ALGEBRA

MANUAL PENTRU CLASA A X-a REALĂ

EDITURA DE STAT DIDACTICĂ ȘI PEDAGOGICĂ
BUCUREȘTI — 1962

Aprobat de Ministerul Învățămîntului și Culturii
cu nr. 128186/1959

Autori:
Iacob Crișan și *Alexandru Pop*

CAPITOLUL I

ANALIZA COMBINATORIE ȘI BINOMUL LUI NEWTON

ANALIZA COMBINATORIE

1. *Analiza combinatorie* este un capitol din algebra superioară care se ocupă cu *formarea*, *numărarea* și *proprietățile diferitelor grupe* ce se pot face, după anumite reguli, cu un număr finit de elemente date.

Elementele sau *obiectele* din care se pot face grupele se pot nota:
sau cu termenii șirului natural al numerelor

$$1,\ 2,\ 3,\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\ n-1,\ n$$

sau cu literele alfabetului

$$a,\ b,\ c,\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\ k,\ l$$

sau cu o singură literă a prevăzută cu indici

$$a_1,\ a_2,\ a_3,\ \ldots\ldots\ldots\ldots,\ a_{n-1},\ a_n.$$

Vom folosi mai des notația ultimă.

În cazurile în care vom avea de-a face cu un număr redus de elemente, de exemplu cu 3, 4, 5 etc., pentru simplificarea notațiilor vom nota elementele

$a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4,\ a_5,\ \ldots\ldots\ldots\ldots$ sau pur și simplu
$1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ \ldots\ldots\ldots\ldots$

Grupările sau grupele care se pot face din elementele date pot fi *grupări simple* sau *grupări cu repetiții*.

De exemplu, dacă ni se dau *obiectele* sau *cifrele*

1, 2, 3, 4, 5,

numerele (sau cum spunem în analiza combinatorie: *grupele*) *124, 215, 513* etc. sînt *grupări simple* formate din cele 5 cifre, fiindcă o cifră oarecare figurează numai cîte o singură dată într-un număr.

În schimb numerele *112, 333, 515, 444* etc. sînt *grupări cu repetiții* formate din aceleași cifre, fiindcă o cifră figurează de două ori sau chiar de trei ori într-un număr.

Dacă luăm, de exemplu, *numerele de telefon* din București, ele constituie niște *grupări* formate din cifrele *0, 1, 2, ..., 9.*

Numerele *157 620, 143 276* etc. sînt *grupări simple*, iar numerele *143 900, 141 144* etc. sînt *grupări cu repetiții*.

În cele ce urmează, ne vom ocupa numai cu *grupările simple* care se pot face dintr-un număr dat de obiecte sau elemente.

2. Dintre toate felurile de a grupa mai multe *elemente* (sau obiecte) date, se consideră ca fundamentale: *aranjamentele, permutările* și *combinările.*

ARANJAMENTE

3. Să luăm cinci elemente diferite, pe care să le notăm chiar cu primele cinci cifre: *1, 2, 3, 4, 5.*

Ne propunem ca din aceste cinci cifre să formăm *toate* numerele de cîte două cifre.

Luăm mai întîi toate numerele care încep cu *1*, apoi cele care încep cu *2*, pe urmă cu *3*, cu *4* și în fine cu *5*, și, așezîndu-le pe cîte o coloană, obținem următorul tablou:

12	21	31	41	51
13	23	32	42	52
14	24	34	43	53
15	25	35	45	54

Să examinăm *numerele* (sau *grupele*, cum le vom spune mai des), din acest tablou și să vedem prin ce se deosebesc ele.

Grupele *12* și *34*, de exemplu, se deosebesc prin aceea că grupa *12* e formată din obiectele *1* și *2*, pe cînd grupa *34* e formată din obiectele *3* și *4*, deci din alte obiecte.

