și stabilind potențialul mișcării datorit unui vârtej de intensitate $-\Delta\Gamma$ situat la o distanță ξ de vârful profilului. Prin transformarea bine cunoscută (6.1), ținând seamă de noile variabile ξ și σ (fig. 29.3), poziția aceluiaș vârtej în planul cercului va fi dedusă din formula

$$(29.10) \quad \xi + \frac{c}{2} = \sigma + \frac{c}{4} + \frac{c^2}{16} \cdot \frac{1}{\sigma + \frac{c}{4}},$$

de unde rezultă

$$(29.11) \quad \sigma = \frac{1}{2} \left(\xi + \sqrt{c\xi + \xi^2} \right) = \frac{1}{2} \xi \left(1 + \sqrt{\frac{c + \xi}{\xi}} \right) = \frac{c}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{\frac{c + \xi}{\xi}} - 1}.$$

Mișcarea în jurul cercului va fi dată de potențialul corespunzător celor trei vârtejuri, dispuse ca în figura 29.3 b, unde σ_0 este dat de formula următoare, dedusă din relația (3.26) :

$$(29.12) \quad \sigma_0 = \frac{c^2}{16} \cdot \frac{1}{\sigma + \frac{c}{4}} = \frac{1}{2} \left(\frac{c}{2} + \xi - \sqrt{c\xi + \xi^2} \right).$$

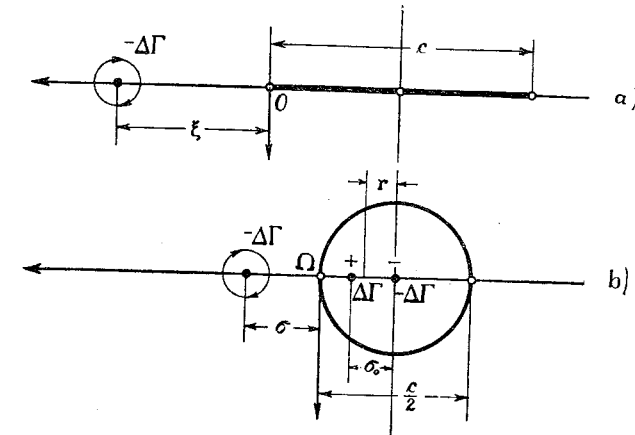


Fig. 29.3.

Dar pentru ca viteza la vârf (0), în planul profilului, să nu fie infinită, trebuie să mai adăugăm o circulație $\Delta\Gamma_2$ care să anuleze în planul cercului viteza în Ω :

$$(29.13) \quad \frac{\Delta\Gamma_2}{2\pi \frac{c}{4}} = -\frac{\Delta\Gamma}{2\pi} \left(\frac{1}{\frac{c}{4}} - \frac{1}{\frac{c}{4} - \sigma_0} + \frac{1}{\sigma} \right) = -\frac{\Delta\Gamma}{\pi\sigma}.$$

Rezultă :

$$(29.14) \quad \Delta\Gamma_2 = -\Delta\Gamma \left(\frac{\sqrt{c + \xi}}{\xi} - 1 \right);$$

punând mai departe

$$(29.15) \quad s = x - \xi, ds = -d\xi,$$

înlocuind apoi $\Delta\Gamma$ prin $-\gamma ds = \gamma d\xi$ și ținând seama de (29.2), vom avea

în sfârșit :

$$(29.16) \quad \Gamma_2 = \int_0^s \gamma \left(\sqrt{\frac{c+\xi}{\xi}} - 1 \right) d\xi = \int_0^x \gamma \left(\sqrt{\frac{c+\xi}{\xi}} - 1 \right) d\xi = \\ = \int_0^x \sqrt{\frac{c+\xi}{\xi}} \gamma d\xi + \Gamma.$$

Astfel prin urmare, circulația totală în jurul profilului va fi :

$$(29.17) \quad \Gamma = \Gamma_0 + \Gamma_1 + \Gamma_2$$

și ținând seamă de relațiile (29.4), (29.5), și (29.16), se obține ecuația fundamentală a circulației :

$$(29.18) \quad \int_0^x \sqrt{\frac{c+\xi}{\xi}} \gamma d\xi + \pi c (V\alpha + v) + \frac{\pi}{4} c^2 \frac{d\alpha}{dt} = 0.$$

Aceasta este o integrală care se rezolvă greu, în afară de unele cazuri simple pe care le vom trata succint mai jos.

29.3. Mișcare rectilinie accelerată, pornită din repaus

Intrebuițând metoda menționată mai sus, ecuația (29.18), devine în acest caz, punând $s = x - \xi$:

$$(29.19) \quad \int_0^x \sqrt{\frac{c+\xi}{\xi}} \gamma d\xi = \int_0^x \sqrt{\frac{c+x-s}{x-s}} \gamma ds = -\pi c V\alpha,$$

însă ea nu devine prin aceasta mai ușor de rezolvat. Deaceia WAGNER dezvoltă γ în serii speciale, făcând în același timp aproximații potrivite, și obține astfel soluții interesante pentru diferite cazuri particulare.

Așa de exemplu, când x este mic față de coardă, se obține ecuația integrală :

$$(29.20) \quad \int_0^x \sqrt{\frac{c}{x-s}} \gamma ds = -\pi c V\alpha.$$

Să presupunem că mișcarea este impulsivă și că viteza, care trece dela 0 la V_0 în intervalul dt , continuă să rămână constantă ; o primă soluție va fi dată de

$$(29.21) \quad \gamma \approx -\sqrt{\frac{c}{s}} V_0\alpha,$$

care devine infinită pentru $s = 0$ și descrește apoi ușor cu s .

Pentru ca valoarea finală a lui Γ să fie egală cu $\pi c V_0$, soluția trebuie să fie corectată și pusă sub forma

$$(29.22) \quad \gamma \approx -\sqrt{\frac{c}{s}} \cdot \frac{c}{c+s} V_0\alpha,$$

care se poate introduce apoi în ecuația generală (29.19), aceasta devenind o ecuație eliptică.

29.4. Mișcare oscilatorie cu viteză de translație constantă

Această problemă studiată de GLAUERT și dezvoltată de NECRASOV este în același timp foarte importantă și mult mai ușor de tratat. Intr'adevăr, alegând convenabil originea, ecuația (29.18) se poate scrie sub forma cea mai simplă

$$(29.23) \quad \int_0^x \sqrt{\frac{c+\xi}{\xi}} \gamma d\xi + G_0 + G_1 \sin \mu t = 0.$$

Vom presupune, bine înțeles, că este vorba de o oscilație armonică simplă, fie pentru v fie pentru α .

Variația lui Γ va fi tot periodică și o putem pune sub forma :

$$(29.24) \quad \Gamma = \Gamma_0 + \Gamma_1 \sin \mu t + \Gamma_2 \cos \mu t,$$

de unde rezultă succesiv, prin aplicarea relației (29.3) și punând

$$(29.25) \quad \tau = \frac{\xi}{V_0},$$

expresiile următoare :

$$(29.26) \quad \gamma = -\left(\frac{d\Gamma}{dx} \right)_{x-\xi} = -\frac{1}{V_0} \left(\frac{d\Gamma}{dt} \right)_{t-\tau} = -\frac{\mu}{V_0} \left[\Gamma \cos \mu(t-\tau) - \Gamma_2 \sin \mu(t-\tau) \right] = -\frac{\mu}{V_0} \left[(\Gamma_1 \sin \mu t + \Gamma_2 \cos \mu t) \sin \mu \frac{\xi}{V_0} + (\Gamma_1 \cos \mu t - \Gamma_2 \sin \mu t) \cos \mu \frac{\xi}{V_0} \right].$$

Această expresie a lui γ trebuie să fie introdusă în (29.23). Să observăm mai întâi că este vorba de o mișcare periodică de regim și că influența pornirii în momentul inițial este presupusă nulă ; se poate deci admite că axa x este foarte mare ($x \rightarrow \infty$). În acest caz, adăugând la (29.23) circulația totală Γ , la primul și al doilea membru, vom obține ecuația următoare :

$$(29.27) \quad \int_0^\infty \left(\sqrt{\frac{c+\xi}{\xi}} - 1 \right) \gamma d\xi + G_0 + G_1 \sin \mu t = \Gamma_0 + \Gamma_1 \sin \mu t + \Gamma_2 \cos \mu t.$$

Să punem :

$$(29.28) \quad \xi_1 = \frac{\xi}{c}, \quad \lambda = \frac{\mu c}{V_0}, \quad \kappa + i\sigma = \int_0^\infty e^{i\lambda \xi_1} \left(\sqrt{\frac{1+\xi_1}{\xi_1}} - 1 \right) d\xi_1;$$

vom obține, înlocuind γ prin expresia sa (29.26) :

$$(29.29) \quad \int_0^\infty \left(\sqrt{\frac{c+\xi}{\xi}} - 1 \right) \gamma d\xi = -\lambda [\sigma (\Gamma_1 \sin \mu t + \Gamma_2 \cos \mu t) + \kappa (\Gamma_1 \cos \mu t - \Gamma_2 \sin \mu t)],$$

iar integrala precedentă devine în cele din urmă :

$$(29.30) \quad \Gamma_0 + \Gamma_1 \sin \mu t + \Gamma_2 \cos \mu t = G_0 + G_1 \sin \mu t - \lambda [\sigma (\Gamma_1 \sin \mu t + \Gamma_2 \cos \mu t) + \kappa (\Gamma_1 \cos \mu t - \Gamma_2 \sin \mu t)].$$

Această ecuație trebuie să fie identic satisfăcută în toate punctele x și în orice moment t ; constantele precum și coeficienții lui $\sin \mu t$ și $\cos \mu t$ trebuie să fie egali în ambii membri. Vom avea astfel ecuațiile :

$$(29.31) \quad \Gamma_0 = G_0, \quad (1 + \lambda \sigma) \Gamma_1 - \lambda \kappa \Gamma_2 = G_1, \quad \lambda \kappa \Gamma_1 + (1 + \lambda \sigma) \Gamma_2 = 0,$$

de unde rezultă formulele următoare :

$$(29.32) \quad \Gamma_1 = \frac{(1 + \lambda \sigma) G_1}{(1 + \lambda \sigma)^2 + \lambda^2 \kappa^2}, \quad \Gamma_2 = \frac{-\lambda \kappa G_1}{(1 + \lambda \sigma)^2 + \lambda^2 \kappa^2}.$$

Singura dificultate care rămâne este determinarea lui κ și σ , care se pot determina cu ajutorul unei funcții BESSEL. Într'adevăr, punând $\xi_1 = \frac{1}{2} (t - 1)$ și $\lambda = 2iz$, se poate scrie succesiv

$$(29.33) \quad \kappa + i\sigma = \frac{e^z}{2} \int_0^\infty e^{-zt} \left(\sqrt{\frac{t+1}{t-1}} - 1 \right) dt = \frac{e^z}{2} \int_0^\infty e^{-zt} \left(-1 + \frac{1}{\sqrt{t^2-1}} + \frac{t}{\sqrt{t^2-1}} \right) dt = \frac{e^z}{2} \left[-\frac{e^{-z}}{z} + K_0(z) + K_1(z) \right] = -\frac{i}{\lambda} + \frac{1}{2} e^{-i\frac{\lambda}{2}} \left[K_0\left(-i\frac{\lambda}{2}\right) + K_1\left(-i\frac{\lambda}{2}\right) \right].$$

unde K_0 și K_1 reprezintă funcțiile de ordinul zero și unu, astfel cum sunt definite de GRAY, MATHEWS și MACROBERT în tratatul lor asupra funcțiilor BESSEL.

Dăm mai jos valorile κ și σ (tabela 29 I) :

Tabela 29.I

$\lambda = 0$	0,2	0,4	0,6	0,8	1
$\kappa = \infty$	1,745	1,429	1,254	1,135	1,047
$\sigma = 0,785$	0,711	0,667	0,635	0,608	0,586

29.5. Potențialul de viteze

Pentru a simplifica problema, vom asimila profilul, așa cum am făcut și mai înainte, cu scheletul său și fie: α , unghiul axei de portanță nulă cu axa Ox , V și $-v$ vitezele orizontală și verticală, egale și de semn contrar cu cele ale aripii și ω rotația profilului în jurul axei sale. Mișcarea generală, care ia naștere în jurul aripii, va fi descompusă în trei părți: 1) mișcarea datorită curentului plan paralel de viteză $V + iv$; 2) mișcarea datorită rotației ω ; 3) mișcarea datorită stratului turbionar care însoțește bordul de fugă al aripii.

29.5.1. Potențialul datorit vitezei de translație. Fie $Oz'\eta'$ un sistem de axe a cărui origine se găsește în centrul cercului generator și a cărui axă a absciselor este paralelă cu viteza orizontală V ; după (3.36), pentru viteza orizontală și (3.31) pentru cea verticală, notând cu $\zeta' = \xi' + i\eta'$ afixul unui punct în planul ζ' (fig. 29.4), vom avea :

$$(29.34) \quad F_1(\zeta') = V \left(\zeta' + \frac{a^2}{\zeta'} \right) + iv \left(\zeta' - \frac{a^2}{\zeta'} \right).$$

Față de un sistem $Oz\eta$, rotit cu unghiul α în jurul originii, vom putea scrie :

$$(29.35) \quad \zeta' = \zeta e^{i\alpha}$$

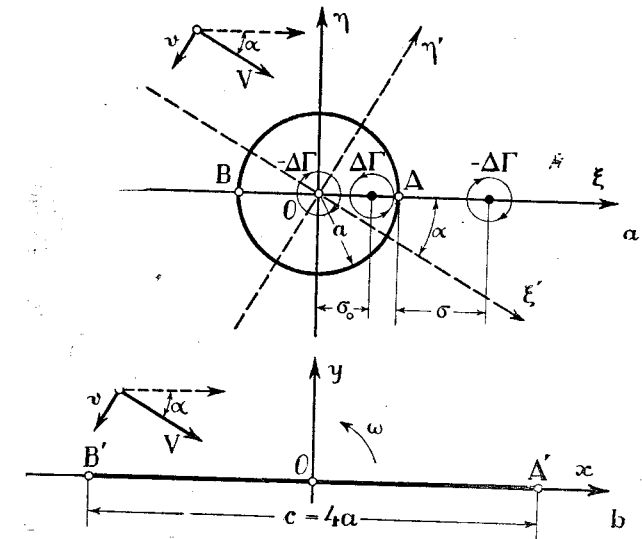


FIG. 29.4.

și prin urmare expresia precedentă a potențialului, adăugând în același timp termenul multiform datorit circulației, devine :

$$(29.36) \quad F_1(\zeta) = (V + iv) \zeta e^{i\alpha} + (V - iv) \frac{a^2 e^{-i\alpha}}{\zeta} - \frac{i\Gamma}{2\pi} \ln \zeta.$$

29.5.2. Potențialul datorit vitesei de rotație. Fie φ potențialul viteselor absolute în jurul aripii pe care am asimilat-o cu o placă subțire și u , v aceste viteze; rezultă :

$$(29.37) \quad u = \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad v = \frac{\partial \varphi}{\partial y};$$

notând mai departe cu u_e și v_e vitezele de antrenare a unei particule fluide față de sistemul Oxy legat cu placa (fig. 29.4.b), aceste viteze vor fi egale cu :

$$(29.38) \quad u_e = \omega y, \quad v_e = -\omega x,$$

iar vitezele relative devin respectiv :

$$(29.39) \quad u_r = \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \omega y, \quad v_r = \frac{\partial \varphi}{\partial y} - \omega x,$$

sau, încă,

$$(29.40) \quad w_r = u_r - iv_r = \frac{\partial \varphi}{\partial x} - i \frac{\partial \varphi}{\partial y} + i\omega(x - iy) = \frac{df}{dz} + i\omega \bar{z}$$

unde $\bar{z} = x - iy$ este conjugata lui $z = x + iy$.

În această mișcare relativă totul se petrece ca și cum axele și conturul ar fi imobile, iar aerul ar fi animat de o viteză de rotație ω în jurul originii.

Ecuția liniilor de curent

$$(29.41) \quad d\psi_r = u_r dy - v_r dx = 0$$

este identic satisfăcută pe contur, acesta fiind o linie de curent în această mișcare relativă. Observând mai departe că avem :

$$(29.42) \quad u_r dy - v_r dx \equiv \text{partea imaginară } (u_r - v_r)(dx + idy) \equiv \\ \equiv \text{p.im.} \left(\frac{df}{dz} + i\omega \bar{z} \right) dz,$$

se poate scrie relația fundamentală :

$$(29.43) \quad \text{p. im. } (df + i\omega \bar{z} dz)_C \equiv 0$$

unde C reprezintă conturul profilului.

Considerăm, din nou, transformarea bine cunoscută dată de expresia :

$$(29.44) \quad z = \zeta + \frac{a^2}{\zeta}, \quad \bar{z} = \bar{\zeta} + \frac{a^2}{\bar{\zeta}},$$

unde a este raza cercului generator, egală cu $\frac{c}{4}$.

Observând că, pe conturul cercului generator, avem :

$$(29.45) \quad \bar{\zeta} = \frac{a^2}{\zeta}$$

și înlocuind \bar{z} și dz prin expresiile lor scoase din (29.44), relația (29.43) ia forma următoare :

$$(29.46) \quad \text{p.im.} \left[dF + i\omega \left(\zeta + \frac{a^2}{\zeta} \right) \left(1 - \frac{a^2}{\zeta^2} \right) d\zeta \right]_K \equiv 0.$$

Funcția $F(\zeta)$ este uniformă și olomorfă în tot spațiul, iar derivata sa care reprezintă viteza absolută, este nulă la infinit; rezultă prin urmare că $F(\zeta)$ se poate pune sub forma,

$$(29.47) \quad F(\zeta) = \sum_1^m \frac{Q_m}{\zeta^m},$$

unde Q_m este o constantă complexă,

$$(29.48) \quad Q_m = A_m + iB_m.$$

Avem, mai departe,

$$(29.49) \quad dF = -\frac{d\zeta}{\zeta} \sum_1^m \frac{mQ_m}{\zeta^m},$$

care devine pe cerc, dacă punem

$$(29.50) \quad \zeta = ae^{i\theta}$$

și considerăm numai partea imaginară :

$$(29.51) \quad \text{p. im. } (dF)_K = -d\theta \left[\sum_1^m \frac{mA_m}{a^m} \cos m\theta + \sum_1^m \frac{mB_m}{a^m} \sin m\theta \right].$$

Avem, pe de altă parte,

$$(29.52) \quad \text{p. im.} \left[i\omega \left(\zeta + \frac{a^2}{\zeta} \right) \left(\zeta - \frac{a^2}{\zeta} \right) \frac{d\zeta}{\zeta} \right]_K = -2\omega a^2 \sin 2\theta d\theta,$$

de unde rezultă, ținând seama de (29.46), relațiile următoare :

$$(29.53) \quad B_2 = -\omega a^4, \quad A_1 = A_2 = \dots = A_m = 0, \quad B_1 = B_3 = \dots = B_m = 0.$$

Așa dar, potențialul datorit rotației, pe care îl vom nota cu $F_2(\zeta)$, va avea următoarea expresie :

$$(29.54) \quad F_2(\zeta) = -i\omega \frac{a^4}{\zeta^2},$$

care este un caz particular al soluției generale, pe care am stabilit-o într-o lucrare anterioară [2].

Observație. Adăugând la expresia (29.54) un termen $-\frac{i\Gamma_2}{2\pi} \ln \zeta$, datorit circulației, se găsește :

$$(29.55) \quad F_2'(\zeta) = -i\omega \frac{a^4}{\zeta^2} - \frac{i\Gamma}{2\pi} \ln \zeta$$

și viteza pe placa subțire va fi :

$$(29.56) \quad w'_2 = \frac{df'_2}{dz} = \frac{dF'_2}{d\zeta} \cdot \frac{1}{\frac{dz}{d\zeta}} = i \left(\frac{2\omega a^4}{\zeta^3} - \frac{\Gamma_2}{2\pi\zeta} \right) \frac{\zeta^2}{\zeta^2 - a^2}.$$

Pentru $\zeta = \pm a$, această viteză devine infinită ; ea nu este finită decât în cazul când

$$\Gamma_2 = 4\pi a^2 \omega = \frac{\pi}{4} c^2 \omega,$$

relație pe care am găsit-o mai sus (29.5) și (29.8).

29.5.3. Potențial datorit stratului turbionar. Expresiile (29.36) și (29.54), nu reprezintă decât mișcarea datorită viteselor de translație (V și $-v$), celei de rotație (ω) și circulației centrale (Γ) :

$$(29.57) \quad F(\zeta) = (V + iv) \zeta e^{i\alpha} + (V - iv) \frac{a^2}{\zeta} e^{-i\alpha} - i\omega \frac{a^4}{\zeta^2} - \frac{i\Gamma}{2\pi} \ln \zeta,$$

unde a este egal cu un sfert din coardă ($4a = c$).

Pentru a avea potențialul total trebuie să adăugăm potențialul datorit stratului turbionar, pe care îl presupunem aproximativ în prelungirea plăcii subțiri. Pentru un vârtej elementar $-\Delta\Gamma$, situat după cum se arată în fig. (29.4 a), potențialul elementar va fi de forma :

$$(29.58) \quad \Delta F_3(\zeta) = \frac{i\Delta\Gamma}{2\pi} \ln \frac{\zeta(\zeta - \sigma - a)}{\zeta - \sigma_0},$$

unde σ_0 este dat de formula (29.12). Pentru potențialul întregii trene turbionare, trebuie să înlocuim $\Delta\Gamma$ cu $\gamma d\zeta$ și observând că σ și σ_0 sunt tot

funcții de ζ , este ușor de văzut că $F_3(\zeta)$ este obținut printr-o simplă cuadratură. Nu este însă necesar să se efectueze această integrală, deoarece vom utiliza mai jos acest potențial sub forma sa diferențială (29.58).

30. FORȚE ȘI MOMENTE PE ARIPĂ ÎN REGIM VARIABIL

Formulele BLASIUS-CIAPLĂGHIN pentru forțe și momente nu sunt valabile decât pentru mișcările staționare. Deaceia, pentru a calcula rezultanta aerodinamică și momentul rezultant care acționează asupra unei aripi în mișcare variată, este necesar să se stabilească în prealabil expresiile generale ale presiunii, forței și momentului, în condițiile mișcării nepermanente.

30.1. Ecuația presiunii

Să considerăm un sistem de axe fixe $O_1x_1y_1$ și un altul Oxy legat de corpul în mișcare și fie $\varphi_1(x_1, y_1, t)$ și $\varphi(x, y, t)$ potențialele mișcării absolute respectiv față de axele fixe și mobile.

Dacă notăm, ca mai sus, prin u și v vitezele absolute față de axele mobile, ecuația lui LAGRANGE pentru presiune se va scrie :

$$(30.1) \quad p + \frac{\rho}{2} (u^2 + v^2) + \rho \frac{\partial \varphi_1}{\partial t} = C(t),$$

unde partea din constanta $C(t)$, care depinde de timp ar putea fi înglobată în expresia lui $\frac{\partial \varphi_1}{\partial t}$.

Se poate trece de la $\varphi_1(x_1, y_1, t)$ la $\varphi(x, y, t)$ printr-o schimbare de variabile, sistemul Oxy fiind derivat din $O_1x_1y_1$ printr-o translație și o rotație.

Vom avea deci :

$$(30.2) \quad \varphi_1(x_1, y_1, t) = \varphi(x, y, t),$$

prin urmare :

$$(30.3) \quad \frac{\partial \varphi_1}{\partial t} + \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1} \cdot \frac{dx_1}{dt} + \frac{\partial \varphi_1}{\partial y_1} \cdot \frac{dy_1}{dt} = \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{\partial \varphi}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt}.$$

Observând mai departe că $\frac{dx}{dt}$ și $\frac{dy}{dt}$ reprezintă respectiv vitezele relative u_r și v_r a particulelor fluide în raport cu axele mobile, relația precedentă devine :

$$(30.4) \quad \frac{\partial \varphi_1}{\partial t} + u^2 + v^2 = \frac{\partial \varphi}{\partial t} + u u_r + v v_r,$$

care se poate înlocui în ecuația (30.1) a presiunii și se obține astfel :

$$(30.5) \quad p + \frac{\rho}{2} (u_r^2 + v_r^2) - \frac{\rho}{2} [(u_r - u)^2 + (v_r - v)^2] + \rho \frac{\partial \varphi}{\partial t} = C(t),$$

Să observăm acum că $(u_r - u)$ și $(v_r - v)$ reprezintă respectiv viteșele de antrenare u_e și v_e a particulelor fluide față de axele mobile. Fie u_0 și v_0 viteșele de translație a sistemului mobil și ω rotația sa în jurul originii; viteșele de antrenare a fluidului vor fi respectiv :

$$(30.6) \quad u_e = u_r - u = -(u_0 - \omega y), \quad v_e = v_r - v = -(v_0 + \omega x),$$

viteșe care sunt egale și de semne contrarii cu viteșele de antrenare ale sistemului de axe legat cu corpul.

Să constatăm, pe de altă parte, că potențialul φ reprezintă mișcarea absolută și fie Φ potențialul corespunzător în ipoteza că aerul ar avea o translație egală și de semn contrar cu cea a aripii, adică o viteză de translație a cărei proiecții să fie $-u_0$ și $-v_0$; este ușor de văzut că vom avea

$$(30.7) \quad \begin{cases} \varphi(x, y, t) = \Phi(x, y, t) + u_0 x + v_0 y, \\ \frac{\partial \varphi}{\partial t} = \frac{\partial \Phi}{\partial t} + x \frac{\partial u_0}{\partial t} + y \frac{\partial v_0}{\partial t}. \end{cases}$$

Dacă vom introduce expresiile (30.6) și (30.7) în (30.5), vom obține în cele din urmă ecuația presiunii :

$$(30.8) \quad p + \frac{\rho}{2} (u_r^2 + v_r^2) + \rho x \left(\frac{du_0}{dt} - \omega_0 v_0 \right) + \rho y \left(\frac{dv_0}{dt} + \omega_0 u_0 \right) - \frac{\rho}{2} \omega^2 (x^2 + y^2) + \rho \frac{\partial \Phi}{\partial t} = C(t) - \frac{\rho}{2} (u_0^2 + v_0^2) = K(t).$$

Aceasta este deci expresia presiunii în regim variabil, în ipoteza că fluidul este animat de o viteză de translație rectilinie $W_0 = -u_0 + iv_0$ iar corpul se rotește cu o viteză de rotație ω în jurul originii.

30.2. Rezultanta generală

Să reluăm raționamentul din paragraful (4.5) și să ne referim la fig.4.6; vom avea, notând cu R rezistența și cu P portanța

$$(30.9) \quad dR = -p dy, \quad dP = p dx$$

sau încă (4.56)

$$(30.10) \quad dQ = dR - i dP = -ip(dx - i dy) = -ip d\bar{z}.$$

Să înlocuim acum p prin expresia sa (30.8) și să integrăm dealungul conturului C ; vom obține :

$$(30.11) \quad Q = -i \int_C p d\bar{z} = -i \int_C K(t) d\bar{z} + \frac{i\rho}{2} \int_C (u_r^2 + v_r^2) d\bar{z} + i\rho \left(\frac{du_0}{dt} - \omega v_0 \right) \int_C x d\bar{z} + i\rho \left(\frac{dv_0}{dt} + \omega u_0 \right) \int_C y d\bar{z} - \frac{i\rho}{2} \omega^2 \int_C (z\bar{z}) d\bar{z} + i\rho \int_C \frac{\partial \Phi}{\partial t} d\bar{z}.$$

Prima integrală a celui de al treilea membru este nulă, fiindcă z ia aceeași valoare la plecarea și sosirea, pe contur.

Avem mai departe (30.6)

$$(30.12) \quad u_r = u - u_0 + \omega y = \frac{\partial \Phi}{\partial x} + \omega y, \quad v_r = \frac{\partial \Phi}{\partial y} - \omega x$$

sau încă

$$(30.13) \quad u_r - iv_r = \frac{\partial \Phi}{\partial x} - i \frac{\partial \Phi}{\partial y} + \omega(y + ix) = \frac{dF}{dz} + i\omega \bar{z},$$

unde $F(z)$ reprezintă potențialul complex :

$$(30.14) \quad F(\zeta) = \Phi + i\Psi.$$

Pe de altă parte, conturul fiind o linie de curent în mișcare relativă ($d\Psi_r = v_r dx - u_r dy = 0$), vom avea

$$(30.15) \quad (u_r + iv_r)(dx - idy) = (u_r - iv_r)(dx + idy) = \left(\frac{dF}{dz} + i\omega \bar{z} \right) dz,$$

de unde rezultă în fine, pe contur,

$$(30.16) \quad (u_r^2 + v_r^2) dz = \left(\frac{dF}{dz} + i\omega \bar{z} \right)^2 dz.$$

Cea de a doua integrală din membrul al treilea al expresiei (30.11) devine în acest caz :

$$(30.17) \quad \frac{i\rho}{2} \int_C (u_r^2 + v_r^2) d\bar{z} = \frac{i\rho}{2} \int_C \frac{dF}{dz} dF - \rho\omega \int_C \bar{z} d\bar{F} - \frac{i\rho}{2} \omega^2 \int_C (\bar{z})^2 dz.$$

A treia și a patra integrală au o semnificație simplă; dacă se notează cu A aria secțiunii delimitate de contur, vom avea respectiv:

$$(30.18) \quad i \int_C x d\bar{z} = \int_C x dy = A, \quad i \int_C y d\bar{z} = i \int_C y dx = -iA$$

și prin urmare

$$(30.19) \quad i\rho \left\{ \left(\frac{du_0}{dt} - \omega v_0 \right) \int_C x d\bar{z} + \left(\frac{dv_0}{dt} + \omega u_0 \right) \int_C y d\bar{z} \right\} = \\ = \rho A \left(\frac{dw_0}{dt} - i\omega w_0 \right),$$

unde

$$(30.20) \quad w_0 = u_0 - iv_0.$$

Notând cu x_g și y_g coordonatele centrului de greutate al ariei conturului, vom putea scrie deasemenea, pentru a cincea integrală

$$(30.21) \quad -\frac{i\rho}{2} \omega^2 \int_C (z\bar{z}) d\bar{z} = -\rho\omega^2 A \bar{z}_g.$$

Pentru ultima integrală vom observa mai întâi că avem pe contur, după (30.12):

$$(30.22) \quad d\Psi = d\Psi_r = v_r dx - u_r dy = \frac{\partial\Phi}{\partial y} dx - \omega x dx - \frac{\partial\Phi}{\partial x} dy - \\ - \omega y dy = -d\Psi - \frac{\omega}{2} d(z\bar{z}) = 0$$

sau încă

$$(30.23) \quad \left[\Psi + \frac{\omega}{2}(z\bar{z}) + k(t) \right]_C \equiv 0,$$

unde $k(t)$ este o constantă care variază numai cu timpul. Se poate scrie deci:

$$(30.24) \quad (\Phi)_C = \left\{ \Phi \pm i \left[\Psi + \frac{\omega}{2}(z\bar{z}) + k(t) \right] \right\}_C = F(z) + \frac{i\omega}{2}(z\bar{z}) + \\ + ik(t) = \bar{F}(z) - \frac{i\omega}{2}(z\bar{z}) - ik(t),$$

de unde rezultă:

$$(30.25) \quad i\rho \int_C \frac{\partial\Phi}{\partial t} d\bar{z} = i\rho \int_C \frac{\partial\bar{F}}{\partial t} d\bar{z} - i\rho \frac{d\omega}{dt} A \bar{z}_g.$$

Ultimul termen al expresiei (30.17), devine succesiv:

$$(30.26) \quad -\frac{i\rho}{2} \omega^2 \int_C (\bar{z})^2 dz = 2i \int_C (\bar{z})^2 dy = 2\rho\omega^2 A \bar{z}_g$$

și rezultanta generală ia forma următoare:

$$(30.27) \quad Q = R - iP = \frac{i\rho}{2} \int_C \frac{dF}{dz} dF - \rho\omega \int_C \bar{z} d\bar{F} + i\rho \int_C \frac{\partial\bar{F}}{\partial t} d\bar{z} + \\ + \rho A \left(\frac{dw_0}{dt} - i\omega w_0 \right) + \rho A \bar{z}_g \left(\omega^2 - i \frac{d\omega}{dt} \right),$$

pe care am stabilit-o de altfel într-o lucrare anterioară [2].

30.3. Moment resultant

Raportându-ne la fig. 4.6 și la expresia (4.66), se poate scrie momentul elementar

$$(30.28) \quad dM = p(x dx + y dy) = \text{partea reală } (pz d\bar{z}) = \text{p. r. } (iz dQ).$$

Să observăm mai întâi că avem următoarele relații succesive:

$$(30.29) \quad \begin{cases} \text{p. r. } \int_C (ax + by) z d\bar{z} = \rho A (ay_g - bx_g), & \text{p. r. } \int_C (\bar{z})^2 z dz = 0, \\ \text{p. r. } i \int_C z \bar{z} d\bar{F} = - \int_C z \bar{z} d\Psi = \frac{\omega}{2} \int_C z \bar{z} d(z\bar{z}) = 0, \\ \text{p. r. } \int_C (z\bar{z}) z d\bar{z} = 0, & \text{p. r. } \int_C z d\bar{z} = 0. \end{cases}$$

Ținând seama mai departe de (30.11) și (30.17), expresia momentului devine în fine [2]:

$$(30.30) \quad M = \text{p. r. } i \int_C z dR = -\text{p. r. } \left[\frac{\rho}{2} \int_C z \frac{dF}{dz} dF + \rho \int_C \frac{\partial\Phi}{\partial t} z d\bar{z} \right] + \\ + \rho A x_g \left(\frac{dv_0}{dt} + \omega u_0 \right) - \rho A y_g \left(\frac{du_0}{dt} - \omega v_0 \right).$$

30.4. Forțele ce se exercită pe o aripă subțire

Am stabilit în paragraful precedent expresia potențialului în jurul unei aripi în mișcare variată. Pentru a aplica formula (30.27) a rezultantei, este preferabil să considerăm separat potențialul datorit translației rectilinii și rotației, pe de o parte, și a stratului tuorier, pe de altă parte, aducând bine înțeles aproximațiile necesare pe care urmică această separație.

Să punem deci mai întâi, ținând seama de (29.36) și (29.54), expresia potențialului fără influența stratului de vârtejuri:

$$(30.31) \quad F(\zeta) = (V+iv)\zeta e^{i\alpha} + (V-iv) \frac{a^2}{\zeta} e^{-i\alpha} - i\omega \frac{a^4}{\zeta^2} - \frac{i\Gamma}{2\pi} \ln \zeta$$

și să aplicăm formula rezultantei acestei expresii, observând mai întâi că pentru placa subțire aria A este nulă.

Pe de altă parte, integralele (30.27) vor fi efectuate dealungul conturului circular K în planul ζ ; expresia rezultantei se reduce deci la următorii trei termeni:

$$(30.32) \quad Q = R - iP = \frac{i\rho}{2} \int_K \frac{dF}{d\zeta} \cdot \frac{d\zeta}{dz} dF - \rho\omega \int_K \bar{z}(\zeta) d\bar{F} + i\rho \int_K \frac{\partial \bar{F}}{\partial t} \cdot \frac{d\bar{z}}{d\bar{\zeta}} d\bar{\zeta}$$

Primul termen ne dă foarte simplu

$$(30.33) \quad Q_1 = \frac{i\rho}{2} \int_K \frac{dF}{d\zeta} \cdot \frac{d\zeta}{dz} dF = i\rho V\Gamma - \rho v\Gamma.$$

Pentru al doilea termen, vom observa întâi că transformarea profilului subțire în cerc va fi dată de:

$$(30.34) \quad z + \frac{c}{2} = \zeta + \frac{c^2}{16} \cdot \frac{1}{\zeta} = \zeta + \frac{c^2}{16} \cdot \frac{\bar{\zeta}}{\zeta\bar{\zeta}},$$

considerând, bine înțeles, că vârful profilului este în origine; rezultă că pentru punctele cercului vom avea

$$(30.35) \quad z + \frac{c}{2} = \bar{z} + \frac{c}{2} = \zeta + \bar{\zeta} = \text{p. r. } 2\bar{\zeta}.$$

În cazul unui profil arcuit, a cărui axă de portanță nulă face unghiul τ cu coarda, se poate asimila acest profil cu un segment rectiliniu rotit de un unghi τ și funcția de transformare devine:

$$(30.36) \quad z + \frac{c}{2} = \zeta e^{i\tau} + \frac{a^2}{\zeta} e^{-i\tau},$$

sau respectiv, pentru punctele de pe cerc,

$$(30.37) \quad z + \frac{c}{2} = \bar{z} + \frac{c}{2} = \zeta e^{i\tau} + \bar{\zeta} e^{-i\tau} = \text{p. r. } 2\bar{\zeta} e^{-i\tau}.$$

Ținând seama de aceste relații, vom putea scrie mai departe,

$$(30.38) \quad Q_2 = -\rho\omega \int_K \bar{z} d\bar{F} = \\ = \text{p. r.} \left\{ -\rho\omega \int_K \left[(V-iv)e^{-i\alpha} - \frac{c^2}{16} \cdot \frac{V+iv}{\zeta^2} e^{i\alpha} - 2i\omega \left(\frac{c}{4}\right)^4 \frac{1}{\zeta^3} + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{i\Gamma}{2\pi} \cdot \frac{1}{\zeta} \right] \left(2\bar{\zeta} e^{-i\tau} - \frac{c}{2} \right) d\bar{\zeta} \right\}$$

și prin urmare, punând $\sin \alpha \approx \alpha$ și $\cos \alpha \approx 1$, se găsește:

$$(30.39) \quad Q_2 = \rho\omega \left[\frac{\pi}{4} c^2 (V\alpha - V\tau + v) + \frac{c}{2} \Gamma \right].$$

Pentru cel de al treilea termen, observând că integrala se efectuează începând de la $\theta = 0$, vom avea

$$(30.40) \quad Q_3 = i\rho \frac{\partial}{\partial t} \int_C \bar{F} d\bar{z} = \\ = \text{p. im.} 2i\rho \frac{\partial}{\partial t} \int_K \left[(V-iv)\bar{\zeta} e^{-i\alpha} + (V+iv) \frac{c^2}{16} \cdot \frac{e^{i\alpha}}{\zeta} + \right. \\ \left. + i\omega \frac{a^2}{\zeta^2} + \frac{i\Gamma}{2\pi} \ln \bar{\zeta} \right] e^{-i\tau} d\bar{\zeta} = i\rho \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{\pi}{4} c^2 (V\alpha - V\tau + v) + \frac{c}{2} \Gamma \right].$$

S'ar fi putut obține ușor această expresie, din rezultatul precedent, dacă remarcăm că, în cazul nostru special, vom avea:

$$(30.41) \quad \int_C \bar{F} d\bar{z} = \left(\bar{z} \bar{F} \right)_{\bar{z}=0} - \int_C \bar{z} d\bar{F} = - \int_C \bar{z} d\bar{F}.$$

Să revenim la mișcarea datorită stratului turbionar și să considerăm mai întâi un singur vârtej real în exteriorul cercului (29.58); cele două vârtejuri imagine în interiorul cercului, fiind egale și de semne contrarii, curentul general $V+iv$ n'are niciun efect. Acțiunea asupra acestor două vârtejuri, dirijată după axa Ox , datorită vitezei induse de vârtejul real exterior, ar putea fi dedusă în felul următor.

Asupra vârtejului imagine central, de intensitate totală $-\Gamma$, acțiunea este anulată de cea corespunzătoare vârtejului real de intensitate totală $+\Gamma$.

Pe o fâșie elementară γdr , situată pe rază, la o distanță r de centru, vom avea deasemenea (fig. 29.3),

$$(30.42) \quad dq_1 = \frac{\rho\gamma dr}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\gamma d\xi}{\sigma + a - r},$$

iar pe toată fășia de vârtejuri, distribuită pe întreaga rază,

$$(30.43) \quad q_1 = \frac{\rho}{2\pi} \int_0^a \gamma dr \int_0^x \frac{\gamma d\xi}{\sigma + a - r}$$

Această integrală este destul de complicată, rezultatul este pe de altă parte de al doilea ordin; de aceea, vom considera un rezultat mijlociu, repartizând o jumătate din circulație în centrul cercului, iar cealaltă jumătate în Ω . Această ipoteză este în special valabilă pentru mișcarea oscilatorie*).

Rezultă deci, ținând seama de (29.11) și (29.12):

$$(30.44) \quad q_1 = \frac{\rho\Gamma}{4\pi} \left[\int_0^x \frac{\gamma d\xi}{\sigma + a} + \int_0^x \frac{\gamma d\xi}{\sigma} \right] = -\frac{\rho}{2\pi} \cdot \frac{\Gamma^2}{c} + \frac{\rho}{2\pi} \cdot \frac{\Gamma}{c} \left[\int_0^x \gamma \sqrt{\frac{c+\xi}{\xi}} d\xi + \frac{4}{c} \int_0^x \gamma \left(\xi - \sqrt{c\xi + \xi^2} \right) d\xi \right]$$

Această expresie reprezintă rezultatul primei integrale (30.32). Aceste integrale sunt destul de complicate, însă pentru câteva probleme speciale, ele vor fi efectuate cu ajutorul funcțiilor BESSEL.

Să trecem acum la ceilalți doi termeni ai rezultantei (30.32) și să observăm în același timp că circulația în jurul cercului este nulă, cele două vârtejuri-imagini în interior fiind egale și de semne contrarii. Rezultă că potențialul este uniform și că se va putea pune în consecință, ținând seama de (30.41) și notând cu F' noul potențial,

$$(30.45) \quad -\omega \rho \int_C \bar{z} d\bar{F}' + i\rho \frac{\partial}{\partial t} \int_C \bar{F}' dz = -\rho \left(\omega + i \frac{\partial}{\partial t} \right)_K \int_K \bar{z}(\zeta) dF'$$

Să aplicăm această formulă potențialului unui singur vârtej real exterior (29.58; fig. 29.3); vom pune, pentru aceasta, $d(\Delta F')$ sub forma

$$(30.46) \quad d(\Delta F') = \frac{i\Delta\Gamma}{2\pi} \left(\frac{1}{\zeta} + \frac{1}{\zeta - \sigma - a} - \frac{1}{\zeta - \sigma_0} \right) = -\frac{i\Delta\Gamma}{2\pi} \left[\frac{1}{\sigma + a} + \frac{\zeta}{(\sigma + a)^2} + \dots + \frac{\sigma_0}{\zeta^2} + \dots \right]$$

*) În cazul unei mișcări rectilinii accelerate, la început, se poate repartiza 2/3 din Γ în punctul Ω și 1/3 în centru; din contra, dacă aripa a parcurs o distanță apreciabilă, mai mare decât coarda sa proprie, eroarea ar fi mai mică dacă se consideră 2/3 din Γ în centru și 1/3 în Ω .

și, neglijând curbura profilului ($\tau \approx 0$), se găsește ușor:

$$(30.47) \quad \Delta q_2 = -\rho \left(\omega + i \frac{\partial}{\partial t} \right) \int_C \bar{z} d(\Delta F') = i\rho \frac{\Delta\Gamma}{2\pi} \left(\omega + i \frac{\partial}{\partial t} \right) \int_C \left(\frac{1}{\sigma + a} + \frac{\bar{\zeta}}{(\sigma + a)^2} + \dots + \frac{\sigma_0}{\bar{\zeta}^2} \right) \left(2\bar{\zeta} - \frac{c}{2} \right) d\bar{\zeta} = 2\rho\omega\sigma_0 \Delta F' + 2i\rho\sigma_0 \frac{\partial}{\partial t} \Delta\Gamma$$

Înlocuind mai departe σ_0 prin valoarea sa (29.12), $\Delta\Gamma$ prin $\gamma d\xi$ și ω prin $\frac{d\alpha}{dt}$, se obține:

$$(30.48) \quad q_2 = \rho \left(\frac{d\alpha}{dt} + i \frac{\partial}{\partial t} \right) \int_0^x \gamma \left(\frac{c}{2} + \xi - \sqrt{c\xi + \xi^2} \right) d\xi = \rho \left(\omega + i \frac{\partial}{\partial t} \right) \times \left[-\frac{c}{2} \Gamma + \int_0^x \gamma (\xi - \sqrt{c\xi + \xi^2}) d\xi \right]$$

Rezultanta aerodinamică, în cazul general, va avea în cele din urmă expresia următoare:

$$(30.49) \quad Q = Q_1 + Q_2 + Q_3 + q_1 + q_2 = i\rho\Gamma V - \rho v\Gamma - \frac{\rho}{2\pi} \cdot \frac{\Gamma^2}{c} + \frac{\rho\Gamma}{c} \left[\int_0^x \gamma \sqrt{\frac{c+\xi}{\xi}} d\xi + \frac{4}{c} \int_0^x \gamma (\xi - \sqrt{c\xi + \xi^2}) d\xi + \rho \left(\frac{d\alpha}{dt} + i \frac{\partial}{\partial t} \right) \left[\frac{\pi}{4} c^2 (V\alpha - V\tau + v) + \int_0^x \gamma (\xi - \sqrt{c\xi + \xi^2}) d\xi \right] \right]$$

În ultima din aceste integrale intensitatea γ trebuie să fie derivată în raport cu timpul. Dacă γ este luată în raport cu axele legate de aripă, valoarea sa va varia cu ξ și t . În realitate, față de un sistem de axe fixe, γ este constantă. Rezultă că într'un punct ξ ($d\xi = V dt$), vom avea

$$(30.50) \quad \frac{d\gamma}{dt} = \frac{\partial\gamma}{\partial t} + \frac{\partial\gamma}{\partial\xi} V = 0. *)$$

*) Această relație poate fi dedusă de altfel din ecuațiile generale ale mișcării (1.18). Într-adevăr, pentru mișcarea plană ($w = 0$), aceste ecuații, se reduc la următoarele expresii, unde γ reprezintă proiecția vârtejurii pe axa Oz , normală la planul mișcării:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{2} V^2 \right) - v\gamma = -\frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial x}, \quad \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{2} V^2 \right) + u\gamma = -\frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial y}$$

Derivând prima ecuație în raport cu y , iar a doua în raport cu x și apoi scăzând, se găsește relația (30.50):

$$\frac{\partial\gamma}{\partial t} + u \frac{\partial\gamma}{\partial x} + v \frac{\partial\gamma}{\partial y} \approx \frac{\partial\gamma}{\partial t} + v \frac{\partial\gamma}{\partial x} = 0$$

punând, bine înțeles, $u \approx V$.

Din această expresie se scoate valoarea derivatei $\frac{\partial \gamma}{\partial t}$ care se introduce apoi în integrala menționată; integrând după aceea prin părți, se obține succesiv:

$$(30.51) \quad \int_0^x \frac{\partial \gamma}{\partial t} (\xi - \sqrt{c\xi + \xi^2}) d\xi = -V \int_0^x \frac{\partial \gamma}{\partial \xi} (\xi - \sqrt{c\xi + \xi^2}) d\xi = \\ = V \int_0^x \gamma \left(1 - \frac{\xi + \frac{c}{2}}{\sqrt{c\xi + \xi^2}} \right) d\xi = -V\Gamma - V \int_0^x \gamma \frac{\xi + \frac{c}{2}}{\sqrt{c\xi + \xi^2}} d\xi.$$

Însă se mai poate scrie încă, ținând seama de (29.18),

$$(30.52) \quad \int_0^x \gamma \frac{\xi + \frac{c}{2}}{\sqrt{c\xi + \xi^2}} d\xi = -\frac{c}{2} \int_0^x \gamma \frac{d\xi}{\sqrt{c\xi + \xi^2}} + \int_0^x \gamma \sqrt{\frac{c + \xi}{\xi}} d\xi = \\ = -\frac{c}{2} \int_0^x \gamma \frac{d\xi}{\sqrt{c\xi + \xi^2}} - \pi c (V\alpha + v) - \frac{\pi}{4} c^2 \frac{d\alpha}{dt}$$

și introducând aceste relații în expresia rezultantei, se găsește în cele din urmă pentru portanță și rezistență, respectiv:

$$(30.53) \quad \left\{ \begin{aligned} -P &= \rho\pi c (V^2\alpha + Vv) + \frac{\pi}{2} \rho c^2 V \frac{d\alpha}{dt} + \frac{\pi}{4} \rho c^2 \left[(\alpha - \tau) \frac{dV}{dt} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{dv}{dt} \right] + \rho \frac{c}{2} V \int_0^x \frac{\gamma d\xi}{\sqrt{c\xi + \xi^2}}, \\ R &= -\rho v\Gamma - \frac{\rho}{2\pi} \frac{\Gamma^2}{c} + \rho \frac{d\alpha}{dt} \left[\frac{\pi}{4} c^2 (V\alpha - V\tau + v) + \int_0^x \gamma (\xi - \right. \\ &\quad \left. - \sqrt{c\xi + \xi^2}) d\xi \right] + \frac{\rho}{2\pi} \frac{\Gamma}{c} \left[\int_0^x \gamma \sqrt{\frac{c + \xi}{\xi}} d\xi + \right. \\ &\quad \left. + \frac{4}{c} \int_0^x \gamma (\xi - \sqrt{c\xi + \xi^2}) d\xi \right]. \end{aligned} \right.$$

Semnul minus care afectează portanța provine din faptul că sistemul de axe este inversat (vezi fig. 29.3).

Limitându-ne numai la portanță, să aplicăm prima formulă (30.53) la următoarele două cazuri: 1) mișcarea rectilinie accelerată și 2) mișcarea oscilatorie cu viteză constantă.

1) Pentru mișcarea rectilinie accelerată, luând semnul pozitiv, expresia portanței se reduce la

$$(30.54) \quad P = \rho\pi c V^2\alpha + \frac{\pi}{4} \rho c^2 (\alpha - \tau) \frac{dV}{dt} + \rho \frac{c}{2} V \int_0^x \frac{\gamma d\xi}{\sqrt{c\xi + \xi^2}},$$

care admite o soluție simplă pentru prima perioadă a mișcării, când deplasarea x a aripii este mică față de coardă. Într'adevăr, în acest caz ($\xi < x < c$), se poate scrie, aproximativ,

$$(30.55) \quad c \int_0^x \frac{\gamma d\xi}{\sqrt{c\xi + \xi^2}} d\xi \approx \sqrt{c} \int_0^x \frac{\gamma d\xi}{\sqrt{\xi}}.$$

Pe de altă parte relația (29.19) ne dă:

$$(30.56) \quad -\pi c V\alpha = \int_0^x \gamma \sqrt{\frac{c + \xi}{\xi}} d\xi \approx \sqrt{c} \int_0^x \frac{\gamma d\xi}{\sqrt{\xi}}.$$

Înlocuind această ultimă relație în expresia (30.54), rezultă formula portanței:

$$(30.57) \quad P \approx \frac{\pi}{2} \rho c V^2\alpha + \frac{\pi}{4} \rho c^2 (\alpha - \tau) \frac{dV}{dt}.$$

Se constată astfel că, în primele momente, forța datorită presiunii dinamice are drept valoare jumătate din cea corespunzătoare mișcării permanente.

2) În cazul oscilațiilor armonice simple, se poate scrie deasemenea pentru portanță:

$$(30.58) \quad P = \rho\pi c (V^2\alpha + Vv) + \frac{\pi}{4} \rho c^2 \left(2V \frac{d\alpha}{dt} + \frac{dv}{dt} \right) + \\ + \rho \frac{c}{2} V \int_0^x \frac{\gamma d\xi}{\sqrt{c\xi + \xi^2}}.$$

Să înlocuim γ prin expresia sa (29.26) și să punem ea mai înainte $\xi_1 = \frac{\xi}{c} = \frac{1}{2} (t - 1)$; în acest caz se poate calcula integrala precedentă cu ajutorul funcțiilor BESSEL. Într'adevăr, efectuând calculele, intervin doi coeficienți, κ_1 și σ_1 , care au fost dați sub forma integralei de ordinul zero găsită anterior (29.33):

$$(30.59) \quad \kappa_1 + i\sigma_1 = \frac{e^{-i\frac{\lambda}{2}}}{2} \int_1^\infty \frac{e^{i\frac{\lambda}{2}t} dt}{\sqrt{t^2 - 1}} = \frac{1}{2} e^{-i\frac{\lambda}{2}} K_0 \left(-i \frac{\lambda}{2} \right).$$

Aceste valori, prin intermediul câtorva transformări, pot fi scoase direct din diversele tabele speciale. Dăm mai jos valorile lui κ_1 și σ_1 .

Tabela 30.I.

$\eta_1 = 0$	0,2	0,4	0,6	0,8	1
$\kappa_1 = \infty$	2,554	1,973	1,665	1,464	1,320
$\sigma_1 = 1,571$	1,318	1,187	1,092	1,019	0,959

Dacă considerăm cazul simplu al oscilațiilor verticale,

$$(30.60) \quad v = v_0 \sin \mu t,$$

presupunând deci că viteza de rotație este nulă $\left(\omega = \frac{d\alpha}{dt} = 0\right)$ și punând $\Gamma_0 = G_0 = \pi c V \alpha$, vom avea

$$(30.61) \quad \Gamma = \pi c V \alpha + \Gamma_1 \sin \mu t + \Gamma_2 \cos \mu t,$$

unde Γ_1 și Γ_2 vor fi dați de relațiile (29.32). Rezultă

$$(30.61 \text{ bis}) \quad \gamma = -\frac{\lambda}{c} \left[(\Gamma_1 \sin \mu t + \Gamma_2 \cos \mu t) \sin \lambda \xi_1 + (\Gamma_1 \cos \mu t - \Gamma_2 \sin \mu t) \cos \lambda \xi_1 \right],$$

care, introdusă în integrala din expresia (30.58), ne dă în fine pentru portanță:

$$(30.62) \quad P = \pi \rho c V^2 \alpha + \frac{1}{2} \rho \mu c \left[\left(\frac{\pi c v_0}{\lambda} - \Gamma_1 \sigma_1 + \Gamma_2 \alpha_1 \right) \sin \mu t + \left(\frac{\pi c v_0}{2} - \Gamma_1 \alpha_1 - \Gamma_2 \sigma_1 \right) \cos \mu t \right].$$

30.4.1. Observații asupra rezistenței sau a forței propulsive. A doua formulă (30.53) reprezintă rezistența la înaintare. Asimilând însă profilul cu o placă rectilinie subțire, problema devine destul de complicată și delicată în cece privește singularitățile pe care le implică această ipoteză. Ni se pare totuși că nu este cazul să se ia în considerație forța de aspirație ce se exercită la bordul de atac, deoarece se poate presupune întotdeauna că acesta are o grosime oarecare și este în același timp rotunjit.