Se zice în acest caz că cele două grupe *12* și *34* se deosebesc prin *natura obiectelor.*

Tot prin *natura obiectelor* diferă și grupele:

13 cu *23*, *21* cu *42*, *12* cu *14* etc.,

deci chiar în cazul cînd *grupele diferă prin cel puțin un obiect.*

În schimb, grupele *12* și *21* care sînt formate din aceleași obiecte *1* și *2*, așezate însă în altă ordine, se zice că se deosebesc prin *ordinea obiectelor.*

În tabloul de mai sus, avem în modul acesta grupe formate din 5 obiecte luate cîte 2, care diferă între ele *fie prin natura obiectelor, fie prin ordinea obiectelor.*

Grupele formate în aceste condiții se numesc *aranjamente de 5 obiecte luate cîte 2* și numărul grupelor se notează cu simbolul A_5^2. (În această notație, litera A este inițiala cuvîntului aranjamente, *indicele inferior 5* arată numărul total de obiecte, iar *indicele superior 2* — care nu trebuie considerat ca exponent — arată numărul obiectelor dintr-o grupă.)

În același mod putem avea:

aranjamente de 8 obiecte luate cîte 5, în număr de A_8^5; *aranjamente de 12 obiecte luate cîte 7*, în număr de A_{12}^7; și în general:

aranjamente de n obiecte luate cîte k, în număr de A_n^k, în care caz, evident avem $k \leqslant n$.

În cazul general, pentru aranjamentele de n elemente luate cîte k, putem da următoarea definiție:

Prin aranjamente de **n** *obiecte luate cîte* **k**, *înțelegem grupele care se pot forma din cele n obiecte cu următoarele două condiții:*

1) *fiecare grupă să conțină cîte k obiecte diferite;*

2) *grupele să se deosebească între ele fie prin natura obiectelor, fie prin ordinea lor.*

Prima condiție s-ar părea că e inutil s-o mai adăugăm îndată ce e vorba de aranjamente de n obiecte luate cîte k, deci condiția e cuprinsă în titlul aranjamentelor; am repetat însă condiția pentru a accentua o dată în plus numărul de obiecte pe fiecare grupă.

4. Trecem direct la cazul general, luînd n obiecte pe care să le notăm cu

$$a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4,\ \dots,\ a_{n-2},\ a_{n-1},\ a_n.$$

Ne propunem ca din aceste n obiecte să formăm *toate* aranjamentele luate cîte 1, în număr de A_n^1, apoi cele luate cîte 2, în număr de A_n^2, pe urmă cele luate cîte 3, în număr de A_n^3 şi tot aşa mai departe pînă la cîte k, în număr de A_n^k.

În cazul aranjamentelor celor n obiecte luate cîte 1, fiecare obiect constituie o grupă şi avem următorul tablou al tuturor acestor grupe:

$$\boxed{a_1;\ a_2;\ a_3;\ a_4;\ \dots;\ a_{n-2};\ a_{n-1};\ a_n.} \qquad (T_1)$$

Am notat acest tablou cu (T_1), ceea ce înseamnă *tabloul aranjamentelor a n obiecte luate cîte 1.*

Întrucît avem n obiecte, este evident că avem n grupe, deci

$$\boxed{A_n^1 = n}$$

5. Pentru a forma acum *tabloul aranjamentelor a n obiecte luate cîte 2*, vom adăuga la dreapta fiecărui aranjament sau grupă din (T_1), rînd pe rînd, toate obiectele rămase şi obţinem tabloul următor:

$$\begin{array}{|ccccc|}
\hline
a_1a_2 & a_2a_1 & a_3a_1 & \cdots & a_na_1 \\
a_1a_3 & a_2a_3 & a_3a_2 & \cdots & a_na_2 \\
a_1a_4 & a_2a_4 & a_3a_4 & \cdots & a_na_3 \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \\
a_1a_n & a_2a_n & a_3a_n & \cdots & a_na_{n-1}. \\
\hline
\end{array} \qquad (T_2)$$

În coloana 1 toate grupele încep cu a_1, în coloana a 2-a cu a_2, în coloana a 3-a cu a_3 etc. şi în coloana ultimă toate grupele încep cu a_n.

Acest tablou *conţine toate grupele* cerute de problemă, adică toate aranjamentele de n obiecte luate cîte 2; într-adevăr, un aranjament oarecare este de forma a_ia_k, unde i şi k pot lua valorile de la 1 la n, $i \neq k$, şi această grupă a_ia_k figurează neapărat în tabloul de mai sus, şi anume în coloana în care toate grupele încep cu a_i, şi întrucît a_k este unul din obiectele $a_1, a_2, \dots, a_n$, el a fost alăturat după a_i.