Calculul rezistenței R nu prezintă o importanță apreciabilă decât în cazul mișcării oscilatorii. Într'adevăr, toți termenii sunt cunoscuți, în afară de integrala

$$(30.63) \quad \int_0^\infty \gamma \left(\xi - \sqrt{c\xi + \xi^2} \right) d\xi = c^2 \int_0^\infty \gamma \xi_1 d\xi_1 - c^2 \int_0^\infty \gamma \left(\sqrt{\xi_1 + \xi_1^2} \right) d\xi_1,$$

unde $\xi_1 = \frac{\xi}{c}$. Am văzut că γ conține $\sin \lambda \xi_1$ și $\cos \lambda \xi_1$ (29.26); în acest caz,

în rezultatul primei integrale din al doilea membru, se găsesc coeficienții α_2 și σ_2 , care vor fi dați de o integrală de tip cunoscut:

$$(30.64) \quad \alpha_2 + i\sigma_2 = \int_0^\infty e^{i\lambda \xi_1} \xi_1 d\xi_1.$$

În cea de a doua integrală, se găsesc coeficienții α_3 și σ_3 dați de integralele de tip BESSEL, care se obțin punând $\xi_1 = \frac{1}{2}(t-1)$:

$$(30.65) \quad \int_0^\infty e^{i\lambda \xi_1} \sqrt{\xi_1 + \xi_1^2} d\xi_1 = e^{-i\frac{\lambda}{2}} \int_1^\infty e^{i\frac{\lambda}{2}t} \left(\frac{-1}{\sqrt{t^2-1}} + \frac{t}{\sqrt{t^2-1}} \right) dt = e^{-i\frac{\lambda}{2}} \left[-K_0 \left(-\frac{i\lambda}{2} \right) + K_2 \left(-\frac{i\lambda}{2} \right) \right],$$

unde K_0 și K_2 au aceleași semnificații ca mai înainte (29.33).

Desvoltările calculului devin mai departe destul de laborioase și ne vom mulțumi numai cu aceste câteva indicații, lăsând cititorului grija de a găsi soluția completă a problemei, într'un caz concret oarecare.

BIBLIOGRAFIA CAP. VII.

- 1) BIRNBAUM W.: Zeit. f. angew. Math. u. Mech. 1923, pag. 290 și 1924, pag. 278.
- 2) CARAFOLI E.: Aérodynamique des ailes d'avion, Paris, Librairie Chiron, Editeur, 1928.
- 3) CARAFOLI E.: Sur le mouvement général autour d'un contour, C.R.A.S. de Paris, tome 186, pag. 1196. 30 Aprilie 1928.
- 4) CEAPLĂGHIN S.A.: Despre influența curentului de aer plan-paralel asupra unei aripi cilindrice care se mișcă prin aceasta. Culegere de opere, vol. 3, 1935.
- 5) GLAUERT H.: Tech. Rep. Aeron. Res. Comitee (Teddington) RSM. Nr. 1215, 1242, anul 1929 și Vorträge a.d. Gabciete der Hydro-u. Aerodynamik, Aachen 1929, pag. 88.
- 6) GOLUBEV V.V.: Tracțiunea aripii batante și problema generală a tracțiunii și rezistenței. Culegere totală A.N. S.S.S.R., 14-17, X, 1944 Edit. A.N. 1945.
- 7) GOLUBEV V.V.: Asupra teoriei aripii batante, Edit. A.N. S.S.S.R. OTN. Nr. 5 1946.
- 8) KÁRMÁN and BURGERS: Aerodynamik Théory vol. II, Durand Editor Julius Springer, Berlin 1935.
- 9) NECRASOV A.I.: Teoria aripii în curent nestaționar, A.N. S.S.S.R. 1947.
- 10) PRANDTL I.: Über die Entstehung von Wirbeln in einer idealen Flüssigkeit, Vorträge zur Hydro-und-Aerodynamik, Berlin, 1924.
- 11) SEDOV L.I.: Asupra teoriei mișcărilor nepermanente ale aripii și ale fluidului, Lucrările TAGHI, Nr. 229, 1935.
- 12) SEDOV L.L.: Teoria scurgerilor plane ale fluidului perfect. GTTI. 1094.
- 13) WAGNER H.: Zeit. f. angew. Math. u. Mech. 1925, pag. 17 Nr. 5.

CAPITOLUL VIII

BIPLANE DE ANVERGURĂ FINITĂ

Problema biplanului de anvergură finită prezintă dificultăți dintr'un dublu punct de vedere : influența reciprocă a celor două aripi în ceea ce privește vârtejurile legate și influența vârtejurilor libere ale unei aripi asupra celeilalte.

Am văzut cât de grea este problema chiar pentru cazul biplanului de anvergură infinită ; aceste dificultăți sunt considerabil mărite când este vorba să se țină seama de extremități. Dacă se adaugă în plus acțiunea vârtejurilor libere, ne dăm seama că problema devine aproape insolubilă. De aceea, sunt necesare anumite simplificări pentru a se obține soluții aproximative, suficiente pentru aplicații : tocmai acest lucru ne propunem să facem în paragrafele ce urmează.

31. FORMULELE FUNDAMENTALE ALE BIPLANELOR

Scurgerea în jurul fiecărei aripi a biplanului este compusă din mișcarea în jurul aripii izolate, astfel cum am definit-o deja în paragrafele precedente privitoare la aripile monoplane, și din influența reciprocă între aripi, care se traduce printr'un câmp de viteze induse de o aripă asupra celeilalte. Problema constă, prin urmare, în a determina condițiile acestei influențe reciproce și a deduce efectele ei.

31.1. Acțiunea reciprocă a elementelor unui biplan

Ca și pentru monoplan, vom asimila fiecare aripă a biplanului cu o linie portantă și fie ds_1 și ds_2 două elemente de aripă aparținând respectiv aripii superioare (1) și celei inferioare (2). În ipoteza unei linii portante drepte, normală la viteza generală a curentului, putem considera două cazuri :

- a) cazul aripiilor situate în același plan normal pe viteză (biplan drept) și
- b) cazul aripiilor situate în două planuri diferite (biplan decalat).

31.1.1. Biplan drept. Cele două elemente ds_1 și ds_2 sunt situate în același plan (fig. 31.1). Vârtejurile libere ale fiecărei aripi sunt de asemenea normale pe același plan. Fie w_{12} componenta vitezei induse în dreptul elementului ds_1 , după normala n_1 la acest element, datorită vârtejurilor libere ale aripei

inferioare (2). Dacă Γ_1 este circulația în jurul elementului ds_1 , rezistența indusă a aripii influențate (1), datorită aripii (2), este dată de integrala

$$(31.1) \quad R_{12} = \rho \int_{(1)} w_{12} \Gamma_1 ds_1.$$

În același fel, rezistența indusă a aripii (2), datorită influenței aripii (1), va fi de asemenea :

$$(31.2) \quad R_{21} = \rho \int_{(2)} w_{21} \Gamma_2 ds_2.$$

Este ușor de văzut mai departe, dacă se notează cu r distanța dintre cele două elemente considerate, că vom avea succesiv

$$(31.3) \quad dw_{12} = -\frac{\sin \beta_1}{4\pi r} \cdot \frac{d\Gamma_2}{ds_2} ds_2, \quad w_{12} = -\frac{1}{4\pi} \int_{(2)} \frac{\sin \beta_1}{r} \cdot \frac{d\Gamma_2}{ds_2} ds_2,$$

sau încă, integrând prin părți și observând că la cele două extremități ale aripii Γ_2 este nulă,

$$(31.4) \quad w_{12} = \frac{1}{4\pi} \int_{(2)} \Gamma_2 \frac{d}{ds_2} \left(\frac{\sin \beta_1}{r} \right) ds_2,$$

rezultă formula rezistenței induse :

$$(31.5) \quad R_{12} = \frac{\rho}{4\pi} \int_{(1)} \int_{(2)} \Gamma_1 \Gamma_2 \frac{d}{ds_2} \left(\frac{\sin \beta_1}{r} \right) ds_2 ds_1.$$

Însă se poate scrie

$$(31.6) \quad \begin{aligned} \frac{d}{ds_2} \left(\frac{\sin \beta_1}{r} \right) &= \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\sin \beta_1}{r} \right) \frac{dr}{ds_2} + \frac{\partial}{\partial \beta_1} \left(\frac{\sin \beta_1}{r} \right) \frac{d\beta_1}{ds_2} = \\ &= \frac{1}{r^2} \left(-\sin \beta_1 \frac{dr}{ds_2} + r \cos \beta_1 \frac{d\beta_1}{ds_2} \right) \end{aligned}$$

și observând mai departe că avem (fig. 31.1)

$$(31.7) \quad dr = ds_2 \sin \beta_2, \quad r d\beta_1 = ds_2 \cos \beta_2,$$

se obține relația următoare :

$$(31.8) \quad \frac{d}{ds_2} \left(\frac{\sin \beta_1}{r} \right) = \frac{\cos (\beta_1 + \beta_2)}{r^2}.$$

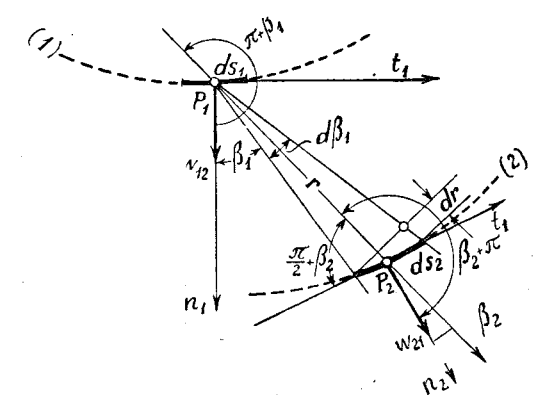


Fig. 31.1.

Inlocuind această relație în expresiile (31.4) și (31.5), vom găsi în cele din urmă

$$(31.9) \quad w_{12} = \frac{1}{4\pi} \int_{(2)} \frac{\Gamma_2 \cos(\beta_1 + \beta_2)}{r^2} ds_2$$

pentru viteza indusă și

$$(31.10) \quad R_{12} = \frac{\rho}{4\pi} \int_{(1)} \int_{(2)} \Gamma_1 \Gamma_2 \frac{\cos(\beta_1 + \beta_2)}{r^2} ds_1 ds_2$$

pentru rezistența indusă.

Pentru a calcula R_{21} , raza vectorie $r = \vec{P_1 P_2}$ trebuie luată în sens invers $\vec{P_2 P_1}$ (de la elementul inferior la elementul superior), adică trebuie înlocuit β_1 și β_2 prin $\pi + \beta_1$ și $\pi + \beta_2$ (fig. 31.1); se obține astfel rezultatul remarcabil găsit pentru prima oară de MUNK:

$$(31.11) \quad R_{12} = R_{21},$$

adică, rezistența indusă a planului (1) datorită influenței planului (2) este egală cu rezistența indusă a planului (2) datorită influenței planului (1).

În cazul unui biplan cu aripi paralele (fig. 31.2), avem

$$(31.12) \quad \beta_1 = \beta_2 = \beta, \quad h = r \cos \beta, \quad ds_1 = dy_1, \quad ds_2 = dy_2,$$

de unde rezultă o formulă mai simplă:

$$(31.13) \quad R_{12} = R_{21} = \frac{\rho}{4\pi h^2} \int_{(1)} \int_{(2)} \Gamma_1 \Gamma_2 \cos^2 \beta \cos 2\beta dy_1 dy_2.$$

31.1.2. Biplan decalat. Presupunem că aripile se găsesc pe două plane paralele diferite, situate la distanța a una de cealaltă; se spune că există un decalaj între aceste două aripi (fig. 31.3). Să luăm ca mai sus două elemente ds_1 și ds_2 aparținând respectiv aripii superioare și inferioare și fie R distanța între ele a cărei proiecție pe primul plan este r .

Unghiul dintre R și r , fie α , este dat de relația

$$(31.14) \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{a}{r}.$$

Este foarte ușor de văzut că în dreptul elementului ds_1 vârtejul liber $\frac{d\Gamma_2}{ds_2} ds_2$ induce o viteză a cărei componentă normală este egală cu

$$(31.15) \quad dw_{12} = -\frac{1 - \sin \alpha}{4\pi r} \cdot \frac{d\Gamma_2}{ds_2} ds_2,$$

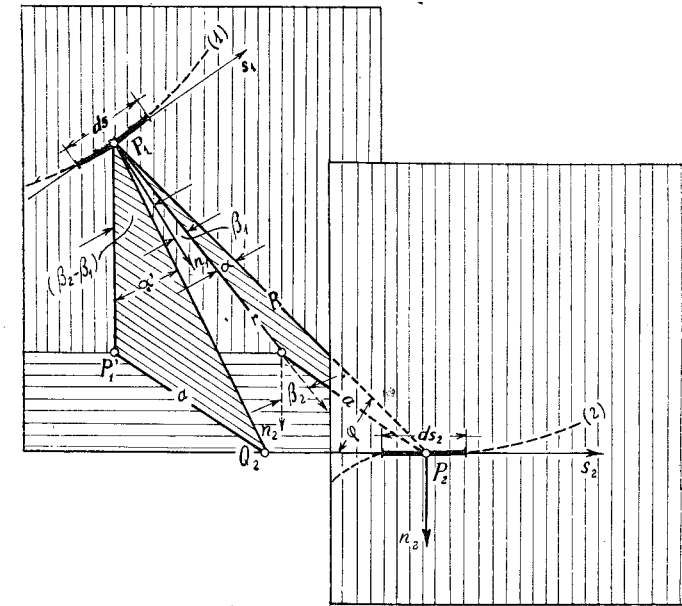


Fig. 31.3.

exact ca și pentru aripile nedecalate, dar multiplicată prin factorul $(1 - \sin \alpha)$. Vom găsi, astfel,

$$(31.16) \quad w_{12} = \frac{1}{4\pi} \int_{(2)} \Gamma_2 \frac{d}{ds_2} \left[(1 - \sin \alpha) \frac{\sin \beta_1}{r} \right] ds_2.$$

Se poate scrie mai departe

$$(31.17) \quad \begin{aligned} \frac{d}{ds_2} \left[(1 - \sin \alpha) \frac{\sin \beta_1}{r} \right] &= (1 - \sin \alpha) \frac{d}{ds_2} \left(\frac{\sin \beta_1}{r} \right) + \\ &+ \frac{\sin \beta_1}{r} \cdot \frac{d}{ds_2} (1 - \sin \alpha) = (1 - \sin \alpha) \frac{\cos(\beta_1 + \beta_2)}{r^2} - \\ &- \frac{\sin \beta_1}{r} \cdot \frac{d}{ds_2} (\sin \alpha). \end{aligned}$$

Pe de altă parte, ținând seama de relația (31.14),

$$(31.18) \quad \frac{d}{ds_2} (\sin \alpha) = \cos \alpha \frac{d\alpha}{ds_2} = \cos \alpha \frac{d\alpha}{dr} \cdot \frac{dr}{ds_2} = \\ = -\sin \beta_2 \frac{a}{r^2} \cos^3 \alpha = -\sin \beta_2 \frac{r}{R^2} \sin \alpha,$$

se obține :

$$(31.19) \quad \frac{d}{ds_2} \left[(1 - \sin \alpha) \frac{\sin \beta_1}{r} \right] = (1 - \sin \alpha) \frac{\cos (\beta_1 + \beta_2)}{r^2} + \\ + \sin \alpha \frac{\sin \beta_1 \sin \beta_2}{R^2}.$$

În cele din urmă vom putea scrie

$$(31.20) \quad w_{12} = \frac{1}{4\pi} \int_{(2)} \Gamma_2 \left[(1 - \sin \alpha) \frac{\cos (\beta_1 + \beta_2)}{r^2} + \right. \\ \left. + \sin \alpha \frac{\sin \beta_1 \sin \beta_2}{R^2} \right] ds_2$$

pentru viteza indusă și

$$(31.21) \quad R_{12} = \frac{\rho}{4\pi} \int_{(1)} \int_{(2)} \Gamma_1 \Gamma_2 \left[(1 - \sin \alpha) \frac{\cos (\beta_1 + \beta_2)}{r^2} + \right. \\ \left. + \sin \alpha \frac{\sin \beta_1 \sin \beta_2}{R^2} \right] ds_1 ds_2$$

pentru rezistența indusă.

Pentru aripa inferioară, vom pune, ca mai sus, $\pi + \beta_1$, $\pi + \beta_2$, $\pi + \alpha$, în loc de β_1 , β_2 și α ; de unde rezultă

$$(31.22) \quad R_{21} = \frac{\rho}{4\pi} \int_{(1)} \int_{(2)} \Gamma_1 \Gamma_2 \left[(1 + \sin \alpha) \frac{\cos (\beta_1 + \beta_2)}{r^2} - \right. \\ \left. - \sin \alpha \frac{\sin \beta_1 \sin \beta_2}{R^2} \right] ds_1 ds_2$$

și prin urmare rezistența indusă totală,

$$(31.23) \quad R_i = R_{12} + R_{21} = 2 \frac{\rho}{4\pi} \int_{(1)} \int_{(2)} \Gamma_1 \Gamma_2 \frac{\cos (\beta_1 + \beta_2)}{r^2} ds_1 ds_2,$$

este independentă de decalaj. Acest rezultat conduce la concluzia următoare, datorită lui MUNK :

Rezistența indusă totală rămâne constantă dacă deplasăm, în sensul vitezei, o aripă sau ambele deodată, fără a schimba circulațiile Γ_1 și Γ_2 , ceea ce putem face variind convenabil unghiurile de incidență. Această teoremă este valabilă și pentru un element de aripă oarecare.

Astfel, prin urmare, pentru a calcula rezistența totală a unui biplan decalat se pot considera cele două aripi ale biplanului în același plan normal la viteza generală a curentului, exact ca și pentru biplanul drept.

31.1.3. Influența vârtejurilor legate. Pentru a introduce acțiunea reciprocă a vârtejurilor legate, să considerăm după PRANDTL, două tuburi de vârtej infinit de subțiri, de intensitate Γ_1 și Γ_2 , care vor înlocui aripile (se consideră deci două linii portante) și să calculăm viteza elementară pe care elementul $\Gamma_2 ds_2$ a tubului de vârtej o induce în dreptul lui ds_1 . Aplicând formula lui BIOT-SAVART, se găsește că viteza este în planul vertical $P_1 Q_2 P'_1$, dirijată după normala la $P_1 Q_2$ (fig. 31.3) și egală cu

$$(31.24) \quad \frac{\Gamma_2 \cdot ds_2 \sin \varphi}{4\pi R^2}.$$

Această vitesă va avea drept componentă după $P_1 P_1$

$$(31.25) \quad \frac{\Gamma_2 \cdot ds_2 \sin \varphi}{4\pi R^2} \sin \alpha'$$

și după normala la ds_1 , singura componentă care ne interesează de altfel,

$$(31.26) \quad dw'_{12} = \frac{\Gamma_2}{4\pi} \cdot \frac{ds_2}{R^2} \sin \varphi \sin \alpha' \cos (\beta_2 - \beta_1).$$

Observând mai departe că avem

$$(31.27) \quad R \sin \varphi \sin \alpha' = R \sin \alpha = a,$$

se găsește

$$(31.28) \quad dw'_{12} = - \frac{\Gamma_2}{4\pi} \cdot \frac{ds_2}{R^2} \sin \alpha \cos (\beta_1 - \beta_2),$$

de unde rezultă viteza indusă totală datorită vârtejurilor legate ale aripii (2) :

$$(31.29) \quad w'_2 = - \frac{1}{4\pi} \int_{(2)} \Gamma_2 \frac{\sin \alpha \cos (\beta_1 - \beta_2)}{R^2} ds_2$$

precum și rezistența indusă corespunzătoare,

$$(31.30) \quad R'_{12} = - \frac{\rho}{4\pi} \int_{(1)} \int_{(2)} \Gamma_1 \Gamma_2 \frac{\sin \alpha \cos (\beta_1 - \beta_2)}{R^2} ds_1 ds_2.$$

Să adăugăm (31.29) și (31.30) respectiv la expresiile vitezei induse, (31.20) și a rezistenței induse (31.21); vom obține în cele din urmă acțiunea totală a aripii (2) asupra aripii (1):

$$(31.31) \begin{cases} w_{12} = \frac{1}{4\pi} \int_{(2)} \Gamma_2 \left[(1 - \sin \alpha) \frac{\cos(\beta_1 + \beta_2)}{r^2} - \frac{\sin \alpha \cos \beta_1 \cos \beta_2}{R^2} \right] ds_2, \\ R_{12}^* = \frac{\rho}{4\pi} \int_{(1)} \int_{(2)} \Gamma_1 \Gamma_2 \left[(1 - \sin \alpha) \frac{\cos(\beta_1 + \beta_2)}{r^2} - \frac{\sin \alpha \cos \beta_1 \cos \beta_2}{R^2} \right] ds_1 ds_2 \end{cases}$$

și alte două expresii analoge pentru aripa (2), unde α va fi înlocuit prin $\alpha + \pi$ (sau $\sin \alpha$ prin $-\sin \alpha$).

Formulele precedente ne permit să rezolvăm problema generală a biplanului; însă pentru cazurile practice, uzuale, dăm mai jos metode simple și practice pentru calculul rezistenței induse a biplanului.

31.2. Rezistența minimă a unui sistem portant

Am văzut mai sus că putem deplasa un element portant în direcția curentului general fără a modifica rezistența indusă totală, cu condiția, bine înțeles, de a conserva pentru elementul considerat aceeași circulație, ceea ce se poate face printr-o schimbare convenabilă a incidenței. În aceste condiții putem transporta sistemul portant în același plan, normal la viteza generală. Vitezele induse în acest plan vor avea ca valori jumătate din cele date de sistemul de vârtejuri libere într'un plan paralel cu primul, însă situat foarte departe în aval (teoretic la infinit). Să presupunem că urmele vârtejurilor libere pe acest plan dela infinit sunt compuse dintr'un număr de linii l_1, l_2, \dots, l_m , identice de altfel cu liniile portante ale sistemului portant transportat, printr'o translație paralelă cu viteza V_0 , în același plan (fig. 31.4).

Aceste urme reprezintă, fiecare, un strat turbionar format din vârtejurile libere; la infinit aval mișcarea datorită acestui strat este plană și derivă potențial de viteză φ .

Într'un punct oarecare intensitatea turbionară a stratului este egală cu

$$(31.32) \quad -\frac{d\Gamma}{ds} ds = (u_i - u_s) ds = \left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial s} - \frac{\partial \varphi_s}{\partial s} \right) ds,$$

unde φ_s și φ_i reprezintă valorile potențialului, pe fețele superioară și inferioară a acestui strat turbionar; rezultă numai decât:

$$(31.33) \quad \Gamma = \varphi_s - \varphi_i.$$

Portanța elementară dP , normală la elementul ds , va avea ca componente după Oy și Oz , respectiv

$$(31.34) \quad dP_y = -\rho V_0 \Gamma dz, \quad dP_z = \rho V_0 \Gamma dy,$$

de unde rezultă pentru toate liniile portante:

$$(31.35) \quad P_y = \rho V_0 \sum_1^m \int_{l_m} \Gamma dz = -\rho V_0 \sum_1^m \int_{s_m} \varphi dz, \quad P_z = \rho V_0 \sum_1^m \int_{l_m} \Gamma dy = \rho V_0 \sum_1^m \int_{s_m} \varphi dy,$$

Primele integrale sunt luate o singură dată dealungul liniilor l_1, \dots, l_m , celelalte pe ambele fețe ale aceluiași linii.

Energia cinetică a unei porțiuni egale cu unitatea de lungime va fi, după formula (1.47) aplicată la mișcarea plană,

$$(31.36) \quad E = -\frac{\rho}{2} \sum_1^m \int_{s_m} \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial n} ds = \frac{\rho}{2} \sum_1^m \int_{l_m} (\varphi_s - \varphi_i) \frac{\partial \varphi}{\partial n} ds = \frac{\rho}{2} \sum_1^m \int_{l_m} \Gamma u_n ds,$$

unde $u_n = \frac{\partial \varphi}{\partial n}$ este normală la s și dirijată în interiorul fluidului. Valoarea sa este de două ori mai mare decât valoarea vitezei din același punct situat însă în planul sistemului portant.

În acest caz, ultima integrală reprezintă rezistența totală indusă a sistemului, de unde rezultă că această rezistență este egală cu energia cinetică a unei porțiuni din fluid egală cu un metru de profunzime.

Se vede și sub această formă, după cum s'a văzut și în cazul monoplanului, că deplasarea unui element portant în direcția curentului nu influențează pe u_n și prin urmare nici energia cinetică (31.36); rezistența indusă totală rămâne astfel constantă, dacă bine înțeles circulația în jurul elementului rămâne mereu aceeași.

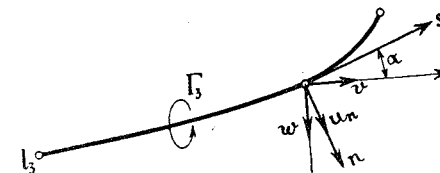
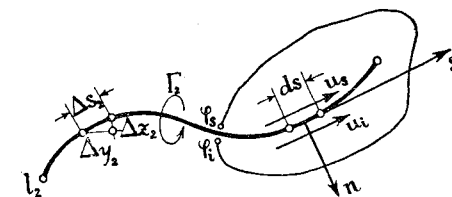
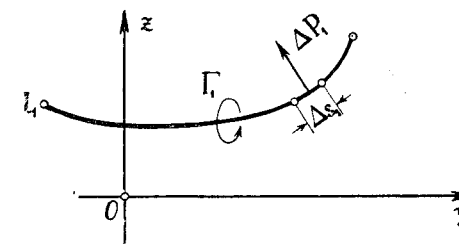


Fig. 31.4.

Să căutăm acum condiția ca această rezistență să fie minimă, pentru o portanță totală dată. După relația precedentă (31.36), rezistența totală indusă depinde de distribuția circulației dealungul anvergurii și prin urmare de variația vitesei u_n .

Să presupunem că distribuția acestei circulații corespunde cu aceea pentru care rezistența este minimă; folosind același raționament elementar ca și pentru cazul monoplanului drept (paragraful 16.4), să considerăm un element Δs_1 al sistemului portant, de proiecție Δy_1 și Δz_1 , și fie $\delta(\Delta P_1)$ variația portanței acestui element, care se poate realiza printr-o variație potrivită a incidenței respective, dacă se rotește elementul portant în jurul axei sale. Portanța elementară $\delta(\Delta P_1)$ fiind normală pe s_1 , componentele sale, după Oy și Oz vor fi respectiv :

$$(31.37) \quad \delta(\Delta P_{1y}) = -\rho V_0 \delta \Gamma_1 \Delta z_1, \quad \delta(\Delta P_{1z}) = \rho V_0 \delta \Gamma_1 \Delta y_1;$$

cum pe de altă parte portanța totală rămâne constantă prin ipoteză, trebuie să modificăm în același timp portanța unui alt element al sistemului, fie Δs_2 , având proiecțiile respective Δy_2 și Δz_2 .

Nimic nu se schimbă în sistemul portant considerat, dacă se înlocuiește Δs_2 cu Δy_2 și Δz_2 (fig. 31.4), păstrându-se însă aceeași circulație pe elementele înlocuitoare. Făcând să varieze cu $\delta(\Delta P_1)$ portanța elementului Δs_1 , trebuie să variem deasemenea cu $\delta \Gamma_{2y}$ și $\delta \Gamma_{2z}$ circulațiile elementare pe Δy_2 și Δz_2 , pentru a putea satisface condițiile de portanță constantă dată :

$$(31.38) \quad \delta \Gamma_1 \Delta y_1 + \delta \Gamma_{2y} \Delta y_2 = 0, \quad \delta \Gamma_1 \Delta z_1 + \delta \Gamma_{2z} \Delta z_2 = 0.$$

Aceste modificări ale circulației pe elementele Δs_1 , Δy_2 și Δz_2 dau variații de ordin secundar asupra vitesei induse în aval; în consecință vitezele induse în dreptul elementelor Δs_1 și Δs_2 vor fi presupuse invariabile. Fie mai departe $v_1, -w_1$, respectiv $v_2, -w_2$, componentele viteselor induse după Oy și după direcția negativă a lui Oz ; ținând seamă de relațiile precedente (31.38), se poate scrie pentru variația δR_i a rezistenței induse, următoarea relație :

$$(31.39) \quad \delta R_i = \frac{\rho}{2} (w_1 \Delta \Gamma_1 \Delta y_1 + v_1 \Delta \Gamma_1 \Delta z_1 + w_2 \Delta \Gamma_{2y} \Delta y_2 + \\ + v_2 \Delta \Gamma_{2z} \Delta z_2) = \frac{\rho}{2} \delta \Gamma_1 [\Delta y_1 (w_1 - w_2) + \Delta z_1 (v_1 - v_2)].$$

Am presupus că distribuția circulației este optimă și corespunde la rezistența indusă minimă. Rezultă că orice perturbație elementară $\delta \Gamma$ în jurul acestei distribuții optime dă o variație nulă pentru rezistența indusă; în consecință $\delta R_i = 0$, de unde se deduce :

$$(31.40) \quad \Delta y_1 (w_1 - w_2) + \Delta z_1 (v_1 - v_2) = 0.$$

Cum pe de altă parte această relație subsistă pentru orice element Δs_1 sau Δs_2 , rezultă condiția căutată sub o formă foarte simplă :

$$(31.41) \quad w_1 = w_2 = \dots = ct. \quad v_1 = v_2 = \dots = ct.$$

Se vede astfel că viteza indusă este constantă în mărime și în direcție în toate punctele liniilor portante l_1, l_2, \dots, l_m , care constituie ansamblul sistemului portant.

Să revenim la expresia rezistenței (31.36) și fie α unghiul pe care-l face ds cu Oy , vom avea $ds \cos \alpha = dy$, $ds \sin \alpha = dz$ și prin urmare (fig. 31.4) :

$$(31.42) \quad u_n = v \sin \alpha + w \cos \alpha;$$

în acest caz, punând $w = 2w_0$, $v = 2v_0$, unde w_0 și v_0 sunt vitezele induse în planul sistemului portant, se va putea scrie pentru rezistența indusă :

$$(31.43) \quad R_i = \frac{\rho}{2} \sum_1^m \int_{l_m} \Gamma u_n ds = \rho V_0 \sum_1^m \int_{l_m} \Gamma dz + \\ + \rho w_0 \sum_1^m \int_{l_m} \Gamma dy = \rho \frac{v_0}{V_0} V_0 \sum_1^m \int_{l_m} \Gamma dz + \rho \frac{w_0}{V_0} V_0 \sum_1^m \int_{l_m} \Gamma dy.$$

Să presupunem mai departe că portanța totală a sistemului este dirijată după Oz , de unde ar rezulta

$$(31.44) \quad P_z = P = \rho V_0 \sum_1^m \int_{l_m} \Gamma dy, \quad P_y = 0 = \sum_1^m \int_{l_m} \Gamma dz;$$

expresia precedentă se reduce astfel la următoarea relație simplă :

$$(31.45) \quad R_i = \frac{w_0}{V_0} P.$$

Pentru a elimina nedeterminarea vitesei induse în ceea ce privește direcția ei, trebuie să observăm că ea este îndreptată după direcția portanței, adică, în conformitate cu ipoteza făcută, după Oz ; ceea ce este evident, de altfel, pentru un sistem simetric față de Oz .

Să presupunem prin urmare că în dreptul urmelor l_1, l_2, \dots, l_m ale sistemului portant viteza indusă este $-w$: totul se petrece ca și cum l_1, l_2, \dots ar fi arce solide animate de viteza de translație $-w$.

Acesta este un rezultat care permite să obținem pentru rezistența indusă o soluție foarte simplă. Într'adevăr, scurgerea în jurul straturilor turbionare l_1, l_2, \dots, l_m este identică în acest caz cu cea datorită mișcării de translație a arcelor solide l_1, l_2, \dots, l_m . Aceasta este o problemă de mișcare plană a cărei soluție este întotdeauna posibilă prin mijloacele curențe pe care le-am tratat de altfel anterior.

Pentru a face soluția mai comodă, să considerăm spațiul fluid animat de viteza w ; liniile l_1, l_2, \dots, l_n , sunt imobile și ansamblul sistemului se găsește astfel așezat într'un curent de viteză w la infinit.

31.2.1. Cazul unei linii închise. În cazul unei linii închise C (fig. 31.5), raționamentul este identic. Se găsește deasemenea, notând domeniul exterior și interior respectiv cu (1) și (2), că circulația într'un punct al circuitului va fi dată, ca și mai sus (31.33), prin diferența potențialelor din interior și exterior:

$$(31.46) \quad \Gamma = \varphi_2 - \varphi_1.$$

Notând cu n normala dirijată spre interiorul domeniului (1), energia cinetică a fluidului va fi dată de expresia:

$$(31.47) \quad E = -\frac{\rho}{2} \int_C (\varphi_1 - \varphi_2) \frac{\partial \varphi}{\partial n} ds = \frac{\rho}{2} \int_C \Gamma u_n ds,$$

unde integrala este luată în lungul curbei închise C . Concluziile sunt aceleași și condiția de rezistență minimă este identică cu cazul precedent, cu o singură observație totuși în ceea ce privește viteza indusă în interiorul circuitului C (în domeniul 2). Este ușor de văzut, într'adevăr, că în tot acest domeniu domnește aceeași viteză indusă — w ca cea din dreptul liniei C . Într'adevăr, circuitul se comportă ca un contur solid animat de viteza — w și tot domeniul interior (2) este legat solidar cu conturul și este animat în consecință de aceeași viteză.

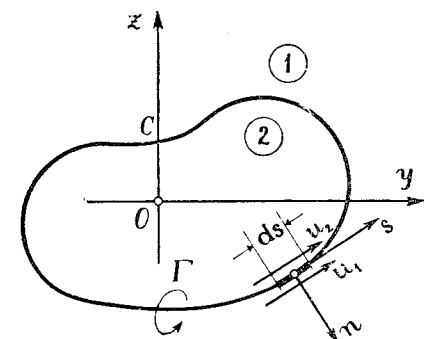


Fig. 31.5.

Dacă la infinit curentul este rectiliniu și uniform, de viteză w , conturul C și masa conținută în interior sunt imobile și scurgerea este identică cu cea a unui cilindru de aceeași secțiune C , așezat într'un curent w . În acest caz se poate admite că, în interior, unde fluidul este imobil, potențialul are o valoare constantă:

$$(31.48) \quad \varphi_2 = ct.$$

Se poate conchide prin urmare că condiția de rezistență minimă, pentru orice linie portantă deschisă sau închisă, se reduce la a căuta condițiile mișcării în jurul corpurilor solide reprezentate de aceste linii și așezate într'un curent rectiliniu și uniform. În aceste condițiuni, calculul rezistenței induse și al distribuției circulației se face foarte simplu, după cum vom vedea mai jos.

31.3. Calculul rezistenței minime

Să ne referim la expresiile (31.44) și (31.45); se poate scrie succesiv:

$$(31.49) \quad P = \rho V_0 \sum_1^m \int_{l_m} \Gamma dy = \rho V_0 \sum_1^m \int_{l_m} (\varphi_s - \varphi_i) dy = -\rho V_0 \sum_1^m \int_{s_m} \varphi dy,$$

ultima integrală fiind luată pe ambele fețe ale liniei portante l_m , în sens pozitiv. Pentru un contur închis C , observând că în interiorul conturului potențialul este constant ($\varphi_2 = ct.$), portanța are aceeași expresie

$$(31.49 \text{ bis}) \quad P = \rho V_0 \int_C \Gamma dy = \rho V_0 \int_C (\varphi_2 - \varphi_1) dy = \rho V_0 \varphi_2 \int_C dy - \rho V_0 \int_C \varphi_1 dy = -\rho V_0 \int_C \varphi dy,$$

unde am înlocuit potențialul domeniului exterior φ_1 , prin notația generală φ . Să punem mai departe:

$$(31.50) \quad \varphi = w\Phi = 2w_0\Phi,$$

Φ având dimensiunea unei lungimi; expresia portanței devine

$$(31.51) \quad P = -2\rho V_0 w_0 \sum_1^m \int_{s_m} \Phi dy = 2\rho V_0 w_0 \sigma,$$

unde σ este o suprafață definită prin integrala

$$(31.52) \quad \sigma = -\sum_1^m \int_{s_m} \Phi dy.$$

Ținând seama de (31.51), expresia rezistenței induse minime devine

$$(31.53) \quad R_i = \frac{w_0}{V_0} P = \frac{P^2}{4 \frac{\rho}{2} V_0^2 \sigma}$$

iar coeficientul unitar ia următoarea formă simplă:

$$(31.54) \quad C_{xi} = C_z^2 \frac{S}{4\sigma},$$

unde S este suprafața totală a sistemului portant.

Prin urmare, pentru calculul rezistenței induse, este suficient să se caute potențialul Φ în jurul liniilor portante l_1, \dots, l_m , sau în jurul conturului portant C , în ipoteza că ele sunt așezate într'un curent de viteză egală cu unitatea.

31.4. Distribuția circulației

Ea rezultă din relațiile (31.33) și (31.46) și în consecință problema se reduce întotdeauna la găsirea potențialului φ . Pentru cazul unei linii portante, diferența $\Gamma = \varphi_s - \varphi_i$, între valoarea potențialului pe fața superioară și cea corespunzătoare în același punct pe fața inferioară, este egală cu circulația. Pentru un contur închis apare o nedeterminare în ceea ce privește valoarea potențialului φ_2 în interiorul conturului. Această circumstanță nu schimbă întru nimic portanța, după cum am văzut deja mai sus (31.49 bis), deoarece φ_2 conservă aceeași valoare constantă. Așa dar, această constantă nu joacă nici un rol în ceea ce privește portanța; de aceea se poate considera $\varphi_2 = 0$.

32. SISTEME PORTANTE DE REZISTENȚĂ MINIMĂ

Problema rezistenței minime are o importanță dublă: mai întâi pentru a găsi sistemul portant cel mai bun în vederea aplicațiilor și apoi pentru calculul însuși al rezistenței induse. Într'adevăr, după cum s'a putut constata deja în cazul monoplanului, rezistența indusă a unui sistem portant oarecare diferă în general foarte puțin de rezistența minimă a unui sistem echivalent, având aceeași portanță totală. Cum, pe de altă parte, pentru câteva cazuri interesante, găsirea rezistenței minime este foarte ușurată în aceste condiții, vom avea în acest fel cea mai bună metodă de calcul pentru rezistența indusă a sistemului considerat.

Sistemul echivalent de rezistență minimă comportă un potențial φ bine determinat; distribuția circulației prin urmare, după (31.33), este de asemenea bine definită. De aceea, o schimbare în distribuția circulației, păstrând totodată portanța totală constantă, va face să varieze desigur rezistența, dar această variație este mică și se poate neglija în prima aproximație.

Astfel de exemplu, dacă se cunoaște portanța și configurația geometrică a unui sistem portant oarecare, metoda aproximativă pentru calculul rezistenței este căutarea suprafeței σ (31.52) a unui sistem de rezistență minimă echivalent, de aceeași portanță și aceeași configurație geometrică cu sistemul real considerat. Trebuie să observăm totuși că vom trata mai jos și alte metode, mai generale, care să poată rezolva destul de riguros diversele probleme ale biplanului. De aceea, în aplicarea formulei (31.52) ne vom limita numai la cazuri particulare susceptibile de o soluție mai simplă și ușor de tratat.

32.1. Aripa monoplană

Potențialul φ corespunde la cazul unei plăci subțiri într'un curent de viteză w . Potențialul complex al acestei mișcări va fi dat de expresia

(13.4), unde $\alpha = \frac{\pi}{2}$ și $\Gamma = 0$, însă într'un sistem diferit de axe de coordonate y , ca abscisă, z , ca ordonată și deci $x = y + iz$, ca variabilă complexă. Vom avea în aceste condiții,

$$(32.1) \quad f(x) = \varphi + i\psi = -iw \sqrt{x^2 - \frac{b^2}{4}},$$

unde b este anvergura aripii monoplanului. Se poate scrie astfel, notând cu C circuitul închis în jurul plăcii și a vecinătății sale,

$$(32.2) \quad \sigma = - \int_C \Phi dy = \int_C \sqrt{y^2 - \frac{b^2}{4}} dy = 2 \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \sqrt{y^2 - \frac{b^2}{4}} dy,$$

ultima integrală fiind luată dealungul anvergurii, dela o extremitate ($y = -\frac{b}{2}$) la cealaltă ($y = +\frac{b}{2}$). Însă această integrală reprezintă tocmai

suprafața unui cerc de rază $\frac{b}{2}$ și regăsim astfel relațiile bine cunoscute:

$$(32.3) \quad \sigma = \pi \frac{b^2}{4}, \quad C_{xi} = C_z^2 \frac{S}{\pi b^2} = \frac{C_z^2}{\pi \lambda},$$

unde S reprezintă suprafața aripii.

32.2. Monoplan cu tăietură centrală

Fie b anvergura totală a aripii și β lățimea tăieturii centrale (fig. 32.1.).

Potențialul complex $f = \varphi + i\psi$, al mișcării datorite unei viteze w la infinit (după Oz), corespunde cu cel al unui biplan în tandem al cărui studiu s'a făcut deja în paragraful 13.2.

Astfel, punând $f = wF$, unde F reprezintă același potențial datorit unei viteze egale cu unitatea, se va putea scrie, după (13.5), unde $\alpha = \frac{\pi}{2}$,

$\Gamma = 0$ și unde variabila complexă va fi înlocuită prin $x = y + iz$:

$$(32.4) \quad F = \Phi + i\Psi = -i \int_0^x \frac{(x^2 - m^2) dx}{\sqrt{(x^2 - p^2)(x^2 - q^2)}}.$$

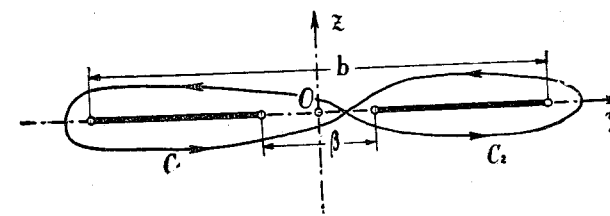


Fig. 32.1.

Expresia suprafeței σ va fi, deasemenea :

$$(32.5) \quad \sigma = - \int_C \Phi dy = - \int_C F dx = - (xF)_C + \int_C x dF = \\ = - i \int_C \frac{(x^2 - m^2)x dx}{\sqrt{(x^2 - p^2)(x^2 - q^2)}}.$$

Este ușor de văzut că avem $p = \frac{b}{2}$, $q = \frac{\beta}{2}$ (fig. 13.1 și 32.1).

Conturul C trebuie să înfășoare ambele porțiuni ale aripii; el ar putea fi compus de exemplu din C_1 și C_2 (fig. 32.1) parcurse în acelaș sens, ceeace revine la a parcurge o singură dată C . Deoarece nu există alte singularități în exterior, integrala precedentă poate fi luată pe un contur C destul de mare și prin urmare putem face următoarea dezvoltare, pentru $x = y + iz$ foarte mare :

$$(32.6) \quad \frac{(x^2 - m^2)x}{\sqrt{(x^2 - p^2)(x^2 - q^2)}} = x \left(1 - \frac{m^2}{x^2}\right) \left(1 - \frac{p^2}{x^2}\right)^{-\frac{1}{2}} \left(1 - \frac{q^2}{x^2}\right)^{-\frac{1}{2}} \approx \\ \approx x \left(1 - \frac{m^2}{x^2}\right) \left(1 + \frac{p^2}{2x^2} + \dots\right) \left(1 + \frac{q^2}{2x^2} + \dots\right) = \\ = x + \frac{p^2 + q^2 - 2m^2}{2} \cdot \frac{1}{x} + \dots$$

Considerând reziduul acestei expresii, integrala (32.5) devine :

$$(32.7) \quad \sigma = \pi(p^2 + q^2 - 2m^2) = \pi \frac{b^2}{4} \left(1 + \frac{\beta^2}{b^2} - 2 \frac{m^2}{p^2}\right).$$

Să punem, după (13.8),

$$(32.8) \quad k = \frac{q}{p} = \frac{\beta}{b}, \quad k' = \sqrt{1 - k^2}$$

și să notăm cu K' și E' integralele eliptice de prima și a doua speță,

$$(32.9) \quad K' = \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k'^2t^2)}}, \quad E' = \int_0^1 \frac{\sqrt{1-k'^2t^2}}{\sqrt{1-t^2}} dt;$$

ținând seama mai departe de relația (13.10),

$$(32.10) \quad m^2 = p^2 \frac{E'}{K'}$$

se poate scrie în cele din urmă :

$$(32.11) \quad \sigma = \pi \frac{b^2}{4} \left(1 + \frac{\beta^2}{b^2} - 2 \frac{E'}{K'}\right) = \pi \frac{b^2}{4} \kappa,$$

unde κ va fi dat de următoarea tabelă :

Tabela 32.1.

$\frac{\beta}{b} = 0$	0,001	0,01	0,05	0,25	0,5	1
$\kappa = 1$	0,76	0,665	0,54	0,295	0,127	0

32.3. Biplan cu aripi egale

Potențialul în jurul a două plăci subțiri egale, de profunzime b și înălțime h (fig. 32.2 a), datorit unui curent paralel cu Oz , se deduce din cel în jurul unui biplan în tandem așezat într'un curent paralel cu planurile sale (fig. 32.2 b), astfel după cum s'a arătat în paragraful 13.

Fie $x = y + iz$ planul real și $\xi = \eta + i\zeta$ planul corespunzător al tandemului; transformarea celor două plane va fi definită, după (13.29)*, prin

$$(32.12) \quad \frac{dx}{d\xi} = \frac{i(\xi^2 - m^2)}{\sqrt{(\xi^2 - p^2)(\xi^2 - q^2)}}.$$

Pe de altă parte, potențialul mișcării în planul tandemului, datorit unei viteze egale cu unitatea și dirijată după $\omega\eta$, va avea următoarea formă simplă :

$$(32.13) \quad F = \Phi + i\Psi = \xi.$$

Rezultă pentru σ o expresie identică cu cea din cazul precedent

$$(32.14) \quad \sigma = - \int_{C_x} F dx = - i \int_{C_\xi} \frac{(\xi^2 - m^2) \xi d\xi}{\sqrt{(\xi^2 - p^2)(\xi^2 - q^2)}} = \pi(p^2 + q^2 - 2m^2),$$

*) Se poate obține direct această transformare aplicând principiul lui SCHWARTZ CHRISTOFFEL.

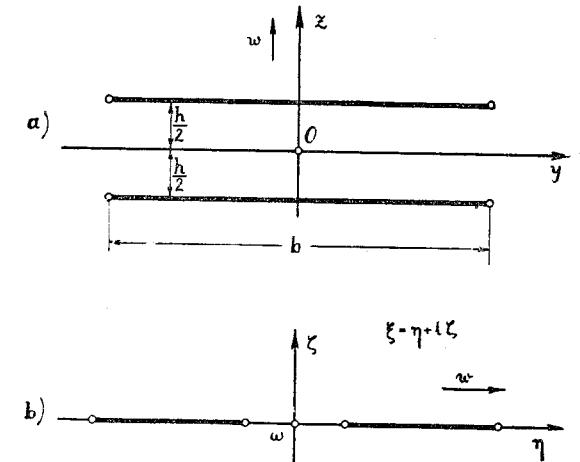


Fig. 32.2 a și b.

unde C_x este conturul de integrare în planul real x și C_ξ conturul corespunzător în planul ξ . La infinit aceste contururi se suprapun cu aproximația unei rotații. Se poate scrie în cele din urmă, ca și în cazul precedent :

$$(32.15) \quad \sigma = \pi p^2 \left(1 + k^2 - 2 \frac{E'}{K'} \right).$$

Trebue să determinăm acum pe p și k . Să notăm pentru aceasta prin

$$(32.16) \quad K = \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}}, \quad E = \int_0^1 \frac{\sqrt{1-k^2t^2}}{\sqrt{1-t^2}} dt$$

integralele eliptice complete de prima și a doua speță, având k drept modul, prin K' și E' , aceleași integrale, având $k' = \sqrt{1-k^2}$ drept modul, astfel cum au fost definite prin (32.9) și în fine prin

$$(32.17) \quad K'(\tau) = \int_0^\tau \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k'^2t^2)}}, \quad E'(\tau) = \int_0^\tau \frac{\sqrt{1-k'^2t^2}}{\sqrt{1-t^2}} dt$$

integralele eliptice incomplete respective, unde τ va fi dat prin următoarea relație :

$$(32.18) \quad \tau = \sqrt{\frac{1 - \frac{E'}{K'}}{1 - k^2}};$$

rezultă din relațiile (13.33) și (13.35), unde trebue să punem τ în loc de t_m și b în loc de c :

$$(32.19) \quad \begin{cases} p = \frac{b}{2} \cdot \frac{1}{E'(\tau) - \frac{E'}{K'} K'(\tau)}, \\ \frac{h}{b} = \frac{E - K \left(1 - \frac{E'}{K'} \right)}{E'(\tau) - \frac{E'}{K'} K'(\tau)} = \frac{\pi}{K' \left[E'(\tau) - \frac{E'}{K'} K'(\tau) \right]} \end{cases}$$

Al doilea membru din relația a doua (32.19) este o funcție de k , respectiv $k' = \sqrt{1-k^2}$; raportul $\frac{h}{b}$ ne permite prin urmare să determinăm modulul k , care, introdus în formula lui σ , ne dă :

$$(32.20) \quad \sigma = \pi \frac{b^2}{4} \cdot \frac{\left(1 + k^2 - 2 \frac{E'}{K'} \right)}{\left[E'(\tau) - \frac{E'}{K'} K'(\tau) \right]^2} = \pi \frac{b^2}{4} z.$$

Calculul numeric este destul de laborios și este necesar să ne servim de tabele de integrale eliptice ; mai jos dăm valorile lui z în funcție de $\frac{h}{b}$

Tabela 32.H.

$h/b = 0$	0,05	0,10	0,15	0,20	0,30	0,40	0,50
$z = 1$	1,124	1,213	1,300	1,353	1,463	1,550	1,625

32.4. Biplan în dreptunghi

Acest biplan cu aripile egale DD și CC diferă de cel precedent prin pereții verticali DC care unesc aripile (fig. 32.3 a). Pentru a găsi potenția-

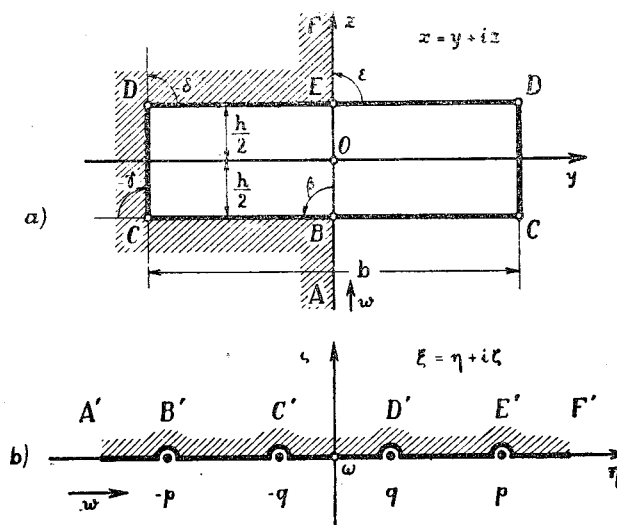


Fig. 32.3 a, b.

lul mișcării în jurul acestui dreptunghi așezat într'un curent de viteză uniformă w , paralelă cu Oz , să reprezentăm domeniul exterior poligonului $ABCDEF$ din planul $x = y + iz$ pe semi-planul superior $\xi = \eta + izi$. Este ușor de văzut că, aplicând transformarea lui SCHWARTZ-CHRISTOFFEL,

$$(32.21) \quad \frac{dx}{d\xi} = h_1 (-p - \xi)^{-\frac{\beta}{\pi}} (-q - \xi)^{-\frac{\gamma}{\pi}} (q - \xi)^{-\frac{\delta}{\pi}} (p - \xi)^{-\frac{\epsilon}{\pi}} = h_1 \sqrt{\frac{\xi^2 - q^2}{\xi^2 - p^2}},$$

unde avem (fig.32.3)

$$(32.22) \quad \beta = \varepsilon = \frac{\pi}{2}, \quad \gamma = \delta = -\frac{\pi}{2},$$

obținem în cele din urmă:

$$(32.23) \quad \frac{dx}{d\xi} = h_1 \sqrt{\frac{\xi^2 - q^2}{\xi^2 - p^2}}.$$

Pentru a determina pe h_1 , să observăm mai întâi că la infinit axa Oz corespunde cu axa $\omega\eta$, de unde rezultă:

$$(32.24) \quad \left(\frac{dx}{d\xi}\right)_\infty = h_1 = i.$$

În planul ξ , pentru o vitesă paralelă cu $\omega\eta$ și egală cu unitatea, potențialul va fi

$$(32.25) \quad F = \Phi + i\Psi = \xi;$$

rezultă pentru σ o integrală identică cu cea precedentă

$$(32.26) \quad \sigma = -\int_{C_x} F dx = -i \int_{C_\xi} \xi \sqrt{\frac{\xi^2 - q^2}{\xi^2 - p^2}} d\xi = \\ = -i \int_{C_\xi} \frac{(\xi^2 - q^2) \xi d\xi}{\sqrt{(\xi^2 - p^2)(\xi^2 - q^2)}}.$$

Conturul C_ξ , care corespunde cu C_x din planul mișcării reale, va conține în interior toate singularitățile planului ξ și în consecință putem să-l lărgim până la infinit. În aceste condiții, observând că ultima integrală (32.26) este identică cu (32.14), în care bine înțeles $m^2 = q^2$, vom avea:

$$(32.27) \quad \sigma = \pi(p^2 + q^2 - 2q^2) = \pi p^2(1 - k^2).$$

După (32.10), se obține

$$(32.28) \quad q^2 = m^2 = p^2 \frac{E'}{K'} = p^2 k^2$$

și prin urmare, în locul raportului $\frac{E'}{K'}$ din formulele (32.18), (32.19) și

(32.20), trebuie să punem k^2 , de unde rezultă $\tau = 1$ și deci

$$(32.29) \quad p = \frac{b}{2} \frac{1}{E' - k^2 K'}, \quad \frac{h}{b} = \frac{E - k^2 K}{E' - k^2 K'}.$$

În cele din urmă, vom putea scrie pentru σ următoarea expresie:

$$(32.30) \quad \sigma = \pi \frac{b^2}{4} \cdot \frac{k'^2}{(E' - k^2 K')^2} = \pi \frac{b^2}{4} \kappa,$$

unde κ va fi dat de tabela următoare.