Pe lîngă aceasta, ne putem convinge uşor că *în acest tablou nici o grupă nu figurează de două ori.*

Într-adevăr, două grupe luate la întîmplare din două coloane deosebite diferă între ele prin primul obiect, iar două grupe luate din aceeaşi coloană diferă prin al doilea obiect.

După ce ne-am convins de aceste două lucruri, putem trece la numărarea grupelor din (T_2).

În tabloul nostru, se vede clar că avem n coloane şi în fiecare coloană $n-1$ grupe.

Deci numărul total al grupelor este $n(n-1)$, aşa că putem scrie

$$\boxed{A_n^2 = n(n-1)}\,.$$

6. Pentru a forma tabloul (T_3), adică *tabloul aranjamentelor a n obiecte luate cîte 3*, ne vom folosi de tabloul precedent şi vom lua fiecare din grupele acestui tablou, în urma căreia vom pune *rînd pe rînd* celelalte obiecte rămase; obţinem următorul tablou:

$$\begin{array}{|ccccccc|}
\hline
a_1a_2a_3 & a_1a_3a_2 & \dots & a_5a_6a_1 & \dots & a_na_{n-1}a_1 \\
a_1a_2a_4 & a_1a_3a_4 & \dots & a_5a_6a_2 & \dots & a_na_{n-1}a_2 \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
a_1a_2a_n & a_1a_3a_n & \dots & a_5a_6a_n & \dots & a_na_{n-1}a_{n-2} \\
\hline
\end{array} \qquad (T_3)$$

În acest tablou, grupele din prima coloană încep toate cu a_1a_2 care a fost prima grupă din (T_2); grupele din coloana a doua încep toate cu a_1a_3 care a fost grupa a doua din (T_2); o coloană oarecare are toate grupele care încep cu a_ia_k de exemplu cu a_5a_6, o grupă oarecare luată la întîmplare din (T_2), iar în ultima coloană toate grupele încep cu a_na_{n-1} care a fost ultima grupă din (T_2).

Am putea demonstra și pentru (T_3) tot așa cum am demonstrat pentru (T_2), că:

1) *Tabloul conține toate grupele* cerute de problemă.

2) *În tabloul* (T_3), *nici o grupă nu figurează de două ori.*

Pentru a afla valoarea lui A_n^3, să numărăm grupele din (T_3).

În acest tablou avem atîtea coloane, cîte grupe au fost în tabloul precedent (T_2), adică $n(n-1)$ și în fiecare coloană avem $(n-2)$ grupe, deci numărul total al grupelor este $n(n-1)(n-2)$, așa că putem scrie:

$$\boxed{A_n^3 = n(n-1)(n-2)}$$

7. Urmînd raționamentul de mai sus, vom putea scrie:

$$A_n^4 = n(n-1)(n-2)(n-3)$$

$$A_n^5 = n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4) \text{ etc.}$$

În general, vom putea scrie:

$$A_n^k = n(n-1)(n-2)\ldots[n-(k-1)] \text{ sau}$$

$$\boxed{A_n^k = n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1)} \qquad \text{(I)}$$

În acest produs avem k factori, așa că putem spune:

Numărul aranjamentelor a n obiecte luate cîte k este egal cu produsul a k numere naturale consecutive descrescătoare, începînd cu n.

ALT MOD DE A CALCULA VALOAREA LUI A_n^k

8. *Modul* cum am stabilit valoarea lui A_n^k, prin formula

$$\boxed{A_n^k = n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1)} \qquad \text{(I)}$$

nu corespunde întru totul din punct de vedere riguros matematic.

Într-adevăr, noi am găsit mai întîi că:

$$A_n^1 = n.$$

Plecînd de la aceasta, am format tabloul tuturor aranjamentelor a n obiecte luate cîte două și numărînd grupele am găsit:

$$A_n^2 = n(n-1).$$

Plecînd pe urmă de la A_n^2, am format tabloul tuturor aranjamentelor a n obiecte luate cîte 3 și numărînd din nou grupele am găsit:

$$A_n^3 = n(n-1)(n-2).$$

De aici înainte, extinzînd acest raționament „din aproape în aproape", am scris formula pentru A_n^4, A_n^5 și am admis că această formulă este valabilă și în cazul general, scriind formula lui A_n^k.

Metoda aceasta însă, de a extinde la cazul general valabilitatea unei formule găsite în cazuri particulare, nu este corectă din punct de vedere matematic.