Tabela 32.III

$h/b = 0$	0,05	0,1	0,15	0,20	0,30	0,40	0,50
$\kappa = 1$	1,155	1,270	1,370	1,470	1,664	1,835	2

32.5. Monoplan cu discuri marginale.

Experiența arată că, dacă adăugăm la extremitățile unei aripi mono-plane discuri normale pe anvergura, rezistența indusă se micșorează. Vom

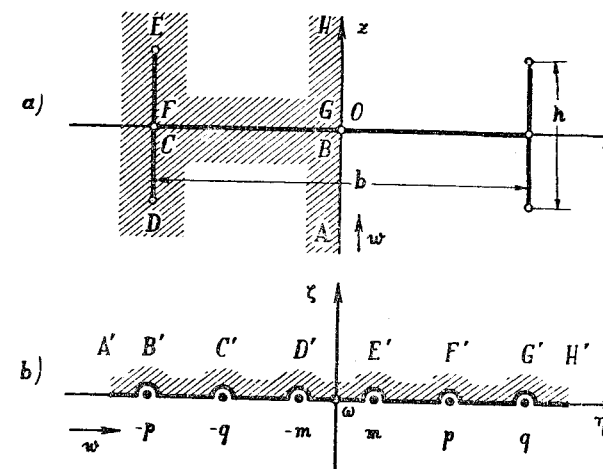


Fig. 32.4 a, b.

da mai jos o explicație teoretică a acestui fenomen. Fie, pentru aceasta, b anvergura și h înălțimea discurilor; să efectuăm o transformare a domeniului $x = y + iz$ (fig.32.4 a) pe domeniul $\xi = \eta + i\zeta$ (fig. 32.4 b), la fel ca și pentru cazul precedent. Vom avea expresia

$$(32.31) \quad \frac{dx}{d\xi} = i \frac{(\xi^2 - m^2)}{\sqrt{(\xi^2 - p^2)(\xi^2 - q^2)}},$$

care este analoagă cu cea a biplanului (32.12), cu singura diferență că pentru

biplan avem $q < m < p$. Rezultă în consecință pentru σ aceeași relație : $\sigma = \pi(p^2 + q^2 - 2m^2)$.

Să punem din nou $q = kp$; prin considerații analoage cu cele din cazurile precedente, se găsește

$$(32.32) \quad m^2 = p^2 \left(1 - \frac{E}{K}\right), \quad b = p \frac{\pi}{K},$$

de unde rezultă :

$$(32.33) \quad \sigma = \pi p^2 \left(2 \frac{E}{K} - k'^2\right) = \pi \frac{b^2}{4} \cdot \frac{4K^2}{\pi^2} \left[2 \frac{E}{K} - k'^2\right] = \pi \frac{b^2}{4} \alpha.$$

Valorile coeficientului α sunt indicate în tabela următoare (32.IV).

Tabela 32.IV

$h/p = 0,07$	0,175	0,347	0,690
$\alpha = 1,14$	1,34	1,64	2,23

33. REZISTENȚA INDUSĂ TOTALĂ A UNUI BIPLAN OARECARE

Am văzut că rezistența indusă totală a unui biplan (31.23) este independentă de decalaj; astfel încât, pentru a calcula rezistența indusă a unui biplan oarecare, trebuie găsit biplanul drept echivalent, având aceleași caracteristici geometrice și aceeași distribuție a circulației dealungul anvergurii fiecărei aripi ca și pentru biplanul real decalat. Pe de o parte, distribuția circulației dealungul anvergurii aripii active este încă mai greu de determinat decât pentru monoplan; apoi calculul viteșelor și al rezistențelor induse pe aripa influențată este foarte laborios și devine aproape imposibil prin metodele curențe.

Pe de altă parte, influența reciprocă a vârtejurilor legate de aripi, care este foarte greu de determinat chiar pentru biplanul de anvergură infinită, devine tot așa de insolubilă pentru biplanul de anvergură finită, în afară de cazul când problema este simplificată prin aproximații potrivite, cum sunt metodele aproximative întrebuințate în acest sens.

33.1. Distribuția eliptică a circulației

Una dintre metodele foarte des utilizate, datorită lui PRANDTL, constă în a admite că distribuția circulației în lungul fiecărei aripi nu diferă decât foarte puțin de cea eliptică; cum pe de altă parte rezistența indusă

diferă tot atât de puțin pentru distribuții destul de variate între ele, se poate face calculul, în ipoteza unei distribuții eliptice, fără a comite prin aceasta vreo eroare apreciabilă.

Să însemnăm cu Γ_1, Γ_2 , circulațiile mijlocii ale aripilor superioară și inferioară, prin P_1, P_2 , portanțele respective, prin b_1, b_2 , anvergurile lor, și fie h înălțimea sau interplanul (fig. 33.1).

Să luăm același sistem de axe: Oy după anvergura aripei, Oz după normala la suprafață și Ox după direcția vitezei. Dacă facem abstracție de curentul general V_0 , mișcarea la infinit aval, datorită exclusiv stratului turbionar liber, este plană și variabila complexă va fi definită prin $x = y + iz$. În ipoteza unei variații eliptice a circulației Γ_1 , ceea ce face să corespundă,

în centrul aripei, valoarea $\Gamma_{19} = \frac{4}{\pi} \Gamma_1$, viteza indusă în dreptul aripei (1) este constantă și egală, după (16.26), cu

$$(33.1) \quad -w_1 = \frac{\Gamma_{10}}{2b} = \frac{2\Gamma_1}{\pi b} = \frac{2P_1}{\pi \rho V_0 b_1^2}.$$

La infinit aval, unde mișcarea este riguros plană, această viteză este dublă ($w_1 = 2w_1$). Câmpul de viteze în dreptul aripei influențate (2), va fi dedus din scurgerea în jurul unei plăci subțiri, de profunzime b_1 , animată de o viteză $-w_1$, normală pe suprafața sa. Considerând placa în mișcare, viteza la infinit este nulă, iar mișcarea absolută va fi dată de următorul potențial :

$$(33.2) \quad f(x) = -i \frac{2P_1}{\pi \rho V_0 b_1^2} \left(\pm \sqrt{x^2 - \frac{b_1^2}{4}} - x \right),$$

unde semnul plus va fi luat pentru $z > 0$, iar semnul minus pentru $z < 0$. Am menționat mai sus că mișcarea este riguros plană la infinit aval, unde viteza indusă este $w_1 = 2w_1$; rezultă că expresia precedentă (33.2) reprezintă potențialul câmpului de viteze induse în planul aripilor.

Să considerăm acum viteza indusă de acest potențial, într'un punct $x_2 = y_2 - ih$ al planului inferior (2); ea va fi dată de relația

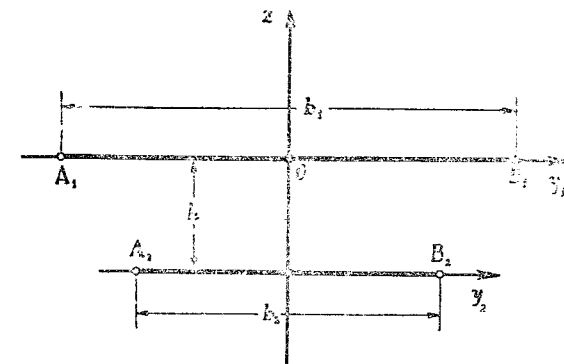


Fig. 33.1.

următoare :

$$(33.3) \quad u_{21} = v_{21} - i w_{21} = \left(\frac{df}{dx} \right)_{x_2} = -i \frac{2P_1}{\pi \rho V_0 b_1^2} \left(\frac{x_2}{\pm \sqrt{x_2^2 - \frac{b_1^2}{4}}} - 1 \right) =$$

$$= +i \frac{2P_1}{\pi \rho V_0 b_1^2} \left[\frac{y_2 - ih}{\mp \sqrt{(y_2 - ih)^2 - \frac{b_1^2}{4}}} + 1 \right].$$

Trebue să remarcăm mai întâi că nu ne interesează decât componenta vitesei după Oz , adică w_{21} , pe care o vom putea scrie sub forma următoare :

$$(33.4) \quad -w_{21} = \frac{2P_1}{\pi \rho V_0 b_1^2} \left[1 + \text{p. r.} \frac{y_2 - ih}{\sqrt{(y_2 - ih)^2 - \frac{b_1^2}{4}}} \right].$$

Rezistența indusă a aripii influențate (2), datorită aripii active (1), pe care o vom însemna prin R_{21} , rezultă imediat :

$$(33.5) \quad R_{21} = -\rho \int_{A_2}^{B_2} w_{21} \Gamma_2 dy_2 = \frac{8P_1 P_2}{\pi^2 \rho b_1^2 b_2^2 V_0^2} \int_{A_2}^{B_2} \sqrt{1 - \left(\frac{2y_2}{b_2} \right)^2} \left[1 + \right.$$

$$\left. + \text{p. r.} \frac{y_2 - ih}{\sqrt{(y_2 - ih)^2 - \frac{b_1^2}{4}}} \right] dy_2,$$

unde am considerat o distribuție de asemenea eliptică pentru Γ_2 , în conformitate cu ipoteza inițială. Punând mai departe

$$(33.6) \quad \eta_2 = \frac{2y_2}{b_2}, \quad \varepsilon = \frac{2h}{b_1 + b_2}, \quad \mu = \frac{b_2}{b_1},$$

putem scrie :

$$(33.7) \quad R_{21} = \frac{1}{\pi \frac{\rho}{2} V_0^2} \cdot \frac{P_1 P_2}{b_1 b_2} \sigma,$$

unde coeficientul σ va fi dat de următoarea integrală :

$$(33.8) \quad \sigma = \frac{2\mu}{\pi} \int_{-1}^{+1} \sqrt{1 - \eta_2^2} \left[1 + \text{p. r.} \frac{\eta_2 - \varepsilon \left(1 + \frac{1}{\mu} \right) i}{\sqrt{\left[\eta_2 - \varepsilon \left(1 + \frac{1}{\mu} \right) i \right]^2 - \frac{1}{\mu^2}}} \right] d\eta_2 =$$

$$= \mu - \text{p. r.} \frac{2\mu}{\pi} \int_{-1}^{+1} \sqrt{1 - \eta_2^2} \frac{\varepsilon (1 + \mu) + i\mu\eta_2}{\sqrt{[\varepsilon(1 + \mu) + i\mu\eta_2]^2 + 1}} d\eta_2.$$

După cum am arătat mai sus, rezistența indusă a aripii (1) datorită aripii (2), fie R_{12} , este egală cu R_{21} ($R_{12} = R_{21}$); rezultă că σ ia aceeași valoare dacă integrala celui de-al doilea membru se aplică la aripi superioară. Se poate admite întotdeauna $b_2 \leq b_1$, adică $\mu \leq 1$; dacă totuși anvergura aripii superioare este mai mică decât cea a aripii inferioare, adică $b_1 \leq b_2$,

se va lua atunci $\mu' = \frac{b_1}{b_2}$, $\eta_1 = \frac{2y}{b_1}$, iar calculul va fi făcut pentru aripi

superioară și expresia lui σ va fi identică cu (33.8).

În această expresie integrala celui de-al doilea membru prezintă dificultăți serioase, care se pot evita prin transformări și aproximații adecuate.

Putem reduce și descompune această integrală în multe altele de tipul eliptic, punând :

$$(33.9) \quad k = \frac{(1 + \mu) \sqrt{1 + \varepsilon^2} - 2\sqrt{\mu}}{(1 + \mu) \sqrt{1 + \varepsilon^2} + 2\sqrt{\mu}}, \quad \sin \varphi = \frac{1 - \sqrt{\mu}}{\sqrt{k} (1 + \sqrt{\mu})}.$$

Calculul, destul de laborios de altfel, ne duc pentru σ la formula următoare, datorită lui FUCHS :

$$(33.10) \quad \sigma = \mu - \frac{\varepsilon (1 + \mu) [(1 - \mu^2) + \varepsilon^2 (1 + \mu^2) + 4\sqrt{\mu} (1 + \mu)]}{2\pi\mu [(1 + \mu) \sqrt{1 + \varepsilon^2} + 2\sqrt{\mu}]} \ln \frac{4}{k} +$$

$$+ \frac{\varepsilon (1 + \mu) [(1 + \mu) \sqrt{1 + \varepsilon^2} + 2\sqrt{\mu}]}{2\pi\mu} +$$

$$+ \frac{1 - \mu^2}{\pi\mu} \left(\frac{\pi}{2} - \varphi \right).$$

În tabela (33.I) sunt redată valorile numerice ale lui σ în funcție de ε , pentru $\mu = 1, 0,8$ și $0,6$. De asemenea, diagramele din figură 33.2 reprezintă grafic această variație, după formula (33.10).

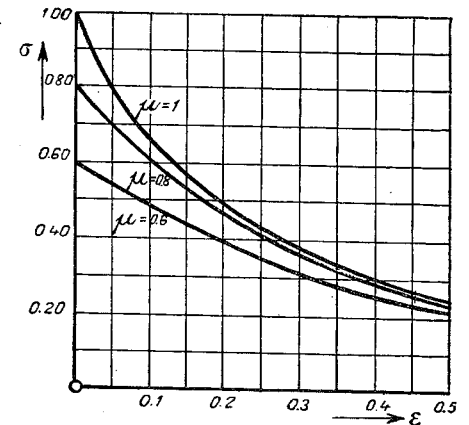


Fig. 33.2.

Tabela 33.I.

$\mu \backslash \varepsilon$	0,00	0,05	0,10	0,15	0,20	0,25	0,30	0,35	0,40	0,45	0,50
1	1,000	0,780	0,655	0,561	0,485	0,420	0,370	0,327	0,290	0,258	0,230
0,8	0,800	0,690	0,600	0,523	0,459	0,401	0,355	0,315	0,282	0,252	0,225
0,6	0,600	0,540	0,485	0,437	0,394	0,351	0,315	0,285	0,255	0,231	0,210

33.2. Circulația constantă dealungul anvergurii

O altă metodă aproximativă, foarte simplă, constă în ipoteza unei circulații constante dealungul anvergurii. Se poate admite, într'adevăr, că circulația medie Γ_m se întinde pe toată anvergura aripii și că două vârtejuri libere se detașează la extremități; dar valorile σ rezultând din această metodă sunt destul de reduse față de cele ale distribuției eliptice. Pe de altă parte, dacă observăm că pânza de vârtejuri a fiecărei aripi se rupe în două și se transformă, la o anumită distanță în spatele aripii, în două nuclee turbionare de intensitate egală cu cea care domnește în centrul aripei (Γ_0), se poate spune că acțiunea efectivă a unei aripi asupra celeilalte este cuprinsă între aceste două ipoteze. În primul caz, vârtejurile marginale libere se presupun că se desprind la extremități, distanța între cele două vârtejuri fiind prin urmare b ; în al doilea caz, această distanță este $\alpha_0 b$, unde α_0 se va deduce din formula stabilită anterior (21.44):

$$(33.11) \quad \alpha_0 = \frac{\pi}{4} \frac{A_1}{A_1 - A_3 + A_5 - A_7 + \dots}$$

Acest coeficient va fi notat prin α'_0 și α''_0 , respectiv pentru aripile (1) și (2).

Făcând deci ipoteza că acțiunea efectivă este datorită poziției medii a vârtejurilor marginale, fie

$$(33.12) \quad \alpha = \frac{1 + \alpha_0}{2}$$

sau α_1 și α_2 , respectiv pentru aripile (1) și (2),

$$(33.13) \quad \alpha_1 = \frac{1 + \alpha'_0}{2}, \quad \alpha_2 = \frac{1 + \alpha''_0}{2},$$

viteza indusă w_{21} după verticala descendentă într'un punct y_2 de pe anvergura aripii (2), datorită aripii (1), va avea ca expresie:

$$(33.14) \quad w_{21} = \frac{\Gamma'_m}{4\pi} \left[\frac{y_2 + \alpha_1 \frac{b_1}{2}}{\left(y_2 + \alpha_1 \frac{b_1}{2}\right)^2 + h^2} - \frac{y_2 - \alpha_1 \frac{b_1}{2}}{\left(y_2 - \alpha_1 \frac{b_1}{2}\right)^2 + h^2} \right],$$

unde Γ'_m , circulația mijlocie a aripii (1), repartizată pe o anvergură echivalentă $\alpha_1 b_1$, va fi înlocuită prin

$$(33.15) \quad \Gamma'_m = \frac{P_1}{\rho V_1 \alpha_1 b_1} \approx \frac{P_1}{\rho V_0 \alpha_1 b_1} \quad *)$$

*) În realitate, după cum vom vedea mai jos, vitezele mijlocii V_1 și V_2 sunt diferite de V_0 . Dacă notăm cu u_{12} și u_{21} vitezele mijlocii după Ox , datorite influenței reciproce a aripilor, se poate pune $V_1 = V_0 + u_{12}$ și $V_2 = V_0 + u_{21}$. Cum pe de altă parte $u_{12} \approx -u_{21}$, vom avea $V_1 V_2 \approx V_0^2$ și prin urmare formula (33.16) este riguroasă.

În formula (33.14) s'a neglijat influența incidenței care introduce un decalaj între cele două plane. Linile portante ale acestora nu sunt deci într'un plan normal pe direcțiile vârtejurilor libere, adică pe vitesă. În paragraful următor vom stabili formula generală care ține seamă în același timp de decalaj și de incidență.

Vom avea mai departe, notând prin, Γ''_m circulația mijlocie a aripii (2),

$$(33.16) \quad R_{21} = \rho \Gamma''_m \int_{(2)} w_{21} dy_2 = \\ = \frac{P_2}{V_2 \alpha_2 b_2} \int_{(2)} w_{21} dy_2 \approx \frac{P_1 P_2}{4\pi \rho V_0^2 \alpha_1 \alpha_2 b_1 b_2} \ln \frac{(\alpha_1 b_1 + \alpha_2 b_2)^2 + 4h^2}{(\alpha_1 b_1 - \alpha_2 b_2)^2 + 4h^2},$$

de unde rezultă, în funcție de parametrii anteriori μ și ε (33.6):

$$(33.17) \quad \sigma = \frac{1}{8\alpha_1 \alpha_2} \ln \frac{(\alpha_1 + \mu \alpha_2)^2 + (1 + \mu)^2 \varepsilon^2}{(\alpha_1 - \mu \alpha_2)^2 + (1 + \mu)^2 \varepsilon^2}.$$

Avantajul acestei formule constă în forma sa simplă și simetrică și în faptul că ea reprezintă probabil mai bine fenomenul real.

Valorile lui σ calculate astfel sunt destul de apropiate de cele indicate în tabela precedentă. Punând mai departe

$$(33.18) \quad m = \frac{\alpha_1 b_1 + \alpha_2 b_2}{2h}, \quad n = \frac{\alpha_1 b_1 - \alpha_2 b_2}{2h},$$

formula (33.17) se poate pune sub o formă mai comodă:

$$(33.19) \quad \sigma = \frac{1}{8\alpha_1 \alpha_2} \ln \frac{1 + m^2}{1 + n^2} = \frac{1}{4\alpha_1 \alpha_2} \ln \frac{\sqrt{1 + m^2}}{\sqrt{1 + n^2}}.$$

33.3. Repartiția optimă a portanței pe cele două aripi ale biplanului

Dacă punem rezistența indusă a fiecărei aripi sub forma (16.40), se va putea scrie pentru rezistența totală a unui biplan:

$$(33.20) \quad R = R_1 + R_2 + 2R_{12} = \frac{1}{\pi \frac{\rho}{2} V_0^2} \left(\frac{P_1^2}{b_1^2} + \frac{P_2^2}{b_2^2} + 2\sigma \frac{P_1 P_2}{b_1 b_2} \right).$$

Să căutăm acum, pentru o portanță totală dată, $P = P_1 + P_2$, repartiția optimă a acestei portanțe, care să corespundă rezistenței minime. Să punem pentru aceasta

$$(33.21) \quad P_2 = \lambda P, \quad P_1 = (1 - \lambda) P,$$

unde raportul λ trebuie determinat. Expresia rezistenței, care se scrie, în acest caz, în funcție de λ sub forma

$$(33.22) \quad R = \frac{P^2}{\pi \frac{\rho}{2} V_0^2 b_1^2} \left[(1-\lambda)^2 + \frac{\lambda^2}{\mu^2} + 2\sigma \frac{\lambda(1-\lambda)}{\mu} \right],$$

devine minimă pentru

$$(33.23) \quad \lambda = \frac{\mu - \sigma}{\mu + \frac{1}{\mu} - 2\sigma}.$$

Rezultă :

$$(33.24) \quad R_{min} = \frac{P^2}{\pi \frac{\rho}{2} V_0^2 b_1^2} \cdot \frac{1-\sigma^2}{1-2\mu\sigma + \mu^2} = \frac{P^2}{\pi \frac{\rho}{2} V_0^2 b_1^2} \alpha,$$

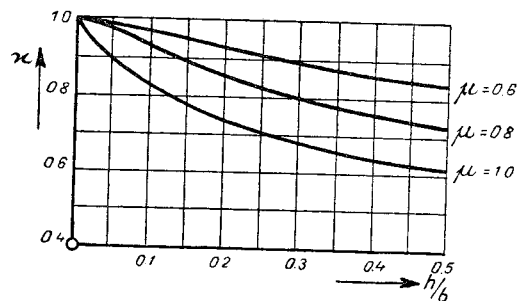


Fig. 33.3.

unde α este deci dat de formula următoare :

$$(33.25) \quad \alpha = \frac{1 - \sigma^2}{1 - 2\mu\sigma + \mu^2}.$$

Coefficienții α și λ sunt indicați în tabelele următoare; α este reprezentat și prin diagramele din figura 33.3.

Tabela pentru α (33.II)

$\frac{h}{b_1}$	μ	0	0,05	0,10	0,15	0,20	0,25	0,30	0,35	0,40	0,45	0,50
0,6	1	0,990	0,974	0,954	0,932	0,911	0,892	0,875	0,861	0,848	0,839	
0,7	1	0,982	0,956	0,926	0,897	0,871	0,849	0,830	0,812	0,797	0,783	
0,8	1	0,974	0,932	0,892	0,855	0,825	0,800	0,778	0,758	0,740	0,728	
0,9	1	0,950	0,893	0,847	0,807	0,773	0,744	0,719	0,699	0,683	0,671	
1	1	0,890	0,827	0,779	0,742	0,710	0,684	0,662	0,645	0,629	0,615	

Tabela pentru $\lambda = \frac{P_2}{P}$ (33. III)

$\frac{h}{b_1}$	μ	0	0,05	0,10	0,15	0,20	0,25	0,30	0,35	0,40	0,45	0,50
0,6	0	0,060	0,104	0,134	0,157	0,176	0,191	0,202	0,211	0,218	0,224	
0,7	0	0,105	0,164	0,202	0,228	0,248	0,262	0,272	0,281	0,288	0,294	
0,8	0	0,172	0,246	0,285	0,310	0,327	0,338	0,347	0,355	0,361	0,364	
0,9	0	0,303	0,359	0,387	0,402	0,412	0,419	0,425	0,429	0,431	0,433	
1	0	0,500	0,500	0,500	0,500	0,500	0,500	0,500	0,500	0,500	0,500	

Fie mai departe R_0 , rezistența de formă, datorită frecării și desprinderilor de pe extradadosul posterior; dacă se adaugă R_0 la expresia (33.24), se obține rezistența totală a biplanului :

$$(33.26) \quad R_b = R_0 + \frac{2P^2}{\pi \rho V_0^2 b_1^2} \alpha.$$

Să notăm cu S suprafața totală a biplanului, cu S_1 cea a aripii (1) și cu S_2 cea a aripii (2); mai departe, cu C_{zb} coeficientul de portanță a biplanului și cu C_{xb} coeficientul de rezistență. Cu aceste notații vom putea scrie o relație asemănătoare cu cea a monoplanului :

$$(33.27) \quad C_{xb} = C_{x0} + \frac{(C_{zb})^2}{\pi} \cdot \frac{S}{b_1^2} \alpha = C_{x0} + \frac{(C_{zb})^2}{\pi \lambda_1} \left(1 + \frac{S_2}{S_1} \right) \alpha,$$

unde am notat cu λ_1 alungirea aripii superioare. Dacă λ este alungirea unei aripi monoplane având acelaș profil, notând cu C_z și C_x , portanța și rezistența unitară, diferența de rezistență pentru aceeaș portanță va fi dată de formula

$$(33.28) \quad C_{xb} - C_x = \frac{C_z^2}{\pi} \left[\left(1 + \frac{S_2}{S_1} \right) \frac{\alpha}{\lambda_1} - \frac{1}{\lambda} \right].$$

În cazul general, notând cu C_{x1} , C_{x2} , C_{z1} , C_{z2} , caracteristicile aerodinamice ale aripiilor luate separat, vom avea

$$(33.29) \quad C_{xb} = C_{x1} \frac{S_1}{S} + C_{x2} \frac{S_2}{S} + 2\sigma C_{z1} C_{z2} \frac{S_1 S_2}{\pi b_1 b_2 S} = \\ = C_{x0b} + \frac{C_{z1}^2}{\pi \lambda_1} \cdot \frac{S_1}{S} + \frac{C_{z2}^2}{\pi \lambda_2} \cdot \frac{S_2}{S} + 2\sigma C_{z1} C_{z2} \frac{S_1 S_2}{\pi b_1 b_2 S}.$$

Această ultimă formulă implică cunoașterea prealabilă a portanțelor unitare C_{z1} și C_{z2} , problemă pe care o vom trata în paragraful următor.

34. CARACTERISTICELE AERODINAMICE ALE FIECĂREI ARIPI A UNUI BIPLAN

În acest paragraf vom determina caracteristicile aerodinamice ale aripilor unui biplan decalat, fiecare aripă fiind luată separat.

Problema constă în a stabili acțiunea aripilor perturbatoare asupra aripilor influențate. Această problemă, care este foarte dificilă și laborioasă, chiar pentru cazul biplanului de anvergură infinită, devine aproape insolubilă; de aceea, vom aduce simplificările necesare pentru a ajunge la soluții aproximative, suficiente pentru aplicații.

34.1. Determinarea circulațiilor mijlocii

Pentru a stabili acțiunea reciprocă a aripilor, vom admite, ca și pentru biplanul de anvergură infinită, că efectul aripilor perturbatoare se suprapune pur și simplu pe caracteristicile aripilor influențate, considerată în stare izolată. În consecință, vom avea pentru fiecare aripă în parte:

- circulația mijlocie a aripii în stare izolată,
- influența vârtejurilor libere ale aripilor perturbatoare,
- influența vârtejurilor legate ale aripilor perturbatoare.

34.1.1. Circulațiile aripilor în stare izolată. Presupunând, pentru simplificare, că incidența este constantă pe toată anvergura, distribuția circulației nu depinde, în acest caz, decât de forma în plan a aripilor considerate.

Să notăm cu Γ'_{11} , respectiv Γ'_{22} , circulațiile mijlocii uniforme repartizate pe toată anvergura aripilor superioară (1) și inferioară (2) și fie i_1 și i_2 unghiurile induse mijlocii respective. Observând că pentru aripa de anvergură finită portanța unitară, pe care o vom nota cu K_z , este legată de circulația mijlocie (Γ_m) prin relația

$$(34.1) \quad K_z = \frac{\rho V_0 \Gamma_m b}{\frac{\rho}{2} S V_0^2} = \frac{2b \Gamma_m}{S V_0}$$

și aplicând formula (19.3) a portanței unitare în funcție de incidență,

$$(34.2) \quad K_z = 2k_\lambda \alpha^*$$

se poate scrie în fine pentru circulațiile Γ'_{11} și Γ'_{22} :

$$(34.3) \quad \Gamma'_{11} = k_{\lambda 1} \frac{S_1}{b_1} V_0 \alpha_1, \quad \Gamma'_{22} = k_{\lambda 2} \frac{S_2}{b_2} V_0 \alpha_2,$$

*) În formula (19.3) coeficientul unitar este însemnat cu notația obișnuită C_z , în loc de K_z , pe care am introdus-o aici pentru a indica într-un fel special portanța unitară a monoplaului, spre a evita astfel o confuzie.

unde coeficienții $k_{\lambda 1}$ și $k_{\lambda 2}$ vor fi dați de formula (19.6) în funcție de coeficientul aripilor de anvergură infinită, a cărui valoare teoretică este $k_t = \pi(1 + \varepsilon) \approx \pi$ iar valoarea experimentală $k_e = \frac{1}{2} \left(\frac{dC_z}{d\alpha} \right) \approx 0,9 \pi$.

Din motivele care se vor înțelege mai jos, circulația se va repartiza pe o anvergură redusă $x_1 b_1$, respectiv $x_2 b_2$, unde x_1 și x_2 vor fi dați de formulele (33.13); se va putea scrie în acest caz, introducându-se pe de altă

$$\text{parte coardele medii } c_1 = \frac{S_1}{b_1}, \quad c_2 = \frac{S_2}{b_2} :$$

$$(34.4) \quad \Gamma_{11} = k_{\lambda 1} \frac{c_1}{x_1} V_0 \alpha_1, \quad \Gamma_{22} = k_{\lambda 2} \frac{c_2}{x_2} V_0 \alpha_2 .$$

34.1.2. Influența vârtejurilor libere. Ca și în paragraful precedent, aripile vor fi reprezentate prin liniile $A_1 B_1$ și $A_2 B_2$, de lungime $x_1 b_1$, respectiv $x_2 b_2$, având circulațiile mijlocii Γ_1 și Γ_2 uniform repartizate pe toată anvergura; pânzele de vârtejuri vor fi reprezentate prin două perechi de nuclee turbionare marginale, de aceeași intensitate (fig. 34.1). Viteza indusă

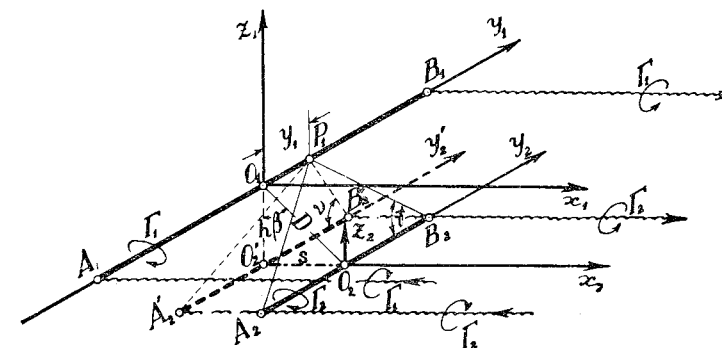


Fig. 34.1.

într'un punct P_1 al aripii superioare (1), datorită vârtejului liber care se desface din extremitatea B_2 a aripii inferioare (2), este conținută în planul $A_1 B_1 A_2 B_2$ normal la curentul general, este perpendiculară pe segmentul $P_1 B_2$ și egală cu

$$(34.5) \quad V_{12} = \frac{\Gamma_2}{4\pi} \cdot \frac{1}{P_1 B_2} (1 - \cos \gamma) .$$

Proiecția sa după verticală, singura componentă care ne interesează, va avea ca valoare

$$(34.6) \quad w_{12} = V_{12} \cos \nu = - \frac{\Gamma_2}{4\pi} \cdot \frac{\cos \nu}{P_1 B_2} (1 - \cos \gamma) .$$

Observând mai departe că avem relațiile următoare,

$$(34.7) \quad \overline{P_1 B_2'} = h^2 + \left(\frac{x_2 b_2}{2} - y_1 \right)^2, \quad \cos \nu = \frac{\frac{x_2 b_2}{2} - y_1}{P_1 B_2'},$$

$$\operatorname{tg} \gamma = \frac{\overline{P_1 B_2'}}{B_2' B_2} = \frac{\sqrt{h^2 + \left(\frac{x_2 b_2}{2} - y_1 \right)^2}}{h \operatorname{tg} \beta}, \quad \cos \gamma = \frac{h \sin \beta}{\sqrt{h^2 + \left(\frac{x_2 b_2}{2} - y_1 \right)^2 \cos^2 \beta}}$$

este ușor de văzut că expresia componentei verticale devine :

$$(34.8) \quad w_{12} = -\frac{\Gamma_2}{4\pi} \cdot \frac{\left(\frac{x_2 b_2}{2} - y_1 \right)}{h^2 + \left(\frac{x_2 b_2}{2} - y_1 \right)^2} \left(1 - \frac{h \sin \beta}{\sqrt{h^2 + \left(\frac{x_2 b_2}{2} - y_1 \right)^2 \cos^2 \beta}} \right).$$

Această vitesă indusă micșorează unghiul de incidență al aripii (1) cu o cantitate variabilă egală cu $\frac{w_{12}}{V_0}$, ceea ce dă o micșorare corespunzătoare și circulației din jurul aripii. Dacă se ține seama de variația acestui unghiul indus suplimentar dealungul anvergurii, problema devine foarte complicată și lipsită de altfel de interes practic. Deaceia, vom admite un unghiul suplimentar mijlociu i_{12} , dat de formula

$$(34.9) \quad i_{12} = \frac{1}{x_1 b_1} \int_{A_1}^{B_1} \frac{w_{12}}{V_0} dy_1.$$

Este ușor de efectuat această integrală pe o cale elementară; în acest scop, pentru a ajunge la o formulă convenabilă care să prezinte oarecare avantajii, este mai comod să se introducă o nouă variabilă Y_1 , definită prin relația

$$(34.10) \quad Y_1 + h \sin \beta = \sqrt{h^2 + \left(\frac{x_2 b_2}{2} - y_1 \right)^2 \cos^2 \beta}$$

și să se înlocuiască y_1 în funcție de Y_1 . După câteva calcule elementare, ținând seama între altele de relațiile (33.18) și dublând rezultatul pentru a ține seama și de al doilea vârtej liber care se desprinde în A_2 (al cărui efect este identic cu al primului), se găsește în fine :

$$(34.11) \quad i_{12} = \frac{-\Gamma_2}{2\pi x_1 b_1 V_0} \ln \frac{\sqrt{1+m^2 \cos^2 \beta} + \sin \beta}{\sqrt{1+n^2 \cos^2 \beta} + \sin \beta}.$$

Pentru unghiul indus mediu i_{21} în dreptul aripii inferioare (2), datorit vârtejurilor libere ale aripii superioare (1), trebuie să schimbăm β în $-\beta$, și vom obține astfel, în mod analog :

$$(34.12) \quad i_{21} = \frac{-\Gamma_1}{2\pi x_2 b_2 V_0} \ln \frac{\sqrt{1+m^2 \cos^2 \beta} - \sin \beta}{\sqrt{1+n^2 \cos^2 \beta} - \sin \beta}.$$

Fie mai departe

$$(34.13) \quad p = \sqrt{1+m^2 \cos^2 \beta}, \quad q = \sqrt{1+n^2 \cos^2 \beta}$$

și să punem, prin analogie cu coeficientul σ definit de expresia (33.19),

$$(34.14) \quad \sigma_1 = \frac{1}{4x_1 x_2} \ln \frac{p + \sin \beta}{q + \sin \beta}, \quad \sigma_2 = \frac{1}{4x_1 x_2} \ln \frac{p - \sin \beta}{q - \sin \beta};$$

este ușor de văzut că pentru $\beta = 0$, σ_1 și σ_2 se reduc identic la coeficientul σ corespunzător biplanului drept (33.19).

Acest coeficient este în același timp egal cu valoarea mijlocie a lui σ_1 și σ_2 :

$$(34.15) \quad \frac{1}{2} (\sigma_1 + \sigma_2) = \frac{1}{8x_1 x_2} \ln \frac{p^2 - \sin^2 \beta}{q^2 - \sin^2 \beta} = \frac{1}{8x_1 x_2} \ln \frac{1+m^2}{1+n^2} = \sigma.$$

În formulele precedente, interplanul h precum și decalajul definit prin $\operatorname{tg} \beta$ depind de direcția curentului și în consecință de incidență. El se numește pentru acest motiv decalaj aerodinamic. Pentru a stabili influența incidenței, să definim mai întâi înălțimea h_0 și decalajul β_0 la incidență nulă. Fie pentru aceasta O_1 și O_2 centrele aripiilor ^{*}), A_1 și A_2 , axele lor de portanță nulă (fig. 34.2). În mod curent se ia A_1 ca axă de referință a biplanului și în aceste condiții înălțimea biplanului va fi definită prin $h_0 = O_1 \overline{H_0}$, astfel după cum am arătat în paragraful privitor la biplanele de anvergură infinită, unde am notat această înălțime pur și simplu

^{*}) În realitate, O_1 și O_2 reprezintă urmele liniilor portante și trebuie considerate ca atari pe acelea ale liniilor centrelor de presiune. Însă poziția acestora variază cu incidența, ceea ce ar complica considerabil problema. Cum pe de altă parte aripile moderne au un moment foarte mic la portanță nulă (C_{m0} mic), centrele de presiune se pot lua la o pătrime de la bordul de atac al profilului. În fine, dacă coardele nu diferă prea mult, poziția relativă a centrelor de presiune este aproximativ egală cu cea a centrelor aripiilor, ceea ce am făcut de altfel mai sus, mai mult pentru a fixa ideile. Fie că se notează cu O_1, O_2 centrele aripiilor, focarele sau alte poziții intermediare, formulele finale au aceeași construcție și variația lui σ în funcție de această poziție ar putea fi neglijată. Într'adevăr, neglijând practic curbura profilului moderne și considerând în consecință centrul de presiune la o pătrime de la bordul de atac, diferența decalajului este $\Delta s = \frac{c_1 - c_2}{4}$. Pentru $c_2 \approx 0,60C_1$, $h_0 \approx c_1$; vom avea $\Delta \beta \approx \sin(\Delta \beta) \approx 0,10$ ceea ce nu afectează prea mult valoarea lui σ (34.15). Totuși, ar fi poate tot așa de corect să se ia ca linii portante, liniile focarelor.

prin litera h fără indice. Unghiul făcut de O_1H_0 cu O_1O_2 , fie β_0 , este decalajul inițial al biplanului, sau decalajul geometric.

Este ușor de văzut că se pot scrie următoarele relații (fig. 34.2):

$$(34.16) \quad \beta = \beta_0 - \alpha_1, \quad \sin \beta \approx \sin \beta_0 - \alpha_1 \cos \beta_0, \quad \frac{h}{\cos \beta} = \frac{h_0}{\cos \beta_0} = D$$

și punând mai departe

$$(34.17) \quad m_0 = \frac{\alpha_1 b_1 + \alpha_2 b_2}{2h_0},$$

$$n_0 = \frac{\alpha_1 b_1 - \alpha_2 b_2}{2h_0},$$

vom avea încă:

$$(34.18) \quad m \cos \beta = m_0 \cos \beta_0,$$

$$n \cos \beta = n_0 \cos \beta_0.$$

Rezultă că p și q (34.13) sunt independente de incidență și din motive de simetrie le vom nota cu p_0 și q_0 .

Să considerăm acum expresiile (34.14) și să observăm că unghiul de incidență este mic. Se pot dezvolta aceste expresii în funcție de acest unghi și se poate scrie

$$(34.19) \quad \left\{ \begin{aligned} \ln \frac{p + \sin \beta}{q + \sin \beta} &\approx \ln \frac{p_0 + \sin \beta_0}{q_0 + \sin \beta_0} - \\ &\quad - \alpha_1 \cos \beta_0 \left[\frac{1}{p_0 + \sin \beta_0} - \frac{1}{q_0 + \sin \beta_0} \right], \\ \ln \frac{p - \sin \beta}{q - \sin \beta} &\approx \ln \frac{p_0 - \sin \beta_0}{q_0 - \sin \beta_0} + \\ &\quad + \alpha_1 \cos \beta_0 \left[\frac{1}{p_0 - \sin \beta_0} - \frac{1}{q_0 - \sin \beta_0} \right]. \end{aligned} \right.$$

Dacă notăm mai departe prin σ_{10} și σ_{20} valorile coeficienților σ_1 și σ_2 corespunzătoare decalajului geometric β_0 , vom putea pune în fine:

$$(34.20) \quad \left\{ \begin{aligned} \sigma_1 &= \sigma_{10} + \alpha_1 \cos \beta_0 \left(\frac{1}{q_0 + \sin \beta_0} - \frac{1}{p_0 + \sin \beta_0} \right), \\ \sigma_2 &= \sigma_{20} - \alpha_1 \cos \beta_0 \left(\frac{1}{q_0 - \sin \beta_0} - \frac{1}{p_0 - \sin \beta_0} \right). \end{aligned} \right.$$

Pentru incidențele mici, se pot neglija la rigoare termenii în α_1 , păstrându-se astfel forma simplă a expresiilor (34.14), unde β va fi înlocuit prin β_0 .

Să revenim la expresiile (34.11) și (34.12) ale incidențelor induse suplimentare; ele nu fac decât să micșoreze unghiurile geometrice α_1 și α_2 și aduc prin aceasta o micșorare corespunzătoare a circulației, care se poate pune, pentru fiecare aripă în parte sub forma următoare:

$$(34.21) \quad \left\{ \begin{aligned} \Gamma'_{12} &= -k_{\lambda 1} \frac{c_1}{\alpha_1} V_0 i_{12} = -k_{\lambda 1} \frac{c_1}{\alpha_1} V_0 \frac{2\Gamma_2 \alpha_2}{\pi b_1 V_0} \sigma_1, \\ \Gamma'_{21} &= -k_{\lambda 2} \frac{c_2}{\alpha_2} V_0 i_{21} = -k_{\lambda 2} \frac{c_2}{\alpha_2} V_0 \frac{2\Gamma_1 \alpha_1}{\pi b_2 V_0} \sigma_2. \end{aligned} \right.$$

34.1.3. Influența vârtejurilor legate. Pentru a simplifica problema, se înlocuiește aripa perturbatoare printr'un tub turbionar infinit mic și se calculează viteza indusă în dreptul aripii influențate, înlocuită și ea prin linia sa portantă. Astfel prin urmare influența unei aripi asupra celeilalte va fi reprezentată în acest caz prin acțiunea unui tub de vârtej în formă de potcoavă, reprezentând vârtejurile libere unite prin vârtejul legat (fig. 34.1).

Totuși, această aproximație simplificatoare nu reproduce fenomenul real; deaceia este preferabil să folosim metoda utilizată la biplanul de anvergură infinită având aripi plane subțiri, care credem, că este o deducție mai rațională a proprietăților scurgerii în jurul aripii influențate după cum am constatat-o prin exemplul concret (14.4.1).

Se va înlocui deci aripa perturbatoare printr'un vârtej unic de lungime αb situat la un sfert din coardă (care este centrul circulației — asimilând aripile cu planuri drepte subțiri) și se va calcula viteza indusă verticală în punctele situate pe porțiunea din spate a aripii influențate (fig. 34.3).

Așa dar, ținând seamă de lungimea finită a vârtejurilor legate, se pot aplica formulele obținute pentru biplanul de anvergură infinită cu aproximația unui coeficient de reducere, datorit tocmai acestei limitări a lungimii vârtejurilor. Trebuie să remarcăm totuși că acțiunea vârtejului înlocuitor este diferită în fiecare secțiune a aripii influențate, deoarece viteza indusă, așa cum am definit-o mai sus (14.64) — și deci și circulația suplimentară — sunt diferite în fiecare secțiune. Astfel tratată problema devine foarte dificilă și se complică încă prin variația circulației datorită anvergurii limitate. Deaceia vom considera o acțiune mijlocie constantă pe toată anvergura, ceea ce echivalează cu o viteză indusă constantă și vom presupune în acest caz că incidența indusă corespunzătoare nu face decât să modifice cu o valoare constantă unghiul de incidență geometric. În consecință se poate admite că circulația suplimentară, datorită acestei incidențe induse, are aceeași lege de variație ca și pentru aripa monoplană izo-

lată. Această ipoteză definește ca însăși coeficientul $\frac{k_\lambda}{\alpha}$ care va înlocui

pe k în formulele (14.62). Pentru a găsi acțiunea mijlocie a unei aripi asupra celeilalte, vom observa că viteza într'un punct $P_1(y_1)$ al aripii influențate (1), situată la un sfert din coardă spre bordul de fugă (fig. 34.3), datorită vârtejului legat A_2B_2 , care înlocuiește aripa perturbatoare (2), așezat din contră la un sfert din coardă spre bordul de atac, — această viteză

reprezintă tocmai influența unei aripi asupra celeilalte, — va avea ca expresie :

$$(34.22) \quad \frac{\Gamma_2}{4\pi} \cdot \frac{\cos \widehat{P_1 A_2 B_2} + \cos \widehat{P_1 B_2 A_2}}{\overline{Q_1 G_2}}$$

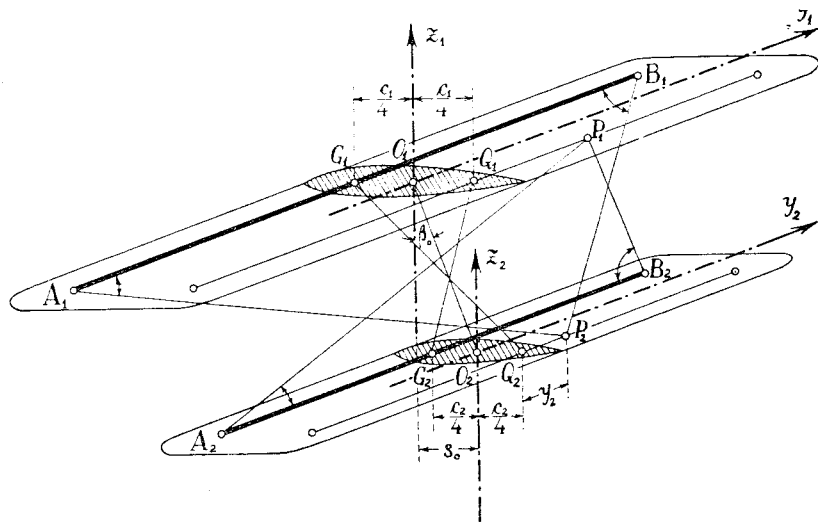


Fig. 34.3.

unde $\overline{Q_1 G_2}$ este egal cu distanța punctului P_1 la segmentul $\overline{A_2 B_2}$. Dacă punem mai departe

$$(34.23) \quad \begin{cases} \cos \widehat{P_1 A_2 B_2} = \frac{\frac{x_2 b_2}{2} + y_1}{\sqrt{\left(\frac{x_2 b_2}{2} + y_1\right)^2 + \overline{Q_1 G_2}^2}}, \\ \cos \widehat{P_1 B_2 A_2} = \frac{\frac{x_2 b_2}{2} - y_1}{\sqrt{\left(\frac{x_2 b_2}{2} - y_1\right)^2 + \overline{Q_1 G_2}^2}}, \end{cases}$$

se poate calcula viteza medie printr'o cuadratură simplă.

Efectuând calculele și înlocuind pe $\overline{Q_1 G_2}$ prin

$$(34.24) \quad \overline{Q_1 G_2}^2 = h_0^2 + \left(\frac{c_1 + c_2}{4} - s_0\right)^2$$

se găsește că viteza medie are aceeași expresie cu cea corespunzătoare biplanului de anvergură infinită, însă redusă cu factorul

$$(34.25) \quad g_{12} = \frac{1}{x_1 b_1} \left[\sqrt{\left(\frac{x_1 b_1 + x_2 b_2}{2}\right)^2 + h_0^2 + \left(\frac{c_1 + c_2}{4} - s_0\right)^2} - \sqrt{\left(\frac{x_1 b_1 - x_2 b_2}{2}\right)^2 + h_0^2 + \left(\frac{c_1 + c_2}{4} - s_0\right)^2} \right]$$

În acelaș fel se găsește pentru factorul de reducere al vitezei mijlocii din dreptul aripii inferioare (2), datorită aripii superioare (1)

$$(34.26) \quad g_{21} = \frac{1}{x_2 b_2} \left[\sqrt{\left(\frac{x_1 b_1 + x_2 b_2}{2}\right)^2 + h_0^2 + \left(\frac{c_1 + c_2}{4} + s_0\right)^2} - \sqrt{\left(\frac{x_1 b_1 - x_2 b_2}{2}\right)^2 + h_0^2 + \left(\frac{c_1 + c_2}{4} + s_0\right)^2} \right]$$

Cu aceste corecturi, formulele (14.61), pentru biplanul de anvergură finită, devin :

$$(34.27) \quad \gamma'_{12} = g_{12} \gamma_{12}, \quad \gamma'_{21} = g_{21} \gamma_{21},$$

unde γ_{12} și γ_{21} vor fi dați de expresiile (14.61), punând h_0 și s_0 în loc de h și s , acestea din urmă având pentru biplanul de anvergură infinită aceeași semnificație ca primele pentru biplanul de anvergură finită.

Rezultă în cele din urmă pentru circulația suplimentară :

$$(34.28) \quad \Gamma''_{12} = -k_{\lambda 1} \frac{c_1}{x_1} V_0 \frac{g_{12} \gamma_{12} \Gamma_2}{k_2 c_2 V_0}, \quad \Gamma''_{21} = -k_{\lambda 2} \frac{c_2}{x_2} V_0 \frac{g_{21} \gamma_{21} \Gamma_1}{k_1 c_1 V_0}$$

34.1.4. Circulațiile mijlocii totale. Să considerăm formulele (34.4), (34.21) și (34.28); putem scrie ecuațiile :

$$(34.29) \quad \begin{cases} \Gamma_1 = \Gamma_{11} + \Gamma'_{12} + \Gamma''_{12} = k_{\lambda 1} \frac{c_1}{x_1} V_0 \left[\alpha_1 - \left(\frac{2x_2 \sigma_1}{\pi b_1 V_0} + \frac{g_{12} \gamma_{12}}{\pi c_2 V_0} \right) \Gamma_2 \right], \\ \Gamma_2 = \Gamma_{22} + \Gamma'_{21} + \Gamma''_{21} = k_{\lambda 2} \frac{c_2}{x_2} V_0 \left[\alpha_2 - \left(\frac{2x_1 \sigma_2}{\pi b_2 V_0} + \frac{g_{21} \gamma_{21}}{\pi c_1 V_0} \right) \Gamma_1 \right], \end{cases}$$

care au o soluție simplă. Într'adevăr punând :

$$(34.30) \quad j_1 = k_{\lambda 2} \left(\frac{2\sigma_2 S_2}{\pi b_1 b_2} + \frac{g_{12} \gamma_{12}}{\pi x_2} \right), \quad j_2 = k_{\lambda 1} \left(\frac{2\sigma_1 S_1}{\pi b_1 b_2} + \frac{g_{21} \gamma_{21}}{\pi x_1} \right),$$

se găsească ușor următoarele relații:

$$(34.31) \quad \frac{\alpha_1 \Gamma_1}{k_{\lambda 1} c_1 V_0} = \frac{\alpha_1 - j_1 \alpha_2}{1 - j_1 j_2}, \quad \frac{\alpha_2 \Gamma_2}{k_{\lambda 2} c_2 V_0} = \frac{\alpha_2 - j_2 \alpha_1}{1 - j_1 j_2},$$

care au exact aceeași formă ca cele pentru biplanul de anvergură infinită (14.62), bine înțeles cu alți coeficienți.

34.2. Forțe rezultante

Aripile vor fi reprezentate, ca și în fig. 34.1, prin liniile portante $A_1 B_1$ și $A_2 B_2$, de lungime $\alpha_1 b_1$ respectiv $\alpha_2 b_2$, având o circulație medie constantă Γ_1 și Γ_2 . Fie u_{12} , u_{21} componentele după direcția curentului viteșelor induse mijlocii în dreptul aripilor superioară (1) și inferioară (2) și w_{12} , w_{21} componentele corespunzătoare după verticala ascendentă ($O_1 z_1$ și $O_2 z_2$). Se va putea scrie pentru portanță și rezistență, respectiv:

$$(34.32) \quad \begin{cases} P_1 = \rho(V_0 + u_{12}) \Gamma_1 \alpha_1 b_1, & R_1 = R_{01} + R_{11} - \rho w_{12} \Gamma_1 \alpha_1 b_1, \\ P_2 = \rho(V_0 + u_{21}) \Gamma_2 \alpha_2 b_2, & R_2 = R_{02} + R_{22} - \rho w_{21} \Gamma_2 \alpha_2 b_2, \end{cases}$$

unde R_{01} , R_{02} sunt rezistențele de formă datorite frecării și desprinderilor pe extradados, iar R_{11} , R_{22} reprezintă rezistențele induse ale aripilor (1) și (2), considerate în stare izolată (monoplane).

Să determinăm acum viteșele induse; intervine însă o dificultate și anume: poziția liniilor portante $A_1 B_1$ și $A_2 B_2$.

În principiu vom relua raționamentul precedent; vârtejurile care înlocuiesc aripa vor fi situate în centrele de presiune, iar acțiunea reciprocă, în afară de interferența asupra circulației pe care am determinat-o mai sus pe o altă cale, se reduce la efectul viteșelor induse care vor afecta portanța și rezistența fiecărei aripi.

Pentru a evita nedeterminarea asupra poziției centrelor de presiune și ținând seama de profilele moderne de curbura foarte mică (aproape nulă) putem admite că aceste centre corespund cu focarele profilelor, adică sunt situate la sfertul din față al corzii. Această ipoteză definește deci pozițiile centrelor O_1 și O_2 reprezentând aripile (fig. 34.2).

Să revenim la viteșele induse și să observăm că vârtejurile libere ne dau următoarele componente verticale ale viteșelor induse mijlocii, după (34.11, 34.12 și 34.14):

$$(34.33) \quad \frac{w'_{12}}{V_0} = - \frac{2\alpha_2 \Gamma_2}{\pi b_1} \sigma_1, \quad \frac{w'_{21}}{V_0} = - \frac{2\alpha_1 \Gamma_1}{\pi b_2} \sigma_2.$$

În ceea ce privește vârtejurile legate, formula lui BIOT-SAVART ne dă ușor viteza într'un punct P_1 , datorită vârtejurii $A_2 B_2$; ea va fi normală pe planul $A_1 B_1 A_2 B_2$ (adică perpendiculară pe dreapta $O_1 O_2$) și egală cu

expresia următoare (fig. 34.1):

$$(34.34) \quad \frac{\Gamma_2}{4\pi D} \left[\cos \widehat{P_1 A_2 B_2} + \cos \widehat{P_1 B_2 A_2} \right] = \\ = \frac{\Gamma_2}{4\pi D} \left[\frac{\frac{\alpha_2 b_2}{2} + y_1}{\sqrt{\left(\frac{\alpha_2 b_2}{2} + y_1\right)^2 + D^2}} + \frac{\frac{\alpha_2 b_2}{2} - y_1}{\sqrt{\left(\frac{\alpha_2 b_2}{2} - y_1\right)^2 + D^2}} \right].$$

Printr'o integrală elementară luată pe toată anvergura $\alpha_1 b_1$, se obține:

$$(34.35) \quad V_{12} = \frac{\Gamma_2}{2\pi} \cdot \frac{1}{\alpha_1 b_1} \left[\sqrt{1 + \left(\frac{\alpha_1 b_1 + \alpha_2 b_2}{2h}\right)^2} \cos^2 \beta - \right. \\ \left. - \sqrt{1 + \left(\frac{\alpha_1 b_1 - \alpha_2 b_2}{2}\right)^2} \cos^2 \beta \right].$$

Introducând notațiile (34.13), rezultă pentru componentele u_{12} și w''_{12} :

$$(34.36) \quad u_{12} = \frac{\Gamma_2 \cos \beta}{2\pi \alpha_1 b_1} (p - q), \quad w''_{12} = \frac{\Gamma_2 \sin \beta}{2\pi \alpha_1 b_1} (p - q).$$

Vom avea deasemenea

$$(34.37) \quad u_{21} = - \frac{\Gamma_1 \cos \beta}{2\pi \alpha_2 b_2} (p - q), \quad w''_{21} = - \frac{\Gamma_1 \sin \beta}{2\pi \alpha_2 b_2} (p - q)$$

și punând mai departe

$$(34.38) \quad \tau_x = \frac{\cos \beta}{4\alpha_1 \alpha_2} (p - q) \quad \text{și} \quad \tau_z = \frac{\sin \beta}{4\alpha_1 \alpha_2} (p - q),$$

se poate scrie în cele din urmă:

$$(34.39) \quad \begin{cases} V_1 = V_0 + u_{12} = V_0 \left(1 + \frac{2\Gamma_2 \alpha_2}{\pi b_1 V_0} \tau_x \right), \\ V_2 = V_0 + u_{21} = V_0 \left(1 - \frac{2\Gamma_1 \alpha_1}{\pi b_1 V_0} \tau_x \right), \\ w_{12} = w'_{12} + w''_{12} = - \frac{2\Gamma_2 \alpha_2}{\pi b_1} (\sigma_1 - \tau_z), \\ w_{21} = w'_{21} + w''_{21} = - \frac{2\Gamma_1 \alpha_1}{\pi b_2} (\sigma_2 + \tau_z). \end{cases}$$

Cu aceste rezultate se poate calcula portanța și rezistența după cum urmează.

34.2.1 Portanța. Relațiile (34.32) devin respectiv

$$(34.40) \quad \begin{aligned} P_1 &= \rho V_0 \left(1 + \frac{2\kappa_2 \Gamma_2}{\pi b_1 V_0} \tau_x \right) \kappa_1 b_1 \Gamma_1, \\ P_2 &= \rho V_0 \left(1 - \frac{2\kappa_1 \Gamma_1}{\pi b_2 V_0} \tau_x \right) \kappa_2 b_2 \Gamma_2, \end{aligned}$$

de unde se vede că portanța totală $P = P_1 + P_2$ este independentă de poziția relativă a aripiilor :

$$(34.41) \quad P = \rho V_0 (\kappa_1 b_1 \Gamma_1 + \kappa_2 b_2 \Gamma_2).$$

Mai departe, din formulele (34.31) se scoate

$$(34.42) \quad \begin{aligned} \kappa_1 b_1 \Gamma_1 &= k_{\kappa 1} S_1 \frac{\alpha_1 - j_1 \alpha_2}{1 - j_1 j_2} V_0, \\ \kappa_2 b_2 \Gamma_2 &= k_{\kappa 2} S_2 \frac{\alpha_2 - j_2 \alpha_1}{1 - j_1 j_2} V_0, \end{aligned}$$

care vor fi introduse în expresiile (34.40); rezultă în cele din urmă :

$$(34.43) \quad \begin{cases} \frac{P_1}{\rho V_0^2 S_1} = C_{z1} = 2k_{\kappa 1} \left(1 + 2k_{\kappa 2} \frac{S_2}{\pi b_1 b_2} \frac{\alpha_2 - j_2 \alpha_1}{1 - j_1 j_2} \tau_x \right) \frac{\alpha_1 - j_1 \alpha_2}{1 - j_1 j_2}, \\ \frac{P_2}{\rho V_0^2 S_2} = C_{z2} = 2k_{\kappa 2} \left(1 - 2k_{\kappa 1} \frac{S_1}{\pi b_1 b_2} \frac{\alpha_1 - j_1 \alpha_2}{1 - j_1 j_2} \tau_x \right) \frac{\alpha_2 - j_2 \alpha_1}{1 - j_1 j_2}. \end{cases}$$

Aceste formule fundamentale pot fi puse sub diferite forme, care ar putea fi utile pentru aplicații. Așa de exemplu, observând că termenul aditiv din paranteză este mic, se poate scrie aproximativ :

$$(34.44) \quad \begin{aligned} C_{z1} &\approx 2k_{\kappa 1} \frac{\alpha_1 - j_1 \alpha_2}{1 - j_1 j_2}, & C_{z2} &\approx 2k_{\kappa 2} \frac{\alpha_2 - j_2 \alpha_1}{1 - j_1 j_2}. \end{aligned}$$

Introducând aceste expresii în paranteză, și notând cu ω interinclinația, ceea ce ne permite să înlocuim α_2 prin $\alpha_2 = \alpha_1 + \omega$, vom avea :

$$(34.45) \quad \begin{cases} C_{z1} = 2k_{\kappa 1} \left(1 + \frac{S_2}{\pi b_1 b_2} \tau_x C_{z2} \right) \frac{1 - j_1 j_2}{(1 - j_2) \alpha_1 - j_1 \omega} = \\ = 2k_{\kappa 1} \left(1 + \frac{S_2}{\pi b_1 b_2} \tau_x C_{z2} \right) \frac{1 - j_1 j_2}{(1 - j_1) \alpha_2 - \omega}, \\ C_{z2} = 2k_{\kappa 2} \left(1 - \frac{S_1}{\pi b_1 b_2} \tau_x C_{z1} \right) \frac{1 - j_1 j_2}{(1 - j_2) \alpha_2 + j_2 \omega} = \\ = 2k_{\kappa 2} \left(1 + \frac{S_1}{\pi b_1 b_2} \tau_x C_{z1} \right) \frac{1 - j_1 j_2}{(1 - j_2) \alpha_1 + \omega}. \end{cases}$$

În fine, dacă indicăm, după (34.2), prin

$$(34.46) \quad K_{z1} = 2k_{\kappa 1} \alpha_1 \quad K_{z2} = 2k_{\kappa 2} \alpha_2$$

portanțele unitare ale planului superior (1) și inferior (2), luat fiecare în stare izolată (în monoplan) și dacă punem pe de altă parte

$$(34.47) \quad g_1 = \frac{1 - j_1 \left(1 + \frac{\omega}{\alpha_1} \right)}{1 - j_1 j_2}, \quad g_2 = \frac{1 - j_2 \left(1 - \frac{\omega}{\alpha_2} \right)}{1 - j_1 j_2},$$

se poate scrie :

$$(34.48) \quad \begin{cases} C_{z1} = g_1 \left(1 + \frac{S_2}{\pi b_1 b_2} \tau_x g_2 K_{z2} \right) K_{z1}, \\ C_{z2} = g_2 \left(1 - \frac{S_1}{\pi b_1 b_2} \tau_x g_1 K_{z1} \right) K_{z2}. \end{cases}$$

Pentru portanța unitară a biplanului, ținând seama de (34.41) și punând $S = S_1 + S_2$, vom avea următoarea formulă simplă :

$$(34.49) \quad C_{zb} = \frac{P}{\rho V_0^2 S} = g_1 \frac{S_1}{S} K_{z1} + g_2 \frac{S_2}{S} K_{z2},$$

care se poate obține de altfel direct din expresiile (34.48), scriind

$$(34.50) \quad C_{z0} S = C_{z1} S_1 + C_{z2} S_2.$$

Pentru un biplan cu aripiile egale ($\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha$, $b_1 = b_2 = b$), fără decalaj ($\beta = 0$), fără interinclinație ($\omega = 0$), vom avea $\kappa_1 = \kappa_2 = \kappa$, $\gamma_{12} = \gamma_2 = \gamma$, $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma$, $k_1 = k_2 = k$, $k_{\kappa 1} = k_{\kappa 2} = k_{\kappa}$; un calcul elementar ne dă numaidecât :

$$(34.51) \quad \begin{cases} j_{12} = j_{21} = j = k_{\kappa} \left(\frac{2\sigma}{\pi \lambda} + \frac{k\gamma}{\pi x} \right), & g_1 = g_2 = g = \frac{1}{1 + j}, \\ \tau_x = \frac{p - q}{4x^2} \approx \frac{x}{h} - 1, \\ C_{z1} = \left(1 + \frac{\tau_x}{\pi \lambda} \cdot \frac{K_z}{1 + j} \right) \frac{K_z}{1 + j} \approx \frac{K_z}{1 + j} \approx C_z, \\ C_{z2} = \left(1 - \frac{\tau_x}{\pi \lambda} \cdot \frac{K_z}{1 + j} \right) \frac{K_z}{1 + j} \approx \frac{K_z}{1 + j} = C_z, \\ C_{z0} = \frac{K_z}{1 + j} = C_z. \end{cases}$$

34.2.2. Rezistența. Punând R_{11} și R_{22} sub forma obișnuită (16.40) și remarcând apoi că putem scrie

$$(34.52) \quad (\alpha_1 b_1 \Gamma_1) (\alpha_2 b_2 \Gamma_2) = \frac{P_1}{\rho V_0 \left(1 + \frac{2\alpha_2 \Gamma_2}{\pi b_1 V_0} \tau_x\right)} \cdot \frac{P_2}{\rho V_0 \left(1 - \frac{2\alpha_1 \Gamma_1}{\pi b_2 V_0} \tau_x\right)} \approx \frac{P_1 P_2}{\rho^2 V_0^2};$$

formulele (34.32) ale rezistenței devin respectiv :

$$(34.53) \quad \begin{cases} R_1 = R_{01} + \frac{2}{\pi \rho V_0^2} \left[\frac{P_1^2}{b_1^2} + (\sigma_1 - \tau_z) \frac{P_1 P_2}{b_1 b_2} \right], \\ R_2 = R_{02} + \frac{2}{\pi \rho V_0^2} \left[\frac{P_2^2}{b_2^2} + (\sigma_2 + \tau_z) \frac{P_1 P_2}{b_1 b_2} \right]. \end{cases}$$

Se vede ușor, ținând seamă de relația $2\sigma = \sigma_1 + \sigma_2$ (34.15), că putem obține pentru rezistența totală expresia următoare :

$$(34.54) \quad R_b = R_0 + \frac{2}{\pi \rho V_0^2} \left[\frac{P_1^2}{b_1^2} + \frac{P_2^2}{b_2^2} + 2\sigma \frac{P_1 P_2}{b_1 b_2} \right],$$

care nu diferă de relația (33.20), găsită pe altă cale, decât prin termenul R_0 datorit rezistenței de formă.

Pentru coeficienții unitari, vom avea de asemenea, împărțind expresiile (34.53), respectiv prin $\frac{2}{\rho V_0^2 S_1}$ și $\frac{2}{\rho V_0^2 S_2}$:

$$(34.55) \quad \begin{aligned} C_{x1} &= C_{x01} + \frac{C_{z1}^2}{\pi \lambda_1} + (\sigma_1 - \tau_z) \frac{S_2}{\pi b_1 b_2} C_{z1} C_{z2}, \\ C_{x2} &= C_{x02} + \frac{C_{z2}^2}{\pi \lambda_2} + (\sigma_2 + \tau_z) \frac{S_1}{\pi b_1 b_2} C_{z1} C_{z2}, \end{aligned}$$

de unde rezultă coeficientul unitar al biplanului :

$$(34.56) \quad \begin{aligned} C_{xb} &= C_{x1} \frac{S_1}{S} + C_{x2} \frac{S_2}{S} = C_{x0b} + \frac{S_1}{S} \frac{C_{z1}^2}{\pi \lambda_1} \\ &+ \frac{S_2}{S} \frac{C_{z2}^2}{\pi \lambda_2} + 2\sigma \frac{S_1 S_2}{\pi b_1 b_2 S} C_{z1} C_{z2}. \end{aligned}$$

Pentru rezistența de formă am considerat o valoare medie :

$$(34.57) \quad S C_{x0b} = S_1 C_{x01} + S_2 C_{x02}.$$

Această formulă este identică cu cea a biplanului drept, fără decalaj (33.29), ceea ce trebuie de altfel să obținem deoarece, după teorema lui MUNK, rezistența totală este independentă de decalaj.

Pentru un biplan cu aripi egale, fără decalaj și fără interinclinație, vom avea de asemenea :

$$(34.58) \quad C_{x1} = C_{x2} = C_x = C_{x0} + \frac{C_z^2}{\pi \lambda} (1 + \sigma) = C_{xb}.$$

În raport cu un monoplan de alungire λ_m , diferența de rezistență va fi dată de o formulă analoagă cu (13.23),

$$(34.58 \text{ bis}) \quad C_{xb} - C_{xm} = \frac{C_z^2}{\pi} \left(\frac{1 + \sigma}{\lambda} - \frac{1}{\lambda_m} \right),$$

care ne va permite să trecem dela polara unui monoplan la polara biplanului.

34.3. Incidențe efective

Este util câteodată să se considere incidențele efective pentru fiecare aripă a biplanului. Am determinat de altfel în mod global aceste incidențe pentru calculul circulației (34.29), însă le vom pune mai jos sub o altă formă, similară cu cea a monoplanului.

Așa de exemplu, notând cu α_{12} unghiul total indus în dreptul aripii superioare (1), datorit prezenței aripii inferioare (2) și cu α_{21} , cel în dreptul aripii inferioare (2), datorit prezenței aripii superioare (1), vom pune, după (34.29) :

$$(34.59) \quad \alpha_{12} = \left(\frac{2\sigma_1 \alpha_2}{\pi b_1} + \frac{k_1 \gamma_1}{\pi c_2} \right) \frac{\Gamma_2}{V_0}, \quad \alpha_{21} = \left(\frac{2\sigma_2 \alpha_1}{\pi b_2} + \frac{k_2 \gamma_2}{\pi c_1} \right) \frac{\Gamma_1}{V_0}.$$

Se poate deci considera fiecare aripă izolată, cu condiția ca incidențele geometrice aparente să fie micșorate în consecință :

$$(34.60) \quad \alpha'_1 = \alpha_1 - \alpha_{12}, \quad \alpha'_2 = \alpha_2 - \alpha_{21}.$$

Să notăm cu α_{1e} și α_{2e} unghiurile efective ale celor două aripi ; vom putea pune ca și pentru aripile monoplane (19.10) :

$$(34.61) \quad \alpha_{1e} = \alpha_1 - \alpha_{12} - (1 + \tau_1) \frac{C_{z1}}{\pi \lambda_1}, \quad \alpha_{2e} = \alpha_2 - \alpha_{21} - (1 + \tau_2) \frac{C_{z2}}{\pi \lambda_2}.$$

Pentru a explicita pe α_{12} și α_{21} în funcție de portanțele unitare C_{z1} și C_{z2} , vom pune aproximativ

$$(34.62) \quad \frac{\Gamma_1}{V_0} = \frac{P_1}{\rho V_0^2 \alpha_1 b_1} = \frac{c_1}{2\alpha_1} C_{z1}, \quad \frac{\Gamma_2}{V_0} = \frac{P_2}{\rho V_0^2 \alpha_2 b_2} = \frac{c_2}{2\alpha_2} C_{z2}$$

și notând cu Σ_1 și Σ_2 , respectiv

$$(34.63) \quad \begin{cases} \Sigma_1 = \frac{b_2}{b_1} \sigma_1 + \frac{k_1 \gamma_1}{2} \cdot \frac{\lambda_2}{\alpha_2}, \\ \Sigma_2 = \frac{b_1}{b_2} \sigma_2 + \frac{k_2 \gamma_2}{2} \cdot \frac{\lambda_1}{\alpha_1}, \end{cases}$$

vom putea scrie în cele din urmă :

$$(34.64) \quad \begin{aligned} \alpha_{1e} &= \alpha_1 - (1 + \tau_1) \frac{C_{z1}}{\pi \lambda_1} - \Sigma_1 \frac{C_{z2}}{\pi \lambda_2}, \\ \alpha_{2e} &= \alpha_2 - (1 + \tau_2) \frac{C_{z2}}{\pi \lambda_2} - \Sigma_2 \frac{C_{z1}}{\pi \lambda_1} \end{aligned}$$

Dacă biplanul are aripi egale ($\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$), este fără decalaj ($\beta = 0$) și fără interinclinație ($\omega = 0$), punând

$$(34.65) \quad \Sigma_1 = \Sigma_2 = \Sigma = \sigma + \frac{k \gamma}{2} \cdot \frac{\lambda}{\alpha},$$

și observând că avem $C_{z1} = C_{z2} = C_z$ (34.51), se poate scrie :

$$(34.66) \quad \alpha_e = \alpha_b - (1 + \tau + \Sigma) \frac{C_z}{\pi \lambda}.$$

Să considerăm acum un monoplan de alungire λ_m , având aceeași portanță și prin urmare același unghi efectiv; să notăm cu α_m incidența sa geometrică, vom putea obține o formulă analogă cu cea a aripilor monoplane (19.14):

$$(34.67) \quad \alpha_b - \alpha_m = \frac{C_z}{\pi} \left(\frac{1 + \tau + \Sigma}{\lambda} - \frac{1 + \tau}{\lambda_m} \right),$$

care ne va permite să trecem de la un monoplan la un biplan drept cu aripi egale.

34.4 Câteva perfecționări ale teoriei

Pentru a elabora teoria biplanului de anvergură finită, a fost necesar să se aducă câteva simplificări importante care n'au alterat, după părerea noastră, rezultatele principale. Așa de exemplu, am înlocuit aripa perturbatoare printr'un vârtej situat în focarul profilului, ceea ce nu este riguros, însă reprezintă totuși o primă aproximație. Am neglijat în felul acesta influența repartiției în profunzime a circulației aripii perturbatoare, precum și grosimea și curbura acesteia.

Pentru biplanul de anvergură infinită am încercat să determinăm într'un mod aproximativ influența grosimii, însă n'am căutat să transpunem aceste rezultate la studiul biplanului de anvergură finită, calculele fiind foarte laborioase și lipsite de altfel de interes practic. Mijloacele actuale de investigație matematică nu ne permit deci să punem ușor la punct toată complexitatea problemei.

Însă ne putem mulțumi cu rezultatele căpătate, deoarece ele sunt suficiente pentru aplicații.

Sunt totuși două chestiuni pe care le-am trecut sub tăcere: mai întâi efectul asupra aripii izolate a repartiției în suprafață a vârtejurilor legate și apoi curbura curentului în dreptul aripii influențate datorită acțiunii aripii perturbatoare.

34.4.1. Curbura curentului în dreptul aripii în stare izolată. Am găsit deja că repartiția în suprafață a vârtejurilor legate are ca efect curbura curentului și micșorarea incidenței cu o valoare apreciabilă, în special pentru alungirile mici. Așa de exemplu, notând cu $\delta\alpha_1$ și $\delta\alpha_2$ micșorările incidențelor, am găsit mai înainte următoarele formule :

$$(34.68) \quad \delta\alpha_1 = 0,059 \frac{C_{z1}}{\lambda_1}, \quad \delta\alpha_2 = 0,059 \frac{C_{z2}}{\lambda_2}.$$

Unghiurile geometrice α_1 și α_2 sunt micșorate cu aceste valori care vor fi astfel introduse în expresiile (34.64) ale incidențelor efective.

Influența principală constă în modificarea coeficientului k_λ (34.2) Într'adevăr, dacă se ține seama de această corecție, unghiul α_λ al unei aripi de alungire λ trebuie să fie mărit cu $\Delta\alpha$ pentru a obține același C_z :

$$(34.69) \quad \alpha = \alpha_\lambda + \frac{0,059}{\lambda} C_z = \left(\frac{1}{2k_\lambda} + \frac{0,059}{\lambda} \right) C_z,$$

de unde rezultă :

$$(34.70) \quad C_z = 2k_\lambda \frac{\lambda}{\lambda + 0,12k_\lambda} \alpha = 2k_\lambda \alpha$$

și prin urmare coeficienții $k_{\lambda 1}$ și $k_{\lambda 2}$ ai expresiilor (34.29) vor fi înlocuiți respectiv prin

$$(34.71) \quad k'_{\lambda 1} = k_{\lambda 1} \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + 0,12k_{\lambda 1}}, \quad k'_{\lambda 2} = k_{\lambda 2} \frac{\lambda_2}{\lambda_2 + 0,12k_{\lambda 2}}.$$

34.4.2. Curbura curentului datorită acțiunii reciproce a aripilor. Pe o cale directă și riguroasă am înglobat în formulele (34.27) efectul curburii datorit vârtejurii legat de aripa perturbatoare; nu rămâne decât acțiunea vârtejurilor libere. Să revenim pentru aceasta la formulele (34.11), (34.12)

care ne dau respectiv $\frac{w_{12}}{V_0}$ și $\frac{w_{21}}{V_0}$. Aceste formule depind de decalajul β

(fig. 34.4).

Vitezele induse medii, care intră în calculele precedente, sunt cele corespunzătoare punctelor C_1 și C_2 , centrele de presiune ale aripilor. Inșă variația vitezei dealungul corzii, care n'are o influență sensibilă asupra acestor valori medii (presupuse cele ale punctelor C_1 și C_2), are totuși o acțiune importantă în ceea ce privește curbura curentului.

Intr'adevăr, după formula razei de curbură:

$$(34.72) \quad \frac{1}{\rho} = \frac{1}{V_0} \cdot \frac{\partial w}{\partial x},$$

revine să derivăm expresiile $\ln(p \pm \sin \beta)$ și $\ln(q \pm \sin \beta)$ (34.14) în funcție de x . Intr'un punct $P_1(x_1)$

pe aripa superioară (1), unghiul β este dat de următoarea relație (fig. 34.4):

$$(34.73) \quad \operatorname{tg} \beta = \frac{s - x_1}{h}, \quad d\beta = -\cos^2 \beta \frac{dx_1}{h},$$

ceea ce ne permite să scriem, ținând seama de (33.18):

$$(34.74) \quad \frac{\partial}{\partial x} \left(\ln \frac{p + \sin \beta}{q + \sin \beta} \right) = \frac{\cos^3 \beta}{h} \left[\frac{m^2 \sin \beta - p}{p(p + \sin \beta)} - \frac{n^2 \sin \beta - q}{q(q + \sin \beta)} \right].$$

Observând că $\sin \beta$ este suficient de mic în jurul centrului aripii, fie $\sin \beta_1$, se poate desvolta expresia precedentă și se obține succesiv:

$$(34.75) \quad \begin{aligned} & \frac{\cos^3 \beta_1}{h} \left[\left(\frac{1 + m^2}{1 + m^2 \cos^2 \beta_1} - \frac{1 + n^2}{1 + n^2 \cos^2 \beta_1} \right) \sin \beta_1 + \right. \\ & \left. + \left(\frac{n^2}{q_1^3} - \frac{m^2}{p_1^3} \right) \sin^2 \beta_1 + \frac{1}{q_1} - \frac{1}{p_1} \right] \approx \frac{\cos^3 \beta_1}{h} \left[\left(\frac{1}{q_1} - \frac{1}{p_1} \right) + \right. \\ & \left. + \left(\frac{m^2}{1 + m^2} - \frac{n^2}{1 + n^2} \right) \sin^3 \beta_1 - \left(\frac{m^2}{p_1^3} - \frac{n^2}{q_1^3} \right) \sin^2 \beta_1 \right] \approx \\ & \approx \frac{\cos^3 \beta_1}{h} \left(\frac{1}{q_1} - \frac{1}{p_1} \right). \end{aligned}$$

Intr'un mod analog, pentru aripa inferioară (2) se găsește exact același rezultat, dar se va înlocui indicele 1 prin indicele 2. Punând mai departe

$$(34.76) \quad v_1 = \frac{\cos^3 \beta_1}{4\alpha_1 \alpha_2} \left(\frac{1}{q_1} - \frac{1}{p_1} \right), \quad v_2 = \frac{\cos^3 \beta_2}{4\alpha_1 \alpha_2} \left(\frac{1}{q_2} - \frac{1}{p_2} \right),$$

raportându-ne la relațiile (34.11) și (34.12) și înlocuind, Γ_1 și Γ_2 prin valorile aproximative (34.62), vom avea, pentru variațiile incidentelor, expresiile următoare:

$$(34.77) \quad \left\{ \begin{aligned} \delta \alpha_{12} &= \frac{c_1}{\rho_{12}} \left(\frac{3}{4} - \frac{C_{m1}}{C_{z1}} \right) = \frac{2\alpha_2 \Gamma_2}{\pi b_1 V_0} \cdot \frac{v_1 c_1}{h} \left(\frac{3}{4} - \frac{C_{m1}}{C_{z1}} \right) = \\ &= \frac{v_1}{\pi \lambda_1} \cdot \frac{c_2}{h} C_{z2} \left(\frac{3}{4} - \frac{C_{m1}}{C_{z1}} \right), \\ \delta \alpha_{21} &= \frac{c_2}{\rho_{21}} \left(\frac{3}{4} - \frac{C_{m2}}{C_{z2}} \right) = \frac{2\alpha_1 \Gamma_1}{\pi b_2 V_0} \cdot \frac{v_2 c_2}{h} \left(\frac{3}{4} - \frac{C_{m2}}{C_{z2}} \right) = \\ &= \frac{v_2}{\pi \lambda_2} \cdot \frac{c_1}{h} C_{z1} \left(\frac{3}{4} - \frac{C_{m2}}{C_{z2}} \right), \end{aligned} \right.$$

Trebue să observăm că pentru mici decalaje avem $\beta_2 \approx \beta_1 \approx \beta$ și în consecință:

$$(34.78) \quad v_1 \approx v_2 \approx v = \frac{\cos^3 \beta \left(\frac{1}{q} - \frac{1}{p} \right)}{4\alpha_1 \alpha_2} \approx \frac{1}{4\alpha_1 \alpha_2} \left(\frac{1}{q} - \frac{1}{p} \right).$$

Aceste noi micșorări de incidente vor fi introduse în expresiile (34.29) pentru determinarea circulației, sau în expresiile unghiurilor efective (34.64).

Trebue să observăm că aceste adaosuri sunt destul de mici și putem să le neglijăm în aplicațiile practice.

34.4.3. Modificările momentelor aerodinamice. Momentele aerodinamice nu suferă modificări apreciabile în raport cu monoplanul, în afară de cele datorite curburii curentului. Să observăm întâi că, prin efectul distribuției în suprafață a vârtejurilor legate, o ușoară modificare intervine asupra coeficientului unitar de moment la portanță nulă, întocmai ca și la monoplan de altfel.

Prin acțiunea reciprocă a aripilor, curentul suferă o nouă curbură; o parte este datorită vârtejurilor legate, cealaltă parte vârtejurilor libere.

Din acest fapt rezultă modificări corespunzătoare la momentele aerodinamice. Totuși experiența ne arată că coeficienții unitari ai acestor momente suferă variații foarte reduse în raport cu cele ale aripilor în stare izolată (în monoplan), cel puțin pentru interplanurile obișnuite. Deaceia, trebue să recunoaștem că formulele teoretice nu prezintă un interes practic și că rezultatele obținute asupra aripii monoplane (în stare izolată) vor fi practic utilizate și pentru biplane.

BIBLIOGRAFIA CAP. VIII.

- 1) FUCHS R.: Aerodynamik, Band II, Julius Springer, Berlin 1935.
- 2) MUNK M.: Isoperimetrische Aufgaben aus der Theorie des Fluges, Dissertation Göttingen, 1919.
- 3) PRANDTL L.: Tragflügeltheorie II 3, Technische Berichte der Flugzeugmeisterei, III 7, pag. 309.
- 4) PRANDTL L.: Ergebnisse der Aerodynamischen Versuchsanstalt zu Göttingen, vol. II.

CAPITOLUL IX

INFLUENȚA FRONTIERELOR ASUPRA MIȘCĂRII ÎN JURUL SISTEMELOR PORTANTE

Fie că este vorba de influența fuselajului asupra caracteristicilor aerodinamice ale aripilor, fie de suflul elicei, fie încă de influența pereților liberi sau rigizi ai suflerilor aerodinamice, problema constă în a determina modificările mișcării datorită frontierei care separă cele două domenii diferite în ceea ce privește viteza curentului sau natura pereților despărțitori : rigizi sau liberi.

Odată aceste modificări determinate, se vor putea deduce ușor caracteristicile aerodinamice ale sistemelor portante, fie pornind dela cele obținute în domenii limitate pentru a ajunge la cele corespunzătoare domeniilor nelimitate, fie în fine pornind dela acestea din urmă pentru a ajunge la cele corespunzătoare domeniilor restrânse. Aceasta este tema paragrafelor următoare.

35. SCURGEREA ADITIVĂ DATORITĂ PREZENȚEI FRONTIERELOR

Să presupunem că un sistem portant este așezat în două domenii diferite, D și D' , separate printr'o suprafață de discontinuitate care constituie într'un fel frontiera.

La infinit amonte, vitezele sunt presupuse constante și paralele în fiecare domeniu, fie V_0 și V'_0 . Într'un punct oarecare, vitezele perturbatoare datorite sistemului portant sunt foarte mici față de V_0 , (respectiv V'_0), dacă acest punct este destul de departe de sistem. În această ipoteză, se poate admite că frontierele formează o suprafață aproximativ cilindrică.

Aceasta este aproximația care se va face pentru suprafețele libere. Dacă este vorba de pereți rigizi, această ipoteză este satisfăcută automat. Forma pereților rigizi ar putea fi oarecare în cazul general, însă noi vom trata în cele ce urmează pereții cilindrici.

35.1. Condițiile la frontieră și formule fundamentale

Să considerăm cele două domenii D și D' , separate printr'o suprafață quasicilindrică, a cărei generatoare mijlocie este paralelă cu curentul general V_0 din domeniul D , respectiv V'_0 din domeniul D' . Să ducem într'un punct O al acestei frontiere cilindrice un plan tOn normal la vitesă și fie astfel C conturul secțiunii drepte (fig. 35.1). Drept axă Ot să luăm tangenta la contur iar pentru On normala la tangentă ; fie Ox , paralelă cu viteza, a treia axă a triedrului $Oxtn$. Planul xOn taie suprafața quasicilindrică F după o generatoare curbă, foarte apropiată de Ox după ipoteza admisă mai sus. Normala \bar{n}_F în punctul O al suprafeței este foarte vecină de normala \bar{n} la conturul C . Fie

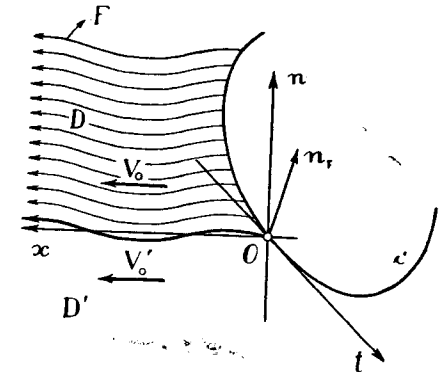


Fig. 35.1.

$$(35.1) \quad F(x, t, n) = 0$$

ecuația suprafeței și

$$\frac{\partial F}{\partial x}, \quad \frac{\partial F}{\partial t}, \quad \frac{\partial F}{\partial n},$$

cosinușii directori ai normalei la suprafață. Să notăm cu u, v_t, v_n , respectiv u', v'_t, v'_n vitezele perturbatoare în acelaș punct O pe frontieră ; componentele vitezei totale vor fi respectiv :

$$(35.2) \quad \begin{aligned} U &= V_0 + u, & V_t &= v_t, & V_n &= v_n, \\ U' &= V'_0 + u', & V'_t &= v'_t, & V'_n &= v'_n. \end{aligned}$$

Frontiera fiind formată de linii de curent, aceste viteze sunt paralele cu F , și în consecință perpendiculare în acelaș timp la \bar{n}_F , de unde rezultă :

$$(35.3) \quad \left\{ \begin{aligned} (V_0 + u) \frac{\partial F}{\partial x} + v_t \frac{\partial F}{\partial t} + v_n \frac{\partial F}{\partial n} &= 0, \\ (V'_0 + u') \frac{\partial F}{\partial x} + v'_t \frac{\partial F}{\partial t} + v'_n \frac{\partial F}{\partial n} &= 0. \end{aligned} \right.$$

Pentru punctele de pe frontieră, destul de depărtate de sistemul portant, cum este cazul punctului O , de exemplu, am admis că vitezele perturbatoare sunt foarte mici față de V_0 , respectiv V'_0 ; pe de altă parte, cosinușii directori $\frac{\partial F}{\partial x}$ și $\frac{\partial F}{\partial t}$ sunt foarte mici față de $\frac{\partial F}{\partial n}$ și prin urmare putem neglija $u \frac{\partial F}{\partial x}$, $v_t \frac{\partial F}{\partial t}$, $u' \frac{\partial F}{\partial x}$, $v'_t \frac{\partial F}{\partial t}$, obținându-se astfel

următoarea relație :

$$(35.4) \quad \frac{v_n}{V_0} = \frac{v'_n}{V'_0},$$

care este o primă condiție, valabilă pentru toate punctele frontierei F . Să observăm că v_n , respectiv v'_n , sunt aproximativ egale cu proiecțiile vitesei după normala la suprafață (\bar{n}_F).

Pentru pereții rigizi este ușor de văzut că viteza normală la perete este nulă, de unde rezultă următoarea condiție simplă,

$$(35.5) \quad v_n = 0,$$

care este de altfel condiția la limită pentru toate mișcările în jurul obstacolelor variate sau dealungul pereților rigizi immobili.

Această relație ar putea fi dedusă din expresia (35.4) presupunând că perețele rigid este echivalent cu o valoare infinită a vitesei.

O altă condiție rezultă din ecuația lui BERNOULLI. Intr'adevăr, frontiera este formată din linii de curent în care constanta lui BERNOULLI este aceeași, dela infinit amonte până la infinit aval.

Rezultă, prin urmare, pe punctele frontierei, următoarele relații :

$$(35.6) \quad \begin{cases} p + \frac{\rho}{2} [(V_0 + u)^2 + v_i^2 + v_n^2] = p_0 + \frac{\rho}{2} V_0^2, \\ p' + \frac{\rho}{2} [(V'_0 + u')^2 + v_i'^2 + v_n'^2] = p_0 + \frac{\rho}{2} V_0'^2, \end{cases}$$

unde prima corespunde la suprafața care limitează domeniul D iar a doua la suprafața care limitează domeniul D' .

Pentru o mișcare staționară frontiera este în echilibru și în consecință presiunea de o parte și de alta, pe ambele fețe, este aceeași

$$(35.7) \quad p = p'.$$

Rezultă din (35.6), neglijând pătratele viteselor perturbatoare, acestea fiind foarte mici în raport cu V_0 sau V'_0 , o a doua condiție, care trebuie să fie satisfăcută la frontieră :

$$(35.8) \quad V_0 u = V'_0 u'.$$

În cele două domenii D și D' mișcarea este irotațională, ea derivă deci dintr'un potențial de viteze φ , respectiv φ' și prin urmare

$$(35.9) \quad u = \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad u' = \frac{\partial \varphi'}{\partial x}.$$

Observând pe de altă parte că la infinit amonte valorile lui φ și φ' se reduc la constante arbitrare care se pot lua egale cu zero, putem integra ecuația (35.8) și obține o formulă mai generală

$$(35.10) \quad V_0 \varphi = V'_0 \varphi'.$$

Dacă V'_0 este egală cu zero, dacă este vorba deci de un jet (domeniul D) într'un mediu fluid imobil (domeniul D'), rezultă din expresia (35.8) următorul rezultat remarcabil :

$$(35.11) \quad u = 0;$$

din expresia (35.4), se deduce pe de altă parte :

$$(35.12) \quad v'_n = 0,$$

ceea ce indică, în conformitate cu realitatea de altfel, că nu există mișcare în domeniul D' .

Se găsește un rezultat analog interpretând relația (35.8) pentru cazul pereților rigizi ($V'_0 = \infty$). Intr'adevăr, produsul $V_0 u$ fiind finit, se găsește în mod necesar :

$$(35.13) \quad u' = 0,$$

relație care are aceeași semnificație ca și în cazul jetului fluid, adică nu există mișcare perturbatoare în spațiu, dincolo de pereții rigizi.

35.2. Rezistența indusă

Prin analogie cu cazul fluidului nelimitat, care ne-a condus la teoremele lui MUNK, putem stabili aceeași relație între energia cinetică și rezistența indusă ; însă, din cauza frontierelor, este mult mai comod de a urma o cale diferită de cea folosită în primul caz. Fie într'adevăr, $Oxyz$ un sistem de axe, cu Ox paralelă la viteza V_0 a curentului și frontiera quasi-prismatică F a cărei generatoare este deasemenea paralelă aproximativ cu V_0 (fig. 35.2). Să presupunem că un sistem portant Σ este așezat în acest curent ; în spatele sistemului se desprind vârtejuri libere care sunt paralele aproximativ cu V_0 .

Rezultă din acest fapt și din constrângerile datorite frontierei o viteză perturbatoare, ale cărei componente după cele trei axe sunt respectiv u , v , w . Foarte departe în aval, influența lui Σ (sistemul de vârtejuri legate) este nulă și viteza axială u este tot nulă. Nu rămân decât componentele v și w , ale căror valori limită vor fi notate prin :

$$(35.14) \quad (v)_{x=\infty} = v_\infty, \quad (w)_{x=\infty} = w_\infty.$$

Vitezele de intrare și de ieșire prin secțiunile situate la $-\infty$ și $+\infty$ sunt egale cu V_0 ; aceste două secțiuni sunt prin urmare egale.

Să aplicăm teorema impulsului la masa fluidă cuprinsă între aceste două secțiuni și frontiera F .

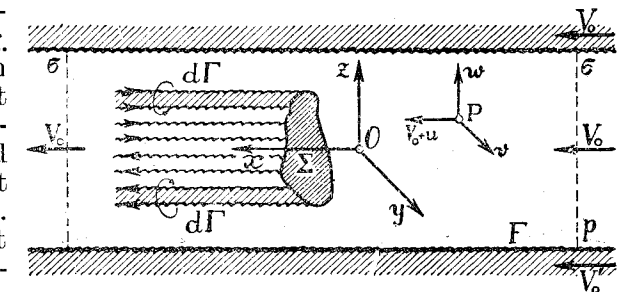


Fig. 35.2

Impulsul în direcția lui Ox fiind același, la intrare și la ieșire, rezistența indusă (abstracție făcând de frecare și de desprinderile din spate) va fi în echilibru cu rezultanta presiunilor în aceeași direcție.

Notând cu p_0 presiunea la $-\infty$, cu p presiunea într'un punct oarecare al curentului, cu $V_0 + u, v, w$, componentele vitesei după cele trei axe ale sistemului de referință, formula lui BERNOULLI ne dă :

$$(35.15) \quad p + \frac{\rho}{2} \left[(V_0 + u)^2 + v^2 + w^2 \right] = p_0 + \frac{\rho}{2} V_0^2,$$

de unde rezultă o diferență de presiune față de cea dela infinit amonte :

$$(35.16) \quad \delta p = p - p_0 = -\frac{\rho}{2} (2V_0 u + u^2 + v^2 + w^2),$$

care devine la infinit aval, unde $u = 0$,

$$(35.17) \quad (\delta p)_{+\infty} = -\frac{\rho}{2} (v_\infty^2 + w_\infty^2).$$

Integrând această expresie pe toată secțiunea σ , vom obține rezultanta presiunilor orizontale :

$$(35.18) \quad R_p = \frac{\rho}{2} \int_{\sigma} (v_\infty^2 + w_\infty^2) d\sigma.$$

Pe frontiera F , presiunile sunt riguros normale la Ox în cazul pereților rigizi și în consecință nu există componente paralele cu Ox ; ele sunt aproximativ perpendiculare pe această direcție în cazul pereților liberi și prin

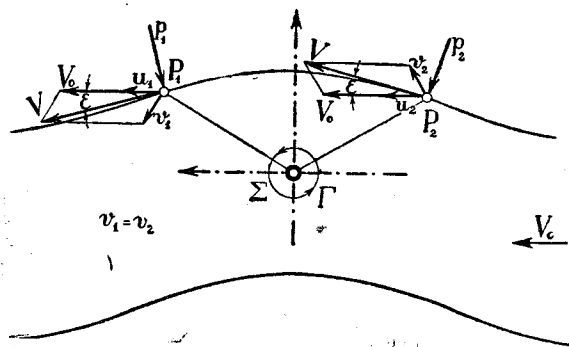


Fig. 35.3.

urmare se pot neglija de asemenea componentele orizontale. În acest din urmă caz, trebuie să observăm de altfel un oarecare caracter de simetrie față de poziția sistemului portant care justifică această presupunere. Într'adevăr, admitând pentru simplificare că sistemul portant este concentrat într'o linie portantă normală pe curent, marcată de urma sa Σ pe fig. 35.3, vitezele v_1 și v_2 , induse

de această linie portantă în două puncte simetrice P_1 și P_2 , sunt egale, precum și componentele lor orizontale u_1 și u_2 ,

$$(35.19) \quad u_1 = u_2$$

Observând din nou că vitezele perturbatoare sunt mici față de V_0 , putem neglija pătratele acestor viteze în expresia (35.15) și scrie astfel, pentru presiunile p_1 și p_2 :

$$(35.20) \quad p_1 = p_0 - \rho V_0 u_1 = p_0 - \rho V_0 u_2 = p_2.$$

Să remarcăm pe de altă parte că direcțiile de acțiune ale presiunilor sunt aproximativ simetrice față de un plan vertical; rezultă din acest fapt că proiecțiile orizontale au o rezultantă nulă.

În concluzie deci, nu rămâne decât rezultanta orizontală indicată de expresia (35.18); ea este egăă cu rezistența indusă și se poate scrie în consecință :

$$(35.21) \quad R_i = \frac{\rho}{2} \int_{\sigma} (v_\infty^2 + w_\infty^2) d\sigma,$$

de unde se vede că rezistența indusă nu depinde decât de distribuția vârtejurilor libere la infinit aval și în consecință de distribuția circulației și nu de poziția elementului portant în lungul axei Ox .

Trebuie să observăm că relația (35.17) revine la cea deja stabilită anterior pentru fluidul nelimitat, privitoare la energia cinetică. Prin urmare, multiplicând cei doi membri ai expresiei (35.17) cu V_0 , este ușor de văzut că al doilea membru reprezintă în acest caz energia cinetică a jetului fluid și că relația (16.6) este generală și se poate extinde și la domeniile limitate.

Din concluziile de mai sus, putem aduce deci toate elementele sistemului portant în același plan paralel cu yOz , fără a modifica valoarea rezistenței, păstrând bine înțelese aceeași circulație. Rezultă din acest fapt o simplificare remarcabilă pentru calculul viteșelor și al rezistenței induse. Putem considera deci sistemul portant concentrat în planul yOz și lua ca viteză indusă în dreptul acestui sistem, jumătatea aceleiași viteze la infinit :

$$(35.22) \quad v_0 = \frac{1}{2} v_\infty, \quad w_0 = \frac{1}{2} w_\infty.$$

Problema constă prin urmare în a cunoaște distribuția circulației ca și pentru cazul fluidelor nelimitate.

Astfel de exemplu, considerând o linie portantă S în planul yOz , a cărei circulație Γ , variabilă în lungul acestei linii, să fie cunoscută, se poate scrie conform cu teorema lui KUTTA-JUKOVSKI,

$$(35.23) \quad R_i = \rho \int_S \Gamma (v_0 dz + w_0 dy),$$

presupunând bine înțeles că viteza w_0 va fi dirijată în jos, în sensul negativ al axei Oz . Dacă linia portantă este o dreaptă paralelă la Oy , cum se prezintă adesea cazul în practică, regăsim relația precedentă (15.28) :

$$(35.24) \quad R_i = \rho \int_B^A \Gamma w_0 dy,$$

unde limitele de integrare sunt chiar extremitățile aripei redusă la linia portantă AB .

Astfel deci, formulele rezistenței induse nu diferă deloc de cele corespunzătoare în cazul unui fluid nelimitat și totuși problema nu este mai puțin greu de rezolvat, deoarece frontierele implică modificări ale distribuției circulației, pe care dorim tocmai să le determinăm. De pe acum însă, prin rezultatele obținute, problema rezistenței induse s'a redus la căutarea viteșelor perturbatoare la infinit aval: v_∞ și w_∞ . Aceasta constituie o simplificare considerabilă, deoarece mișcarea la infinit aval este plan paralelă și prin aceasta se supune mai ușor analizei matematice.

35.3. Potențial aditiv datorit prezenței frontierelor. Metoda imaginilor

Influența pereților implică mișcării din dreptul frontierelor satisfacerea condițiilor exprimate prin relațiile (35.4) și (35.10). Găsirea potențialelor φ și φ' este totuși foarte laborioasă și chiar imposibilă în cazul general. Se poate totuși simplifica problema, observând că pentru rezistența indusă este necesar să se cunoască numai viteșele perturbatoare la infinit aval: $u_\infty = 0, v_\infty, w_\infty$.

Intr'un plan paralel cu yOz mișcarea este plană și frontiera se reduce la un contur C , conținut în același plan. Dacă notăm cu n normala la contur,

cu φ_∞ și φ'_∞ potențialele la infinit aval, condițiile într'un punct P al frontierei (fig. 35.4) iau formele următoare:

$$(35.25) \quad \frac{1}{V_0} \left(\frac{\partial \varphi_\infty}{\partial n} \right)_P = \frac{1}{V'_0} \left(\frac{\partial \varphi'_\infty}{\partial n} \right)_P, \\ V_0 (\varphi_\infty)_P = V'_0 (\varphi'_\infty)_P.$$

Problema, redusă astfel la o scurgere plană, nu este mai puțin greu de rezolvat în cazul general.

Pentru a face cercetările mai comode, să punem

$$(35.26) \quad \varphi_\infty = \Phi + \Phi_a, \quad \varphi'_\infty = \Phi' + \Phi'_a,$$

unde Φ , respectiv Φ' , reprezintă potențialele datorite exclusiv sistemelor portante situate respectiv în domeniile D sau D' , în absența oricărei frontiere și Φ_a și Φ'_a potențialele aditive corespunzătoare, datorite exclusiv influenței pereților. Dacă observăm, pe de altă parte, că această ultimă mișcare este datorită exclusiv sistemului de vârtejuri libere, ale căror urme se găsește în interiorul conturului, în domeniul D (Σ), sau în exterior, în domeniul D' (Σ'), sau în fine în ambele domenii deodată, se poate rezolva ușor problema pentru anumite contururi (linii drepte corespunzătoare frontierelor plane, cerc corespunzător unei frontiere cilindrice, etc.), folosind metoda imaginilor. Este suficient pentru aceasta să rezolvăm problema pentru un tub de vârtej infinit de subțire, de intensitate Γ , în următoarele două cazuri: cilindru circular și suprafețe plane.

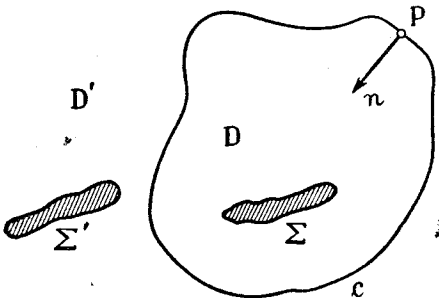


Fig. 35.4.

35.3.1. Cilindru circular. Fie un contur circular de rază r_0 raportat la un sistem de axe Oyz , având centrul drept origine; să presupunem că punctul A ($OA = a$), din interiorul cercului, sau punctul B ($OB = b$), din exterior, este urma tubului de vârtej de intensitate Γ (fig. 35.5).

Vom numi imaginea punctului A , în sensul pur formal al metodei imaginilor, pe care o vom folosi mai jos, punctele O , centrul cercului, și B , situat pe aceeași axă Oy , la o distanță b dată de relația

$$(35.27) \quad b = \frac{r_0^2}{a}.$$

În mod reciproc, imaginea punctului B va fi reprezentată prin O și punctul A , a cărui distanță la origine va fi dată de:

$$(35.28) \quad a = \frac{r_0^2}{b}.$$

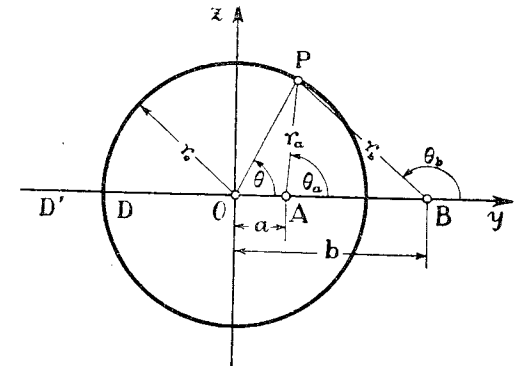


Fig. 35.5.

Considerând un punct P pe cerc, triunghiurile OAP și OPB sunt asemenea, deoarece unghiul în O este același și rapoartele laturilor, deduse din relațiile precedente, sunt egale:

$$(35.29) \quad \frac{OA}{OP} = \frac{a}{r_0} = \frac{OP}{OB} = \frac{r_0}{b}.$$

Rezultă deasemenea:

$$(35.30) \quad \widehat{OPA} = \widehat{OBP} = \pi - \theta_b, \quad \widehat{OPB} = \widehat{OAP} = \pi - \theta_a, \\ \frac{AP}{PB} = \frac{r_a}{r_b} = \frac{a}{r_0};$$

de unde se deduce mai departe:

$$(35.31) \quad \theta_a + \theta_b = \theta + \pi$$

și, în fine,

$$(35.32) \quad \frac{\sin \widehat{OAP}}{r_0} = \frac{\sin \theta_a}{r_0} = \frac{\sin \widehat{OPA}}{a} = \frac{\sin \theta_b}{a}.$$

Cu aceste relații se poate rezolva problema frontierelor, presupunând că există în fiecare punct O , A și B vârtejuri de intensitate diferită, dintre care unul singur real, cel așezat în A , în interiorul cercului, sau cel așezat în B , în exterior.

a) *Vârtej real în interior.* Pentru a determina mișcarea în interiorul cercului, în cazul unui vârtej real așezat în interior, în A , este ușor de văzut că potențialul Φ , în absența oricărei frontiere, va fi dat de următoarea expresie simplă :

$$(35.33) \quad \Phi = \frac{\Gamma}{2\pi} \theta_a + C,$$

unde C este o constantă arbitrară. Presupunem prin ipoteză că potențialul adițional Φ_a , datorit prezenței frontierei de contur circular, este dat de vârtejul $v_0\Gamma$, așezat în O și un altul $v_b\Gamma$, așezat în B . Deoarece mișcarea în interiorul cercului nu are singularități, în afară de punctul A , rezultă că $v_0 = 0$; rămâne vârtejul din B ,

$$(35.34) \quad \Phi_a = \frac{v_b\Gamma}{2\pi} \theta_b$$

și prin urmare vom avea :

$$(35.35) \quad \begin{aligned} \varphi_\infty &= \Phi + \Phi_a = \frac{\Gamma}{2\pi} (\theta_a + v_b \theta_b) + C = \\ &= \frac{\Gamma}{2\pi} [v_b \theta + (1 - v_b) \theta_a] + K, \end{aligned}$$

unde K este o constantă arbitrară.

În exteriorul cercului, unde nu există vârtej real, potențialul Φ' , în absența oricărei frontiere, se reduce la o constantă

$$(35.36) \quad \Phi' = C'.$$

Potențialul aditiv este datorit vârtejurilor $v'_0\Gamma$, așezat în O și $v'_a\Gamma$, așezat în A :

$$(35.37) \quad \Phi'_a = \frac{\Gamma}{2\pi} (v'_0 \theta + v'_a \theta_a);$$

rezultă prin urmare :

$$(35.38) \quad \varphi'_\infty = \Phi' + \Phi'_a = \frac{\Gamma}{2\pi} (v'_0 \theta + v'_a \theta_a) + C'.$$

Să aplicăm acum a doua relație (35.25). Pentru aceasta să notăm cu V_0 viteza din interior și V'_0 cea din exterior, și pentru a simplifica scrierea și să împărțim expresiile (35.35) și (35.38) prin $\frac{\Gamma}{2\pi}$; notând cu k și c' constantele rezultând din aceste împărțiri, vom putea scrie în fine :

$$(35.39) \quad [(1 - v_b) V_0 - v'_a V'_0] \theta_a + (v_b V_0 - v'_0 V'_0) \theta + k V_0 - c' V'_0 \equiv 0.$$

Constantele k și c' fiind arbitrare, le putem determina ușor în așa fel încât termenul constant al acestei expresii să devie nul; cum pe de altă parte această expresie trebuie să fie identic nulă pentru orice punct de pe cerc, rezultă următoarele condiții :

$$(35.40) \quad (1 - v_b) V_0 = v'_a V'_0, \quad v_b V_0 = v'_0 V'_0.$$

Pentru a satisface prima relație (35.25), este ușor de văzut că putem avea succesiv, prin aplicarea formulei lui BIOT-SAVART :

$$(35.41) \quad \begin{cases} \left(\frac{\partial \varphi_\infty}{\partial n} \right)_p = \frac{\Gamma}{2\pi} \frac{\sin \theta_b}{r_a} + \frac{v_b \Gamma}{2\pi} \frac{\sin \theta_a}{r_b} = \frac{\Gamma}{2\pi} \frac{a}{r_0} \frac{\sin \theta_a}{r_a} (1 + v_b), \\ \left(\frac{\partial \varphi'_\infty}{\partial n} \right)_p = \frac{v'_a \Gamma}{2\pi} \frac{\sin \theta_b}{r_a} = \frac{v'_a \Gamma}{2\pi} \frac{a}{r_0} \frac{\sin \theta_a}{r_a}; \end{cases}$$

de unde se deduce prin urmare :

$$(35.42) \quad \frac{1 + v_b}{V_0} = \frac{v'_a}{V'_0}.$$

Din relațiile (35.40) și (35.42), vom scoate în cele din urmă :

$$(35.43) \quad v_b = \frac{V_0^2 - V'_0{}^2}{V_0^2 + V'_0{}^2}, \quad v'_a = \frac{2V_0 V'_0}{V_0^2 + V'_0{}^2}, \quad v'_0 = \frac{V_0}{V'_0} \cdot \frac{V_0^2 - V'_0{}^2}{V_0^2 + V'_0{}^2}.$$

Înainte de a discuta aceste rezultate, să observăm mai întâi că efectul ultimului coeficient este nul. Într'adevăr, ansamblul vârtejurilor libere ale unui sistem portant dă o circulație totală nulă; prin urmare, vârtejului Γ așezat în A trebuie să-i corespundă un alt vârtej $-\Gamma$ așezat într'un punct oarecare în interiorul cercului, de unde rezultă că vârtejurile imagine din centru, $v'_0\Gamma$ și $-v'_0\Gamma$, se anulează reciproc.