Ceea ce am făcut noi, echivalează cu o *inducție incompletă.*

Pentru a găsi pe altă cale formula lui A_n^k, vom raționa în modul următor:

Cînd am format tabloul (T_3), am plecat de la (T_2) și după fiecare grupă de două obiecte am așezat rînd pe rînd obiectele rămase, al căror număr este $n-2$ și am găsit:

$$A_n^3 = (n-2)A_n^2.$$

Ca să formăm (T_4), plecăm de la (T_3) și după fiecare grupă de trei obiecte așezăm rînd pe rînd obiectele rămase, al căror număr este $n-3$ și găsim:

$$A_n^4 = (n-3)A_n^3.$$

Să presupunem că am format (T_{p-1}), adică *tabloul aranjamentelor de n obiecte luate cîte p — 1* și, folosindu-ne de grupele acestui tablou, vrem să formăm (T_p), adică *tabloul aranjamentelor de n obiecte luate cîte p.*

Pentru aceasta, după fiecare grupă din (T_{p-1}), vom așeza rînd pe rînd toate obiectele rămase.

Or, fiecare grupă din (T_{p-1}) conține cîte $p-1$ obiecte, iar numărul obiectelor rămase este:

$$n-(p-1) = n-p+1.$$

Cum fiecare grupă din (T_{p-1}) a dat naștere la $(n-p+1)$ grupe în (T_p), urmează că avem:

$$\boxed{A_n^p = (n-p+1)\cdot A_n^{p-1}}$$

Formula aceasta, care stabilește *legătura dintre două aranjamente consecutive*, se numește o *formulă de recurență*.

9. În general, dacă avem un șir de numere, de exemplu:

$$u_1, u_2, u_3, \ldots, u_n,$$

vom numi *formulă de recurență*, o *formulă* cu ajutorul căreia putem calcula un termen oarecare din acest șir, de exemplu pe u_n, în funcție de cîțiva din termenii anteriori u_{n-1}, u_{n-2}, u_{n-3} etc.

Cele mai simple formule de recurență ne dau valoarea lui u_n numai în funcție de u_{n-1}, altele apelează la u_{n-1} și u_{n-2} și pot fi unele care recurg chiar la mai mult de doi termeni anteriori.

Însuși numele de *formulă de recurență* arată esența procedeului (în latină: *recurro* — a alerga înapoi), care constă în calculul unui element (u_n) al șirului, cu ajutorul elementelor precedente din șirul considerat.

10. În cazul nostru, formula de recurență

$$A_n^p = (n - p + 1)\cdot A_n^{p-1}$$

ne va da valoarea lui A_n^p în funcție de A_n^{p-1}.

În această formulă de recurență să punem în locul lui p pe rînd valorile

$$2, 3, \ldots\ldots\ldots, k-1, k.$$

Avem succesiv:

Pentru $p = 2$ avem $A_n^2 = (n-1)\cdot A_n^1$

„ $p = 3$ „ $A_n^3 = (n-2)\cdot A_n^2$

....

Pentru $p = k-1$ avem $A_n^{k-1} = (n-k+2)\cdot A_n^{k-2}$

„ $p = k$ „ $A_n^k = (n-k+1)\cdot A_n^{k-1}$

Înmulțind aceste $k-1$ relații membru cu membru, vom găsi:

$$A_n^2\cdot A_n^3 \ldots A_n^{k-1}\cdot A_n^k =$$

$$= (n-1)(n-2)\ldots(n-k+2)(n-k+1)A_n^1\cdot A_n^2\cdot \ldots A_n^{k-2}\cdot A_n^{k-1}.$$

Împărțind acum ambii membri cu produsul

$A_n^2\cdot A_n^3 \ldots A_n^{k-1}$ și întrucît $A_n^1 = n$

vom găsi:

$$\boxed{A_n^k = n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1)} \qquad \text{(I)}$$

adică aceeași formulă pe care am stabilit-o mai sus, cu prima metodă, prin inducție incompletă.

EXERCIȚII REZOLVATE

Folosim formula (I): $A_n^k = n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1)$.

La deducerea acestei formule am menționat faptul că, din punct de vedere aritmetic, numărul aranjamentelor se exprimă *printr-un produs de k numere naturale consecutive descrescătoare, începînd cu n.*

La aplicarea acestei formule, cînd indicele superior k are o valoare mică, vom scrie toți factorii și eventual dăm și valoarea produsului.

Dacă însă are o valoare mare sau este dată literal, din produs vom scrie numai primii 3 factori și ultimul, eventual ultimii doi.

La scrierea ultimului factor, vom fi atenți că el are valoarea $n - k + 1$, deci

ultimul factor = diferența indicilor + 1.

1) $A_8^4 = 8\cdot 7\cdot 6\cdot 5 = 1\,680.$

2) $A_8^5 = 8\cdot 7\cdot 6\cdot 5\cdot 4 = 6\,720.$

3) $$\frac{A_8^3 + A_7^4}{A_6^3} = \frac{8\cdot 7\cdot \cancel{6} + 7\cdot \cancel{6}\cdot 5\cdot 4}{\cancel{6}\cdot 5\cdot 4} = \frac{8\cdot 7 + 7\cdot 5\cdot 4}{5\cdot 4} = \frac{7(8+20)}{20} =$$

$$= \frac{7\cdot 28}{20} = \frac{7\cdot 7}{5} = \frac{49}{5}.$$

4) Cîte numere de 2 cifre distincte se pot forma cu cifrele: 1, 2, 3, ..., 9?

Avem

$$A_9^2 = 9\cdot 8 = 72.$$

5) Să se afle numărul aranjamentelor de $n + 1$ elemente luate cîte $k - 1$.

Ultimul factor $= (n+1) - (k-1) + 1 = n + 1 - k + 1 + 1 = n - k + 3$, așa că avem

$$A_{n+1}^{k-1} = (n+1)\,n\,(n-1)\ldots(n-k+3).$$

6) Să se afle numărul aranjamentelor de $(n+k)$ elemente luate cîte $(n-k+1)$.

Ultimul factor $= (n+k)-(n-k+1)+1=n+k-n+k-1+1 = 2k$, aşa că avem

$$A_{n+k}^{n-k+1} = (n+k)(n+k-1)(n+k-2)\dots(2k).$$

7) Într-o clasă se învaţă 10 materii, iar orarul trebuie să cuprindă 5 materii diferite pe zi.

În cîte feluri pot fi repartizate lecţiile unei zile?

Toate repartizările posibile ale lecţiilor pe o zi reprezintă toate aranjamentele ce se pot face din 10 elemente luate cîte 5, aşa că avem

$$A_{10}^5 = 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 = 30\,240.$$

PERMUTĂRI

11. Să luăm trei elemente (sau obiecte), care să fie chiar cifrele *1*, *2*, *3*.

Ne propunem ca din aceste cifre să formăm toate numerele de trei cifre, adică în fiecare număr să intre toate cifrele, sau cum se spune în analiza combinatorie, în fiecare grupă să intre toate obiectele.

Dacă începem cu cifra *1*, putem avea grupele *123* şi *132*;

dacă începem cu cifra *2*, putem avea grupele *213* şi *231*, iar

dacă începem cu cifra *3*, putem avea grupele *312* şi *321*.

Aşezăm toate aceste grupe într-un tablou:

123	*213*	*312*
132	*231*	*321*

Grupele formate în modul acesta din cele trei obiecte, astfel ca în fiecare grupă să intre toate obiectele, se numesc *permutări de trei obiecte* şi numărul lor se notează cu simbolul P_3.

De la început observăm, că în cazul permutărilor, spre deosebire de aranjamente, folosim un singur indice, în exemplul nostru pe 3; al doilea indice fiind tot 3, a devenit inutil pentru motivul că în fiecare grupă intră toate obiectele.

În acelaşi mod cu P_3, putem avea şi:

permutări de patru obiecte în număr de P_4;

permutări de şase obiecte în număr de P_6 şi în general

permutări de n obiecte în număr de P_n.

Dacă examinăm grupele din tabloul de mai sus constatăm că, întrucît în fiecare grupă figurează **toate** cele trei obiecte, grupele diferă *numai prin ordinea obiectelor.*

Putem da atunci definiţia permutărilor:

Prin permutări de n obiecte, înţelegem grupele care se pot forma din cele n obiecte, cu următoarele două condiţii:

1) *fiecare grupă să conţină toate cele n obiecte;*

2) *grupele să se deosebească între ele numai prin ordinea obiectelor.*

12. Calculul numărului permutărilor cu ajutorul aranjamentelor. Întrucît la permutări într-o grupă figurează toate obiectele, iar grupele se deosebesc între ele *numai prin ordinea obiectelor*, înseamnă că permutările pot fi considerate ca nişte aranjamente, la care $n=k$, adică *numărul obiectelor din fiecare grupă = numărul total al obiectelor*; în acest caz, aceste aranjamente nu mai diferă decît *prin ordinea obiectelor*, tocmai condiţia cerută la permutări.