Prin urmare, trebuie luat în considerație numai vârtejurile așezate în A și B ; este interesant de calculat în acest caz coeficienții v_b și v'_a în câteva cazuri particulare : $V_0 = V'_0$, $V'_0 = 0$ și $V'_0 = \infty$ (pereți rigizi).

În primul caz, $v_b = 0$ și $v'_a = 1$, ceea ce corespunde unui fluid indefinit, fără frontieră. În al doilea caz, $v_b = 1$, adică vârtejul-imagine așezat în B este de același semn cu cel real (A); iar $v'_a = 0$, ceea ce arată că în domeniul D' nu există mișcare, cum este cazul de altfel în realitate. În fine, pentru cazul pereților rigizi ($V'_0 = \infty$), avem $v_b = -1$, adică semnul vârtejului - imagine este contrar celui real (A) și mai departe $v'_a = 0$, ceea ce ne arată că nu există mișcare dincolo de frontieră.

b) *Vârtej real așezat în exterior.* Să presupunem acum că vârtejul real se găsește în exterior, în B ; se poate scrie, la fel ca și în cazul precedent

$$(35.44) \quad \begin{cases} \varphi_\infty = \frac{v_b \Gamma}{2\pi} \theta_b + C = \frac{\Gamma}{2\pi} (v_b \theta - v_b \theta_a) + K, \\ \varphi'_\infty = \frac{\Gamma}{2\pi} (\theta_b + v'_0 \theta + v'_0 \theta_a) + C' = \frac{\Gamma}{2\pi} [(1 + v'_0) \theta + (v'_a - 1) \theta_a] + K', \end{cases}$$

de unde rezultă o primă relație, prin aplicarea celei de a doua condiții (35.25):

$$(35.45) \quad (1 - v'_a) V'_0 = v_b V_0.$$

Pentru vitezele normale pe contur (după raza cercului), vom avea de asemenea:

$$(35.46) \quad \begin{cases} \left(\frac{\partial \varphi_\infty}{\partial n}\right)_P = \frac{v_b \Gamma}{2\pi} \cdot \frac{\sin \theta_a}{r_b}, \\ \left(\frac{\partial \varphi'_\infty}{\partial n}\right)_P = \frac{\Gamma}{2\pi} \cdot \frac{\sin \theta_a}{r_b} + \frac{v'_a \Gamma}{2\pi} \cdot \frac{\sin \theta_b}{r_a} = \frac{\Gamma}{2\pi} \cdot \frac{\sin \theta_a}{r_b} (1 + v'_a), \end{cases}$$

de unde rezultă, aplicând prima condiție (35.25), o a doua relație,

$$(35.47) \quad \frac{1 + v'_a}{V'_0} = \frac{v_b}{V_0}.$$

Comparând această relație cu (35.45), se găsește în fine:

$$(35.48) \quad v'_a = -\frac{V_0^2 - V_0'^2}{V_0^2 + V_0'^2}, \quad v_b = \frac{2 V_0 V_0'}{V_0^2 + V_0'^2}.$$

Aceste relații nu diferă de cele stabilite mai sus (35.43), decât prin schimbarea intervenită între domeniile D și D' , datorită poziției vârtejului real, în interiorul cercului, în A (domeniul D), sau în exterior, în B (domeniul D'). Deaceia, vom obține aceleași rezultate pentru cazurile particulare: a) $V = V_0$, b) $V_0 = 0$, c) $V_0 = \infty$, pentru care avem respectiv: a) $v'_a = 0$, $v_b = 1$, b) $v'_a = 1$, $v_b = 0$, c) $v'_a = -1$, $v_b = 0$.

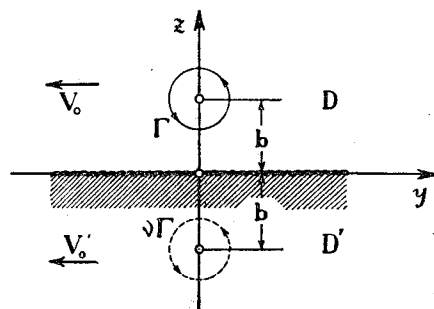


Fig. 35.6.

tiere plane. Fie o astfel de frontieră F și să presupunem că vârtejul real se găsește deasupra (fig. 35.6). Mișcarea în acest domeniu (D), cât și în cel de al doilea (D'), este datorită următoarelor potențiale complexe:

$$(35.49) \quad \begin{cases} f(x) = -\frac{i\Gamma}{2\pi} \left[\ln(x - ib) + v \ln(x + ib) \right], \\ f'(x) = -\frac{i\Gamma}{2\pi} v' \ln(x - ib), \end{cases}$$

unde $x = y + iz$ este variabila complexă iar coeficienții v și v' sunt dați de formulele identice:

$$(35.50) \quad v = \frac{V_0^2 - V_0'^2}{V_0^2 + V_0'^2}, \quad v' = \frac{2V_0V_0'}{V_0^2 + V_0'^2}.$$

Acești coeficienți devin respectiv: $v = 1$, $v' = 0$ pentru cazul pereților liberi ($V'_0 = 0$) și $v = -1$, $v' = 0$ pentru cazul pereților rigizi ($V'_0 = \infty$).

Dacă este vorba de două sau mai multe suprafețe plane, problema devine foarte complicată, fie că este vorba de metoda imaginilor sau de orice altă metodă accesibilă.

Trebuie să remarcăm mai întâi că imaginile nu trebuie să cadă în domeniul vârtejurilor reale, unde singurele singularități sunt reprezentate tocmai prin aceste vârtejuri.

Totuș în cazul a două suprafețe paralele (fig. 35.7), se poate folosi metoda imaginilor, cu oarecari dificultăți. Așa de exemplu, imaginea punctului O față de frontiera superioară (F_s) și față de cea inferioară (F_i) este formată de toată seria de puncte S_n, \dots, S_2, S_1 , pe partea superioară și I_1, I_2, \dots, I_n , pe partea inferioară.

Pentru a stabili potențialul în domeniul vârtejului real (D), pe care l-am eșezat în centru pentru a simplifica calculele, este necesar să punem în fiecare punct-imagină S_n , respectiv I_n , un vârtej $v^n \Gamma$. Într-adevăr, pentru mișcarea în interiorul benzii, în conformitate cu metoda imaginilor, în punctele S_1 și I_1 (primele imagini) intensitatea turbionară va fi afectată de coeficientul v ($\Gamma_1 = v\Gamma$). Punctul S_2 este imaginea punctului I_1 față de frontiera superioară; intensitatea vârtejului în acest punct va fi afectată deci de acelaș coeficient v față de cea a punctului I_1 ($\Gamma_2 = v^2\Gamma$). Tot astfel și pentru intensitatea turbionară în I_2 . Aplicând în continuare acelaș raționament, se găsește că în punctele S_n și I_n intensitatea va fi $\Gamma_n = v^n \Gamma$.

Notând mai departe cu $2h$ lățimea benzii, cu θ_n unghiul negativ pe care raza $S_n P$ îl face cu $S_n y_n$ și cu θ'_n unghiul pozitiv pe care $I_n P$ îl face cu $I_n y'_n$, observând pe de altă parte că avem:

$$(35.51) \quad \theta'_{n-1} = \theta_n,$$

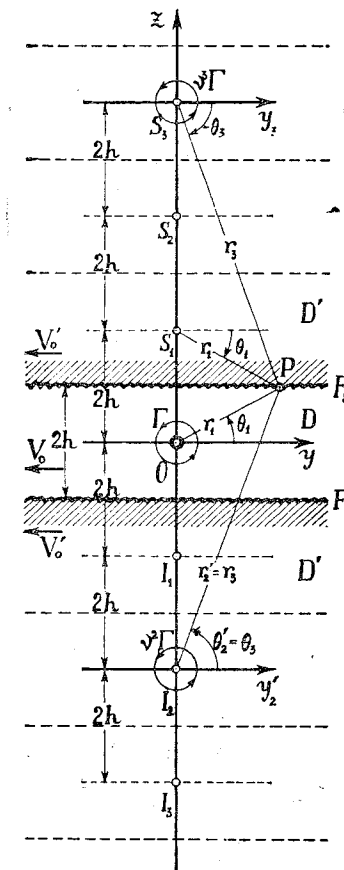


Fig. 35.7.

vom putea scrie pentru potențialul în P :

$$(35.52) \quad (\varphi_x)_P = \frac{\Gamma}{2\pi} (1 - \nu) \sum_1^{\infty} \nu^{n-1} \theta_n.$$

În domeniul D' , în partea superioară, mișcarea va avea același potențial pentru toată seria de vârtejuri $\nu^n \Gamma$, care se găsesc în partea inferioară a frontierei F_s — intensitățile fiind afectate cu coeficientul ν' — și potențialul respectiv va fi în acest caz:

$$(35.53) \quad (\varphi'_x)_P = \frac{\Gamma}{2\pi} \nu' \sum_1^{\infty} \nu^{n-1} \theta_n.$$

În mod analog, se va putea scrie pentru vitezele normale la frontieră:

$$(35.54) \quad \begin{cases} \left(\frac{\partial \varphi_x}{\partial n} \right)_P = \frac{\Gamma}{2\pi} (1 + \nu) \sum_1^{\infty} \frac{\nu^{n-1} \cos \theta_n}{r_n}, \\ \left(\frac{\partial \varphi'_x}{\partial n} \right)_P = \frac{\Gamma}{2\pi} \nu' \sum_1^{\infty} \frac{\nu^{n-1} \cos \theta_n}{r_n}. \end{cases}$$

Prin aplicarea condițiilor (35.25) rezultă, în cele din urmă, pentru ν și ν' formule identice cu cele corespunzătoare unei singure suprafețe de discontinuitate (35.50) sau cazului frontierei cilindrice (35.43) și (35.48), ceea ce ne conduce la concluzia că acești coeficienți ν și ν' au un caracter general.

Dacă pereții sunt liberi, $\nu=1$, $\nu'_0=0$; dacă sunt rigizi, $\nu=-1$, $\nu'_0=0$. Se regăsesc astfel condițiile necesare pentru pereții liberi și rigizi care se pot deduce de altfel direct într'un mod foarte ușor.

Același lucru va fi valabil pentru cazul unui dreptunghi cu pereți liberi sau rigizi; problema devine însă foarte dificilă și complicată dacă V'_0 este finită și diferită de zero. În acest caz, pentru mișcarea în interiorul dreptunghiului,

unde se găsește vârtejul real, trebuie să introducem în fiecare punct al seriei de imagini de două ori infinită, tuburi de vârtej de intensitate egală cu $\nu^n \Gamma$, astfel cum este indicat în fig. 35.8. Punând $\nu=1$ ($V'_0=0$) respectiv $\nu=-1$ ($V'_0=\infty$), se obține dispoziția vârtejurilor-imagină în cazul pereților liberi, respectiv rigizi. Treceam peste detaliile acestor probleme foarte complicate în cazul general, însă care găsește, pentru cazurile enumerate mai sus, o aplicație foarte importantă referitoare la corecțiunile pereților suflerilor aerodinamice.

ν^2	ν^2	ν^2	ν^2	ν^2
ν^2	ν	ν	ν	ν^2
ν^2	ν	1	ν	ν^2
ν^2	ν	ν	ν	ν^2
ν^2	ν^2	ν^2	ν^2	ν^2

Fig. 35.8.

36. ARIPĂ TRAVERSÂND FRONTIERE CILINDRICE SOLIDE

Rezultatele obținute în paragraful precedent se aplică la câteva probleme practice privind suprafețele sustentatoare. Astfel de exemplu, aripa care traversează un fuselaj cilindric indefinit este o problemă a cărei importanță nu scapă nimănui și al cărui aspect teoretic și practic va fi tratat în acest paragraf.

36.1. Aripa traversând un fuselaj indefinit

Influența fuselajului asupra aripii unui avion este o problemă foarte complexă, dacă avem în vedere diversitatea formelor și dimensiunilor fuselajului, ce nu pot fi încadrate în rezultatele actuale ale Aerodinamicii. De aceea, dificultățile se ocolesc reducând problema la o schemă simplă, susceptibilă de a fi tratată prin mijloacele obișnuite ale analizei. Astfel de exemplu, să considerăm un fuselaj cilindric indefinit paralel cu axa Ox ; la infinit aval, mișcarea în jurul secțiunii drepte a cilindrului fiind plană, este ușor să găsim această mișcare pentru anumite contururi simple, cum este cercul, elipsa, ovalul, etc.

36.1.1. Fuselaj indefinit cu secțiune circulară. Înlocuim aripa printr'o linie portantă dreaptă care trece prin axa cilindrului circular (fig. 36.1). Fie

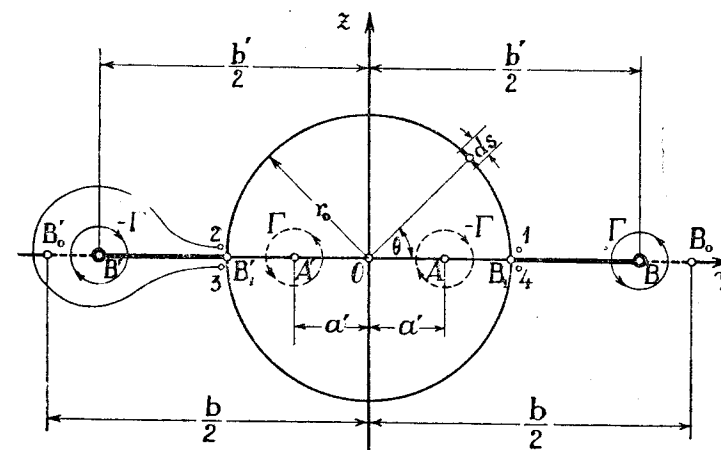


Fig. 36.1.

O punctul de intersecție care se ia drept origine a sistemului $Oxyz$ și b anvergura totală a aripii. Pentru a simplifica problema, vom presupune că circulația este repartizată uniform pe toată anvergura; însă în acest caz, în loc de pânza de vârtejuri libere, care se întinde pe toată anvergura înafara

fuselajului, vom considera două vârtejuri marginale, în B și B' , la o distanța $B'B$ egală cu b' , dedusă din expresia (21.44):

$$(36.1) \quad b' = \alpha b = b \frac{\pi}{4} \cdot \frac{A_1}{A_1 - A_3 + A_5 - A_7 + \dots},$$

unde $A_1, A_3, A_5, A_7, \dots$ sunt coeficienții dezvoltării în serie ai circulației, astfel cum a fost indicat de expresia (16.8). Bine înțeles că prezența fuselajului modifică ușor coeficientul α , însă se poate neglija această modificare cu atât mai mult cu cât diametrul fuselajului este în general foarte mic în raport cu anvergura. Se va vedea de altfel mai jos că se poate admite aceeași formulă (36.1) pentru α , chiar în cazul unui diametru destul de mare.

Insemnând prin Γ circulația, pe care am presupus-o constantă de-a lungul anvergurii, considerând două puncte A și A' așezate pe Oy , în partea pozitivă și negativă (fig. 36.1), la o distanță a' , dată de formula

$$(36.2) \quad a' = \frac{2r_0^2}{b'},$$

mișcarea la infinit aval în jurul cercului va fi determinată de următoru potențial complex:

$$(36.3) \quad F_x(X) = \varphi_x + i\psi_x = -\frac{i\Gamma}{2\pi} \ln \frac{X - \frac{b'}{2}}{X + \frac{b'}{2}} \cdot \frac{X + \frac{2r_0^2}{b'}}{X - \frac{2r_0^2}{b'}},$$

unde $X = y + iz$ este variabila complexă.

Vitesa indusă suplimentară datorită vârtejurilor imagini, observând că în dreptul aripii această viteză este jumătate din aceea corespunzătoare dela infinit aval, va fi dedusă ușor din formula lui BIOT-SAVART

$$(36.4) \quad \delta w = \frac{\Gamma}{4\pi} \left(\frac{1}{y - \frac{2r_0^2}{b'}} - \frac{1}{y + \frac{2r_0^2}{b'}} \right).$$

Integrând dela $y = r_0$ până la $y = \frac{b'}{2}$, se obține valoarea mijlocie:

$$(36.5) \quad \delta w_m = \frac{\Gamma}{2\pi(b' - 2r_0)} \ln \frac{(b' + 2r_0)^2}{b'^2 + 4r_0^2} = \frac{\Gamma}{2\pi(b' - 2r_0)} \sigma_m,$$

unde am notat prin σ_m expresia următoare:

$$(36.6) \quad \sigma_m = \ln \frac{(b' + 2r_0)^2}{b'^2 + 4r_0^2}.$$

Rezultă o mărire corespunzătoare a rezistenței induse:

$$(36.7) \quad \delta R_i = \frac{\rho \Gamma^2}{2\pi} \sigma_m = \frac{1}{2} \rho V_0^2 S \frac{C_z^2}{4\pi\alpha^2\lambda} \sigma_m.$$

această ultimă formă fiind obținută înlocuind Γ prin

$$(36.8) \quad \Gamma \approx \frac{P}{\rho V_0 b'} = \frac{V_0 S}{2\alpha b} C_z.$$

În ceea ce privește portanța, există pe de o parte o micșorare datorită unghiului indus suplimentar δi_m .

$$(36.9) \quad \delta i_m = \frac{\delta w_m}{V_0} = \frac{\Gamma}{2\pi(b' - 2r_0)V_0} \sigma_m = \frac{C_z \sigma_m}{4\alpha\pi\lambda \left(1 - \frac{2r_0}{b'}\right)},$$

iar pe de altă parte, o altă micșorare datorită fuselajului cilindricului.

Pentru prima, ținând seama de formula care dă portanța unitară pentru aripa singură, și anume $C_z = 2k_\lambda \alpha$, unde k_λ este dat de relația (16.44), se obține următoarea micșorare a portanței unitare:

$$(36.10) \quad \delta C_z = 2k_\lambda \delta i_m = 2k_\lambda \frac{C_z \sigma_m}{4\alpha\pi\lambda \left(1 - \frac{2r_0}{b'}\right)}.$$

Fie $2k'_\lambda$ panta curbei $C_z(C_z = 2k_\lambda \alpha)$; ea este foarte puțin diferită de cea corespunzătoare unei aripi singure:

$$(36.11) \quad k'_\lambda = \frac{k_\lambda}{1 + \frac{2k_\lambda \sigma_m}{4\alpha\pi\lambda \left(1 - \frac{2r_0}{b'}\right)}}.$$

Micșorarea portanței datorită fuselajului va fi determinată prin integrarea presiunilor pe cilindru nelimitat. Dacă neglijăm pătratul vitezei adiționale ($u^2 = v^2 = w^2 \approx 0$), ecuația (35.15) a presiunii se reduce la următoarea relație simplă:

$$(36.12) \quad p = p_0 - \rho V_0 u.$$

Să notăm prin dS suprafața elementară a cilindricului și prin ds un element al conturului circular C ; vom avea $dS = dx ds$ și rezultanta presiunilor pe cilindru devine succesiv:

$$(36.13) \quad \begin{aligned} P_C &= - \int_C \int_{-\infty}^{+\infty} p \sin \theta dx ds = - \rho V_0 \int_C dy \int_{-\infty}^{+\infty} u dx = \\ &= - \rho V_0 \int_C dy \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial \varphi}{\partial x} dx = - \rho V_0 \int_C \varphi_\infty dy. \end{aligned}$$

Pentru a efectua această ultimă integrală, trebuie observat mai întâi că vârtejul portant ia naștere din cilindru și că segmentele $B'B_1$ și B_1B rezizintă în realitate stratul de vârtėjuri libere. Prin urmare, potențialul φ_∞ care este conținut în lungul conturului circular, după forma (36.3) a potențialului, suferă în realitate salturi în B_1 și B_1 (fig. 36.1), între punctele inferioare și superioare ale pânzei de vârtėjuri (între punctele $1-1$, în B_1 și $2-2$, în B_1).

Astfel deci, efectuând integrala precedentă (36.13) de-a lungul conturului, de la 1 la 4, se va putea scrie :

$$(36.14) \quad P_C = -\rho l_0 \int_{iC} \varphi_\infty dy + 2\rho \Gamma_0 \Gamma,$$

unde φ_∞ reprezintă potențialul conținut dedus din expresia (36.3).

De-a lungul conturului funcția de curent este nulă ($\psi_\infty = 0$): se va putea pune în acest caz :

$$(36.15) \quad \int_C \varphi_\infty dy = \int_C (\varphi_\infty + i\psi_\infty) dy = \text{p.r.} \int_C F_\infty(X) (dy + i dz) = \\ = \text{p.r.} \int_C F_\infty(X) dX.$$

Avem pe de altă parte, aplicând formula lui CAUCHY :

$$(36.16) \quad \int_C F_\infty(X) dX = \left[X F_\infty(X) \right]_C - \int_C X \frac{dF_\infty}{dX} dX = \\ = \frac{i\Gamma}{2\pi} \int_C \left(\frac{X}{X - \frac{b'}{2}} - \frac{X}{X + \frac{b'}{2}} + \frac{X}{X + \frac{2r_0^2}{b'}} - \frac{X}{X - \frac{2r_0^2}{b'}} \right) dX = 2\Gamma \frac{2r_0^2}{b'},$$

de unde rezultă în cele din urmă valoarea portanței pe cilindru,

$$(36.17) \quad P = 2\rho \Gamma_0 \Gamma \left(r_0 - \frac{2r_0^2}{b'} \right) = \rho \Gamma_0 \Gamma (2r_0 - 2a').$$

Total se petrece deci ca și cum linia portantă uniform încărcată, este întreruptă între $A'A$, iar portanța totală ar fi astfel repartizată pe segmentele $B'A'$ și AB :

$$(36.18) \quad P_1 = \rho \Gamma_0 \Gamma \left(b' - 4 \frac{r_0^2}{b'} \right).$$

Pentru a calcula distribuția portanței pe lățimea cilindrului trebuie să observăm mai întâi că avem :

$$(36.19) \quad \varphi(-\theta) = -\varphi_\infty(\theta)$$

și prin urmare

$$(36.20) \quad \frac{P_C}{\rho l_0} = 2r_0 \Gamma - 2 \int_{+r_0}^{-r_0} \varphi_\infty dy = 2r_0 \Gamma + 2 \int_{-r_0}^{+r_0} \varphi_\infty dy,$$

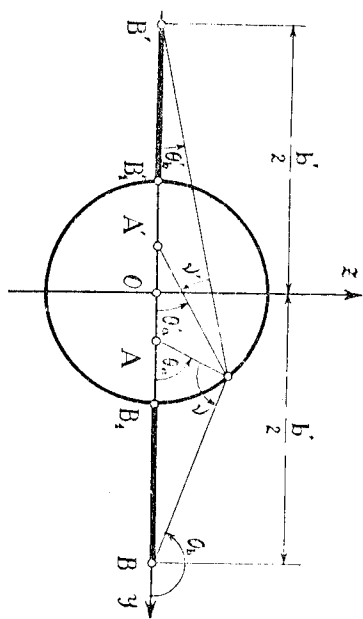


Fig. 36.2.

de unde rezultă (fig. 36.2) :

$$(36.21) \quad \frac{1}{\rho l_0} \frac{dP_C}{dy} = \Gamma_C = 2\varphi_\infty = \frac{\Gamma}{2\pi} (\theta_b - \theta_a + \theta_a - \theta_b) = \frac{\Gamma}{2\pi} (\nu + \nu').$$

Această formulă ne permite să trasăm distribuția portanței de-a lungul diametrului B_1B_1 .

36.1.2. Fuselaj neliniat de secțiune ovală. Printr-o alegere potrivită a funcției de transformare, se poate transforma conturul circular într'un contur oval simetric oarecare. Mișcarea în jurul conturului circular fiind stabilită mai sus, aceea în jurul conturului oval va fi dedusă cu ajutorul acestei funcții de transformare.

Se va putea studia astfel portanța și rezistența indusă totală pe un fuselaj de secțiune ovală; trecem peste amănuntele de calcul, care nu prezintă de altfel nicio dificultate specială.

36.2. Rezistența minimă a unei aripi cu fuselaj cilindric

Pentru o aripă singură, fără fuselaj, am găsit în paragrafele precedente că rezistența indusă este minimă dacă viteza indusă de-a lungul anvergurii este constantă, egală să spunem cu w_0 .

Această condiție nu mai este valabilă în cazul aripii cu fuselaj, deoarece portanța acestuia din urmă nu mai este datorită unui sistem portant care dă naștere vârtėjurilor libere din aval, după cum este cazul celor două segmente portante $B'B_1$ și B_1B .

Totuși, în compoziția portanței totale date, trebuie să se țină seama de portanța datorită cilindrului, așa cum am stabilit-o mai sus (36.17) Pentru rezistența minimă, distribuția circulației de-a lungul anvergurii.

(înafara fuselajului) urmează o lege pe care vrem tocmai s'o stabilim. Din cauza acestei variații, formula (36.17) nu mai este valabilă pentru ansamblul portanței, însă ea este perfect justă pentru două fâșii elementare de vârtejuri libere, de intensități $-\frac{d\Gamma}{dy}$ așezate în $+y$ și $-y$. Vom avea în

acest caz, înlocuind $\frac{b'}{2}$ din formula (36.17) prin y și Γ prin $-d\Gamma$,

$$(36.22) \quad dP_C = -2\rho V_0 d\Gamma \left(r_0 - \frac{r_0^2}{y} \right)$$

și prin urmare portanța totală pe cilindru, integrând prin părți, va avea expresia:

$$(36.23) \quad P_C = -2\rho V_0 \int_{r_0}^{\frac{b}{2}} \left(r_0 - \frac{r_0^2}{y} \right) d\Gamma = -2\rho V_0 \left[\Gamma \left(r_0 - \frac{r_0^2}{y} \right) \right]_{r_0}^{\frac{b}{2}} + 2\rho V_0 \int_{r_0}^{\frac{b}{2}} \Gamma \frac{r_0^2}{y^2} dy = 2\rho V_0 \int_{r_0}^{\frac{b}{2}} \Gamma \frac{r_0^2}{y^2} dy.$$

Cum pe de altă parte portanța pe aripa propriu zisă va fi dată de următoarea integrală simplă:

$$(36.24) \quad P_a = 2\rho V_0 \int_{r_0}^{\frac{b}{2}} \Gamma dy,$$

portanța totală rezultă imediat:

$$(36.25) \quad P_t = P_a + P_C = 2\rho V_0 \int_{r_0}^{\frac{b}{2}} \Gamma \left(1 + \frac{r_0^2}{y^2} \right) dy.$$

Pentru rezistența indusă, însemnând prin w viteza indusă în dreptul aripii, se poate scrie, deasemenea,

$$(36.26) \quad R_t = 2\rho \int_{r_0}^{\frac{b}{2}} \Gamma w dy$$

și condiția necesară și suficientă pentru ca rezistența indusă să fie minimă se deduce imediat:

$$(36.27) \quad w = w_0 \left(1 + \frac{r_0^2}{y^2} \right),$$

unde w_0 este o constantă pe care o vom determina mai jos.

În aceste condițiuni, rezistența indusă este dată de aceeași formulă ca și pentru o distribuție eliptică:

$$(36.28) \quad R_t = \frac{w_0}{V_0} P_t.$$

Să revenim la condiția (36.27) și să căutăm mișcarea care să satisfacă această distribuție a vitesei induse dealungul anvergurii. La infinit aval, unde mișcarea este plană, avem neapărat:

$$(36.29) \quad w_\infty = 2w = 2w_0 \left(1 + \frac{r_0^2}{y^2} \right)$$

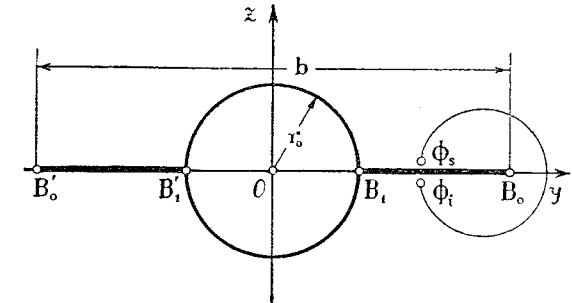


Fig. 36.3.

și problema constă în a găsi scurgerea plană din jurul cercului și din jurul stratului de vârtejuri B'_0B_1 și B_1B_0 (fig. 36.3).

Soluția problemei a fost dată de J. LENNERTZ; el găsește, într'adevăr, însemnând prin $F(X)$ potențialul complex:

$$(36.30) \quad F(X) = \Phi + i\Psi = -2iw_0 \sqrt{\left(X + \frac{r_0^2}{X} \right)^2 - \left(\frac{b}{2} + \frac{2r_0^2}{b} \right)^2} + 2iw_0 \left(X - \frac{r_0^2}{X} \right) = F_1 + F_2,$$

însemnând prin $F_1 = \Phi_1 + i\Psi_1$ și $F_2 = \Phi_2 + i\Psi_2$, primul și al doilea termen al potențialului complex. Rezultă mai departe viteza complexă:

$$(36.31) \quad U = \frac{dF}{dx} = -2iw_0 \frac{\left(X - \frac{r_0^2}{X} \right)^2 \left(1 + \frac{r_0^2}{X^2} \right)}{\sqrt{\left(X + \frac{r_0^2}{X} \right)^2 - \left(\frac{b}{2} + \frac{2r_0^2}{b} \right)^2}} + 2iw_0 \left(1 + \frac{r_0^2}{X^2} \right).$$

Se vede din aceste expresii, că:

1) viteza este nulă la infinit,

2) pe linia portantă $(z=0, r_0 < |y| < \frac{b}{2})$, primul termen din

(36.31) este real, vitezele sunt deci paralele la Oy și al doilea termen este identic cu condiția (36.29) a vitezelor dela infinit aval sau cu condiția (36.27) a vitezelor din dreptul aripii.

Aceste două condiții îndeplinite, scurgerea reprezentată prin (36.30) este prin urmare soluția căutată.

Este interesant de văzut că primul termen al potențialului, F_1 , reprezintă scurgerea în jurul cercului și al celor două segmente B'_0B_1 și B_1B_0 așezate într'un curent ascendent de viteză $2w_0$; al doilea termen, F_2 ,

reprezintă scurgerea în jurul cercului așezat într'un curent vertical de viteză $-2w_0$ (fig. 36.4).

Se vede, într'adevăr, că pentru punctele cercului ($X = r_0 e^{i\theta}$) și pentru cele ale anvergurii ($X = |y| < \frac{b}{2}$), F_1

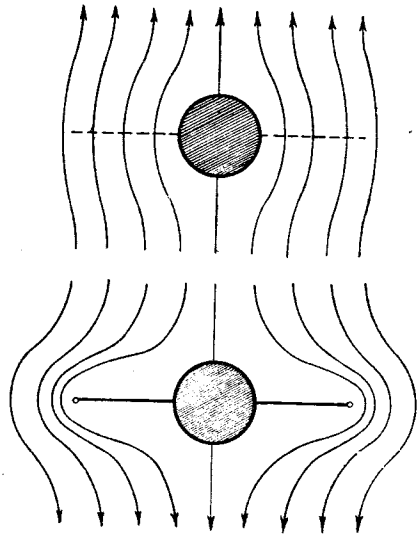


Fig. 36.4.

este real, deci $\Psi_1 = 0$ și prin urmare segmentele și cercul sunt linii de curent. Pentru a calcula circulația într'un punct P al anvergurii, să notăm prin Φ_s și Φ_i valorile potențialului în același punct pe fața superioară și inferioară; ținând seama pe de o parte de relația,

$$(36.32) \quad \Gamma = \Phi_s - \Phi_i$$

și observând pe de altă parte că semnul radicalului este pozitiv pentru fața superioară și negativ pentru fața inferioară,

$$(36.33) \quad \Phi_i = -\Phi_s.$$

se va putea scrie în cele din urmă :

$$(36.34) \quad \Gamma = 2\Phi_s = 2\Phi = 4w_0 \sqrt{\left(\frac{b}{2} + \frac{2r_0^2}{b}\right)^2 - \left(y + \frac{r_0^2}{y}\right)^2}$$

pentru circulație și

$$(36.35) \quad P_t = 2 \int_{r_0}^{\frac{b}{2}} \Gamma \left(1 + \frac{r_0^2}{y^2}\right) dy = 2\rho V_0 w_0 \pi \left(\frac{b}{2} - \frac{2r_0^2}{b}\right)^2$$

pentru portanță.

Dacă w_0 din această ultimă expresie este introdusă în relația (36.28), se obține :

$$(36.36) \quad R_t = \frac{P_t^2}{\frac{\rho}{2} V_0^2 \pi b^2 \left(1 - \frac{4r_0^2}{b^2}\right)^2},$$

sau încă

$$(36.37) \quad C_{xi} = \frac{C_z^2}{\pi \lambda} \cdot \frac{1}{\left(1 - \frac{4r_0^2}{b^2}\right)^2}.$$

În raport cu aripa eliptică există deci o mărire a rezistenței induse minime care nu este apreciabilă decât dacă raportul între diametrul fuselajului și anvergura aripii depășește 10%, ceea ce se întâmplă foarte rar în practică, în afară de cazuri speciale (bombe sburătoare, etc.).

36.3. Influența fuselajului asupra distribuției circulației

Dacă diametrul fuselajului este destul de mare în raport cu anvergura aripii, influența sa asupra distribuției circulației nu poate fi neglijată. Pentru a determina această influență vom remarca, mai întâi, că pe toată lățimea fuselajului nu există vârtejuri libere și prin urmare sistemul aripă-fuselaj poate fi asimilat cu o aripă care are circulația constantă în regiunea ocupată de fuselaj. Această condiție poate fi realizată presupunând că în acea regiune există o incidență suplimentară ε , a cărei variație satisface condiția impusă și care urmează să fie determinată.

Vom considera prin urmare o aripă izolată, de contur perfect determinat, având, pe lângă incidența sa proprie α , o incidență adițională ε pe partea centrală corespunzătoare lățimii fuselajului și o altă incidență adițională $\frac{w_f}{V_0}$ datorită influenței fuselajului pe partea din exteriorul acestuia*).

În felul acesta, ecuația circulației devine

$$(36.38) \quad \Gamma = kV_0c \left(\alpha + \varepsilon + \frac{w_f}{V_0} - \frac{w}{V_0}\right),$$

unde w este viteza indusă totală, corespunzătoare circulației.

Pentru simplificarea calculelor, circulația Γ se poate descompune în două părți și anume : circulația Γ' corespunzătoare aripii izolate, care satisface condiția de a fi constantă pe porțiunea ocupată de fuselaj și circulația suplimentară Γ_s datorită influenței fuselajului ($\Gamma = \Gamma' + \Gamma_s$). Punând, prin urmare,

$$(36.39) \quad \Gamma' = kV_0c \left(\alpha + \varepsilon - \frac{w'}{V_0}\right), \quad \Gamma_s = kV_0c \left(\frac{w_f}{V_0} - \frac{w_s}{V_0}\right),$$

unde w' și w_s sunt vitezele induse respective; circulațiile Γ' și Γ_s pot fi determinate separat, cu respectarea condițiilor date. Să considerăm în primul rând circulația Γ' ; incidența suplimentară ε trebuie să varieze astfel încât circulația într'o secțiune oarecare din regiunea aripii cuprinsă în interiorul fuselajului să fie constantă și egală cu circulația Γ_0 din secțiunea mediană. Observând mai departe că pe porțiunea de aripă considerată variația circulației se poate asimila cu o parabolă, putem admite și pentru ε , în mod aproximativ, tot o variație de aceeași formă

$$(36.40) \quad \varepsilon = \varepsilon_0 \left(\frac{4y^2}{d^2} - 1\right),$$

*) E. CABAFOLI și T. OROVEANU : Influența fuselajului asupra aripii de avion, Studii și cercetări de Mecanică Aplicată și Metalurgie, Nr. 1,2 1951.

în care d este diametrul fuselajului, iar ε_0 valoarea lui ε în secțiunea mediană ($y = 0$), pe care o vom determina din condiția ca circulația la frontiera fuselajului să fie egală cu circulația în secțiunea mediană. Inafara fuselajului, incidența suplimentară ε este evident nulă.

Aplicând mereu aceeași metodă, vom desvolta circulația în serie **FOURIER**

$$(36.41) \quad \Gamma' = 2b\Gamma_0 \sum_1^n A_n' \sin n\theta$$

și vom pune incidența indusă suplimentară sub forma

$$(36.42) \quad \varepsilon = \varepsilon_0 \left(\frac{\cos^2 \theta}{k^2} - 1 \right),$$

unde am notat prin k raportul dintre diametru și anvergură:

$$(36.43) \quad k = \frac{d}{b} = \cos \theta_1.$$

În acest fel, problema determinării circulației Γ' se poate trata ca o variație de incidență în lungul anvergurii și pentru a aplica metoda obișnuită de calcul este necesar să desvoltăm în serie **FOURIER** expresia $\varepsilon \sin \theta$, care va fi de forma

$$(36.44) \quad \varepsilon \sin \theta = \sum_0^p \varepsilon_{2p+1} \sin (2p + 1)\theta.$$

Un calcul simplu ne dă

$$(36.45) \quad \left\{ \begin{aligned} \varepsilon_1 &= \frac{2\varepsilon_0}{\pi} \left[\left(\frac{1}{4k^2} - 1 \right) \left(\frac{\pi}{2} - \theta_1 \right) - \frac{\sin 2\theta_1}{2} + \frac{1}{4k^2} \frac{\sin 4\theta_1}{4} \right], \\ \varepsilon_3 &= \frac{2\varepsilon_0}{\pi} \left[\frac{1}{4k^2} \left(\frac{\pi}{2} - \theta_1 \right) - \left(\frac{1}{4k^2} - 1 \right) \left(\frac{\sin 2\theta_1}{2} - \frac{\sin 4\theta_1}{4} \right) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{4k^2} \frac{\sin 6\theta_1}{6} \right], \dots \\ \varepsilon_{2p+1} &= \frac{2\varepsilon_0}{\pi} \left\{ \left(\frac{1}{4k^2} - 1 \right) \left[\frac{\sin 2(p+1)\theta_1}{2(p+1)} - \frac{\sin 2p\theta_1}{2p} \right] + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{4k^2} \left[\frac{\sin 2(p+2)\theta_1}{2(p+2)} - \frac{\sin 2(p-1)\theta_1}{2(p-1)} \right] \right\}, \dots \end{aligned} \right.$$

iar coeficienții A'_{2p+1} ai circulației Γ' se calculează apoi cu ajutorul ecuațiilor cunoscute (22.10) corespunzătoare aripilor cu incidență variabilă.

Să observăm că acești coeficienți pot fi priviți ca suma dintre coeficienții B'_n care se referă la aripa izolată și coeficienții b'_n care se introduc

pentru realizarea condiției de constanță a circulației în regiunea fuselajului ($A'_n = B'_n + b'_n$). Coeficienții B'_n se pot calcula prin urmare cu ajutorul ecuațiilor curente (18.5) pentru aripa cu incidență constantă, iar pentru coeficienții b'_n , care reprezintă numai un supliment, putem utiliza un sistem de ecuații simplificat, dedus din sistemul (22.10) prin suprimarea termenilor de ordin secundar:

$$(36.46) \quad \begin{cases} (\mu_0 + \beta_0 - \beta_2)b'_1 = -\mu_0\omega_1 \\ (3\mu_0 + \beta_0)b'_3 + (\beta_2 - \beta_4)b'_1 = -\mu_0\omega_3 \\ \dots \dots \dots \\ [(2p+1)\mu_0 + \beta_0]b'_{2p+1} + \beta_2 b'_{2p-1} + \beta_4 b'_{2p-3} = -\mu_0\omega_{2p+1} \end{cases}$$

unde

$$(36.47) \quad \omega_{2p+1} = \varepsilon_{2p+1} - \beta_2 \frac{\varepsilon_{2p+3}}{(2p+3)\mu_0 + \beta_0} - \beta_4 \frac{\varepsilon_{2p+5}}{(2p+5)\mu_0 + \beta_0}.$$

Să trecem acum la calculul circulației Γ_s care se va pune tot sub forma obișnuită:

$$(36.48) \quad \Gamma_s = 2b\Gamma_0 \sum_1^n a_n \sin n\theta.$$

Dacă indicăm cu $i_f = \frac{w_f}{\Gamma_0}$ incidența suplimentară datorită influenței fuselajului, această circulație suplimentară se va trata ca și cazul aripei cu incidență variabilă dealungul anvergurii.

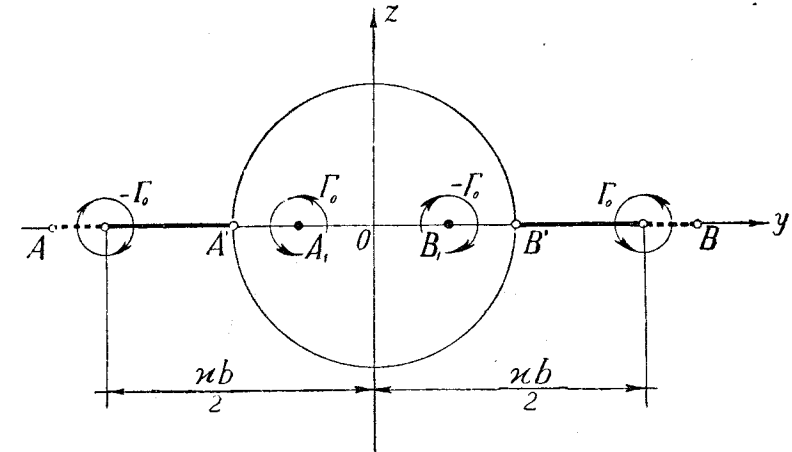


Fig. 36.5.

Expresia acestui unghi pentru exteriorul fuselajului se găsește ușor, considerând, ca și în cazurile anterioare, vârtejurile libere concentrate în

două nuclee de intensitate Γ_0 și luând imaginile acestora față de cerc (fig. 36.5). Obținem astfel imediat, dacă facem schimbarea de variabilă cunoscută, $2y = -b \cos \theta$,

$$(36.49) \quad i_f = \frac{w_f}{\Gamma_0} = -\frac{\alpha \Gamma_0}{\pi b \Gamma_0} \frac{k^2}{z^2 \cos^2 \theta - k^4}$$

Pentru interiorul fuselajului, prin analogie cu cazul precedent, vom considera pentru unghiul i_f o variație parabolică și anume

$$(36.50) \quad i_f = -\frac{\alpha \Gamma_0}{\pi b \Gamma_0} \left[i_0 \left(\frac{\cos^2 \theta}{k^2} - 1 \right) + \frac{1}{z^2 - k^2} \right]$$

astfel încât Γ_s să fie constantă în regiunea considerată. Constanta i_0 se va determina prin condiția ca valoarea circulației Γ_s la frontiera fuselajului să fie egală cu circulația în secțiunea mediană.

Pentru coeficientul α , care depinde de circulația totală Γ , vom lua o valoare aproximativă, pornind de la circulația Γ' ; în general, valoarea astfel obținută este suficient de exactă, așa că nu mai este necesar să refacem calculul.

Desvoltarea în serie FOURIER a expresiei $i_f \sin \theta$ conduce la calcule foarte laborioase și din această cauză am recurs la desvoltarea într'un polinom trigonometric de forma

$$(36.51) \quad i_f \sin \theta = f(\theta) = i_1 \sin \theta + i_3 \sin 3\theta + \dots + i_{2m+1} \sin (2m+1)\theta.$$

Dacă împărțim în r părți egale perioada 2π a acestui polinom, fiecare diviziune fiind egală cu

$$(36.52) \quad \theta_p = \frac{2\pi p}{r} \quad (p = 1, 2, \dots, r),$$

coeficienții rezultă din expresia următoare:

$$(36.53) \quad \frac{r}{2} i_q = \sum_{p=1}^r f_p \sin(q\theta_p); \quad \left(q=1, 3, 5, \dots, \frac{r}{2} - 1 \right)$$

unde f_p este valoarea funcției $f(\theta)$ pentru $\theta = \theta_p$.

Dacă luăm $r = 36$ și punctele de diviziune $\theta = 10p$, rezultă în virtutea simetriei,

$$(36.54) \quad 9i_q = 2 \sum_{p=1}^8 f_p (\sin 10pq) + f_9 \sin q \frac{\pi}{2}$$

cu $q = 1, 3, 5, \dots, 17$.

Să trecem mai departe la determinarea coeficienților $a_1, a_3, \dots, a_{2p+1}$; se poate utiliza iarăși sistemul de ecuații simplificat (36.46).

În felul acesta se pot calcula coeficienții $A_n = A'_n + a_n$ ai circulației totale Γ , care se poate pune astfel sub forma

$$(36.55) \quad \Gamma = \Gamma' + \Gamma_s = 2b\Gamma_0 \sum_1^n (A'_n + a_n) \sin n\theta = 2b\Gamma_0 \sum_1^n A_n \sin n\theta$$

unde $A'_n = B'_n + b'_n$ a fost dedus mai sus.

36.3.1. Exemplu de aplicație Pentru simplificare să considerăm o aripă eliptică cu un raport între diametrul fuselajului și anvergura aripii $k = 0,5$. Luând pentru μ_0 valoarea 0,348, circulația aripii izolate este

$$(36.56) \quad \Gamma_e = 2b\Gamma_0 \times 0,258 \alpha \sin \theta.$$

Mai departe, găsim pentru $\varepsilon \sin \theta$ desvoltarea

$$(36.57) \quad \varepsilon \sin \theta = \varepsilon_0 (-0,414 \sin \theta + 0,334 \sin 3\theta - 0,207 \sin 5\theta + 0,083 \sin 7\theta - 0,030 \sin 11\theta),$$

reprezentată de curba punctată din fig. 36.6, în comparație cu valoarea acestei expresiuni dedusă din relația (36.42).

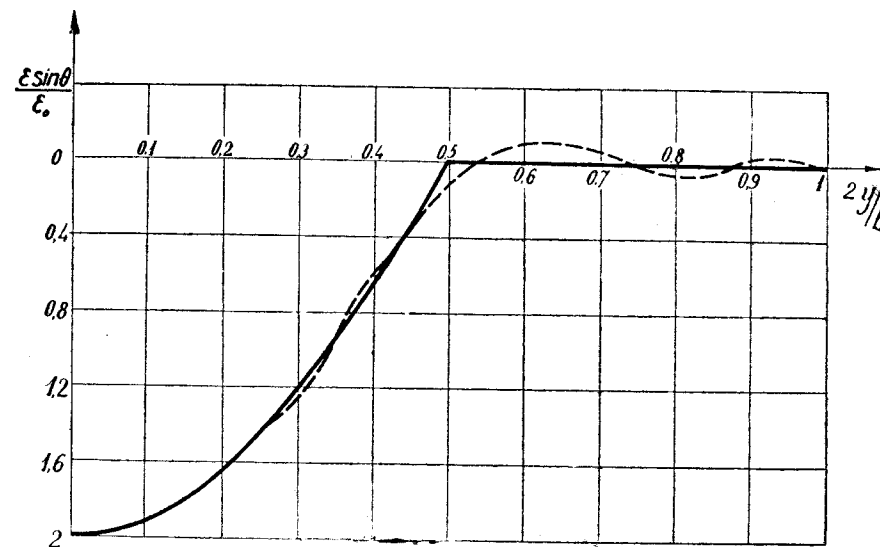


Fig. 36.6.

Calculând coeficienții circulației Γ' , găsim valorile

$$(36.58) \quad \begin{aligned} A'_1 &= +0,231 \alpha, & A'_5 &= -0,007 \alpha, \\ A'_3 &= +0,014 \alpha, & A'_7 &= +0,002 \alpha. \end{aligned}$$

Pentru a găsi acum circulația Γ_s , vom calcula coeficientul z așa cum am arătat mai sus; găsim astfel $z = 0,825$.

În felul acesta, dezvoltarea în polinom trigonometric a expresiei $i_f \sin \theta$ este:

$$(36.59) \quad i_f \sin \theta = -\frac{\Gamma_0}{bV_0} (0,359 \sin \theta - 0,084 \sin 3\theta - 0,050 \sin 5\theta + \\ + 0,063 \sin 7\theta - 0,018 \sin 9\theta - 0,024 \sin 11\theta - 0,028 \sin 13\theta)$$

iar curba reprezentativă este trasată în figura 36.6 bis, în comparație cu aceea dedusă din relațiile (36.49) și (36.50).

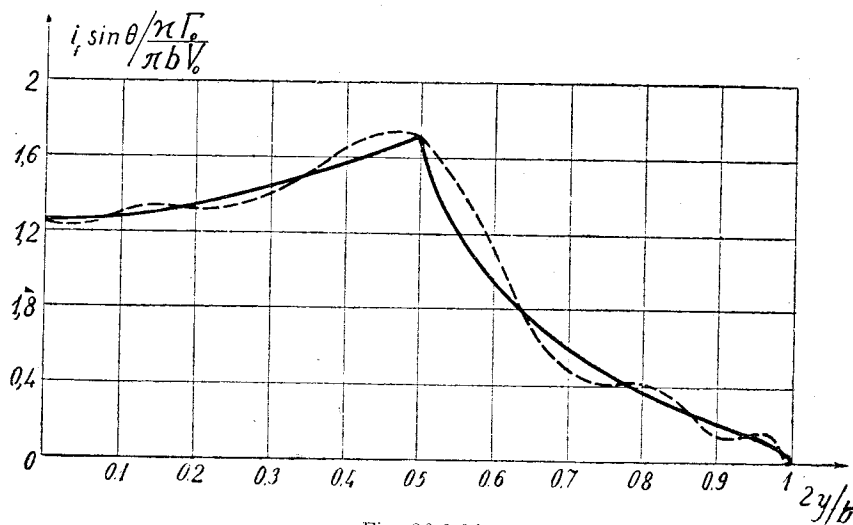


Fig. 36.6 bis.

Găsim astfel coeficienții circulației:

$$(36.60) \quad \begin{cases} a_1 = -0,031 \alpha, & a_9 = +0,0005 \alpha, \\ a_3 = +0,005 \alpha, & a_{11} = +0,0006 \alpha, \\ a_5 = +0,002 \alpha, & a_{13} = -0,0006 \alpha, \\ a_7 = -0,002 \alpha, & \end{cases}$$

de unde rezultă în cele din urmă pentru Γ , următorii coeficienți:

$$(36.61) \quad \begin{cases} A_1 = +0,200 \alpha, & A_5 = -0,005 \alpha, \\ A_3 = +0,019 \alpha, & A_7 = 0. \end{cases}$$

În fig. 36.7 am trasat variația circulației Γ_e și a circulației Γ în lungul anvergurii, aceasta din urmă completată în regiunea corespunzătoare fuselajului cu circulația acestuia dată de (36.21).

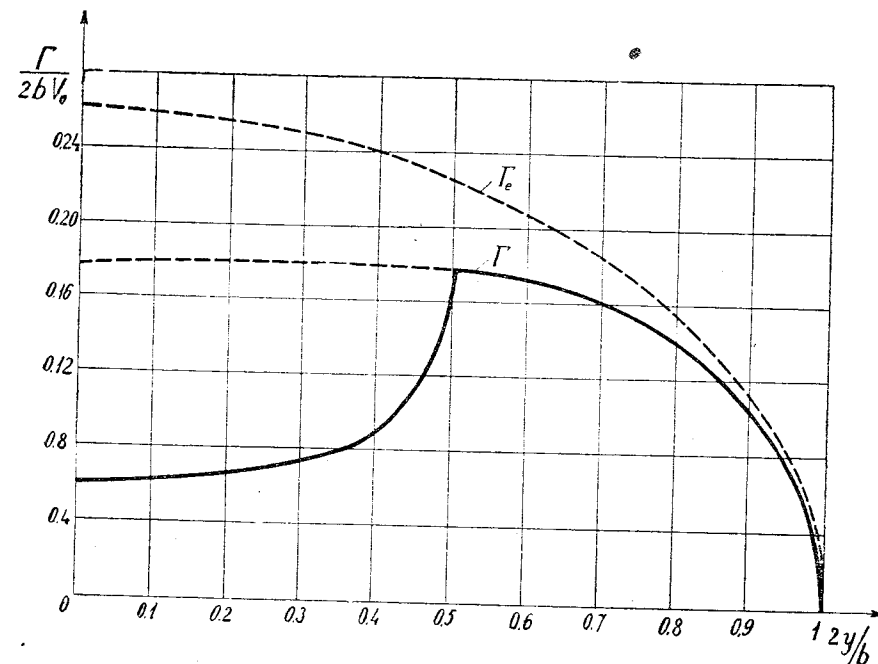


Fig. 36.7.

36.3.2. Calculul portanței și rezistenței induse totale. Pentru a găsi portanța totală a sistemului aripă-fuselaj, să remarcăm mai întâi că pentru aripa echivalentă, la care circulația este constantă pe porțiunea ocupată de fuselaj, portanța are expresia

$$(36.62) \quad P = \rho V_0 \int_{-\frac{b}{2}}^{+\frac{b}{2}} \Gamma dy = \frac{\rho}{2} V_0^2 \pi b^2 A_1.$$

Vom scădea din această portanță, partea corespunzătoare porțiunii ocupate de fuselaj și vom adăuga în schimb portanța fuselajului. Dacă ținem seama de faptul că circulația Γ (36.55) este constantă pe porțiunea cuprinsă de fuselaj și are valoarea

$$(36.63) \quad \Gamma_0 = 2bV_0 (A_1 - A_3 + A_5 - A_7 + \dots) = \frac{\pi b V_0 A_1}{2z},$$

iar portanța fuselajului este dată de relația (36.18), obținem expresia portanței totale

$$(36.64) \quad P_t = \frac{\rho}{2} V_0^2 \pi b^2 A_1 \left(1 - \frac{d^2}{z^2 b^2} \right) = \frac{\rho}{2} V_0^2 \pi b^2 A_1 \left(1 - \frac{k^2}{z^2} \right)$$

și

$$(36.65) \quad C_z = \frac{P_t}{\frac{\rho}{2} V_0^2 S} = \pi \lambda A_1 \left(1 - \frac{k^2}{z^2} \right),$$

suprafața S și alungirea λ fiind acelea ale aripei izolate.