Aşa că vom avea

$$P_1 = A_1^1 = 1$$
$$P_2 = A_2^2 = 2 \cdot 1$$
$$P_3 = A_3^3 = 3 \cdot 2 \cdot 1$$
$$P_4 = A_4^4 = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$$

şi în general

$$\boxed{P_n = A_n^n = n(n-1)(n-2)\dots 3 \cdot 2 \cdot 1}$$

Se știe că A_n^k se exprimă printr-un *produs de mai multe numere naturale consecutive descrescătoare*, în care primul factor este n, iar ultimul factor este $n - k + 1$.

În cazul lui A_n^n, primul factor va fi evident tot n, iar ultimul factor va fi $n - n + 1$, adică 1.

În acest caz, produsul $n(n-1)(n-2) \ldots 3 \cdot 2 \cdot 1$ îl vom scrie invers, în ordine crescătoare, așa că pentru P_n vom avea:

$$\boxed{P_n = 1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots n}$$

Produsul $1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots n$, format din produsul primelor n numere naturale, se notează în matematică cu *simbolul* $n!$ *care se citește n factorial* sau *factorial de n*.

Cu această notație, permutările de mai sus se vor putea scrie

$$P_1 = 1! = 1$$
$$P_2 = 2! = 1 \cdot 2$$
$$P_3 = 3! = 1 \cdot 2 \cdot 3$$
$$P_4 = 4! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4$$

şi în general

$$\boxed{P_n = n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots n} \qquad \text{(II)}$$

13. Calculul lui P_n, cu ajutorul unei formule de recurență. Să luăm cele n obiecte: $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{n-2}, a_{n-1}, a_n$.

Să presupunem că am luat din ele primele $(p-1)$ obiecte și am format din ele *tabloul permutărilor de* $(p-1)$ *obiecte*, adică (T_{p-1}).

Pentru a forma acum *tabloul permutărilor de p obiecte*, adică (T_p), vom lua și obiectul a_p și îl vom așeza lîngă fiecare permutare de $(p-1)$ obiecte, în toate locurile disponibile.

Dacă luăm, de exemplu, permutarea

$$a_1 a_2 a_3 \ldots \ldots a_{p-2}\ a_{p-1},$$

observăm că avem *un loc* disponibil la dreapta și $(p-1)$ locuri disponibile înaintea fiecăruia din cele $(p-1)$ obiecte, deci în total p locuri disponibile.

Astfel că *fiecare permutare de* $(p-1)$ obiecte va da naștere la *p permutări de p* obiecte, deci vom avea

$$\boxed{P_p = p \cdot P_{p-1}}$$

Aceasta este *formula de recurență* căutată.

Facem în această formulă

$$p = 2,\ p = 3,\ p = 4, \ldots,\ p = n - 1,\ p = n$$

și vom găsi

Pentru $p = 2$ avem $P_2 = 2\ P_1$.
Pentru $p = 3$ avem $P_3 = 3\ P_2$.
Pentru $p = 4$ avem $P_4 = 4\ P_3$.
. . . .
. . . .
Pentru $p = n - 1$ avem $P_{n-1} = (n-1)\ P_{n-2}$.
Pentru $p = n$ avem $P_n = n\ P_{n-1}$.

Înmulțim aceste egalități membru cu membru și avem

$$P_2 \cdot P_3 \cdot P_4 \ldots P_{n-1} \cdot P_n = 2 \cdot 3 \cdot 4 \ldots (n-1) \cdot n \cdot P_1 \cdot P_2 \cdot P_3 \ldots$$
$$\ldots P_{n-2} \cdot P_{n-1}.$$

Simplificînd egalitatea cu produsul $P_2 \cdot P_3 \cdot P_4 \ldots P_{n-2} \cdot P_{n-1}$ și observînd că $P_1 = 1$, avem formula definitivă

$$\boxed{P_n = n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots n} \qquad \text{(II)}$$

Pentru a vedea mai bine rapiditatea cu care cresc permutările sau factorialele, să luăm următoarea problemă:

Trei tovarăși, care iau prînzul zilnic la aceeași cantină, șed pe o bancă în fața mesei; ei se hotărăsc ca în fiecare zi să se azeșe în altă ordine pe aceeași bancă. După cîte zile revin la prima așezare?