Pentru a calcula rezistența indusă totală, vom considera deasemenea rezistența indusă a aripei echivalente:

$$(36.66) \quad R_i = \frac{\rho}{2} V_0^2 \pi b^2 A_1^2 \left(1 + \sum_2^n \frac{n A_n^2}{A_1^2} \right),$$

din care vom scădea rezistența porțiunii ocupate de fuselaj. Aceasta din urmă se calculează ușor dacă ținem seama de faptul că este constantă în regiunea considerată. Avem deci

$$(36.67) \quad R_i = \rho \Gamma_0 \int_{-\frac{d}{2}}^{+\frac{d}{2}} w \, dy = \frac{\rho}{2} V_0^2 \pi b^2 \frac{A_1^2}{z} \left(\cos \theta_1 + \sum_2^n \frac{A_n}{A_1} \cos n \theta_1 \right)$$

cu

$$\theta_1 = \arccos \frac{d}{b}.$$

Prin urmare rezistența indusă totală are expresia

$$(36.68) \quad R_{it} = \frac{\rho}{2} V_0^2 \pi b^2 A_1^2 \left[\left(1 + \sum_2^n \frac{n A_n^2}{A_1^2} \right) - \frac{1}{z} \left(\cos \theta_1 + \sum_2^n \frac{A_n}{A_1} \cos n \theta_1 \right) \right]$$

și coeficientul unitar respectiv este

$$(36.69) \quad c_{xi} = \frac{R_{it}}{\frac{\rho}{2} V_0^2 S} = \pi \lambda A_1^2 \left[\left(1 + \sum_2^n \frac{n A_n^2}{A_1^2} \right) - \frac{1}{z} \left(\cos \theta_1 + \sum_2^n \frac{A_n}{A_1} \cos n \theta_1 \right) \right]$$

37. ARIPĂ TRAVERSÂND FRONTIERE CILINDRICE LIBERE

Diferite porțiuni ale unei aripi se găsesc adesea în domenii diferite, de viteze V_0 și V_0' , separate prin suprafețe libere. Intre problemele

multiple de acest fel, vom trata acțiunea unui jet fluid asupra aripei și influența suflului elicei.

37.1. Acțiunea unui jet de secțiune circulară asupra unei aripi

Fie o aripă traversând un jet circular de diametru egal cu b ; să înlocuim pânza de vârtejuri libere prin două nuclee turbionare de intensitate Γ_0 , egală cu cea din centrul aripii. Distanța dintre cele două vârtejuri este $b' = zb$, unde z este dat de formula (21.44). Pentru a ține seama de pereții liberi, a căror urmă într'un plan normal pe jet este un cerc, trebuie să introducem în A și A' ($\overline{OA} = \overline{A'O} = \frac{b^2}{2b'} = \frac{b}{2z}$) două vârtejuri Γ_0 și $-\Gamma_0$. Aceste două vârtejuri induc o viteză suplimentară w_s , a cărei valoare într'un punct y al anvergurii va fi dată de formula :

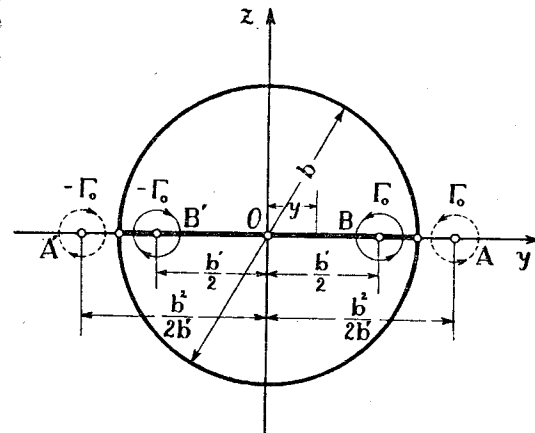


Fig. 37.1.

$$(37.1) \quad w_s = \frac{\Gamma_0}{4\pi} \left(\frac{1}{\frac{b^2}{2b'} - y} + \frac{1}{\frac{b^2}{2b'} + y} \right) = V_0 \frac{A_1}{4z} \left(\frac{1}{\frac{1}{z} + \cos \theta} + \frac{1}{\frac{1}{z} - \cos \theta} \right)$$

unde A_1 are aceeași semnificație ca și în formulele precedente.

Unghiul indus suplimentar $i_s = \frac{w_s}{V_0}$, multiplicat cu $\sin \theta$, va putea fi dezvoltat în serie FOURIER :

$$(37.2) \quad i_s \sin \theta = \varepsilon_1 \sin \theta + \varepsilon_3 \sin 3\theta + \dots + \varepsilon_{2m+1} \sin (2m+1)\theta,$$

unde vom avea :

$$(37.3) \quad \varepsilon_{2m+1} = \frac{A_1}{4z} \cdot \frac{2}{\pi} \int_0^{2\pi} \left(\frac{\sin \theta}{\frac{1}{z} + \cos \theta} + \frac{\sin \theta}{\frac{1}{z} - \cos \theta} \right) \sin^2 (2m+1)\theta \, d\theta = \frac{A_1}{\pi z} \int_0^\pi \frac{\sin \theta \sin (2m+1)\theta \, d\theta}{\frac{1}{z} + \cos \theta}.$$

Să observăm mai departe că avem :

$$(37.4) \quad 2 \sin \theta \sin (2m+1)\theta = \cos 2m\theta - \cos 2(m+1)\theta$$

și să punem :

$$(37.5) \quad \frac{1}{z} = \operatorname{ch} \tau ;$$

se va putea scrie în locul celei de a doua integrale (37.3), altele două care se pot integra ușor :

$$(37.6) \quad \int_0^\pi \frac{\sin \theta \sin (2m+1)\theta \, d\theta}{\operatorname{ch} \tau + \cos \theta} = \frac{1}{2} \int_0^\pi \frac{\cos 2m\theta \, d\theta}{\operatorname{ch} \tau + \cos \theta} - \frac{1}{2} \int_0^\pi \frac{\cos 2(m+1)\theta \, d\theta}{\operatorname{ch} \tau + \cos \theta} .$$

Pentru calculul integralei

$$(37.7) \quad I_n = \int_0^\pi \frac{\cos n\theta}{\operatorname{ch} \tau + \cos \theta} d\theta,$$

vom proceda ca și la paragraful 11.4, remarcând că avem relația

$$(37.8) \quad \cos (n+1)\theta + \cos (n-1)\theta = 2 \cos n\theta (\cos \theta + \operatorname{ch} \tau) - 2 \cos n\theta \operatorname{ch} \tau$$

care ne conduce la următoarea ecuație cu diferențe finite :

$$(37.9) \quad I_{n+1} + 2 \operatorname{ch} \tau I_n + I_{n-1} = 0.$$

Soluția unei astfel de ecuații este dată de expresia

$$(37.10) \quad I_n = A x^n$$

care introdusă în (37.9), ne dă ecuația

$$(37.11) \quad x^2 + 2 \operatorname{ch} \tau x + 1 = 0.$$

Această ecuație admite două rădăcini

$$(37.12) \quad x_1 = -e^{-\tau} \text{ și } x_2 = -e^{+\tau},$$

din care vom alege numai prima, deoarece a doua ne dă termeni I_n crescători, ceea ce nu corespunde cu condițiile reale.

Vom pune astfel

$$(37.13) \quad I_n = A (-1)^n e^{-n\tau}$$

și remarcând mai departe că avem

$$(37.14) \quad I_0 = \int_0^\pi \frac{d\theta}{\cos \theta + \operatorname{ch} \tau} = \left[\frac{2}{\operatorname{sh} \tau} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \left(\operatorname{th} \frac{\tau}{2} \operatorname{tg} \frac{\theta}{2} \right) \right]_0^\pi = \frac{\pi}{\operatorname{sh} \tau},$$

ceea ce ne permite să determinăm constanta A ; rezultă :

$$(37.15) \quad I_n = (-1)^n \frac{\pi}{\operatorname{sh} \tau} e^{-n\tau} .$$

Putem scrie în cele din urmă [2] :

$$(37.16) \quad \varepsilon_{2m+1} = \frac{A_1}{z} e^{-(2m+1)\tau}.$$

Este ușor de văzut, sub această formă, că coeficienții ε_{2m+1} descreșc rapid, ceea ce ne permite să limităm numărul termenilor $\varepsilon_n \sin n\theta$, evitând astfel calculele laborioase.

Coeficienții A_1, A_3, \dots, A_n ai circulației vor fi determinați prin aplicarea formulelor (22.8) sau (22.10), unde $\omega_1, \dots, \omega_{2m+1}$ sunt dați de expresiile (22.6) sau (22.11). Trebuie să remarcăm totuși că în locul coeficienților $\alpha_1, \alpha_3, \dots, \alpha_n$, se va pune respectiv :

$$(37.17) \quad \alpha_1 = \alpha - \varepsilon_1, \alpha_3 = -\varepsilon_3, \dots, \alpha_n = -\varepsilon_n.$$

Pentru calculul portanței, este suficient numai coeficientul A_1 . Pentru aceasta să aplicăm prima ecuație (22.10) privitoare la aripile dreptunghiulare și trapezoidale; se găsește

$$(37.18) \quad \left[\mu_0 + \beta_0 - \beta_2 - \frac{(\beta_2 - \beta_4)^2}{3\mu_0 + \beta_0} \right] A_1 = \mu_0 \left(\omega_1 + \beta_4 \frac{\omega_3}{3\mu_0 + \beta_0} \right),$$

care se mai poate simplifica, dacă neglijăm al doilea termen din membrul al doilea și dacă punem aproximativ :

$$(37.19) \quad \omega_1 \approx \alpha - \varepsilon_1 + \beta_2 \frac{\varepsilon_3}{3\mu_0 + \beta_0} = -\frac{e^{-\tau}}{z} \left(1 - \beta_2 \frac{e^{-2\tau}}{3\mu_0 + \beta_0} \right) A_1.$$

În aceste condiții se găsește :

$$(37.20) \quad A_1 \approx \frac{\mu_0 \alpha}{\mu_0 + \beta_0 - \beta_2 - \frac{(\beta_2 - \beta_4)^2}{3\mu_0 + \beta_0} + \frac{e^{-\tau}}{z} \left(1 - \beta_2 \frac{e^{-2\tau}}{3\mu_0 + \beta_0} \right)}$$

Iar panta lui C_z față de incidență rezultă imediat :

$$(37.21) \quad C_z = \pi \lambda A_1 = 2 \left(\frac{\pi \lambda}{2} \cdot \frac{A_1}{\alpha} \right) \alpha.$$

Calculul rezistenței este mai laborios. Într'adevăr, în afară de rezistența auto-indusă datorită vitezei induse de vârtejurile libere reale, trebuie să se țină seama deasemenea de w_s viteza suplimentară indusă de vârtejurile-imagini. Rezultă deci o rezistență indusă suplimentară

$$(37.22) \quad R_{is} = \rho \int_{-\frac{b}{2}}^{+\frac{b}{2}} w_s \Gamma \, dy = \rho b^2 V_0^2 \int_0^\pi \left[\sum_1^n \varepsilon_n \sin n\theta \right] \left[\sum_1^n A_n \sin n\theta \right] d\theta = \frac{1}{2} \pi \rho b^2 V_0^2 \sum_1^n \varepsilon_n A_n.$$

Și notând cu C_{xis} coeficientul unitar aditiv, se va putea scrie în fine,

$$(37.23) \quad C_{xis} = \frac{R_{is}}{\frac{1}{2} \rho V_0^2 S} = \frac{C_z^2}{z\pi\lambda} \sum_1^n \frac{A_n}{A_1} e^{-n\tau}$$

37.1.1. Metoda elementară pentru dezvoltarea expresiei $i_s \sin \theta$. Am determinat mai sus coeficienții $\varepsilon_1, \varepsilon_3, \dots, \varepsilon_n$ cu ajutorul integralelor speciale (37.7); este interesant de văzut că se poate ajunge la același rezultat prin calcule algebrice elementare. Într'adevăr, expresia (37.1) a vitesei se poate pune sub forma:

$$(37.24) \quad \frac{w_s}{V_0} \sin \theta = \frac{A_1}{2z^2} \cdot \frac{\sin \theta}{\frac{1}{z^2} - \cos^2 \theta} = \frac{A_1}{2z} \cdot \frac{\operatorname{ch} \tau \sin \theta}{\operatorname{ch}^2 \tau - \cos^2 \theta},$$

care devine succesiv

$$(37.25) \quad \begin{aligned} i_s \sin \theta &= \frac{A_1}{2iz} \cdot \frac{(e^\tau + e^{-\tau})(e^{i\theta} - e^{-i\theta})}{(e^\tau + e^{-\tau})^2 - (e^{i\theta} + e^{-i\theta})^2} = \\ &= \frac{A_1}{2iz} \left[\frac{e^{i(\theta+i\tau)}}{1 - e^{2i(\theta+i\tau)}} - \frac{e^{-i(\theta-i\tau)}}{1 - e^{-2i(\theta-i\tau)}} \right] = \\ &= \frac{A_1}{z} \sum_0^m e^{-(2m+1)\tau} \sin(2m+1)\theta. \end{aligned}$$

Aceasta este tocmai dezvoltarea găsită mai sus (37.16).

37.1.2. Determinarea coeficientului z . Termenii ε_n (37.16) depind de coeficientul z pe care l-am presupus cunoscut a priori. În realitate, după expresia sa,

$$(37.26) \quad z = \frac{\pi}{4} \cdot \frac{1}{1 - \frac{A_3}{A_1} + \frac{A_5}{A_1} - \frac{A_7}{A_1} + \dots},$$

coeficientul z variază cu A_1, \dots, A_n , care depind la rândul lor de z . Este deci necesar să se determine acest coeficient independent de A_1, \dots, A_n . Să observăm pentru aceasta că se poate neglija A_5, A_7 față de A_1 și A_3 ; în consecință vom considera numai raportul $\frac{A_3}{A_1}$, care se va putea deduce din următoarea ecuație aproximativă scoasă din (22.10):

$$(37.27) \quad (3\mu_0 + \beta_0) A_3 = (\beta_2 - \beta_4) A_1 = -\mu_0 \omega_3 \approx -\mu_0 \frac{A_1}{z} e^{-3\tau}.$$

Introducând această valoare a lui $\frac{A_3}{A_1}$ în expresia coeficientului z , se găsește în cele din urmă:

$$(37.28) \quad z = \frac{\pi}{4} \cdot \frac{1}{\beta_2 - \beta_4 + \frac{\mu_0}{z} e^{-3\tau} + \frac{1}{3\mu_0 + \beta_0}}$$

Pentru a aplica această formulă, ne alegem mai întâi o valoare a lui z , corespunzătoare de exemplu aripii singure, în fluid indefinit, și se introduce această valoare în al doilea membru al expresiei (37.28). Cu această valoare a lui z astfel obținută, se poate reîncepe calculul, însă în general o primă operație este suficientă.

37.2. Distribuție continuă a vârtejurilor-imagini

În cele precedente, am reprezentat influența frontierei printr'un singur vârtej-imagini concentrat în A (și A'). Această ipoteză este perfect valabilă și rezultatele obținute sunt în acord cu experiența.

Totuși, în cazuri speciale, ca de exemplu în cazul unei circulații disimetrice, unde apare o dificultate în ceea ce privește intensitatea și poziția unui singur vârtej-imagini, este necesar să se considere o repartiție continuă de vârtejuri-imagini ca și cea de pe aripa însăși.

Fie deci $-\frac{d\Gamma}{dy}$ intensitatea turbionară într'un punct y al anvergurii;

imaginea va fi așezată înafara jetului la o distanță $\frac{b^2}{4y}$ de centru.

Viteza indusă suplimentară într'un punct η va avea ca expresie, luând ca semn pozitiv acela al vitesei descendente:

$$(37.29) \quad \begin{aligned} w_s &= -\frac{1}{4\pi} \int_{-\frac{b}{2}}^{+\frac{b}{2}} \frac{d\Gamma}{dy} \cdot \frac{dy}{\frac{b^2}{4y} - \eta} = \\ &= \frac{V_0}{\pi} \int_0^\pi \sum_1^n n A_n \cos n\theta \frac{\cos \theta d\theta}{1 - \cos \psi \cos \theta}, \end{aligned}$$

unde am pus, ca de obicei,

$$(37.30) \quad \Gamma = 2bV_0 \sum_1^n A_n \sin n\theta, \quad \cos \theta = -\frac{2y}{b}, \quad \cos \psi = -2 \frac{\eta}{b}.$$

Pentru aplicarea metodei obișnuite, să dezvoltăm în serie **FOURIER**,

$\frac{w_s}{V_0} \sin \psi = i_s \sin \psi$; vom avea :

$$(37.31) \quad i_s \sin \psi = \frac{\sin \psi}{\pi} \int_0^\pi \sum_1^n n A_n \cos n\theta \frac{\cos \theta d\theta}{1 - \cos \psi \cos \theta} = \\ = \sin \psi \sum_{n=1}^n \varepsilon_{1n} + \sin 2\psi \sum_{n=1}^n \varepsilon_{2n} + \dots + \sin m\psi \sum_{n=1}^n \varepsilon_{mn},$$

unde

$$(37.32) \quad \varepsilon_{mn} = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \sin \psi \sin m\psi d\psi \frac{n A_n}{\pi} \int_0^\pi \frac{\cos n\theta \cos \theta d\theta}{1 - \cos \psi \cos \theta},$$

sau

$$(37.33) \quad \varepsilon_{mn} = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \frac{n A_n}{\pi} \cos \theta \cos n\theta d\theta \int_0^\pi \frac{\sin \psi \sin m\psi d\psi}{1 - \cos \psi \cos \theta}$$

Integrând prima expresie (37.32) în raport cu θ , se ajunge, după câteva transformări destul de laborioase [1], la integrala următoare :

$$(37.34) \quad \varepsilon_{mn} = \frac{2n A_n}{\pi} \int_0^\pi \frac{\sin m\psi}{\cos \psi} \left[\frac{1 - \sin \psi}{\cos \psi} \right]^n d\psi.$$

Pe de altă parte, dacă efectuăm integrala expresiei (37.33) în raport cu ψ , se ajunge la o expresie analogă :

$$(37.35) \quad \varepsilon_{mn} = \frac{2n A_n}{\pi} \int_0^\pi \cos n\theta \left[\frac{1 - \sin \theta}{\cos \theta} \right]^m d\theta$$

și integrând mai departe prin părți, se găsește :

$$(37.36) \quad \varepsilon_{mn} = \frac{2n A_n}{\pi} \cdot \frac{m}{n} \int_0^\pi \frac{\sin n\theta}{\cos \theta} \left[\frac{1 - \sin \theta}{\cos \theta} \right]^m d\theta,$$

de unde rezultă, comparând această integrală cu cea a expresiei (37.34), o relație importantă :

$$(37.37) \quad \varepsilon_{m'n} = \frac{A_n}{A_m} \varepsilon_{nm}.$$

Punând

$$(37.38) \quad \alpha_1 = \alpha - \sum_1^n \varepsilon_{1n}, \quad \alpha_2 = - \sum_1^n \varepsilon_{2n}, \quad \dots, \quad \alpha_m = - \sum_1^n \varepsilon_{mn}$$

și observând că termenii impari se separă de termenii pari, putem calcula expresiile $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n$ (22.6) sau (22.11) și aplica apoi formulele (22.8) pentru termenii impari sau formulele (22.9) pentru termenii pari. Dacă aripa este trapezoidală sau dreptunghiulară, soluția este dată de formulele (22.10).

Nelovim totuși de unele dificultăți destul de importante : integralele (37.34) sau (37.35) sunt foarte laborioase, coeficienții ε_{mn} descresc încet și au dezavantajul de a depinde de coeficienții A_1, A_2, \dots, A_n , pe care vrem tocmai să-i determinăm. Pentru a remedia acest ultim inconvenient sse poate proceda în două moduri diferite :

1) Unghiurile induse suplimentare fiind corecții aduse unghiurilor reale, eroarea nu este prea mare dacă se limitează calculul la trei termeni din dezvoltarea lui Γ , adică la coeficienții A_1, A_3 și A_5 , în cazul repartiției simetrice, sau numai la doi termeni, A_2 și A_4 , în cazul repartiției anti-simetrice.

2) Presupunând că influența pereților liberi nu modifică sensibil repartiția portanței dealungul anvergurii, se poate presupune, în prima aproximatie, că coeficienții $A_3, A_5, \dots, A_{2n+1}$ sunt în acelaș raport față de A_1 și în aceste cazse pot înlocui acești coeficienți prin valorile lor în funcție de A_1 , scoase din ecuațiile privitoare la aripa singură într'un fluid indefinit. De asemenea, în cazul unei repartiții anti-simetrice, coeficienții A_4, A_6, \dots vor fi înlocuiți prin valorile lor în funcție de A_2 .

Cu toate aceste simplificări, metoda rămâne totuși foarte laborioasă, și se poate constata de pe acum că prima metodă, cu vârtejul-imagie concentrat, este foarte practică și comodă, comportă calcule simple, duce la formule de asemenea foarte simple pentru calculul coeficienților $\varepsilon_1, \varepsilon_3, \dots$, care descresc pe de altă parte foarte repede, ceea ce permite o soluționare rapidă a ecuațiilor care ne dau A_1, A_3, \dots, A_n .

37.3. Influența suflului elicei

Masa fluidă care trece prin discul elicei formează în fața și în spatele acestui disc un jet quasi-cilindric unde domnește o viteză axială mijlocie V'_0 , diferită și mai mare decât viteza relativă V_0 a mediului înconjurător nelimitat. Viteza V_0 este în speță viteza avionului iar V'_0 este compusă din V_0 și din viteza axială medie suplimentară căpătată de particulele fluide în trecerea lor prin discul elicei (fig. 37.2). Frontiera, care este suprafața de separație a celor două domenii D și D' , nu este cilindrică decât foarte departe în aval ; pe de altă parte, componentele vitezei, după cele trei axe de referință, adică $V_0 + u, v, w$, depind de poziția punctului în interiorul jetului și variază prin urmare în funcție de x, y, z ; astfel încât aripa, care traversează acest jet, se găsește într'un câmp de viteze foarte complex, foarte greu de determinat și nestăionar pe de altă parte. Deaceea vom reduce problema la o schemă elementară, prin ipoteze simplificatoare, pe care le vom enumera mai jos :

a) Jetul este considerat cilindric și de secțiune circulară, raza cercului fiind funcție de viteza axială mijlocie, $V'_0 = V_0 + u_m$.

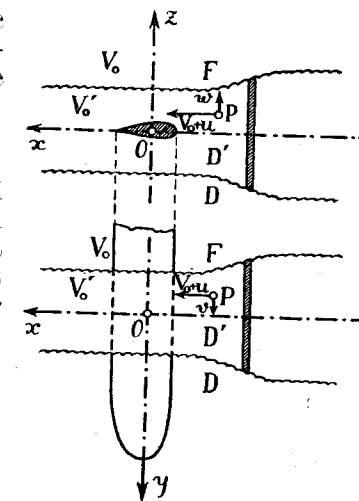


Fig. 37.2.

b) Viteza axială u variază după o lege bine determinată, fie spre exemplu, aceea care corespunde elicei optime, fie în fine $u = ct$. În acest din urmă caz, vom avea $\Gamma'_0 = V_0 + u = ct$ pe toată secțiunea.

c) Viteza de rotație a particulelor fluide în jurul axei Ox , va avea de asemenea o lege de variație bine determinată, ca aceea care corespunde, de exemplu, elicei optime, sau constantă pe toată secțiunea. Trebuie să remarcăm totuși că această ultimă ipoteză nu corespunde realității.

d) Viteza radială este nulă, considerând, bine înțeles că este vorba de porțiunea cilindrică a jetului.

Cu aceste ipoteze, calculul componentelor vitezei într'un punct oarecare al curentului devine ușor; în aceste condiții problema a fost tratată de C. KONING pentru o aripă de contur eliptic, considerând u și prin urmare și V'_0 , constante pe toată secțiunea iar viteza de rotație a particulelor în jurul axei Ox , de asemenea constantă.

În cazul general, problema se tratează simplu prin metoda pe care am folosit-o până în prezent; însă, pentru a scurta calculele și fără a micșora generalitatea problemei, vom trata următorul caz simplu:

1) aripa trece prin axa jetului, în consecință viteza radială nu are nicio influență;

2) viteza axială u este constantă pe toată secțiunea, prin urmare $V'_0 = V_0 + u$ este de asemenea constantă;

3) viteza de rotație ar putea fi tratată separat, ca și pentru distribuția anti-simetrică a incidenței; pentru fenomenul simetric, viteza de rotație poate fi considerată nulă.

37.3.1. Ecuația circulației. Dacă notăm cu R_0 raza jetului cilindric, cu V viteza axială, variabilă dealungul anvergurii, cu w_t viteza indusă totală (dirijată după direcția negativă a axei Oz), inclusiv influența frontierei jetului, ecuația circulației poate fi scrisă sub forma următoare:

$$(37.39) \quad \Gamma = kcV \left(\alpha - \frac{w_t}{V} \right) = kcV\alpha - kcw_t.$$

După ipoteza noastră simplificatoare, V este egal cu V_0 în exteriorul jetului (dela $-\frac{b}{2}$ la $-R_0$ și dela R_0 la $\frac{b}{2}$) și cu V'_0 în interiorul jetului (dela $-R_0$ la R_0); punând

$$(37.40) \quad V = V_0(1 + \delta),$$

unde δ este nul în exteriorul jetului și

$$(37.41) \quad \delta = \delta_0 = \frac{V'_0 - V_0}{V_0}$$

în interior, se poate pune, în locul expresiei (37.39), următoarea ecuație care este similară cu cea corespunzătoare unei aripi cu incidență variabilă:

$$(37.42) \quad \Gamma = kcV_0 \left[\alpha(1 + \delta) - \frac{w_t}{V_0} \right],$$

unde, totuși, viteza indusă w_t are o semnificație și compoziție diferită. Într'adevăr, fie D domeniul exterior suflului elicei și D' domeniul interior; am stabilit în paragraful precedent că viteza în dreptul aripii, într'un punct η al anvergurii, va fi compusă după cum urmează (fig. 37.3).

În domeniul exterior D (fig. 37.3 a):

1) viteza datorită pânzei de vârtejuri libere exterioare,

$$(37.43) \quad w_{e1} = -\frac{1}{4\pi} \left[\int_{-\frac{b}{2}}^{-R_0} \frac{d\Gamma}{dy} \cdot \frac{dy}{y - \eta} - \int_{R_0}^{\frac{b}{2}} \frac{d\Gamma}{dy} \cdot \frac{dy}{y - \eta} \right];$$

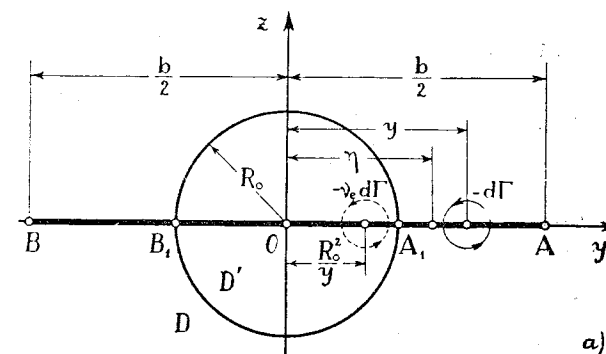


Fig. 37.3 a.

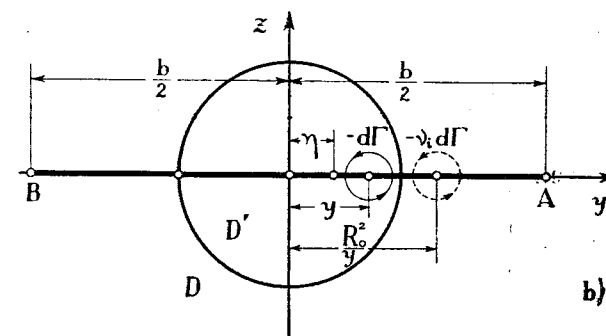


Fig. 37.3 b.

2) viteza datorită vârtejurilor-imagine așezate în interior,

$$(37.44) \quad w_{e2} = \frac{v_e}{4\pi} \left[\int_{-\frac{b}{2}}^{-R_0} \frac{d\Gamma}{dy} \cdot \frac{dy}{\eta - \frac{R_0^2}{y}} + \int_{R_0}^{\frac{b}{2}} \frac{d\Gamma}{dy} \cdot \frac{dy}{\eta - \frac{R_0^2}{y}} \right],$$

unde v_e , ținând seamă de relațiile (35.43) și (37.40) și observând că δ_0 este în general mic, va fi dat de următoarea formulă:

$$(37.45) \quad v_e = \frac{\Gamma_0^2 - \Gamma_0'}{\Gamma_0^2 + \Gamma_0'^2} = -\frac{(2 + \delta_0) \delta_0}{2 + 2\delta_0 + \delta_0^2} \approx -\left(1 - \frac{\delta_0}{2}\right) \delta_0 = -\gamma_0;$$

3) viteza datorită vârtejurilor interioare,

$$(37.46) \quad w_{e3} = -\frac{v_e'}{4\pi} \int_{-R_0}^{+R_0} \frac{d\Gamma}{dy} \cdot \frac{dy}{y - \eta};$$

unde putem scrie pentru v_e' după (35.43) și (37.40):

$$(37.47) \quad v_e' = \frac{2\Gamma_0' \Gamma_0'}{\Gamma_0^2 + \Gamma_0'^2} = \frac{2(1 + \delta_0)}{2 + 2\delta_0 + \delta_0^2} \approx 1.$$

În domeniul interior D' (fig. 37.3 b):

1) Viteza datorită vârtejurilor interioare,

$$(37.48) \quad w_{i1} = -\frac{1}{4\pi} \int_{-R_0}^{+R_0} \frac{d\Gamma}{dy} \cdot \frac{dy}{y - \eta};$$

2) viteza datorită vârtejurilor-imagini așezate în exterior,

$$(37.49) \quad w_{i2} = \frac{v_i'}{4\pi} \int_{-R_0}^{R_0} \frac{d\Gamma}{dy} \cdot \frac{dy}{\eta - \frac{R_0^2}{y}},$$

unde vom avea deasemenea:

$$(37.50) \quad v_i' = \frac{\Gamma_0'^2 - \Gamma_0^2}{\Gamma_0'^2 + \Gamma_0^2} = \left(1 - \frac{\delta_0}{2}\right) \delta_0 = \gamma_0;$$

3) viteza datorită vârtejurilor exterioare,

$$(37.51) \quad w_{i3} = -\frac{v_i'}{4\pi} \int_{-b}^{-R_0} \frac{d\Gamma}{dy} \cdot \frac{dy}{y - \eta} - \int_{+R_0}^{+\frac{b}{2}} \frac{d\Gamma}{dy} \cdot \frac{dy}{y - \eta},$$

unde

$$(37.52) \quad v_i' = \frac{2\Gamma_0' \Gamma_0'}{\Gamma_0^2 + \Gamma_0'^2} \approx 1.$$

În concluzie, rezultă că pentru domeniul exterior D , vom avea:

$$(37.53) \quad w_i = w_{e1} + w_{e3} + w_{e2} = w - \frac{\gamma_0}{4\pi} \int_{-b}^{-R_0} \frac{d\Gamma}{dy} \cdot \frac{dy}{\eta - \frac{R_0^2}{y}} + \int_{+R_0}^{+\frac{b}{2}} \frac{d\Gamma}{dy} \cdot \frac{dy}{\eta - \frac{R_0^2}{y}},$$

unde w este viteza inclusă propriu-zisă, fără a ține seama de frontiere.

Pentru domeniul interior D' , vom avea deasemenea:

$$(37.54) \quad w_i' = w_{i1} + w_{i3} + w_{i2} = w + \frac{\gamma_0}{4\pi} \int_{-R_0}^{+R_0} \frac{d\Gamma}{dy} \cdot \frac{dy}{\eta - \frac{R_0^2}{y}}.$$

Mai departe, luând ca referință viteza Γ_0 a curentului, și notând cu i_s un unghiun inclus suplimentar, variabil de-a lungul anvergurii, care ia valoarea

$$(37.55) \quad i_s = i_{se} = \frac{w_{e2}}{\Gamma_0} = -\frac{\gamma_0}{4\pi\Gamma_0} \int_{-\frac{b}{2}}^{-R_0} \frac{d\Gamma}{dy} \cdot \frac{dy}{\eta - \frac{R_0^2}{y}} + \int_{+R_0}^{+\frac{b}{2}} \frac{d\Gamma}{dy} \cdot \frac{dy}{\eta - \frac{R_0^2}{y}},$$

în exteriorul suflului elicei și respectiv

$$(37.56) \quad i_s = i_{si} = \frac{w_{i2}}{\Gamma_0} = \frac{\gamma_0}{4\pi\Gamma_0} \int_{-R_0}^{+R_0} \frac{d\Gamma}{dy} \cdot \frac{dy}{\eta - \frac{R_0^2}{y}},$$

în interiorul suflului, se poate scrie în cele din urmă ecuația circulației sub forma următoare:

$$(37.57) \quad \Gamma = kc\Gamma_0 \left[\alpha(1 + \delta) - \frac{w}{\Gamma_0} - i_s \right].$$

Totul se petrece ca și pentru o aripă situată într'un curent omogen de viteză Γ_0 , având o incidență geometrică $\alpha_g = \alpha(1 + \delta)$ variabilă de-a lungul anvergurii și o incidență inclusă suplimentară, — i_s , deasemenea variabilă. Pentru a rezolva problema prin metoda curentă pe care am folosit-o până în prezent, vom considera mai întâi aripa pusă într'un curent de viteză Γ_0 , fără influența suflului, și vom adăuga apoi efectul incidenței

variabile $z\delta$ și $-i_s$, pe care le vom dezvolta în serie FOURIER sub forma cunoscută. Așa de exemplu, se va pune :

$$(37.58) \quad z\delta \sin \theta = z \left[\delta_1 \sin \theta + \delta_3 \sin 3\theta + \dots + \delta_{2p+1} \sin (2p+1)\theta \right].$$

unde, pentru $\delta_1, \dots, \delta_n$ vom avea expresii analoge cu (23.5) :

$$(37.59) \quad \left\{ \begin{array}{l} \delta_1 = \delta_0 + \frac{2\delta_0}{\pi} \left(\frac{\sin 2\theta_1}{2} - \theta_1 \right), \\ \delta_3 = \frac{2\delta_0}{\pi} \left(\frac{\sin 4\theta_1}{4} - \frac{\sin 2\theta_1}{2} \right), \\ \dots \\ \delta_n = \frac{2\delta_0}{\pi} \left(\frac{\sin (n+1)\theta_1}{n+1} - \frac{\sin (n-1)\theta_1}{n-1} \right), \end{array} \right.$$

θ_1 fiind dat de relația următoare :

$$(37.60) \quad \cos \theta_1 = - \frac{2R_0}{b}.$$

Pentru expresia $i_s \sin \theta$ calculele sunt foarte complicate și desfășurarea în serie FOURIER este aproape imposibilă fără aproximații simplificatoare.

37.3.2. Ipoteze simplificatoare. Vom descompune circulația în jurul aripii în trei părți :

a) circulația aripii normale pusă într'un curent de viteză V_0 , fie

$$(37.61) \quad \Gamma_a = 2bV_0 \sum_1^n A_n \sin n\theta,$$

unde coeficienții A_1, \dots, A_n vor fi deduși din ecuațiile (18.5);

b) circulația datorită suflului elicei, care este echivalentă cu cea corepunzătoare unei incidențe variabile $z\delta$ în lungul anvergurii, fie

$$(37.62) \quad \Gamma_b = 2bV_0 \sum_1^n B_n \sin n\theta,$$

unde coeficienții vor fi determinați cu ajutorul ecuațiilor (22.10) și (22.11), α_n fiind înlocuit prin $z\delta_n$. Soluția acestei probleme este de altfel identică cu cea corespunzătoare aripiioarelor de curbura centrale, [paragraful 23.1];

c) circulația suplimentară datorită vârtejurilor imagine, care este echivalentă deasemenea cu variația de incidență $-i_s$, fie

$$(37.63) \quad \Gamma_s = 2bV_0 \sum_1^n a_n \sin n\theta.$$

Calculul coeficienților a_1, \dots, a_n este foarte complicat, deaceia vom întrebuința o metodă aproximativă, din care să scoatem un rezultat practic foarte aproape de realitate.

Din condiția (35.10) stabilită anterior, rezultă că circulația la frontieră trebuie să satisfacă următoarea relație :

$$(37.64) \quad \Gamma'_1 V'_0 = \Gamma_1 V_0, \quad (1 + \delta_0) \Gamma'_1 = \Gamma_1,$$

unde Γ'_1 este circulația totală în interior, iar Γ_1 în exteriorul suflului. Indicând cu Γ_{a1}, Γ_{b1} circulațiile la frontieră, deduse respectiv din formulele (37.61 și 37.62) și notând cu Γ_{s1} circulația suplimentară în interiorul și exteriorul suflului datorită vârtejurilor imagine, vom avea

$$(37.65) \quad \Gamma'_1 = \Gamma_{a1} + \Gamma_{b1} - \Gamma_{s1}, \quad \Gamma_1 = \Gamma_{a1} + \Gamma_{b1} - \Gamma_{s1}$$

și prin urmare, aplicând relația (37.64), deducem :

$$(37.66) \quad \Gamma_{s1} = \frac{\delta_0}{2 + \delta_0} (\Gamma_{a1} + \Gamma_{b1}).$$

Am determinat astfel circulația la frontieră.

Dacă ținem seama acum că imaginile reciproce, pentru exteriorul și interiorul suflului, au un efect maxim la frontieră și că la extremitățile aripii putem neglija această influență; observând pe de altă parte că vârtejurile-imagine sunt reduse în proporția coeficientului v_0 (37.45 și 37.50), nu vom comite o eroare mai însemnată, dacă vom înlocui variația circulației prin două parabole și anume :

$$(37.67) \quad \Gamma'_s = - (\Gamma_{s1} + \Gamma_{s0}) \frac{y^2}{R_0^2} + \Gamma_{s0}$$

în interiorul suflului și

$$(37.68) \quad \Gamma_s = \Gamma_{s1} \left(1 - \sqrt{\frac{2y - 2R_0}{b - 2R_0}} \right)$$

în exterior.

Rămâne acum să determinăm circulația mediană Γ_{s0} ; pentru aceasta, să luăm viteza indusă în centrul aripii, considerând în locul unei variațiuni continue a vârtejurilor libere, trei vârtejuri concentrate de fiecare parte a aripii (fig. 37.4).

Făcând ipoteze simplificatoare în ceea ce privește poziția acestor vârtejuri concentrate, dacă remarcăm pe de altă parte că în mod practic $2R_0 \approx 0,25b \dots 0,30b$, obținem :

$$(37.69) \quad w_{s0} = \frac{\Gamma_{s1}}{2\pi} \left(\frac{2}{R_0} - \frac{1}{0,75R_0 + 0,25\frac{b}{2}} - \frac{1}{0,15R_0} \right) - \frac{\Gamma_{s0}}{2\pi} \frac{1}{0,75R_0} \approx \frac{-\Gamma_{s0}}{2\pi} \frac{1}{0,15R_0}.$$

Vom presupune acum că Γ_{s_0} este datorită incidenței suplimentare efective din centrul aripei și vom scrie prin urmare :

$$(37.70) \quad \Gamma_{s_0} = \pi c_0 V_0' \left(i_{s_0} - \frac{w_{s_0}}{V_0'} \right), \quad \Gamma_{s_0} \left(1 + \frac{2c_0}{3R_0} \right) = \pi c_0 V_0' i_{s_0},$$

unde c_0 este coarda medie.

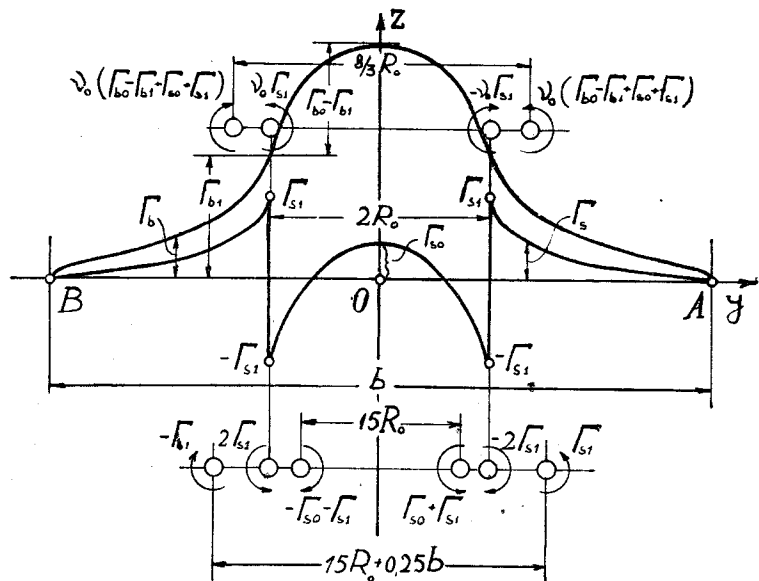


Fig. 37.4.

Incidența i_{s_0} este indusă de imaginile din exterior, datorite variației circulației în interior. Cum Γ_a nu variază aproape deloc în interior, nu rămâne decât $\Gamma_b - \Gamma_{b_1}$, Γ_s , pe care le vom presupune concentrate în punctele $y = \pm 0,75 R_0$, precum și $-\Gamma_{s_1}$ de pe frontieră.

Imaginile acestor vârtetururi, așezate ca în figura (37.4), induc incidența

$$(37.71) \quad i_{s_0} = \frac{v_0}{2\pi R_0} \left[\Gamma_{s_1} - \frac{3}{4} (\Gamma_{b_0} - \Gamma_{b_1} + \Gamma_{s_0} + \Gamma_{s_1}) \right],$$

din care se deduce o relație pentru Γ_{s_0} :

$$(37.71 \text{ bis}) \quad \Gamma_{s_0} \left(1 + \frac{2c_0}{2R_0} + \frac{3v_0 c_0}{8R_0} \right) = \frac{3v_0 c_0}{8R_0} \left(\frac{1}{3} \Gamma_{s_1} + \Gamma_{b_1} - \Gamma_{b_0} \right).$$

Să remarcăm acum că membrul al doilea este mic ; putem să admitem deci într'o primă aproximație $\Gamma_{s_0} \approx 0$ și în acest caz relația (37.67) se simplifică și devine :

$$(37.67 \text{ bis}) \quad \Gamma_s' = - \Gamma_{s_1} \frac{y^2}{R_0^2}.$$

În concluzie deci, calculul circulației se efectuează în modul următor : a) se determină circulația în curent constant V_0 ; b) se determină o circulație adițională ca și pentru brațul aripioarelor centrale producând o incidență $\sigma = \alpha \delta$ (§ 23.1); se adaugă circulația Γ_s dată de formulele (37.68) și (37.67 bis).

Calculul portanței și rezistenței nu mai prezintă nici o dificultate și deaceia vom trece peste acest calcul.

37.3.3. Condițiuni pentru rezistența minimă. Pentru o portanță totală constantă, variațiile δP_1 și δP_2 , în două puncte diferite, sunt egale și de semne contrarii :

$$(37.72) \quad \delta P_1 + \delta P_2 = 0.$$

Aceste modificări ale portanței au o influență neglijabilă asupra distribuției vitezei induse ; pe de altă parte, dacă distribuția portanței corespunde la o rezistență minimă, variația δR a acesteia este nulă. Notând cu w_1 și w_2 vitezele induse în aceleași puncte, putem scrie, ca și într'un caz precedent (16.23) :

$$(37.73) \quad \delta R = \frac{w_1}{V_1} \delta P_1 + \frac{w_2}{V_2} \delta P_2 = 0$$

de unde rezultă, ținând seama de (37.72) :

$$(37.74) \quad \frac{w_1}{V_1} = \frac{w_2}{V_2} = \dots = i = \text{ct.}$$

Unghiul indus este deci constant pe toată anvergura. În exteriorul suflului viteza indusă, fie w_0 , este constantă ; în interior, această viteză, pe care o vom nota cu w_0' , este deasemenea constantă. La infinit aval, într'un plan normal pe viteza V_0 (respectiv V_0'), în dreptul urmei rectilini la vârtejurilor libere, vitezele induse sunt respectiv $w = 2w_0$ și $w' = 2w_0'$.

Problema constă în a găsi distribuția circulației dealungul anvergurii, care dă această repartiție a vitezei induse. Efectul vârteturilor imagine complică considerabil această problemă, însă, pentru un suflu moderat se poate da o soluție aproximativă, calculând circulația suplimentară Γ_s , ea în cazul precedent.

Mai departe, notând cu w_0 viteza indusă constantă pe toată anvergura și cu w_0'' viteza indusă care trebuie adăugată în plus în interiorul suflului, unde domnește viteza w_0' ($w_0' = w_0 - w_0''$), se găsește :

$$(37.75) \quad A_1 = \frac{w_0''}{V_0}, \quad A_3 = \dots = A_n = 0$$

pentru circulația Γ_a (eliptică) și după paragraful (16.3),

$$(37.76) \quad \begin{cases} B_1 = \frac{w_0''}{V_0} \left[1 + \frac{2}{h} \left(\frac{\sin 2\theta_1}{2} - \theta_1 \right) \right], \\ B_n = \frac{1}{n} \cdot \frac{w_0''}{V_0} \cdot \frac{2}{\pi} \left(\frac{\sin (n+1)\theta_1}{n+1} - \frac{\sin (n-1)\theta_1}{n-1} \right) \end{cases}$$

pentru circulația Γ_b , unde $\cos \theta_1 = \frac{2R_0}{b}$. Pentru a calcula circulația Γ_s , se va proceda ca în cazul precedent. Circulația totală fiind cunoscută, vom putea deduce, ușor, variația corzii dealungul anvergurii.

BIBLIOGRAFIA CAP. IX.

- 1). *BARANOFF A.*: Beitrag zur Frage der Beeinflussung des Abwindes durch den Schraubenstrahl. Luftfahrt-Forschung. Bd. 19 Januarie 1942 Lfg. 4.
- 2). *CARAFOLI E.* și *OROVEANU T.*: Aripă traversând un curent de secțiune circulară. Buletinul Științific al Academiei R.P.R. t. 1 Nr. 7, 1949.
- 3). *LENNERTZ J.*: Beitrag zur theoretischen Behandlung des gegenseitigen Einflusses von Tragfläche und Rumpff, abhand. aus dem Aerod. Inst. d. Techn. Hochschule Aachen, Heft. 8.

CAPITOLUL X

CORECTĂRILE INCERCĂRILOR EXECUTATE ÎN SUFLERII SAU PE CĂRUCIOARE AERODINAMICE

Rezultatele obținute în paragrafele precedente privitoare la influența frontierelor au o aplicație dintre cele mai importante în încercările executate în suflerii aerodinamice, unde vâna fluidă în mișcare este cuprinsă între pereți rigizi sau liberi. Incercările cu căruciorul aerodinamic sunt deasemenea influențate de prezența solului. Deaceia, este necesar să se evalueze influența suprafețelor libere sau rigide care limitează vâna fluidă, pentru a obține caracteristicile aerodinamice ale aripilor într'un fluid nelimitat, condiție care există în realitate într'un sbor al avionului la o altitudine de câțiva metri.

Incercările curente sunt executate de obicei într'un fluid limitat de o singură suprafață, de două suprafețe paralele sau, în fine, de o suprafață cilindrică cu secțiune dreptunghiulară, circulară, eliptică sau alte contururi derivate din cele precedente.

38. INCERCĂRI ÎN VÂNA FLUIDĂ PARȚIAL LIMITATĂ

Pentru încercări speciale, vâna fluidă este adesea parțial limitată de suprafețe de forme diverse, dintre care vom studia mai jos suprafețele plane.

38.1. Fluid limitat de o singură suprafață plană. Influența solului

Acesta este cazul încercărilor cu căruciorul aerodinamic sau efectul solului în timpul aterizării unui avion. Este ușor de văzut că potențialul adițional este dat de imaginea aripii reale în raport cu suprafața solului, care joacă astfel rolul unei oglinzi. Problema se reduce la cazul biplanului cu aripi egale, fără decalaj, însă cu incidente egale și de semne contrarii. Notând cu Γ circulația mijlocie în jurul aripii reale, și prin urmare $-\Gamma$ în jurul aripii — imagine, unghiul indus suplimentar i_s datorit aripii-imagine va fi dat de expresia (34.11), unde se înlocuiește Γ_2 prin $-\Gamma$ și se pune $\sin\beta = 0$,

$\cos \beta = 1$, $x_1 = x_2 = x^*$, $b_1 = b_2 = b$, $m = x \frac{b}{h}$, $n=0$; vom avea prin urmare :

$$(38.1) \quad i_s = \frac{u_s}{V_0} = \frac{\Gamma}{2\pi x b \Gamma_0} \ln \sqrt{1 + x^2 \frac{b^2}{h^2}}.$$

Mai departe, înlocuind pe de o parte Γ prin :

$$(38.2) \quad \Gamma_s = \frac{P}{\rho x b V_0} = \frac{S V_0}{2 x b} C_z$$

și notând cu σ coeficientul de influență reciprocă a unui biplan, a cărui expresie va fi scoasă din (34.15),

$$(38.3) \quad \sigma = \frac{1}{4x^2} \ln \sqrt{1 + x^2 \frac{b^2}{h^2}},$$

se poate scrie în fine :

$$(38.4) \quad i_s = \frac{C_z}{\pi \lambda} \sigma.$$

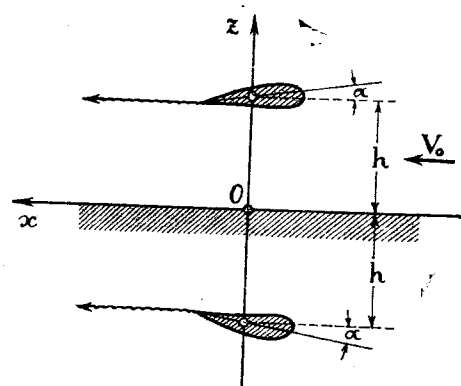


Fig. 38.1.

Trebuie să observăm că acest unghi mărește incidența și trebuie luat deci în direcția pozitivă; astfel că incidența efectivă care este dată de formula (34.66), va avea ca valoare :

$$(38.5) \quad \alpha_e = \alpha - \frac{C_z}{\pi \lambda} (1 + \tau - \sigma)$$

iar coeficientul rezistenței induse, ținând seamă de relațiile (34.58), va fi dat de asemenea de formula :

$$(38.6) \quad C_{xi} = \frac{C_z^2}{\pi \lambda} (1 + \tau - \sigma).$$

*) Observăm, ca și pentru biplane, că coeficientul x reprezintă valoarea mijlocie :

$$x = \frac{1 + x_0}{2},$$

unde x_0 va fi dat de formula cunoscută

$$x_0 = \frac{\pi}{4} \frac{A_1}{A_1 + A_3 + A_5 + A_7 + \dots}$$

Într-adevăr, această ultimă valoare este valabilă mai curând pentru partea din spate a vârtejului liber, în timp ce influența pânzei turbionare care reprezintă partea din față a vârtejurilor libere ar fi echivalentă mai curând cu un vârtej mijlociu, așezat către extremitate. Cum este foarte greu să se stabilească acțiunea efectivă a poziției reale a vârtejurilor libere, luăm pentru aceasta urmează valoarea mijlocie a lui x , indicată mai sus.

Pe de altă parte, viteza orizontală din dreptul aripii este micșorată cu valoarea u_s , care se poate scoate din expresia (34.11) :

$$(38.7) \quad u_s = \frac{-\Gamma}{2\pi x b} \left(\sqrt{1 + x^2 \frac{b^2}{h^2}} - 1 \right) = -\frac{C_z}{\pi \lambda} \tau_x,$$

unde τ_x va fi dat de expresia :

$$(38.8) \quad \tau_x = \frac{1}{4x^2} \left(\sqrt{1 + x^2 \frac{b^2}{h^2}} - 1 \right).$$

Calculând mai departe expresiile (34.25), (34.30), (34.47) aplicate la biplanul din figura (34.1), se găsește respectiv :

$$(38.9) \quad \begin{cases} k = \sqrt{1 + \frac{1}{4x^2} \frac{1}{\lambda^2} + \left(\frac{2h}{xb}\right)^2} - \sqrt{\frac{1}{4x^2} \frac{1}{\lambda^2} + \left(\frac{2h}{xb}\right)^2}, \\ \gamma = \frac{c^2}{c^2 + 16h^2}, \quad j = \frac{2k\lambda}{\pi\lambda} \left(\sigma + \frac{k\gamma\lambda}{2x} \right), \\ g = \frac{1-j}{1-j^2} \approx 1-j = 1 - \frac{2k\lambda}{\pi\lambda} \left(\sigma + \frac{k\gamma\lambda}{2x} \right), \end{cases}$$

punând bine înțeles

$$(38.10) \quad 2k\lambda = \frac{dK_z}{d\alpha}$$

unde K_z este coeficientul unitar al portanței corespunzător aripii în stare izolată.

Rezultă :

$$(38.11) \quad C_z = g \left(1 - \frac{\tau_x}{\pi\lambda} g K_z \right) \approx \left[1 + \frac{2k\lambda}{\pi\lambda} \left(\sigma + \frac{k\gamma\lambda}{2x} \right) \right] \left(1 - \frac{\tau_x}{\pi\lambda} K_z \right) K_z \approx \left[1 + \frac{1}{\pi\lambda} \left(\sigma + \frac{k\gamma\lambda}{2x} \right) \frac{dK_z}{d\alpha} - \frac{\tau_x}{\pi\lambda} K_z \right] K_z$$

pentru portanța unitară și

$$(38.12) \quad C_{xi} = \frac{C_z^2}{\pi\lambda} (1 + \delta - \sigma) = \frac{K_z^2}{\pi\lambda} \left[1 + 2 \frac{\tau_x}{\pi\lambda} K_z - \frac{2}{\pi\lambda} \left(\sigma + \frac{k\gamma\lambda}{2x} \right) \frac{dK_z}{d\alpha} \right] \left[1 + \delta - \sigma \right]$$

pentru rezistența indusă unitară.

Prin urmare, majorările portanței și rezistenței față de valorile respective corespunzătoare unei aripi izolate vor fi respectiv :

$$(38.13) \quad \begin{cases} \Delta C_z = \frac{K_z}{\pi\lambda} \left[\left(\sigma + \frac{k\gamma\lambda}{2\alpha} \right) \frac{dK_z}{d\alpha} - \tau_x K_z \right], \\ \Delta C_{xi} = -\frac{K_z^2}{\pi\lambda} \left\{ 2 \left[\frac{\tau_x}{\pi\lambda} K_z - \frac{1}{\pi\lambda} \left(\sigma + \frac{k\gamma\lambda}{2\alpha} \right) \frac{dK_z}{d\alpha} \right] (1 + \delta - \sigma) - \sigma \right\}. \end{cases}$$

Observând mai departe că δ este foarte mic și, pentru h suficient de mare, k și γ sunt de asemenea foarte mici, se poate scrie, neglijând termenii secundari :

$$(38.14) \quad \begin{cases} \Delta C_z \approx \frac{K_z}{\pi\lambda} \left(\sigma \frac{dK_z}{d\alpha} - \tau_x K_z \right), \\ C_{xi} = -\frac{K_z^2}{\pi\lambda} \left[\frac{2\tau_x}{\pi\lambda} K_z - \sigma \left(1 + \frac{2\tau_x}{\pi\lambda} K_z + \frac{2(1-\sigma)}{\pi\lambda} \cdot \frac{dK_z}{d\alpha} \right) \right]. \end{cases}$$

38.2. Frontiera plană în cazul general

Să presupunem că în locul solului există o suprafață de separație (ca în figura 35.6). În acest caz, intensitatea vârtejului-imagini este $\nu\Gamma$ iar vitezele induse suplimentare vor fi respectiv :

$$(38.15) \quad \frac{u_s}{V_0} = \frac{\nu\tau_x}{\pi\lambda} C_z, \quad \frac{w_s}{V_0} = \frac{\nu\gamma}{\pi\lambda} C_z = i_s,$$

unde ν va fi dat de formula (35.50). Calculele pentru portanță și rezistență se vor face în același mod ca și pentru cazul precedent, unde am avut -1 în loc de ν . Treceți peste detaliile acestor calcule, care nu prezintă de altfel un interes special.

38.2.1. Frontiera verticală. Fie D distanța centrului C al aripii la suprafața verticală; viteza indusă suplimentară într-un punct y al aripii, datorită vârtejurilor-imagini, va avea ca expresie :

$$(38.16) \quad w_s = \frac{\nu\Gamma}{4\pi} \left(\frac{1}{y+D-\frac{\alpha b}{2}} - \frac{1}{y+D+\frac{\alpha b}{2}} \right),$$

unde sensul pozitiv este luat în direcția descendentă. Valoarea medie a acestei viteze este egală cu

$$(38.17) \quad \frac{w_s}{V_0} = \frac{\nu\Gamma}{4\pi\alpha b} \ln \frac{1}{1 - \left(\frac{\alpha b}{2D} \right)^2} = \frac{\nu C_z}{8\alpha^2\pi\lambda} \ln \frac{1}{1 - \left(\frac{\alpha b}{2D} \right)^2},$$

de unde rezultă, punând

$$(38.18) \quad \sigma = \frac{1}{8\alpha^2} \ln \frac{1}{1 - \left(\frac{\alpha b}{2D} \right)^2},$$

incidența efectivă și rezistența indusă totală a aripii :

$$(38.19) \quad \begin{aligned} \alpha_e &= \alpha - (1 + \tau + \nu\sigma) \frac{C_z}{\pi\lambda}, \\ C_{xi} &= (1 + \delta + \nu\sigma) \frac{C_z^2}{\pi\lambda}. \end{aligned}$$

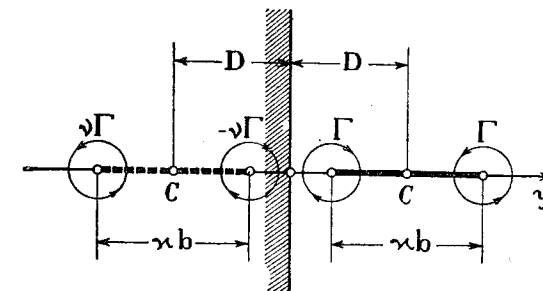


Fig. 38.2.

Pentru cazul pereților rigizi ($\nu = -1$), ar corespunde astfel o micșorare a rezistenței induse, în timp ce pentru cazul suprafețelor libere ($\nu = 1$), ar corespunde o majorare de aceeași valoare.

38.3. Scurgere plană limitată de două suprafețe plane paralele

Acest dispozitiv de încercări este utilizat în special pentru studiul aripiilor de anvergură infinită. Fie deci Γ circulația în jurul aripii de anvergură infinită, pusă chiar în origine, la o distanță h_1 de frontiera inferioară F_i . În realitate, aripa este cuprinsă între doi pereți rigizi, paraleli cu planul xOy , cu Ox în direcția negativă a vitezei V_0 și Oy după verticala ascendentă (fig. 38.3). Fie V_0 viteza în camera de experiență și V_0' în regiunea de dincolo de frontieră. În cazul general, când V_0 este finită și diferită de zero, potențialul aditiv al mișcării în vâna de experiență va fi dat de șirul vertical de vârtejuri-imagini, după cum este reprezentat în fig. 38.3.

Notând cu n numărul de ordine al imaginii, intensitatea turbionară respectivă va fi $\nu^n\Gamma$, după cum am arătat deja în paragraful precedent (35, fig. 35.7) unde ν va fi dat de formula (35.50). Cazul general este rar întâlnit în practică; de aceea, vom trata mai întâi două cazuri interesante: pereți rigizi ($\nu = -1$) și suprafețe libere ($\nu = 1$).

Vom trata de asemenea un al treilea caz și anume: unul dintre pereți va fi presupus rigid (cel inferior F_i , de exemplu) și altul va fi presupus liber (cel superior F_s).

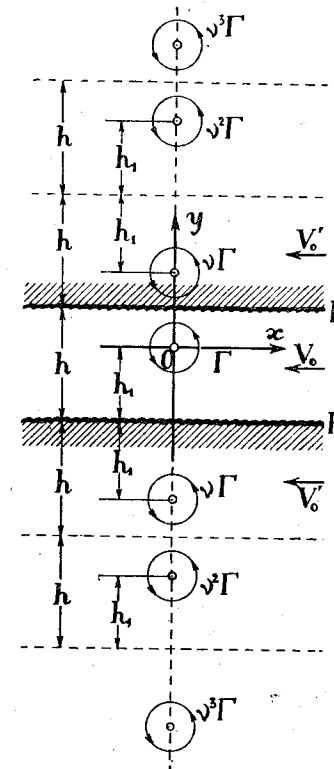


Fig. 38.3.

38.3.1. Cazul pereților rigizi sau a suprafețelor libere. Vitesa complexă adițională w_a , datorită influenței pereților, va avea ca expresie, notând cu $z = x + iy$ variabila complexă (fig. 38.3):

$$(38.20) \quad w_a = u_a - iv_a = \frac{i\Gamma}{2\pi} \cdot \frac{1}{z} - \frac{i\Gamma}{2\pi} \sum_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{z - i2nh} \pm \frac{i\Gamma}{2\pi} \sum_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{z - i2[(n+1)h - h_1]},$$

unde semnul plus al ultimului termen corespunde suprafețelor rigide iar semnul minus, suprafețelor libere.

Observând mai departe că sumele precedente pot fi exprimate prin funcții hiperbolice, se găsește pentru vitesa adițională o expresie mai simplă:

$$(38.21) \quad w_a = u_a - iv_a = \frac{i\Gamma}{2\pi} \cdot \frac{1}{z} - \frac{i\Gamma}{4h} \coth \frac{\pi z}{2h} \pm \frac{i\Gamma}{4h} \coth \frac{\pi(z + 2ih_1)}{2h},$$

a cărei valoare în dreptul aripii ($z = 0$) va fi:

$$(38.22) \quad \lim_{x \rightarrow 0} w_a = \pm \frac{\Gamma}{4h} \cot \frac{h_1}{h} \pi,$$

Dacă aripa este așezată în centrul vânei ($h = 2h_1$), vitesa adițională este nulă.

Influența pereților asupra aripii se traduce totuși prin curbură a curențului în dreptul acesteia. După fig. 14.5, raza de curbură, pe care o vom nota cu R , va fi dată de expresia:

$$(38.23) \quad \frac{1}{R} = \frac{1}{V_0} \left(\frac{\partial v_a}{\partial x} \right)_{x=y=0} = -\text{p. im.} \frac{1}{V_0} \left(\frac{\partial w_a}{\partial z} \right)_{z=0} = \\ = \text{p. r.} \frac{\pi\Gamma}{8V_0h^2} \left[\frac{1}{\sin^2 \left(\frac{i\pi z}{2h} \right)} \mp \frac{1}{\sin^2 \left(\frac{i\pi z}{2h} - \frac{h_1}{h} \pi \right)} + \left(\frac{2h}{\pi z} \right)^2 \right]_{z=0} = \frac{\pi\Gamma}{8V_0h^2} \left(\frac{1}{3} \pm \frac{1}{\sin^2 \frac{h_1\pi}{h}} \right)$$

unde semnul minus al celui de al doilea termen al parantezei corespunde pereților rigizi iar semnul plus, suprafețelor libere.

Dacă aripa este așezată în centrul vânei ($h = 2h_1$), vom avea:

$$(38.24) \quad \frac{1}{R} \frac{\pi\Gamma}{24V_0h^2} (1 \mp 3) = (1 \mp 3) \frac{\pi}{48} \frac{c}{h^2} C_z,$$

ceace corespunde unei majorări $\Delta\alpha$ a incidenței,

$$(38.25) \quad \Delta\alpha = -\frac{c}{R} \left(\frac{3}{4} - \frac{C_m}{C_z} \right) \approx \frac{\pi}{48} \frac{c^2}{h^2} C_z,$$

pentru cazul pereților rigizi, sau o micșorare,

$$(38.26) \quad \Delta\alpha = -\frac{c}{R} \left(\frac{3}{4} - \frac{C_m}{C_z} \right) \approx -\frac{\pi}{24} \frac{c^2}{h^2} C_z,$$

pentru cazul suprafețelor libere.

Din aceste formule, se constată că influența curburii curențului este neglijabilă atât timp cât coarda este mică față de înălțimea vânei.

Notând cu k jumătate din panta curbei C_z în funcție de unghiul de incidență din cazul aripii de anvergură infinită, se poate scrie, dacă $C_{z\infty}$ este portanța corespunzătoare cazului unui fluid nelimitat:

$$(38.27) \quad C_z = 2k(\alpha \pm \Delta\alpha) = C_{z\infty} \pm 2k \Delta\alpha,$$

de unde se deduce:

$$(38.28) \quad C_{z\infty} = \left(1 - \frac{k\pi}{48} \cdot \frac{c^2}{h^2} C_z \right)$$

pentru pereții rigizi și

$$(38.29) \quad C_{z\infty} = \left(1 + \frac{k\pi}{24} \cdot \frac{c^2}{h^2} \right) C_z$$

pentru suprafețele libere.

38.3.2. Incidență și rezistență indusă aparente. Să revenim la expresia (38.21) a vitesei adiționale; am văzut că această vitesă este nulă în dreptul aripii dacă aceasta este situată în centrul vânei.

Să considerăm acum, vitesa totală la infinit amonte sau aval ($z = \pm \infty$), datorită întregului șir de vârtejuri; putem scrie expresia:

$$(38.30) \quad \lim_{z \rightarrow \pm \infty} w = -\frac{i\Gamma}{4h} \left[\coth \frac{\pi z}{2h} \mp \coth \frac{\pi(z + 2ih_1)}{2h} \right]_{z=\pm \infty}$$

care devine pentru $h = 2h_1$:

$$(38.31) \quad \lim_{z=\pm \infty} w = w_\infty = u_\infty - iv_\infty = \mp \frac{i\Gamma}{4h} (1 \mp 1),$$

unde semnul minus între paranteze corespunde pereților rigizi iar semnul plus, suprafețelor libere. Se vede prin urmare că această vitesă este nulă în primul caz și respectiv, $\frac{\Gamma}{2h}$ la infinit amonte și $-\frac{\Gamma}{2h}$ la infinit aval, în cazul suprafețelor libere.

Pentru acest din urmă caz vom obține deci un unghi indus i_∞ , a cărui valoare la $+\infty$ și $-\infty$ va fi respectiv:

$$(38.32) \quad i_\infty = \frac{w_\infty}{V_0} = \pm \frac{\Gamma}{2V_0h} = \pm \frac{c}{4h} C_z.$$

Se poate obține același rezultat printr'un raționament mai simplu. Într'adevăr, dacă considerăm întreaga vână fluidă, dela infinit amonte până

la infinit aval, pe toată înălțimea h și aplicăm teorema impulsului, vom găsi $\rho V_0 \Gamma = \rho V_0 h 2v_\infty$, expresie identică cu (38.32).

Care este influența acestei incidențe induse la infinit? În dreptul aripii viteza adițională este nulă și unghiul indus de asemenea, însă față de direcția curentului, paralelă la rîndul său cu pereții rigizi ai tunelului aerodinamic (fig. 38.4), aripa suferă o micșorare a incidenței, pe care o vom numi *incidență indusă aparentă* și care va fi determinată după cum urmează. Să presupunem pentru aceasta că aripa este situată în centrul vanei ($h = 2h_1$); viteza complexă într'un punct z va fi dată de expresia :

$$(38.33) \quad w = -\frac{i\Gamma}{2h} \coth \frac{\pi z}{h}.$$

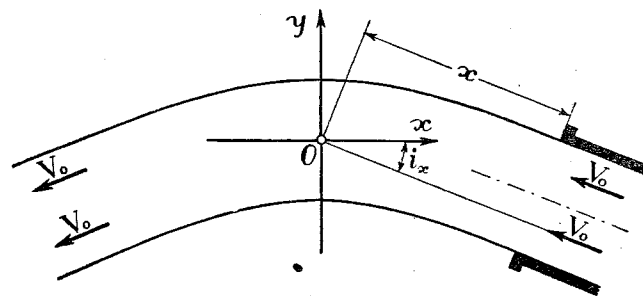


Fig. 38.4.

Cum pe de altă parte, curbura curentului este foarte mică, se poate admite în prima aproximație că pereții liberi sunt paraleli cu axa Ox . În secțiunea de ieșire a curentului, $z = x \pm i\frac{h}{2}$, pe cei doi pereți, viteza va fi :

$$(38.34) \quad w_x = u_x - iv_x = -\frac{i\Gamma}{2h} \coth \frac{\pi}{h} \left(x \pm i\frac{h}{2} \right) = \frac{-i\Gamma}{2h} \operatorname{tgh} \frac{\pi x}{h},$$

de unde rezultă o *incidență indusă aparentă* în dreptul aripii egală cu

$$(38.35) \quad i_x = \frac{v_x}{V_0} = \frac{\Gamma}{2h} \operatorname{tgh} \frac{\pi x}{h} = C_z \frac{c}{4h} \operatorname{tgh} \frac{\pi x}{h}$$

și o *rezistență indusă aparentă*:

$$(38.36) \quad C_{xi} = C_z \frac{\Gamma}{2h} \operatorname{tgh} \frac{\pi x}{h} = C_z^2 \frac{c}{4h} \operatorname{tgh} \frac{\pi x}{h}.$$

Aceste rezultate, pe care le-am stabilit în lucrările noastre anterioare [1], vor servi pentru corectarea experiențelor efectuate în sufleriile aerodinamice

Trebue să observăm pe de altă parte, că pentru $\frac{x}{h} = 0,5$ vom avea $\operatorname{tgh} \frac{\pi x}{h} = 0,92$; astfel încât, dacă modelul este situat la o distanță $x > \frac{h}{2}$ după cum se întâmplă de altfel în practică, putem considera o incidență indusă egală cu $\frac{c}{4h} C_z$.

Notând și aici cu $C_{z\infty}$ portanța unitară în curent nelimitat, se poate scrie, ținând seamă de (38.29) și (38.35) :

$$(38.37) \quad C_{z\infty} = \left(1 + \frac{k\pi}{24} \cdot \frac{c^2}{h^2} + \frac{kc}{2h} \operatorname{tgh} \frac{\pi x}{h} \right) C_z.$$

38.3.3. Cazul suprafețelor mixte: peretele inferior fix și suprafața superioară liberă. Pentru studiul influenței solului în sufleriile aerodinamice cu vâna liberă, suprafața solului va fi reprezentată printr'un perete rigid. Condițiile la frontieră sunt satisfăcute de șirul de vârtejuri - imagine, pe care l-am indicat în fig. 38.5. Viteza adițională complexă va fi dată de următoarea expresie [1] :

$$(38.38) \quad w = \frac{-i\Gamma}{4h} \left(\frac{1}{\operatorname{sh} \frac{\pi(z - ih_1)}{2h}} - \frac{1}{\operatorname{sh} \frac{\pi(z + ih_1)}{2h}} \right),$$

care devine în dreptul aripii ($z = 0$) :

$$(38.39) \quad w_0 = u_0 - iv_0 = \frac{\Gamma}{4h} \cdot \frac{1}{\sin \pi \frac{h_1}{h}} = u_0,$$

ceea ce corespunde la o micșorare a vitezei : $U_0 = V_0 - u_0$. În mod analog, se găsește pentru raza de curbură în dreptul aripii :

$$(38.40) \quad \frac{1}{R} = \frac{\pi\Gamma}{12V_0 h^2} \left[1 - \frac{3}{2} \frac{\cos \pi \frac{h_1}{h}}{\sin^2 \pi \frac{h_1}{h}} \right].$$

38.4. Aripă de anvergură finită între suprafețe plane paralele

Prin metoda imaginilor problema se reduce la problema unei infinități de biplane drepte, cu aripile egale (fig. 38.6 și 38.7). Vom distinge două cazuri : suprafețe plane orizontale și verticale.

38.4.1. Suprafețe plane orizontale. Dispoziția biplanelor este arătată în fig. (38.6). Neglijând efectul vârtejurii legate, care se poate evalua eventual

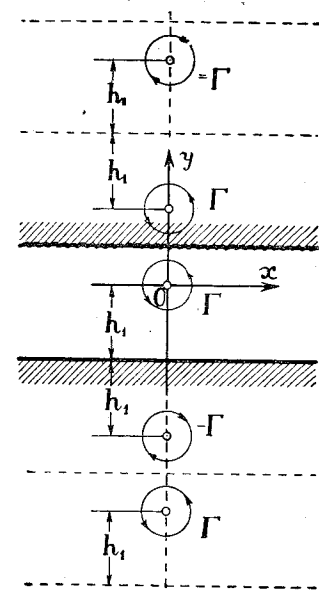


Fig. 38.5.

printr'o metodă aproximativă, viteza suplimentară indusă de vârtejurile-imagini libere de ordinul n , punând după (33.18),

$$(38.41) \quad m_n = \frac{\kappa b}{nh}, \quad n_n = 0$$

și după (33.19),

$$(38.42) \quad \sigma_n = \frac{1}{8\kappa^2} \ln(1 + m_n^2) = \frac{1}{8\kappa^2} \ln \left[1 + \left(\frac{\kappa b}{nh} \right)^2 \right],$$

va avea ca valoare medie, dedusă din expresia (34.12):

$$(38.43) \quad \frac{w_{sn}}{V_0} = \frac{\nu^n \Gamma}{4\pi \kappa b V_0} \ln \left[1 + \left(\frac{\kappa b}{nh} \right)^2 \right] = \frac{2\kappa \Gamma \nu^n}{\pi b V_0} \sigma_n$$

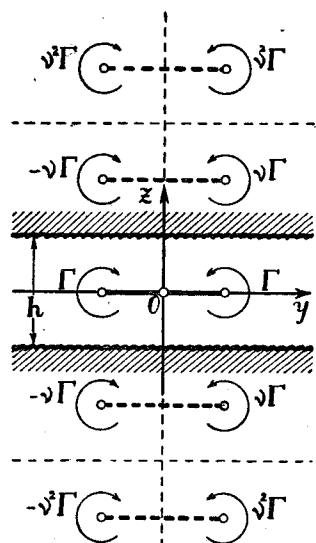


Fig. 38.6.

Rezultă astfel un unghi indus suplimentar total,

$$(38.44) \quad i_s = \sum \frac{w_{sn}}{V_0} = 2 \frac{2\kappa \Gamma}{\pi b V_0} \sum_{n=1}^{\infty} \nu^n \sigma_n$$

Însă se poate pune aproximativ

$$(38.45) \quad \sigma_n = \frac{1}{8\kappa^2} \ln \left[1 + \left(\frac{\kappa b}{nh} \right)^2 \right] \approx \frac{1}{8} \cdot \frac{b^2}{n^2 h^2},$$

de unde rezultă:

$$(38.46) \quad i_s = \frac{4\kappa \Gamma}{\pi b V_0} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\nu^n}{8} \cdot \frac{b^2}{n^2 h^2} = \frac{\kappa b \Gamma}{2\pi h^2 V_0} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\nu^n}{n^2},$$

care devine

$$(38.47) \quad i_s = \frac{\kappa b \Gamma}{2\pi h^2 V_0} \cdot \frac{\pi^2}{6} \approx 0,41 \frac{b^2}{h^2} \cdot \frac{C_z}{\pi \lambda}$$

pentru suprafețele libere ($\nu = 1$) și

$$(38.48) \quad i_s = - \frac{\kappa b \Gamma}{2\pi h^2 V_0} \cdot \frac{\pi}{12} = - 0,205 \frac{b^2}{h^2} \cdot \frac{C_z}{\pi \lambda}$$

pentru pereții rigizi ($\nu = -1$).

Se poate scrie în cele din urmă pentru incidența și rezistența indusă.

totală, respectiv:

$$(38.49) \quad \begin{cases} \alpha_e = \alpha - \left(1 + \tau - 0,205 \frac{b^2}{h^2} \right) \frac{C_z}{\pi \lambda}, \\ C_{xi} = \left(1 + \delta - 0,205 \frac{b^2}{h^2} \right) \frac{C_z^2}{\pi \lambda} \end{cases}$$

pentru cazul pereților rigizi și

$$(38.50) \quad \begin{cases} \alpha_e = \alpha - \left(1 + \tau + 0,41 \frac{b^2}{h^2} \right) \frac{C_z}{\pi \lambda}, \\ C_{xi} = \left(1 + \delta + 0,41 \frac{b^2}{h^2} \right) \frac{C_z^2}{\pi \lambda} \end{cases}$$

pentru cazul suprafețelor libere.

După cum am specificat de la început, am neglijat acțiunea vârtejurilor legate. Această acțiune se traduce, pe de o parte, printr'o curbură a curentului în dreptul aripii, care se poate calcula printr'o metodă approxi-

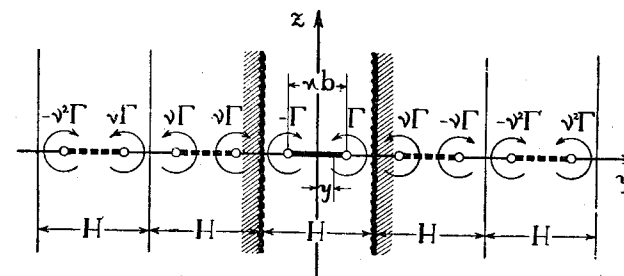


Fig. 38.7.

mativă, considerând viteza indusă în jurul centrului aripii reale dată de fiecare vârtej imagine legat, pe de altă parte, prin incidența indusă aparentă, datorită aceluiași vârtejuri legate, față de secțiunea de ieșire a jetului fluid, așa cum am determinat-o pentru mișcarea plană (fig. 38.4).

38.4.2. Suprafețe plane verticale. Viteza adițională este dată de un șir de vârtejuri-imagini dispuse ca în fig. 38.7. În coloana de ordinul n , în aval, sau în amonte, perechea de vârtejuri de intensitate $(-1)^n \nu^n \Gamma$ induce în dreptul aripii o viteză

$$(38.51) \quad w_{sn} = \frac{(-\nu)^n \Gamma}{4\pi} \left(\frac{1}{y + nH + \frac{\kappa b}{2}} - \frac{1}{y + nH - \frac{\kappa b}{2}} \right),$$

dirijată după verticala descendentă, a cărei valoare medie pe toată anvergura va fi:

$$(38.52) \quad \frac{w_{sn}}{V_0} = \frac{(-\nu)^n \Gamma}{4\pi \kappa b} \ln \left[1 - \left(\frac{\kappa b}{nH} \right)^2 \right] = -(-1)^n \frac{2\kappa \nu^n \Gamma}{\pi b V_0} \sigma_n,$$

unde σ_n va fi dat de formula :

$$(38.53) \quad \sigma_n = -\frac{1}{8x^2} \ln \left[1 - \left(\frac{x b}{nH} \right)^2 \right] \approx \frac{1}{8} \frac{b^2}{n^2 H^2}.$$

Ca și mai sus, calculele ne conduc la următoarele rezultate :

1) Pentru pereții rigizi ($\nu = -1$), o majorare a unghiului de incidență cu

$$(38.54) \quad \Delta\alpha = 0,41 \frac{b^2}{H^2} \cdot \frac{C_z}{\pi\lambda}$$

și prin urmare unghiul efectiv, precum și rezistența indusă totală devin :

$$(38.55) \quad \begin{cases} \alpha_e = \alpha - \left(1 + \tau - 0,41 \frac{b^2}{H^2} \right) \cdot \frac{C_z}{\pi\lambda}, \\ C_{xi} = \left(1 + \delta - 0,41 \frac{b^2}{H^2} \right) \frac{C_z^2}{\pi\lambda}; \end{cases}$$

2) Deasemenea, pentru suprafețele libere, o micșorare a unghiului de incidență cu

$$(38.56) \quad \Delta\alpha = -0,205 \frac{b^2}{H^2} \cdot \frac{C_z}{\pi\lambda}$$

și prin urmare formulele corespunzătoare pentru incidența efectivă și rezistența indusă totală vor fi :

$$(38.57) \quad \begin{cases} \alpha_e = \alpha - \left(1 + \tau + 0,205 \frac{b^2}{H^2} \right) \frac{C_z}{\pi\lambda}, \\ C_{xi} = \left(1 + \delta + 0,205 \frac{b^2}{H^2} \right) \frac{C_z^2}{\pi\lambda}. \end{cases}$$

38.5. Influența suprafețelor plane paralele stabilită prin metoda directă

Această problemă a fost tratată mai sus cu ajutorul teoriei biplanelor. Se pot obține aceleași rezultate direct, mai ușor și mai riguros, considerând viteza complexă a sistemului format de vârtejurile-imagini, care înlocuiesc influența frontierelor.

Astfel de exemplu, pentru cazul suprafețelor orizontale libere (fig. 38.6, $\nu = 1$), viteza complexă va fi dată prin următoarea serie :

$$(38.58) \quad v - iw = -\frac{i\Gamma}{2h} \left[\sum_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x - \frac{x b}{2} - inh} - \sum_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x + \frac{x b}{2} - inh} \right]$$

care poate fi înlocuită printr-o funcție hiperbolică simplă :

$$(38.59) \quad v - iw = -\frac{i\Gamma}{2h} \left[\coth \frac{\pi}{h} \left(x - \frac{x b}{2} \right) - \coth \frac{\pi}{h} \left(x + \frac{x b}{2} \right) \right].$$

Trebuie remarcat că axa Oy este îndreptată după anvergura aripii și Oz , după verticala ascendentă; prin urmare x reprezintă variabila complexă $x = y + iz$. În centrul aripii ($x = 0$), vom avea :

$$(38.60) \quad v_0 - iw_0 = \frac{i\Gamma}{h} \coth \frac{\pi}{2} \cdot \frac{x b}{h} = -iw_0;$$

dacă scădem viteza indusă propriu zisă a aripii (tot în centru), a cărei expresie este

$$(38.61) \quad -\frac{2\Gamma}{\pi x b},$$

vom avea în cele din urmă viteza adițională w_s sau unghiul indus suplimentar i_s :

$$(38.62) \quad i_s = \frac{w_s}{V_0} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{\Gamma}{h} \left(\coth \frac{\pi}{2} \cdot \frac{x b}{h} - \frac{2h}{\pi x b} \right) = \\ = -\frac{C_z}{4x b} \cdot \frac{S}{h} \left(\coth \frac{\pi}{2} \cdot \frac{x b}{h} - \frac{2h}{\pi x b} \right).$$

Pentru cazul pereților orizontali rigizi, așezarea vârtejurilor-imagini (fig. 38.6, $\nu = -1$) ne permite să scriem, în mod analog cu cazul precedent, expresia vitesei complexe sub forma :

$$(38.63) \quad v - iw = \frac{-i\Gamma}{4h} \left[\coth \frac{\pi}{2h} \left(x - \frac{x b}{2} \right) - \coth \frac{\pi}{2h} \left(x + \frac{x b}{2} \right) + \right. \\ \left. + \coth \frac{\pi}{h} \left(x - \frac{x b}{2} - ih \right) - \coth \frac{\pi}{2h} \left(x + \frac{x b}{2} - ih \right) \right].$$

În centrul aripii ($x = 0$), scăzând din această expresie viteza indusă propriu zisă a aripii, unghiul indus suplimentar va fi dat de următoarea formulă :

$$(38.64) \quad i_s = \frac{w_s}{V_0} = -\frac{\Gamma}{4h} \left[\coth \frac{\pi}{4} \cdot \frac{x b}{h} + \text{th} \frac{\pi}{4} \cdot \frac{x b}{h} - \frac{4h}{\pi x b} \right].$$

Este interesant de observat, că făcând dezvoltările necesare, formulele (38.62) și (38.64) se reduc respectiv la formulele (38.47) și (38.48).

Se poate face mai departe un raționament analog pentru frontierele verticale. Trecând peste amănuntele calculelor, care sunt identice cu cele din cazurile precedente, se găsește în cele din urmă :

$$(38.65) \quad i_s = + \frac{C_z}{4x b} \cdot \frac{S}{h} \left(\coth \frac{\pi}{2} \cdot \frac{x b}{h} - \frac{2h}{\pi x b} \right)$$

pentru cazul pereților rigizi și:

$$(38.66) \quad i_s = -\frac{C_z}{8xb} \cdot \frac{S}{h} \left(\coth \frac{\pi}{4} \cdot \frac{xb}{h} + \operatorname{th} \frac{\pi}{4} \cdot \frac{xb}{h} - \frac{4h}{\pi xb} \right)$$

pentru cazul suprafețelor libere.

Aceste rezultate au fost deja stabilite în lucrările noastre anterioare [1].

39. SUFLERII CU VÂNA TOTAL LIMITATĂ

În practică, secțiunile din camera de experiență a suflerilor aerc-dinamice au un contur finit reprezentând în general o figură geometrică simplă: dreptunghi, cerc, elipsă, etc.

Încercările efectuate în aceste suflerii sunt transformate să corespundă la condițiile reale ale unui fluid nelimitat, aplicând corectările rezultate din influența pereților, ale căror valori le vom stabili mai jos pentru câteva cazuri uzuale.

39.1. Secțiune dreptunghiulară

Fie H și h dimensiunile orizontale și verticale ale dreptunghiului reprezentând secțiunea sufleriei. Pentru a simplifica calculele, să presupunem că aripa este așezată în centrul secțiunii și fie xb anvergura redusă a aripii. Avem de considerat următoarele patru cazuri:

- pereti complet rigizi,
- suprafețe orizontale libere și pereți laterali rigizi,
- suprafețe total libere,
- pereti orizontali rigizi și suprafețe laterale libere.

Este ușor de văzut că așezarea vârtejurilor-imagini care satisfac condițiilor la frontieră este cea indicată în figura 39.1, a, b, c, d.

Cazul a) și b). Notând cu n numărul de ordine al unei coloane orizontale, viteza complexă datorită șirului de vârtejuri-imagini corespunzând acestei coloane, va avea la infinit aval următoarea expresie:

$$(39.1) \quad v_n - iw_n = -(\mp 1)^n \frac{i\Gamma}{2H} \left[\cot \frac{\pi}{H} \left(x - inh - \frac{xb}{2} \right) - \cot \frac{\pi}{H} \left(x - inh + \frac{xb}{2} \right) \right],$$

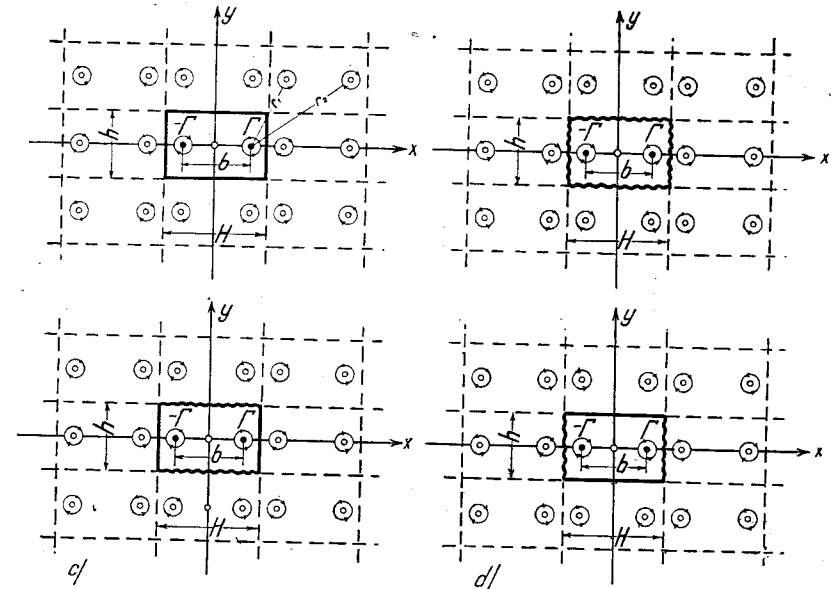
unde semnul (-) corespunde primului caz (fig. 39.1 a) și semnul (+), celui de-al doilea caz (fig. 39.1 b) și unde $x = y + iz$ este variabila complexă, aripa fiind raportată la sistemul de axe obișnuite.

Această expresie ar putea fi pusă încă sub o altă formă:

$$(39.2) \quad v_n - iw_n = -(\mp 1)^n \frac{i\Gamma}{H} \cdot \frac{\sin \pi \frac{xb}{H}}{\cos \pi \frac{xb}{H} - \operatorname{ch} \pi \left(2n \frac{h}{H} + i \frac{x}{H} \right)}$$

ceea ce ne conduce, pentru toate coloanele, la o viteză totală egală cu:

$$(39.3) \quad v - iw = -\frac{i\Gamma}{H} \sin \pi \frac{xb}{H} \sum_{-\infty}^{+\infty} \frac{(\mp 1)^n}{\cos \pi \frac{xb}{H} - \operatorname{ch} \pi \left(2n \frac{h}{H} + i \frac{x}{H} \right)}$$



39.1. a, b, c, d.

Ne putem da seama, din această expresie, că în orice punct al anvergurii ($x = y, z = 0$) nu există decât componenta verticală w , componenta orizontală fiind nulă ($v = 0$).

Dacă pe de altă parte raportul $\frac{xb}{H}$ este destul de mic, putem admite aproximativ că viteza indusă în dreptul aripii este cea corespunzătoare centrului său ($x = 0$).

Expresia (39.3) devine în acest caz:

$$(39.4) \quad w = \frac{\Gamma}{H} \sin \pi \frac{xb}{H} \sum_{-\infty}^{+\infty} \frac{(\mp 1)^n}{\cos \pi \frac{xb}{H} - \operatorname{ch} 2\pi n \frac{h}{H}}$$

unde sensul lui w este considerat după direcția pozitivă a lui z .

Scăzând mai departe viteza indusă în centru de vârtejurile proprii ale aripii reale :

$$(39.5) \quad w_r = -\frac{2\Gamma}{\pi \chi b},$$

observând pe de altă parte că în planul yOz , viteza este jumătate din cea dela infinit, se obține în cele din urmă formula vitesei induse suplimentare, pe care am stabilit-o deja în lucrările noastre anterioare [1] :

$$(39.6) \quad w_s = \frac{\Gamma}{2H} \left[\sin \pi \frac{\chi b}{H} \sum_{-\infty}^{+\infty} \frac{(\mp 1)^n}{\cos \pi \frac{\chi b}{H} - \operatorname{ch} 2\pi n \frac{h}{H}} + \frac{2H}{\pi \chi b} \right].$$

Să observăm acum că pentru $\pm n$ se obțin aceleași valori, astfel încât, se poate da o formă mai comodă vitesei aditive :

$$(39.7) \quad w_s = \frac{\Gamma}{2H} \left[2 \sum_1^n \frac{(\mp 1)^n \sin \pi \frac{\chi b}{H}}{\cos \pi \frac{\chi b}{H} - \operatorname{ch} 2\pi n \frac{h}{H}} + \frac{\sin \pi \frac{\chi b}{H}}{\cos \pi \frac{\chi b}{H} - 1} + \frac{2H}{\pi \chi b} \right]$$

Suma din paranteză este foarte convergentă, chiar pentru raporturile mici $\frac{h}{H}$; deaceia, este suficient să limităm dezvoltarea la $n = 2$.

Inlocuind mai departe Γ în funcție de C_z ($\rho V_0 \Gamma \chi b = \frac{1}{2} \rho S V_0^2 C_z$), se poate scrie pentru viteza sau incidența indusă suplimentară :

$$(39.8) \quad i_s = \frac{w_s}{V_0} = \frac{C_z}{4} \cdot \frac{S}{\Sigma} \cdot \frac{h}{\chi b} \left(\frac{1}{\pi} \cdot \frac{2H}{\chi b} - \cot \pi \frac{\chi b}{2H} + \right. \\ \left. + 2 \sum_1^n \frac{(\mp 1)^n \sin \pi \frac{\chi b}{H}}{\cos \pi \frac{\chi b}{H} - \operatorname{ch} 2\pi n \frac{h}{H}} \right),$$

unde S este suprafața aripii și Σ secțiunea tunelului.

Trebue să observăm că această formulă depinde în același timp de raportul $\frac{h}{\chi b}$ și $\frac{\chi b}{H}$, ceea ce explică micile divergențe care se găsesc între

rezultatele date de această formulă și cea a lui GLAUERT, care ține seama numai de raportul $\frac{h}{H}$. Intr'adevăr, printr'o dezvoltare potrivită și prin simplificări bazate pe ipoteza că raportul $\frac{\chi b}{H}$ este foarte mic, autorul ajunge la următoarea formulă :

$$(39.9) \quad \frac{w_s}{V_0} = -C_z \frac{S}{\Sigma} \cdot \frac{\pi h}{H} \left[\frac{1}{24} + \sum_1^p \frac{p}{1 + e^{2p\pi} \frac{h}{H}} \right].$$

De altfel, chiar pentru $\frac{h}{H} > 0,5$, valorile obținute din cele două formule sunt foarte apropiate.

Reamintim că semnul $(-)$ al factorului $(\mp 1)^n$ din formula (39.8) se referă la pereții rigizi (a), iar semnul $+$ se referă la cazul mixt : pereții laterali rigizi și suprafețele orizontale libere (b). Pentru acest ultim caz trebuie luată în considerație și incidența indusă aparentă întocmai ca la cazul vânei plane cu suprafețe libere (38.32).

Intr'adevăr, dacă secțiunea de ieșire a curentului este destul de îndepărtată de model, există în raport cu direcția acestui curent o incidență indusă aparentă care poate fi dedusă din teorema impulsului :

$$(39.10) \quad P = \rho V_0 \Gamma \chi b = \rho V_0 \Sigma 2w_a,$$

admițând, bine înțeles, că deflecțiunile din amonte și aval sunt egale și de semn contrar. Rezultă deci, o micșorare corespunzătoare a incidenței :

$$(39.11) \quad i_a = \frac{w_a}{V_0} = -\frac{1}{4} \cdot \frac{S}{\Sigma} C_z.$$

Am pus semnul $(-)$ pentru a avea o formulă similară cu (39.8).

Deasemenea, mai există și efectul de arcuire a curentului în dreptul aripii, care poate fi evaluat în mod aproximativ, însă poate fi totuși neglijat în raport cu corectările precedente, care sunt cu mult mai importante.

Să revenim la formula (39.8) și s'o punem sub forma

$$(39.12) \quad i_s = \Delta \alpha = \varepsilon \frac{S}{\Sigma} C_z,$$

unde ε este un coeficient scos din aceeași formulă; rezultă o majorare a incidenței pentru ε pozitiv, ceea ce corespunde cazului pereților rigizi (se va lua semnul $(-)$ din expresia $(\mp 1)^n$) și o micșorare pentru ε negativ, ceea ce se întâmplă în al doilea caz (b).

Vom avea deasemenea pentru rezistența indusă o micșorare egală cu

$$(39.13) \quad \Delta C_{xi} = -i_s C_z = -\varepsilon \frac{S}{\Sigma} C_z^2.$$

Cu titlu de comparație dăm mai jos o tabelă pentru valorile lui ε în cazul pereților rigizi (a):

Tabela 39.1

$\frac{x b}{H} \backslash \frac{h}{H}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	2	4
0,5	0,112	0,113	0,114	0,140	0,270	0,540
0,75	0,063	0,090	0,110	0,150	0,290	0,580
Glauert	0,262	0,137	0,119	0,137	0,262	0,524
Toussaint	0,1	0,105	0,122	0,14	0,275	0,5

Cazul c) și d). Pentru a calcula viteza complexă datorită întregului sistem de vârtejuri-imagină și vârtejuri reale, să considerăm mai întâi o coloană orizontală de ordinul n (fig. 39.1 c și d); este ușor de văzut că vârtejurile acestei coloane induc o vitesă care va putea fi pusă sub forma:

$$(39.14) \quad v_n - iw_n = -(\pm 1)^n \frac{i\Gamma}{4H} \left[\cot \frac{\pi}{2H} \left(x - inh - \frac{x b}{2} \right) + \operatorname{tg} \frac{\pi}{2H} \left(x - inh - \frac{x b}{2} \right) - \cot \frac{\pi}{2H} \left(x - inh + \frac{x b}{2} \right) - \operatorname{tg} \frac{\pi}{2H} \left(x - inh + \frac{x b}{2} \right) \right],$$

unde semnul (+) se referă la suprafețele libere (c) și semnul (-) la cazul mixt (d). Prin transformări simple, această expresie devine:

$$(39.15) \quad v_n - iw_n = -(\pm 1)^n \frac{i\Gamma}{2H} \left[\operatorname{cosec} \frac{\pi}{H} \left(x - inh - \frac{x b}{2} \right) - \operatorname{cosec} \frac{\pi}{H} \left(x - inh + \frac{x b}{2} \right) \right],$$

care ar putea fi pusă sub o formă mai comodă pentru calcul. Intr'adevăr, luând în considerare toate coloanele orizontale, putem scrie pentru viteza complexă totală:

$$(39.16) \quad v - iw = -\frac{2i\Gamma}{H} \sum_{-\infty}^{+\infty} (\pm 1)^n \frac{\sin \frac{\pi}{2} \frac{x b}{H} \operatorname{ch} \frac{\pi}{H} (nh - x)}{\cos \pi \frac{x b}{H} - \operatorname{ch} \frac{2\pi}{H} (nh - x)}.$$

În centrul aripii ($x = 0$) viteza adițională va fi egală cu jumătatea valorii acestei expresii, minus viteza datorită vârtejurilor proprii ale aripii reale (39.5). Se poate scrie în cele din urmă, observând că obținem aceleași valori pentru $\pm n$,

$$(39.17) \quad w_s = \frac{\Gamma}{H} \left[\frac{1}{\pi} \cdot \frac{H}{x b} - \frac{1}{2} \operatorname{cosec} \frac{\pi}{2} \frac{x b}{H} + \sum_{1}^{\infty} (\pm 1)^n \frac{\sin \frac{\pi}{2} \frac{x b}{H} \operatorname{ch} n \frac{h}{H}}{\cos \pi \frac{x b}{H} - \operatorname{ch} 2\pi n \frac{h}{H}} \right].$$

Să punem mai departe,

$$(39.18) \quad \varepsilon' = \frac{1}{2} \frac{h}{x b} \left[\frac{1}{\pi} \frac{H}{x b} - \frac{1}{2} \operatorname{cosec} \frac{\pi}{2} \frac{x b}{H} + \sum_{1}^{\infty} (\pm 1)^n \frac{\sin \frac{\pi}{2} \frac{x b}{H} \operatorname{ch} \pi n \frac{h}{H}}{\cos \pi \frac{x b}{H} - \operatorname{ch} 2\pi n \frac{h}{H}} \right],$$

incidența și rezistența indusă adițională vor fi respectiv:

$$(39.19) \quad i_s = \frac{w_s}{V_0} = \varepsilon' \frac{S}{\Sigma} C_z, \quad \Delta C_{xi} = \varepsilon' \frac{S}{\Sigma} C_z^2.$$

Se vede, din (39.17), că pentru suprafețele libere (c) avem o micșorare a incidenței și o majorare a rezistenței, pe când pentru cazul (d), este invers.

Cu titlu de comparație, dăm mai jos o tabelă al coeficientului ε' în funcție de $\frac{h}{H}$ și $\frac{\kappa b}{H}$.

Tabela (39.II)

$\frac{\kappa b}{H} \backslash \frac{h}{H}$	$\frac{1}{2}$	1	2
0,5	0,218	0,131	0,141
Glauert	0,262	0,137	
Toussaint	0,203	0,13	0,155

Să remarcăm mai departe că, pentru cazul suprafețelor libere, trebuie să se țină seama de incidența și de rezistența induse aparente care depind de distanța dintre model și secțiunea de ieșire a curentului. Formula (39.11) se aplică integral și aci. În ceea ce privește curbura curentului, care poate fi evaluată în mod aproximativ, efectul ei este neglijabil și prin urmare calculele ar fi fără interes practic.

39.1.1. Viteze adiționale mijlocii. Am presupus că anvergura redusă a aripii (κb) este destul de mică pentru ca viteasa indusă suplimentară în orice punct al anvergurii să fie aproximativ egală cu cea din centru. Un calcul elementar ne arată că această ipoteză este perfect valabilă pentru $\frac{\kappa b}{H} < \frac{2}{3}$; observând pe de altă parte că, coeficientul κ nu depășește valoarea $\kappa = 0,90$, ceea ce ne permite să extindem aplicația formulei până la raportul $\frac{b}{H} \leq 0,75$, este evident că relațiile stabilite mai sus se aplică în toate cazurile curențe din practică. Totuși, pentru mai multă rigoare și pentru valori ale lui $\frac{b}{H}$ destul de mari, este necesar de luat în considerație o vitesă adițională mijlocie :

$$(39.20) \quad w_m = \frac{1}{\kappa b} \int_{-\frac{\kappa b}{2}}^{\frac{\kappa b}{2}} w \, dy,$$

în locul vitesei din centrul aripii, așa cum am considerat-o mai sus.

Aceasta este metoda utilizată de A. TOUSSAINT, care calculează astfel viteza adițională mijlocie pentru toate cazurile tratate mai sus.

Trecem peste amănunțele acestor calcule și dăm formulele finale astfel stabilite :

$$(39.21) \quad \left\{ \begin{aligned} \varepsilon_a &= \frac{-1}{4\pi \frac{H}{h} \left(\frac{\kappa b}{H}\right)^2} \left[\ln \frac{\operatorname{th} \frac{\pi}{2} \frac{\kappa b}{h}}{\frac{\pi}{2} \frac{\kappa b}{h}} + \right. \\ &+ \left. \sum_1^{\infty} \ln \frac{\operatorname{th} \frac{\pi}{2h} (mH + \kappa b) \operatorname{th} \frac{\pi}{2h} (mH - \kappa b)}{\operatorname{th}^2 \frac{\pi}{2} m \frac{H}{h}} \right], \\ \varepsilon_b &= \frac{-1}{4\pi \frac{H}{h} \left(\frac{\kappa b}{H}\right)^2} \left[\ln \frac{\operatorname{th} \frac{\pi}{2} \frac{\kappa b}{h}}{\frac{\pi}{2} \frac{\kappa b}{h}} + \right. \\ &+ \left. \sum_1^{\infty} (-1)^m \ln \frac{\operatorname{th} \frac{\pi}{2h} (mH + \kappa b) \operatorname{th} \frac{\pi}{2h} (mH - \kappa b)}{\operatorname{th}^2 \frac{\pi}{2} m \frac{H}{h}} \right], \\ \varepsilon_c &= \frac{-1}{4\pi \frac{H}{h} \left(\frac{\kappa b}{H}\right)^2} \left[\ln \frac{\operatorname{sh} \pi \frac{\kappa b}{h}}{\frac{\pi}{2} \frac{\kappa b}{h}} + \sum_1^{\infty} (-1)^m \left(1 - \frac{\operatorname{sh}^2 \pi \frac{\kappa b}{h}}{\operatorname{sh}^2 \pi m \frac{H}{h}} \right) \right], \\ \varepsilon_d &= \frac{-1}{4\pi \frac{H}{h} \left(\frac{\kappa b}{H}\right)^2} \left[\ln \frac{\operatorname{sh} \pi \frac{\kappa b}{h}}{\frac{\pi}{2} \frac{\kappa b}{h}} + \sum_1^{\infty} \left(1 - \frac{\operatorname{sh}^2 \pi \frac{\kappa b}{h}}{\operatorname{sh}^2 \pi m \frac{H}{h}} \right) \right], \end{aligned} \right.$$

unde $\varepsilon_a, \varepsilon_b, \varepsilon_c, \varepsilon_d$ reprezintă coeficienții corespunzători respectiv cazurilor a, b, c, d . Cu titlu de comparație am indicat în tabelele precedente valorile coeficientului ε obținute prin formulele lui A. TOUSSAINT. Se constată o concordanță destul de bună cu rezultatele obținute prin formulele pe care le-am obținut prin metoda vitesei din centru.

39.2. Suflerie cu secțiune circulară

Fie D diametrul sufleriei și κb anvergura redusă a aripii pe care o presupunem așezată în centru. Vârtejurile-imaginate vor fi puse în A' și

B' , la o distanță egală respectiv cu

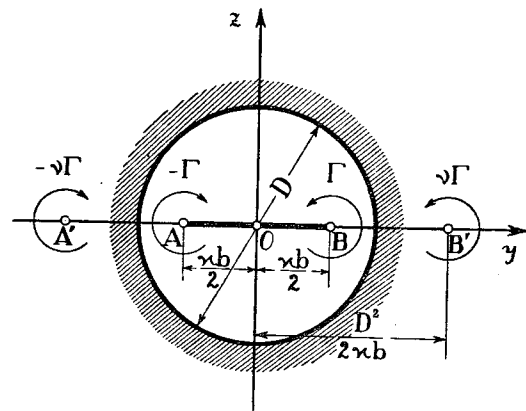


Fig. 39.2.

$$(39.22) \quad \frac{D^2}{+ 2kb}$$

dela origine (fig. 39.2). Viteza indusă suplimentară într'un punct y al anvergurii va fi dată de expresia :

$$(39.23) \quad w_s = -\frac{v\Gamma}{4\pi} \left(\frac{1}{\frac{D^2}{2kb} - y} + \frac{1}{\frac{D^2}{2kb} + y} \right)$$

de unde rezultă o valoare mijlocie pe toată anvergura aparentă kb :

$$(39.24) \quad w_s = -\frac{v\Gamma}{2\pi kb} \ln \frac{D^2 + (kb)^2}{D^2 - (kb)^2} = -\frac{v\Gamma}{2\pi kb} \ln \frac{1 + \left(\frac{kb}{D}\right)^2}{1 - \left(\frac{kb}{D}\right)^2}$$

Dacă considerăm anvergura reală b și circulația mijlocie Γ_m , viteza indusă devine :

$$(39.25) \quad w'_s = -\frac{v\Gamma_m}{2\pi b} \ln \frac{1 + \left(\frac{b}{D}\right)^2}{1 - \left(\frac{b}{D}\right)^2}$$

Desvoltând mai departe logaritmul și înlocuind Γ , respectiv Γ_m , prin valoarea sa în funcție de C_z , vom obține în cele din urmă formulele incidenței și ale rezistenței induse suplimentare, în cele două ipoteze :

$$(39.26) \quad \left\{ \begin{aligned} i_s &= -\frac{vC_z}{8} \cdot \frac{S}{\Sigma} \left[1 + \frac{1}{3} \left(\frac{kb}{D}\right)^4 + \frac{1}{5} \left(\frac{kb}{D}\right)^8 + \dots \right], \\ i'_s &= -\frac{vC_z}{8} \cdot \frac{S}{\Sigma} \left[1 + \frac{\kappa^2}{3} \left(\frac{b}{D}\right)^4 + \frac{\kappa^4}{5} \left(\frac{b}{D}\right)^8 + \dots \right], \\ \Delta C_{xi} &= -i_s C_z = \frac{vC_z^2}{8} \cdot \frac{S}{\Sigma} \left[1 + \frac{1}{3} \left(\frac{kb}{D}\right)^4 + \frac{1}{5} \left(\frac{kb}{D}\right)^8 + \dots \right], \\ \Delta C'_{xi} &= -i'_s C_z = \frac{vC_z^2}{8} \cdot \frac{S}{\Sigma} \left[1 + \frac{\kappa^2}{3} \left(\frac{b}{D}\right)^4 + \frac{\kappa^4}{5} \left(\frac{b}{D}\right)^8 + \dots \right], \end{aligned} \right.$$

unde Σ reprezintă secțiunea sufleriei.

În cazul pereților rigizi ($\nu = -1$), incidența este majorată iar rezistența micșorată, pe când pentru suprafețele libere ($\nu = 1$), incidența se micșorează și rezistența se mărește.

Formulele stabilite mai sus sunt bazate pe ipoteza unei distribuții uniforme a circulației dealungul anvergurii reduse.

Rezultatele nu diferă însă prea mult față de cele corespunzătoare unei distribuții reale a circulației.

39.2.1. Influența poziției aripii în interiorul cercului. Dacă aripa este așezată la o distanță a deasupra centrului, vârtejurile-imagini vor avea de asemenea o poziție excentrică (fig. 39.3), în A' și B' . Vom avea, într'adevăr,

$$(39.27) \quad \overline{OB'} = \frac{1}{4} \cdot \frac{D^2}{\overline{OB}},$$

$$\overline{OA'} = \frac{1}{4} \cdot \frac{D^2}{\overline{OA}},$$

și încă

$$(39.28) \quad kb' = \frac{kb}{4} \cdot \frac{D^2}{a^2 + \left(\frac{kb}{2}\right)^2},$$

$$a' = \frac{a}{4} \cdot \frac{D^2}{a^2 + \left(\frac{kb}{2}\right)^2}.$$

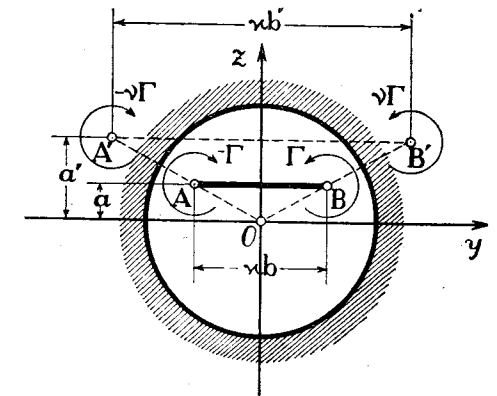


Fig. 39.3.

Să punem mai departe

$$(39.29) \quad h = a' - a = \frac{a}{4} \cdot \frac{D^2 - 4a^2 - (kb)^2}{a^2 + \left(\frac{kb}{2}\right)^2},$$

este ușor de văzut că influența frontierei cilindrice se reduce la influența aripii superioare $A'B'$ a unui biplan asupra aripii inferioare AB . Însemnând prin σ coeficientul de acțiune reciprocă, se poate scrie, după (33.17) și (33.19),

$$(39.30) \quad \sigma = \frac{1}{8\kappa^2} \ln \frac{4h^2 + (\kappa b' + \kappa b)^2}{4h^2 + (\kappa b' - \kappa b)^2}$$

și prin urmare, incidența și rezistența induse suplimentare vor fi respectiv

$$(39.31) \quad i_s = -\frac{2\kappa\Gamma\nu}{\pi b V_0} \sigma = -\frac{vC_z}{\pi\lambda} \sigma, \quad \Delta C_{xi} = \frac{vC_z^2}{\pi\lambda} \sigma,$$

unde $\nu = -1$ pentru pereții rigizi și $\nu = 1$ pentru suprafețele libere.

Să observăm mai departe că putem regăsi aceleași formule din cazul precedent (39.25), corespunzătoare aripei așezate în centru, dacă facem să tindă a către zero. Intr'adevăr, dezvoltând expresia (39.30) a lui σ , vom obține succesiv :

$$(39.32) \quad \sigma = \frac{1}{8x^2} \ln \frac{\left(\frac{4h}{xb'}\right) + \left(1 + \frac{b}{b'}\right)^2}{\left(\frac{4h}{xb}\right)^2 + \left(1 + \frac{b}{b'}\right)^2} \approx \frac{1}{4x^2} \ln \frac{1 + \frac{b}{b'}}{1 - \frac{b}{b'}} \approx$$

$$\approx \frac{1}{2x^2} \cdot \frac{b}{b'} \left[1 + \frac{1}{3} \left(\frac{b}{b'}\right)^4 + \dots\right] \approx \frac{1}{2} \cdot \frac{b^2}{D^2} \left[1 + \frac{1}{3} \left(\frac{xb}{D}\right)^4 + \dots\right],$$

de unde rezultă :

$$(39.33) \quad i_s = -\frac{\nu C_z}{\pi\lambda} \sigma = -\frac{\nu C_z}{2} \cdot \frac{S}{D^2} \left[1 + \frac{1}{3} \left(\frac{xb}{D}\right)^4 + \dots\right] \approx$$

$$\approx -\frac{\nu C_z}{8} \cdot \frac{S}{\Sigma},$$

exact prima formulă (39.25).

39.2.2. Cazul distribuției eliptice. Formulele stabilite mai sus sunt bazate pe o distribuție uniformă a circulației dealungul anvergurii. Rezultatele sunt practic aceleași pentru orice distribuție care nu diferă prea mult de cea reală. Pentru a demonstra acest lucru, vom considera o variație eliptică a circulației. Viteza auto-indusă w_0 este constantă în dreptul aripii și am văzut (§ 16.4.1, formula 16.33) că potențialul de mișcare în planul normal pe pânza de vârtejuri este în acest caz :

$$(39.34) \quad f(x) = -iw_0 \sqrt{x^2 - \frac{b^2}{4}} + iw_0 x,$$

unde $x = y + iz$ este variabila complexă, iar viteza w_0 este jumătate decât cea dela infinit ($2w_0$), deoarece vitezele din dreptul aripei sunt jumătate din cele dela infinit.

Pentru ca cercul de raza R , care este conturul secțiunii circulare a sufleriei, să fie linie de curent (sau linie de egal potențial în cazul suprafețelor libere), va trebui să adăugăm un potențial complementar :

$$(39.34 \text{ bis}) \quad f_s(x) = \pm iw_0 \sqrt{\frac{R^4}{x^2} - \frac{b^2}{4}} \mp iw_0 \frac{R^2}{x},$$

unde primul semn corespunde pereților rigizi iar al doilea suprafețelor libere.

Intr'adevăr, dacă dezvoltăm, potențialul unei mișcări după puterile variabilei x , unui oarecare termen

$$(A_n + iB_n) x^n$$

ii va corespunde un termen complementar

$$\pm (A_n - iB_n) \frac{R^{2n}}{x^n},$$

care trebuie adăugat la primul, pentru ca cercul de rază R să fie linie de curent (semnul plus pentru pereți rigizi) sau linie de egal potențial (semnul minus pentru suprafețele libere). Intr'adevăr, vom avea respectiv, indicând cu $x = Re^{i\theta}$ un punct de pe cerc :

$$(39.35) \quad \left\{ \begin{array}{l} A_n \left(x^n + \frac{R^{2n}}{x^n}\right) + iB_n \left(x^n - \frac{R^{2n}}{x^n}\right) = \\ = 2R^n (A_n \cos n\theta - B_n \sin n\theta), \\ A_n \left(x^n - \frac{R^{2n}}{x^n}\right) + iB_n \left(x^n + \frac{R^{2n}}{x^n}\right) = \\ = 2iR^n (A_n \sin n\theta + B_n \cos n\theta), \end{array} \right.$$

de unde se vede că în primul caz $\psi = 0$, iar în al doilea caz $\varphi = 0$. În mod general, dacă $f(x)$ reprezintă potențialul unei mișcări în fluid nelimitat, după introducerea unui cerc de rază R , având centrul în origine, trebuie să adăugăm un nou potențial complementar de forma :

$$(39.36) \quad f_s(x) = \pm \bar{f}_s \left(\frac{R^2}{x}\right),$$

unde semnul plus corespunde cercului rigid, iar semnul minus unui contur liber.

Aplicând acest rezultat în cazul nostru, am obținut expresia potențialului complementar (39.34 bis), de unde deducem viteza indusă suplimentară în jurul aripei :

$$(39.37) \quad u_s = v_s - iw_s = \frac{df_s}{dx} = -iw_0 \frac{R^2}{x} \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{b^2 x^2}{4R^4}}} - 1 \right) =$$

$$= \frac{-iw_0 b^2}{8R^2} \left(1 + \frac{3}{16} \frac{b^2 x^2}{R^4} + \dots \right).$$

Impărțind prin V_0 , înlocuind pe $\frac{w_0}{V_0}$ prin expresia generală (16.43) stabilită anterior

$$(39.38) \quad \frac{w_0}{V_0} = \frac{C_z}{\pi\lambda} = \frac{C_z S}{\pi b^2},$$

obținem în cele din urmă într'un punct al aripei ($x = y, z = 0$) incidența indusă suplimentară

$$(39.39) \quad i_s = \frac{w_s}{V_0} = \pm \frac{C_z S}{8\Sigma} \left(1 + 3 \frac{b^2 y^2}{D^4} + \dots \right),$$

unde Σ reprezintă suprafața secțiunii circulare. Dacă luăm media incidenței suplimentare, obținem

$$(39.40) \quad i_s = \pm \frac{C_z S}{8\Sigma} \left[1 + \frac{1}{4} \left(\frac{b}{D} \right)^4 + \dots \right],$$

care nu diferă prea mult de a doua formulă (39.26).

Pentru calculul rezistenței induse suplimentare, considerând variația eliptică a circulației

$$(39.41) \quad \Gamma = \Gamma_0 \sqrt{1 - \left(\frac{2y}{b} \right)^2} = \frac{2C_z S V_0}{\pi b} \sqrt{1 - \left(\frac{2y}{b} \right)^2},$$

vom putea scrie

$$(39.42) \quad \Delta C_{xi} = \frac{\pm 1}{\frac{1}{2} \rho V_0^2 S} \int_{-\frac{b}{2}}^{+\frac{b}{2}} i_s \Gamma dy = \pm \frac{C_z^2 S}{8\Sigma} \frac{4}{\pi b} \int_{-\frac{b}{2}}^{+\frac{b}{2}} \left(1 + 3 \frac{b^2 y^2}{D^4} + \dots \right) \sqrt{1 - \left(\frac{2y}{b} \right)^2} dy,$$

de unde rezultă ușor, înlocuind pe y prin $y = -\frac{b}{2} \cos \theta$ și efectuând integrala de mai sus:

$$(39.43) \quad \Delta C_{xi} = \pm \frac{C_z^2 S}{8\Sigma} \left[1 + \frac{3}{16} \left(\frac{b}{D} \right)^4 + \dots \right],$$

foarte apropiată ca valoare cu a patra formulă (39.26).

39.3. Secțiune eliptică

Pentru a nu schimba sistemul de axe, vom lua Oy , ca axă a absciselor (paralelă cu axa mare a elipsei) Oz și axa ordonatelor (fig. 39.4 a) și vom nota cu α și β cele două semi-axe și cu

$$(39.44) \quad \overline{OA}^2 = \overline{OB}^2 = \gamma^2 = \alpha^2 - \beta^2$$

patratul distanțelor focarelor A și B la origine. În acest caz, elipsa va fi reprezentată de ecuația următoare:

$$(39.45) \quad \frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1.$$

39.3.1. Mișcarea în planul cercului. Vom presupune că anvergura aripei ocupă întreaga distanță \overline{BA} dintre focare ($b = \overline{BA} = 2\gamma$) și că circulația va fi reprezentată în mod obișnuit prin formula

$$(39.46) \quad \Gamma = 2b V_0 \Sigma A_n \sin n\theta,$$

pe care o vom presupune, în prima aproximație, aceeași cu cea corespunzătoare în curent nelimitat.

Pentru a reprezenta mișcarea datorită acestei pânze de vârtejuri în planul cercului ($\xi = \eta + i\zeta = re^{i\theta}$), vom aplica transformarea bine cunoscută:

$$(39.47) \quad \begin{aligned} -x &= -(y + iz) = \\ &= \xi + \frac{b^2}{16} \cdot \frac{1}{\xi} = \\ &= \left(r + \frac{b^2}{16} \frac{1}{r} \right) \cos \theta + \\ &+ i \left(r - \frac{b^2}{16} \frac{1}{r} \right) \sin \theta, \end{aligned}$$

în care cercul K_0 , de rază $r = \frac{b}{4}$, reprezintă transformatul tăieturii BA

(fig. 39.4 b). Într'adevăr, pentru un punct $\frac{b}{4} e^{i\theta}$ al cercului, vom avea

$$(39.48) \quad y = -\frac{b}{2} \cos \theta,$$

tocmai schimbarea variabilei y în θ , pe care am întrebuințat-o mereu în tratarea problemei aripei de anvergură finită.

Mișcarea în jurul acestui cerc va fi reprezentată de un potențial

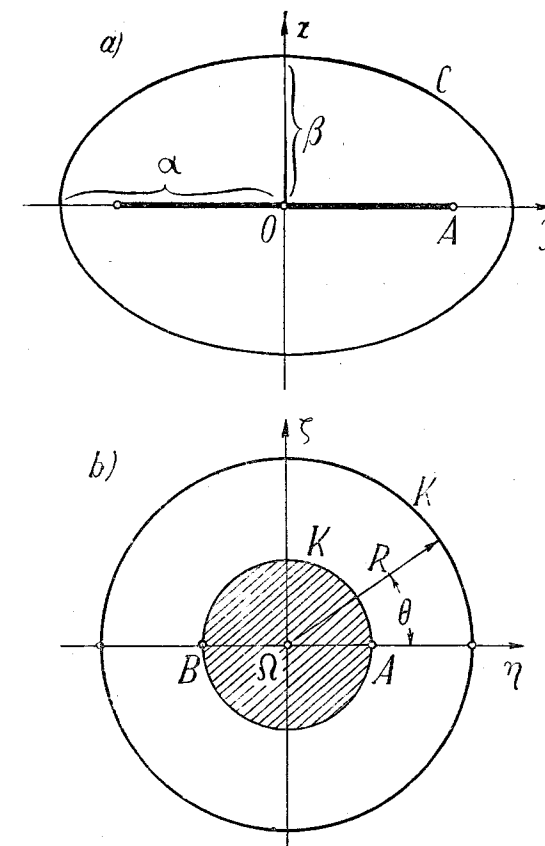


Fig. 39.4.

olomorfi în afara cercului și la infinit :

$$(39.49) \quad F(\xi) = \sum_1^n \frac{p_n + iq_n}{\xi^n},$$

care va lua următoarele valori pe cercul în chestiune ($\xi_0 = \frac{b}{4} e^{i\theta}$):

$$(39.50) \quad (F)_{K_0} = \sum_1^n \left(\frac{4}{b}\right)^n (p_n + iq_n) (\cos n\theta - i \sin n\theta) = \Phi + i\Psi.$$

După cum am văzut și în paragrafele precedente (fig. 36.3, formula 36.34), într'un punct oarecare θ vom avea $\Gamma \equiv 2\Phi$, de unde rezultă :

$$(39.51) \quad 2bV_0 \sum_1^n A_n \sin n\theta \equiv \sum_1^n \left(\frac{4}{b}\right)^n (p_n \cos n\theta + q_n \sin n\theta)$$

și prin urmare, egalând coeficienții din ambele părți, obținem :

$$(39.52) \quad \left(\frac{4}{b}\right)^n q_n = 2bV_0 A_n, \quad q_n = 2b \left(\frac{b}{4}\right)^n A_n, \quad p_n = 0.$$

Potențialul mișcării devine în acest caz :

$$(39.53) \quad F(\xi) = 2iV_0 \sum_1^n \frac{b^{n+1}}{4^n} \frac{A_n}{\xi^n} = 2iV_0 A_1 \sum_1^n \frac{b^{n+1}}{4^n} \frac{A_n}{A_1} \frac{1}{\xi^n} = \\ = \frac{iV_0 S C_z}{2\pi} \sum_1^n \frac{a_n}{\xi^n},$$

unde am înlocuit pe A_1 prin valoarea sa dedusă din relația (19.3, $C_z = \pi\lambda A_1$) și am indicat prin a_n expresia următoare :

$$(39.54) \quad a_n = \left(\frac{b}{4}\right)^{n-1} \frac{A_n}{A_1}.$$

Prin transformarea (39.47), prin care tăetura BA devine cercul K_0 de rază $\frac{b}{4}$, conturul C al elipsei se transformă deasemenea într'un cerc K de rază R (fig. 39.4 b), care se deduce din relațiile :

$$(39.55) \quad R + \frac{b^2}{16} \frac{1}{R} = \alpha, \quad R - \frac{b^2}{16} \frac{1}{R} = \beta, \quad R = \frac{\alpha + \beta}{2}.$$

Potențialului stabilit mai sus, în absența frontierei reprezentată de cercul K , transformatul elipsei C din planul real, trebuie să i se adauge un potențial suplimentar $F(\xi)$, astfel încât $F + F_s$, să satisfacă condițiile la limită pe frontiera K . Acest potențial complementar $F_s = \Phi_s + i\Psi_s$, după ipoteza făcută la început, nu trebuie să introducă o nouă circulație pe aripă.

În acest caz, pe cercul K_0 de rază $r = \frac{b}{4}$ din planul ξ , potențialul Φ_s trebuie să fie nul, adică trebuie să avem :

$$(39.56) \quad F_s(\xi) = \Phi_s + i\Psi_s = i \sum_1^n \gamma_n \left[\xi^n + \left(\frac{b}{4}\right)^{2n} \frac{1}{\xi^n} \right].$$

Se vede, într'adevăr, că pentru $\xi_0 = \frac{b}{4} e^{i\theta}$ (pe cercul K_0), obținem $\Phi_s = 0$.

Coeficienții γ_n trebuie astfel determinați, încât cercul K să fie sau linie de curent, în cazul pereților rigizi, sau linie de egal potențial, în cazul suprafețelor libere. Indicând prin $Re^{i\theta}$ un punct pe cercul K vom avea respectiv :

$$(39.57) \quad \frac{V_0 S C_z}{2\pi} \frac{a_n}{R^n} + \gamma_n \left[R^n + \left(\frac{b}{4}\right)^{2n} \frac{1}{R^n} \right] = 0$$

în primul caz și

$$(39.58) \quad \frac{V_0 S C_z}{2\pi} \frac{a_n}{R^n} - \gamma_n \left(R^n - \left(\frac{b}{4}\right)^{2n} \frac{1}{R^n} \right) = 0$$

pentru cazul suprafețelor libere.

Rezultă imediat pentru primul și al doilea caz :

$$(39.59) \quad \gamma_n = \mp \frac{S V_0 C_z}{2\pi} \frac{a_n}{R^{2n} \pm \left(\frac{b}{4}\right)^{2n}} = \\ = \mp \frac{S V_0 C_z}{2\pi} \left(\frac{4}{b}\right)^{n+1} \frac{A_n (\alpha - \beta)^n}{A_1 [(\alpha + \beta)^n \pm (\alpha - \beta)^n]}.$$

39.3.2. Incidența indusă suplimentară. Pentru a găsi viteza indusă vom lua partea imaginară a vitesei complexe suplimentare dedusă din potențialul F_s ; făcând înlocuirile necesare, vom obține astfel formula lui PERES și MALAVARD :

$$(39.60) \quad i_s = \frac{w_s}{V_0} = -p. \text{im.} \frac{1}{V_0} \frac{dF}{d\xi} \frac{d\xi}{dx} = \\ = p. \text{re.} \sum_1^n n \gamma_n \left[\xi^n - \left(\frac{b}{4}\right)^{2n} \frac{1}{\xi^n} \right] \frac{1}{\frac{b^2}{16} \frac{1}{\xi} - \xi} = \\ = - \frac{1}{V_0} \sum_1^n n \gamma_n \left(\frac{b}{4}\right)^{n-1} \frac{\sin n\theta}{\sin \theta} = \\ = \pm \frac{S C_z}{2\pi} \frac{1}{\alpha^2 - \beta^2} \sum_1^n n \frac{A_n}{A_1} \frac{(\alpha - \beta)^n}{[(\alpha + \beta)^n \pm (\alpha - \beta)^n]} \frac{\sin n\theta}{\sin \theta}.$$

Pentru incidența suplimentară medie, găsim o formulă mai simplă :

$$(39.61) \quad i_{sm} = \pm \frac{S C_z}{2\pi(\alpha^2 - \beta^2)} \sum_1^p \frac{A_n}{A_1} \frac{(\alpha - \beta)^{2p-1}}{(\alpha + \beta)^{2p-1} \pm (\alpha - \beta)^{2p-1}}, \quad (n=2p-1).$$

În cazul unei distribuții eliptice ($n = 1$), vom avea respectiv, indicând cu $\Sigma = \pi\alpha\beta$ suprafața secțiunii eliptice :

$$(39.62) \quad i_{se} = \frac{SC_z}{4\Sigma} \frac{\beta}{\alpha + \beta}$$

pentru pereții rigizi și

$$(39.62 \text{ bis}) \quad i_{se} = -\frac{SC_z}{4\Sigma} \frac{\alpha}{\alpha + \beta}$$

pentru vâna liberă. În primul caz incidența se mărește, în al doilea caz incidența se micșorează. Este de remarcat faptul că incidența suplimentară este constantă pe toată anvergura și deci variația circulației rămâne riguros eliptică.

Dacă aripa se întinde numai pe o parte din distanța focală, putem considera atunci că circulația este constantă pe anvergura și o putem desfășura într-o serie FOURIER dealungul distanței focale. Notând astfel $\overline{AB} = 2\gamma$ și $y = -\gamma \cos \theta$, extremitățile anvergurei $\left(-\frac{b'}{2}, \frac{b'}{2}\right)$ vor corespunde la τ și $\pi - \tau$, date de relația :

$$\cos \tau = \frac{b'}{2\gamma}$$

Înlocuind în acest caz pe b din formula (39.46) prin 2γ , coeficienții A_n vor fi dați de formula :

$$(39.63) \quad 2 \cdot 2\gamma V_0 A_n = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \Gamma \sin n\theta d\theta = \frac{2\Gamma_0}{\pi} \int_{\tau}^{\pi-\tau} \sin n\theta d\theta = \frac{4\Gamma_0}{\pi} \frac{\cos n\tau}{n}$$

și prin urmare :

$$(39.63 \text{ bis}) \quad n \frac{A_n}{A_1} = \frac{\cos n\tau}{\cos \tau}$$

Aplicând mai departe formula (39.61) a incidenței complementare medii, vom găsi :

$$(39.64) \quad i_{sm} = \pm \frac{SC_z}{2\pi} \frac{1}{\alpha^2 - \beta^2} \left\{ \frac{\alpha - \beta}{(\alpha + \beta) \pm (\alpha - \beta)} + \frac{\cos 3\tau}{3 \cos \tau} \frac{(\alpha - \beta)^3}{(\alpha + \beta)^3 \pm (\alpha - \beta)^3} + \frac{\cos 5\tau}{5 \cos \tau} \frac{(\alpha - \beta)^5}{(\alpha + \beta)^5 \pm (\alpha - \beta)^5} + \dots \right\}$$

Dacă considerăm acum că în practică axele nu diferă prea mult, în cele mai multe cazuri raportul $\frac{\beta}{\alpha}$ nefiind mai mic de $\frac{1}{2}$, atunci termenii începând dela al treilea se pot neglija și vom găsi, în acest caz, înlocuind și $\cos \tau$ prin valoarea sa de mai sus :

$$(39.65) \quad i_{sm} = \frac{SC_z}{4\Sigma} \frac{\beta}{\alpha + \beta} \left[1 + \frac{(\alpha - \beta)^2}{\alpha^2 + 3\beta^2} \left(\frac{b^2}{3\gamma^2} - 1 \right) + \dots \right],$$

pentru cazul pereților solizi și

$$(39.65 \text{ bis}) \quad i_{sm} = -\frac{SC_z}{4\Sigma} \frac{\alpha}{\alpha + \beta} \left[1 + \frac{(\alpha - \beta)^2}{3\alpha^2 + \beta^2} \left(\frac{b^2}{3\gamma^2} - 1 \right) + \dots \right]$$

pentru cazul suprafețelor libere. Dacă $b = 2\gamma$, dăm de cazul vârtejurilor concentrate la extremitățile aripei și constatăm că formulele diferă puțin de cazul distribuției eliptice (39.62) și (39.62 bis).

În mod practic se pot utiliza aceste formule din urmă pentru toate cazurile, întrucât al doilea termen din paranteză este neglijabil.

Dacă anvergura depășește distanța focală, problema este ceva mai laborioasă, însă în cazul când depășirea este mică se poate aduce o simplificare, considerând întreaga portanță concentrată numai pe distanța focală $b' = 2\gamma < b$, făcând însă ipoteza unei distribuții uniforme. În acest caz avem :

$$(39.66) \quad \frac{\beta'^2}{3\gamma^2} - 1 = \frac{1}{3},$$

iar portanța unitară se mărește în raportul $C_z = \frac{b'}{2\gamma}$

Remarcă. Problemele privind secțiunea eliptică și cea dreptunghiulară se pot face cu ajutorul funcțiilor eliptice; acest lucru ar comporta însă o introducere în studiul funcțiilor eliptice care ar depăși cadrul lucrării de față.

39.4. Secțiune în două arce de cerc

Pentru încercările aripilor de mare anvergura se utilizează adesea o parte din secțiunea circulară a unui tunel aerodinamic, mărginită de un perete vertical (fig. 39.5 a). Experiențele făcute pe o jumătate de aripă ar corespunde, în felul acesta, acelora relative la o aripă întreagă așezată simetric într-o secțiune de tunel formată din două arce de cerc.

Pentru calculul interacțiunilor, vom reprezenta regiunea cuprinsă între cele două arce de cerc din planul real $x = y + iz$ pe o bandă verticală indefinită din planul $\xi = \eta + i\zeta$ (fig. 39.5 b).

Aceasta se poate face cu ajutorul funcției de transformare :

$$(39.67) \quad x = h \operatorname{tg} \xi, \quad \xi = \operatorname{arctg} \frac{x}{h}$$

Cea de a doua relație se mai poate scrie și sub altă formă; într'adevăr, adăugând lui ξ și constanta π care nu schimbă nimic, deoarece π este perioada tangentei, vom avea succesiv :

$$(39.68) \quad \begin{aligned} \xi = \eta + i\zeta &= \operatorname{arctg} \frac{x}{h} + \pi = \frac{i}{2} \ln \frac{h - ix}{h + ix} + \pi = \\ &= \frac{i}{2} \ln \frac{x + ih}{x - ih} + \frac{\pi}{2} = \frac{i}{2} \ln \frac{r'}{r''} + \frac{\pi}{2} - \frac{\theta' - \theta''}{2}, \end{aligned}$$

de unde rezultă (fig. 39.5) :

$$(39.69) \quad \eta = \frac{\pi}{2} - \theta = \tau, \quad z = \frac{1}{2} \ln \frac{r'}{r''}$$

Este ușor de văzut sub această formă că liniile verticale din planul $\xi(\eta = C_1)$ se transformă în arce de cerc trecând prin cele două puncte $\pm ih$ din planul real x ; iar dreptele orizontale se transformă în cercurile lui APOLLONIUS, ortogonale la primele. În particular, cele două arce constituind frontierele în planul real, definite prin unghiurile $\pm 2\tau_0$, se transformă în frontierele verticale $\pm \tau_0$ din planul ξ .

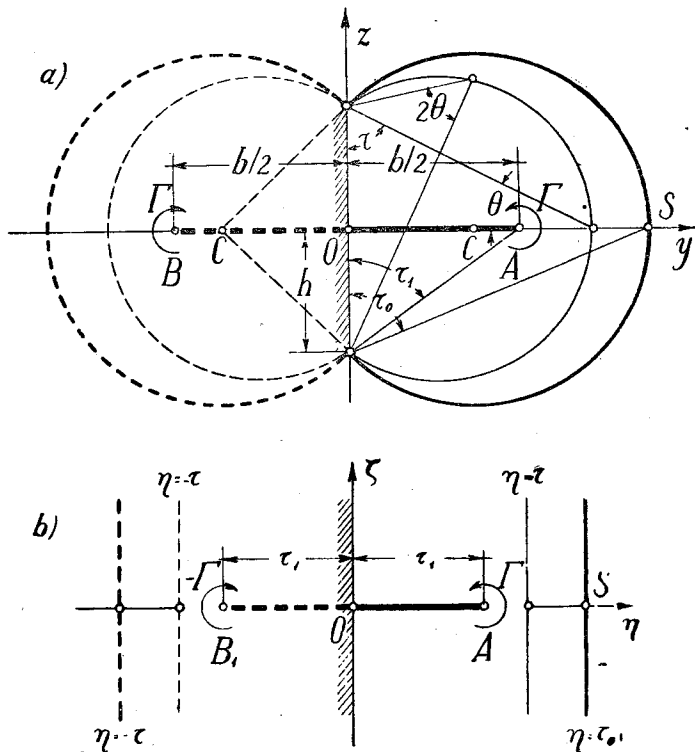


Fig. 39.5.

Axa reală ($y = 0$) din planul x corespunde axei absciselor ($\eta = 0$) din planul ξ .

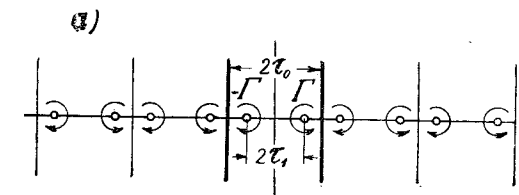
Extremitățile aripei, $\pm \frac{b}{2}$, corespund respectiv la $\eta = \pm \tau_1$, unde :

$$(39.70) \quad \operatorname{tg} \tau_1 = \frac{1}{2} \frac{b}{h}$$

Ca și pentru cazurile precedente, putem înlocui b prin αb pentru o rigoare mai mare.

Mișcarea totală în planul ξ este foarte ușor de stabilit. În cazul pereților rigizi (fig. 39.6 a), aplicând formula (3.43) obținem :

$$(39.71) \quad F_t'(\xi) = \frac{-i\Gamma}{2\pi} \ln \frac{\sin \frac{\pi}{2\tau_0} (\xi - \tau_1)}{\sin \frac{\pi}{2\tau_0} (\xi + \tau_1)}$$



iar în cazul pereților liberi (fig. 39.6 b), vom avea deasemenea :

$$(39.72) \quad F_t(\xi) = \frac{-i\Gamma}{2\pi} \left\{ \ln \frac{\sin \frac{\pi}{4\tau_0} (\xi - \tau_1)}{\sin \frac{\pi}{4\tau_0} (\xi + \tau_1)} + \right.$$

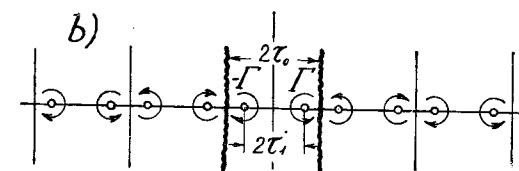


Fig. 39.6.

$$\left. + \ln \frac{\sin \frac{\pi}{4\tau_0} (\xi - 2\tau_0 + \tau_1)}{\sin \frac{\pi}{4\tau_0} (\xi + 2\tau_0 - \tau_1)} \right\} = \frac{-i\Gamma}{2\pi} \ln \frac{\operatorname{tg} \frac{\pi}{4\tau_0} (\xi - \tau_1)}{\operatorname{tg} \frac{\pi}{4\tau_0} (\xi + \tau_1)}$$

Pentru a găsi potențialul suplimentar $F_s(\xi)$ trebuie să scădem potențialul datorit celor două vârtejuri marginale și o constantă, eventual,

$$(39.73) \quad -F(\xi) = \frac{i\Gamma}{2\pi} \ln \frac{x - \frac{b}{2}}{x + \frac{b}{2}} = \frac{i\Gamma}{2\pi} \ln \frac{\operatorname{tg} \xi - \operatorname{tg} \tau_1}{\operatorname{tg} \xi + \operatorname{tg} \tau_1} = \frac{i\Gamma}{2\pi} \ln \frac{\sin (\xi - \tau_1)}{\sin (\xi + \tau_1)}$$

Dacă se adaugă o constantă adițională, ea va fi determinată punând condiția ca $\Phi = 0$ în cazul vânei libere și $\Psi = 0$ în cazul pereților rigizi.

Potențialul complementar va fi astfel, în cele două cazuri, respectiv :

$$(39.74) \quad F_s = F_t - F, \quad F_s = F_t' - F.$$

Derivatele lor ne vor da vitezele induse suplimentare din care vom lua numai cele din dreptul aripei, care sunt verticale și jumătate din cele deduse din expresiile de mai sus, stabilite pentru mișcarea la infinit aval.

Pentru viteza medie este mai simplu să găsim fluxul de viteze (sau debitul) care trece prin intervalul $-\tau_1, \tau_1$ și să împărțim apoi prin 2 și prin anvergura totală b . Într'adevăr, am arătat în primul capitol (4.51) că fluxul se conservă și după transformare și este egal cu diferența dintre valorile funcției de curent din A și B . Observând pe de altă parte că pe linia

absciselor $\Phi_s=0$ și $F_s=iY_s$, incidența medie în dreptul aripii va fi dată respectiv de formulele următoare [3]:

$$(39.75) \quad i_{sm} = \frac{w_{ms}}{V_0} = \frac{\Gamma}{4\pi V_0 b} \ln \frac{\sin \frac{\pi}{2\tau_0} (\eta - \tau_1) \sin (\eta + \tau_1)}{\sin (\eta - \tau_1) \sin \frac{\pi}{2\tau_0} (\eta + \tau_1)} \Bigg|_{-\tau_1}^{+\tau_1} =$$

$$= \frac{SC_z}{4\pi b^2} \ln \frac{\pi}{2\tau_0} \frac{\sin 2\tau_1}{\sin \pi \frac{\tau_1}{\tau_0}}$$

pentru pereții rigizi și

$$(39.76) \quad i'_{sm} = \frac{w'_{ms}}{V_0} = \frac{\Gamma}{4\pi b V_0} \ln \frac{\operatorname{tg} \frac{\pi}{4\tau_0} (\eta - \tau_1) \sin (\eta + \tau_1)}{\sin (\eta - \tau_1) \operatorname{tg} \frac{\pi}{4\tau_0} (\eta + \tau_1)} \Bigg|_{-\tau_1}^{+\tau_1} =$$

$$= -\frac{SC_z}{4\pi b^2} \ln \frac{\pi}{4\tau_0} \frac{\sin 2\tau_1}{\operatorname{tg} \frac{\pi}{2} \frac{\tau_1}{\tau_0}}$$

pentru vâna liberă.

Remarcăm din nou că putem înlocui b prin κb , ceea ce ar corespunde mai bine fenomenului real.

Dacă cele două arce formează un cerc complet de rază $h \left(\tau_0 = \frac{\pi}{4} \right)$, atunci incidențele suplimentare sunt egale și de sens contrar ($i_{sm} = -i'_{sm}$), ceea ce corespunde cu rezultatul găsit anterior pentru cazul cercului (39.25).

BIBLIOGRAFIA CAP. X.

- 1) CARAFOLI E.: Aérodynamique des ailes d'avion, Etienne Chiron Editeur, Paris 1928.
- 2) GLAUERT M.: The elements of Aerofoil and Airscrew Theory, Cambridge University Press.
- 3) KONDO KAZUO: The Wall Interference of Wind Tunnels with Boundaries of Circular Arcs. Rep. of the Aeronaut. Research Institute, Tôkyô Imperial University. (vol. X No. 8) Nr. 126, 1935.
- 4) MALAVARD L.: Etude de quelques problèmes techniques relevant de la théorie des ailes, Gauthier-Villars, Paris, 1939.
- 5) PANICIKIN I. A.: Despre problema influenței frontierelor unui curent cu secțiunea transversală circulară asupra caracteristicilor aerodinamice ale aripii. Prikladnaia Matematika i Mehanica Vol. IX, Nr. 2, 1945.

- 6) PANICIKIN I. A.: Determinarea circulației în lungul anvergurii aripii într-o vână deschisă și semi-deschisă de secțiune dreptunghiulară. Prikladnaia Matematika i Mehanica Vol. X, Nr. 4, 1946.
- 7) TOUSSAINT A.: Aerodynamic Theory, W. F. Durand-Editeur, vol. III, Julius Springer, Berlin 1935.
- 8) MALAVARD L.: Applications des analogies électriques à la solution de quelques problèmes de l'Hydrodynamique, Paris, 1936.
- 9) MUNK M.: Elements of the Wing section theory and of the wing theory, NACA, Report 191, Washington.
- 10) ROM M.: Sur l'Aérodynamique des ailes sustentatrices et des Hélices, Gauthier-Villars, Paris, 1928.
- 11) TREFFTZ E.: Prandtlische Tragflächen und Propellertheorie Z.A.M.M. 1921.

TABLA DE MATERII

CAPITOLUL I

RECAPITULAREA PRINCIPILOR ȘI TEOREMELOR FUNDAMENTALE ALE HIDRODINAMICEI CLASICE

1. ECUAȚII ȘI TEOREME FUNDAMENTALE

	Pag.
1.1. Considerații preliminare	3
1.1.1 Caracteristice comune fluidelor	4
1.1.2 Densitatea	4
1.1.3 Unități de măsură	4
1.1.4 Viscositatea	5
1.1.5 Stare de mișcare	5
1.2. Ecuațiile generale	5
1.2.1. Transformarea ecuațiilor	7
1.2.2. Linie de curent. Linie de vârtej	8
1.2.3. Mișcare variată și mișcare permanentă	9
1.2.4. Mișcare irotațională. Potențial de viteză	9
1.2.5. Condițiile la limite	10
1.2.6. Conexiune	10
1.3. Ecuația presiunii	10
1.4. Teoremele circulației	12
1.4.1. Teorema lui Stokes	12
1.4.2. Teorema lui Kelvin	13
1.5. Teoremele mișcării impulsive	14
1.6. Teorema energiei cinetice	14
1.7. Teorema impulsului	16
1.7.1. Momentul impulsului	17

2. ELEMENTE DIN TEORIA VÂRTEJURILOR

2.1. Considerațiuni generale	18
2.2. Câmpul de viteză datorit unui sistem de vârtejuri	19
2.3. Viteza indusă de un segment rectiliniu al tubului de vârtej	22
2.4. Strat de vârtejuri	22
2.4.1. Suprafețele de discontinuitate în spatele obstacolelor	23
2.4.2. Pereți fluizi	23
2.4.3. Curenți paraleli cu viteză diferite	24
2.4.4. Viteză egale și de direcții diferite	25

3. MIȘCAREA PLANĂ

3.1. Reprezentarea mișcării plane printr-o funcție de variabilă complexă	25
3.2. Mișcarea în jurul vârtejurilor	27
3.2.1. Acțiunea unui curent asupra unui vârtej	29
3.2.2. Vârtej în prezența unui cerc	29
3.3. Dublet	31
3.3.1. Dublet în prezența unui cerc	32

	Pag.
3.4. Șir de vârtejuri	33
3.5. Strat de vârtejuri plan	34
3.6. Nuclee de vârtejuri	35
3.6.1. Energia cinetică a două nuclee de vârtejuri egale și de semne con-	
trare	36
3.6.2. Distribuția de viteză în jurul nucleelor de vârtejuri	37
 4. SCURGEREA ÎN JURUL UNUI CONTUR	
4.1. Scurgerea în jurul unui cerc	37
4.1.1. Schimbare de axe	39
4.2. Reprezentarea conformă	40
4.2.1. Reprezentarea unui contur pe un cerc	42
4.2.2. Profile aerodinamice	45
4.3. Scurgerea în jurul unui profil aerodinamic	46
4.4. Transformarea mișcării în jurul unei surse, unui vârtej sau unui dublet	47
4.5. Rezultanta presiunilor	48
4.6. Moment resultant	50
4.7. Forța de aspirație în jurul unui vârf ascuțit	57

CAPITOLUL II

TEORIA ARIPILOR MONOPLANE DE ANVERGURA INFINITA

5. TEORIA PROFILELOR AERODINAMICE

5.1. Caracteristici geometrice	53
5.2. Proprietăți aerodinamice	55
5.2.1. Determinarea circulației	56
5.2.2. Focarul profilului	58
5.2.3. Parabola metacentrică	58
5.3. Coeficienți unitari	60
5.4. Profile cu vârf rotunjit (profile Carafoli)	61

6. CLASIFICAREA ȘI TRASAREA PROFILELOR

6.1. Profile Jucovschi	63
6.1.1. Placa subțire	63
6.1.2. Aspirația de la bordul de atac al plăcii subțiri	63
6.1.3. Arc de cerc	65
6.1.4. Cazul general al profilului Jucovschi	67
6.1.5. Trasarea profilelor Jucovschi	69
6.1.6. Distribuția viteselor pe profil	71
6.2. Profile cu diedru la vârf	71
6.2.1. Profil în semilună	72
6.2.2. Caz general	75
6.2.3. Caracteristici aerodinamice	76
6.2.4. Distribuția viteselor	77
6.3. Profile diverse	77
6.3.1. Alte metode	78
6.4. Profile de formă generalizată	78

7. TRASAREA ȘI STUDIUL SISTEMATIC AL PROFILELOR DE FORMĂ GENERALĂ

	Pag.
7.1. Transformarea profilului de bază și determinarea parametrilor geometrici	83
7.2. Profile cu vârf ascuțit	84
7.2.1. Distribuția viteselor	85
7.2.2. Exemplu de trasare	85
7.2.3. Caracteristicile geometrice și aerodinamice	88
7.3. Profile generale cu vârf rotunjit	90
7.4. Profile generale cu diedru	92
7.4.1. Distribuția viteselor	96

8. DISTRIBUȚIA GROSIMII DEALUNGUL PROFILULUI ȘI POZIȚIA SECȚIUNII FRONTALE MAXIME

8.1. Variația grosimii	98
8.2. Grosimea maximă și poziția secțiunii de grosime maximă	100
8.2.1. Profile $n = 3$	101
8.3. Profile laminare cu vârf rotunjit	103
8.4. Profile laminare cu diedru	105
8.4.1. Variația lui μ	108

9. VERIFICĂRI EXPERIMENTALE ASUPRA ARIPILOR MONOPLANE DE ANVERGURĂ INFINITĂ

10. TEORIA PROFILELOR CU CONTUR DAT (Profile empirice)

10.1. Metode utilizând o transformare cunoscută	115
10.1.1. Caracteristicile profilului	117
10.2. Metoda directă	119
10.2.1. Proprietăți aerodinamice	122
10.2.2. Calculul viteselor	125
10.2.3. Verificare	125
10.3. Aplicație la profile empirice subțiri	126
10.4. Profile deformate	129
10.5. Bracajul părții mobile	130
10.6. Aplicații la profile laminare	132
10.6.1. Grosimea maximă și poziția secțiunii frontale maxime	136

11. TEORIA TURBIONARĂ A PROFILELOR SUBȚIRI

11.1. Determinarea caracteristicilor aerodinamice	137
11.2. Influența bracajului părții mobile	141
11.3. Forța și momentul de șarnieră pe partea mobilă	142
11.4. Calculul integralei	145

12. TRASAREA PROFILELOR DE GROSIME MIJLOCIE AVÂND PRESIUNI DATE DEALUNGUL CONTURULUI

12.1. Relații fundamentale	147
12.2. Caracteristicile profilului resultant	151
12.3. Exemple de trasare	153

CAPITOLUL III

TEORIA BIPLANULUI DE ANVERGURĂ INFINITĂ

13. BIPLANE SUBȚIRI AVAND COARDELE ȘI INCIDENTELE EGALE

13.1. Mișcarea în jurul plăcii subțiri	160
13.2. Biplan în tandem	161
13.2.1. Circulația	163
13.2.2. Forțe și moment	164
13.3. Biplan suprapus	165

14. TEORIA BIPLANULUI ÎN CAZUL GENERAL

14.1. Singularități ce înlocuiesc aripa activă	170
14.1.1. Conturul de bază al profilului	171
14.1.2. Denumirea și poziția singularităților	172
14.2. Caracteristicile geometrice ale biplanului	173
14.3. Determinarea circulației pe aripa inferioară	174
14.3.1. Influența vârtejului	175
14.3.2. Influența dubletului și generalizarea problemei	176
14.3.3. Circulația suplimentară în jurul aripei superioare	178
14.3.4. Calculul circulațiilor	179
14.4. Simplificarea problemei în cazul aripilor subțiri	181
14.4.1. Centrul de gravitate al circulației	181
14.4.2. Determinarea circulației în jurul fiecărei aripi	182
14.4.3. Interpretarea geometrică a rezultatelor: Curbură curenților	183
14.5. Forțe și momente pe aripile biplanului	187
14.5.1. Calculul forțelor	187
14.5.2. Calculul momentelor	191

CAPITOLUL IV

TEORIA ARIPILORE MONOPLANE DE ANVERGURĂ FINITĂ

15. CONDIȚIILE DE MIȘCARE ÎN JURUL UNEI ARIPI DE ANVERGURĂ FINITĂ

15.1. Vârtejuri libere și vârtejuri legate	193
15.2. Rezultanta aerodinamică	197
15.3. Fundamentele teoriei lui Prandtl	201

16. PROBLEME SPECIALE PRIVITOARE LA ARIPILE DE ANVERGURĂ FINITĂ ȘI FORMULE PRACTICE

16.1. Considerații preliminare	203
16.2. Energia cinetică	205
16.3. Calculul circulației corespunzătoare unei viteze induse date	205
16.3.1. Exemple de aplicație	207
16.4. Aripa de rezistență indusă minimă	207
16.4.1. Analogie cu scurgerea în jurul unei plăci așezată normal pe curent	209
16.5. Caracteristicile aerodinamice ale aripilor eliptice	210
16.6. Formulele practice privind aripile de anvergură finită	212

17. METODE DIVERSE PENTRU CALCULUL ARIPILORE DE CONTUR DAT

17.1. Metoda lui Glaubert	213
17.2. Metoda lui I. Lotz	214
17.3. Metoda lui Fuchs	215
17.4. Metoda generală	215
17.5. Soluția aproximativă a problemei generale	217

18. STUDIUL ARIPILORE ÎNTREBUINȚATE ÎN AVIAȚIE

18.1. Contur cu doi termeni	220
18.2. Aripă dreptunghiulară și trapezoidală	222
18.3. Contur cuasi-eliptic	228
18.4. Aripă dublu-trapezoidală	228
18.5. Aripă de formă oarecare	234

19. FORȚE ȘI MOMENTE AERODINAMICE

19.1. Portanța	237
19.2. Rezistența	240
19.2.1. Aripă trapezoidală optimă	241
19.2.2. Rezistența totală	242
19.3. Momente aerodinamice	242
19.3.1. Momentul în jurul axei Ox: L	242
19.3.2. Momentul în jurul axei Oy: M	243
19.3.3. Momentul în jurul axei Oz: N	244

20. VERIFICĂRI EXPERIMENTALE ASUPRA ARIPILORE DE ANVERGURĂ FINITĂ

20.1. Distribuția portanței	245
20.2. Variația presiunii în funcție de alungire	247
20.3. Portanța globală	247
20.4. Rezistența indusă	251
20.5. Momentul M	251
20.6. Observație finală	251

21. CÂMP DE VITESE INDUSE ȘI DEFLECȚIUNEA CURENTULUI ÎN AVAL

21.1. Transformarea pânzei în vârtejuri libere în două nuclee turbionare marginale	252
21.1.1. Diametrul nucleului turbionar	253
21.2. Viteze induse în cazul unei circulații uniforme repartizate pe anvergură	254
21.3. Viteze induse în cazul unei distribuții eliptice a circulației	256
21.4. Deflecțiunea curenților în dreptul ampenajelor	258
21.4.1. Deflecțiunea curenților în ipoteza unei pânze plane de vârtejuri	258
21.4.2. Deflecțiunea curenților în ipoteza curenților în ipoteza vârtejurilor marginale	263
21.5. Influența înălțimii	266

CAPITOLUL V

TEORIA ARIPILORE DEFORMATE, TEORIA MIȘCARILOR UNIFORME NERECTILINII

22. ARIPI CU INCIDENTĂ VARIABILĂ

22.1. Formule principale	271
22.2. Variație simetrică	275
22.3. Variație antisimetrică	276
22.4. Aplicație la aripă eliptică	276

23. TEORIA ARIPILORE

23.1. Aripioare de curbură	277
23.2. Aripioare de direcție	281
23.3. Momente aerodinamice	283

Pag.

23.4. Forța și momentul de șarnieră pe aripioare	286
23.4.1. Transformarea formulelor	287
23.4.2. Aripioare pe toată anvergura	288
23.4.3. Aripioare pe o porțiune a anvergurii	290

24. INFLUENȚA SCOBITURILOR ȘI A NACELELOR PENTRU MOTOARE

24.1. Punerea problemei și formule generale	291
24.2. Aplicații la aripa eliptică	295
24.2.1. Exemplu	296
24.3. Metoda aproximativă pentru calculul aripilor de contur dat	296
24.3.1. Aplicație la aripile dreptunghiulare și trapezoidale	299
24.3.2. Aplicații la aripi de formă oarecare	300

25. ROTAȚIA ARIPII ÎN JURUL UNEI AXE

25.1. Aripă în viraj circular plan	300
25.1.1. Aripa eliptică	303
25.1.2. Aripă dreptunghiulară și trapezoidale	305
25.2. Forțe și momente datorite virajului	307
25.3. Rotația în jurul axei Oz	310
25.4. Rotația în jurul axei Ox	311

CAPITOLUL VI

REPARTIȚIA ÎN SUPRAFAȚA A VARTEJURILOR LEGATE ȘI TEORIA POTENȚIALA A MIȘCĂRII ÎN JURUL ARIPILOR

26. ARIPIA ÎNLOCUITĂ PRINTR'UN STRAT SUBȚIRE DE VÂRTEJURI

26.1. Punerea problemei	313
26.2. Calculul viteșelor induse	317
26.3. Aplicații la aripile dreptunghiulare	320
26.4. Aripă dreptunghiulară de alungire redusă	321
26.5. Aripă de alungire foarte mică	322

27. TEORIA POTENȚIALĂ A ARIPILOR DE ANVERGURĂ FINITĂ

27.1. Punerea problemei	326
27.2. Aplicație la aripa circulară	327
27.3. Aplicație la aripa eliptică	328

28. TEORIA ARIPILOR ÎN SĂGEATĂ SAU ÎN DERIVĂ

28.1. Viteza indusă	331
28.1.1. Raționalizarea formulei	333
28.2. Aripă în săgeată sau în derivă asimilată cu o aripă dreaptă având incidența variabilă	334
28.3. Aplicații la aripile în derivă	335
28.3.1. Considerații geometrice asupra aripii în derivă	337
28.3.2. Influența termenilor antisimetrice	339
28.3.3. Exemplu de calcul	340
28.4. Aplicație la aripile în săgeată	341
28.4.1. Influența vârtejurilor legate	343

CAPITOLUL VII

TEORIA SUSTENTAȚIEI ÎN MIȘCAREA NEPERMANENTĂ

29. CIRCULAȚIA ȘI POTENȚIALUL VITESELOR ÎN JURUL UNEI ARIPI ÎN MIȘCARE VARIATĂ

Pag.

29.1. Nașterea circulației și formarea unei păături de vârtejuri în spatele aripii	346
29.2. Determinarea circulației în jurul profilului	349
29.3. Mișcarea rectilinie accelerată, pornită din repaos	352
29.4. Mișcarea oscilatorie cu viteză de translație constantă	353
29.5. Potențialul de viteze	355
29.5.1. Potențialul datorit vitezei de translație	355
29.5.2. Potențialul datorit vitezei de rotație	356
29.5.3. Potențial datorit stratului turbionar	358

30. FORȚE ȘI MOMENTE PE ARIPI ÎN REGIM VARIABIL

30.1. Ecuația presiunii	358
30.2. Rezultanta generală	360
30.3. Moment rezultant	363
30.4. Forțele ce se exercită pe o aripă subțire	363
30.4.1. Remarcă asupra rezistenței sau a forței propulsive	370

CAPITOLUL VIII

BIPLANE DE ANVERGURĂ FINITĂ

31. FORMULE FUNDAMENTALE ALE BIPLANELOR

31.1. Acțiunea reciprocă a elementelor unui biplan	372
31.1.1. Biplan drept	372
31.1.2. Biplan decalat	374
31.1.3. Influența vârtejurilor legate	377
31.2. Rezistența minimă a unui sistem portant	378
31.2.1. Cazul unei linii închise	382
31.3. Calculul rezistenței minime	383
31.4. Distribuția circulației	384

32. SISTEME PŌRTANTE DE REZISTENȚĂ MINIMĂ

32.1. Aripa monoplană	384
32.2. Monoplan cu tăietură centrală	385
32.3. Biplan cu aripi egale	387
32.4. Biplan în dreptunghi	389
32.5. Monoplan cu discuri marginale	391

33. REZISTENȚA INDUSĂ TOTALĂ A UNUI BIPLAN OARECARE

33.1. Distanța eliptică a circulației	392
33.2. Circulația constantă dealungul anvergurii	396
33.3. Repartiția optimă a portanței pe cele două aripi ale biplanului	397

34. CARACTERISTICELE AERODINAMICE ALE FIECĂREI ARIPI A UNUI BIPLAN	
	Pag.
34.1. Determinarea circulațiilor mijlocii	400
34.1.1. Circulațiile aripilor în stare izolată	400
34.1.2. Influența vârtejurilor libere	401
34.1.3. Influența vârtejurilor legate	405
34.1.4. Circulațiile mijlocii totale	407
34.2. Forțe rezultante	408
34.2.1. Portanța	410
34.2.2. Rezistența	412
34.3. Incidențele efective	413
34.4. Câteva perfecționări ale teoriei	414
34.4.1. Curbura curentului în dreptul aripii în stare izolată	415
34.4.2. Curbura curentului datorită acțiunii reciproce a aripilor	415
34.4.3. Modificările momentelor aerodinamice	417

CAPITOLUL IX

INFLUENȚA FRONTIERELOR ASUPRA MIȘCĂRII ÎN JURUL SISTEMELOR PORTANTE

35. SCURGEREA ADITIVĂ DATORITĂ PREZENȚEI FRONTIERELOR

35.1. Condițiile la frontieră și formule fundamentale	419
35.2. Rezistența indusă	421
35.3. Potențialul aditiv datorit prezenței frontierelor. Metoda imaginilor	424
35.3.1. Cilindrul circular	425
35.3.2. Suprafețe plane	428

36. ARIPI TRAVERSÂND FRONTIERE CILINDRICE SOLIDE

36.1. Aripă traversând un fuselaj indefinit	431
36.1.1. Fuselaj indefinit cu secțiune circulară	431
36.1.2. Fuselaj nelimitat de secțiune ovală	435
36.2. Rezistența minimă a unei aripi cu fuselaj cilindric	435
36.3. Influența fuselajului asupra distribuției circulației	439
36.3.1. Exemple de aplicație	443
36.3.2. Calculul portanței și rezistenței induse totale	445

37. ARIPI TRAVERSÂND FRONTIERE CILINDRICE LIBERE

37.1. Acțiunea unui jet de secțiune circulară asupra unei aripi	447
37.1.1. Metodă elementară pentru dezvoltarea expresiei $i \sin \theta$	450
37.1.2. Determinarea coeficientului κ	450
37.2. Distribuție continuă a vârtejurilor imagine	451
37.3. Influența suflului elicei	453
37.3.1. Ecuația circulației	454
37.3.2. Ipoteze simplificatoare	458
37.3.3. Condițiuni pentru rezistența minimă	461

CAPITOLUL X

CORECTĂRILE INCERCĂRIILOR EXECUTATE ÎN SUFLERII SAU PE CĂRUCIOARE AERODINAMICE

38. INCERCĂRI ÎN VÂNA FLUIDĂ PARȚIAL LIMITATĂ

38.1. Fluid limitat de o singură suprafață plană. Influența solului	464
38.2. Frontiera plană în cazul general	466
38.2.1. Frontieră verticală	466

	Pag.
38.3. Scurgere plană limitată de două suprafețe plane paralele	467
38.3.1. Cazul pereților lichizi sau a suprafețelor libere	468
38.3.2. Incidența și rezistența indusă aparente	469
38.3.3. Cazul suprafețelor mixte: peretele interior fix și suprafața superioară liberă	471
38.4. Aripa de anvergură finită între suprafețe plane paralele	471
38.4.1. Suprafețe plane orizontale	471
38.4.2. Suprafețe plane verticale	473
38.5. Influența suprafețelor plane paralele stabilită prin metoda directă	474

39. SUFLERII CU VÂNĂ TOTALĂ LIMITATĂ

39.1. Secțiune dreptunghiulară	476
39.1.1. Viteze adiționale mijlocii	482
39.2. Suflerie cu secțiune circulară	483
39.2.1. Influența poziției aripii în interiorul cercului	485
39.2.2. Cazul distribuției eliptice	486
39.3. Secțiune eliptică	488
39.3.1. Mișcarea în planul cercului	489
39.3.2. Incidența indusă suplimentară	491
39.4. Secțiune în două arce de cerc	493