Întrucît $P_3 = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$, înseamnă că ei revin la prima așezare după 6 zile, adică aproximativ după o săptămînă.

Dacă acum în loc de trei tovarăși, ar ședea la aceeași masă patru tovarăși, întrucît $P_4 = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$, înseamnă că ei vor reveni la prima așezare după 24 zile.

În cazul a cinci tovarăși, intervalul de timp dintre două așezări dentice se mărește la:

$P_5 = 5! = 120$ zile, adică 4 luni.

În cazul a 6 tovarăși, vom avea
$P_6 = 6! = 720$ zile, adică aproape 2 ani.

În cazul a 7 tovarăși, vom avea
$P_7 = 7! = 5\,040$ zile, adică aproape 14 ani.

În cazul a 8 tovarăși, vom avea intervalul
$P_8 = 8! = 40\,320$ zile, adică 110 ani, ceea ce face mai mult decît o viață de om.

Acest exemplu ilustrează într-un mod foarte elocvent rapiditatea cu care cresc factorialele.

14. Două proprietăți importante ale factorialelor. Să luăm cîteva *factoriale consecutive*, de exemplu

$6!$, $7!$, $8!$ etc.; constatăm următoarele:

$6! = 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6$

$7! = 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7 = 6!7$

$8! = 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7\cdot 8 = 6!7\cdot 8$

În general putem scrie

$$n! = (n-1)!\,n \qquad (\mathrm{II}_1)$$

$$n! = (n-2)!\,(n-1)\,n \qquad (\mathrm{II}_2) \text{ etc.}$$

De asemenea putem deduce ușor relațiile următoare

$$n! = \frac{(n+1)!}{n+1} \qquad (\mathrm{II}_3)$$

$$n! = \frac{(n+2)!}{(n+1)\,(n+2)} \qquad (\mathrm{II}_4) \text{ etc.}$$

EXERCIȚII REZOLVATE

1) Cîte numere de nouă cifre scrise cu cele nouă cifre semnificative diferite există?

Numărul căutat este

$$P_9 = 9! = 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7\cdot 8\cdot 9 = 362\ 880.$$

2) Cîte numere de cîte zece cifre diferite există? (Numerele începînd cu 0 sînt socotite ca fiind de 9 cifre.)

R. $9\cdot P_9$

3) În cîte feluri pot fi așezate 12 persoane la o masă pe care sînt 12 tacîmuri?

Numărul căutat este

$$P_{12} = 12! = 1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots \cdot 12 = 479\ 001\ 600.$$

Vedem deci cît de repede cresc factorialele.

De exemplu pentru $100!$ găsim *un număr scris cu* 158 *de cifre.*

4) $$\frac{P_6 - P_4}{P_6} = \frac{6! - 4!}{3!} = \frac{3!\,4\cdot 5\cdot 6 - 3!\,4}{3!} = 4\cdot 5\cdot 6 - 4 = 4\,(30-1) = 116.$$

5) Să se afle numărul permutărilor din $2n+2$ elemente. Avem:

$$P_{2n+2} = (2n+2)! = 1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots \cdot (2n+1)\cdot (2n+2).$$

COMBINĂRI

15. Să luăm din nou cinci elemente: *1, 2, 3, 4, 5* și să formăm tabloul aranjamentelor luate cîte două:

12	*21*	*31*	*41*	*51*
13	*23*	*32*	*42*	*52*
14	*24*	*34*	*43*	*53*
15	*25*	*35*	*45*	*54*

Dacă în acest tablou tăiem grupele care diferă prin ordinea elementelor, obținem tabloul:

12			
13	*23*		
14	*24*	*34*	
15	*25*	*35*	*45*

în care grupele diferă numai prin natura obiectelor.

Grupele formate în modul acesta din cele cinci obiecte se numesc *combinări de cinci obiecte luate cîte două* și numărul lor se notează cu C_5^2.

În același mod putem avea:

combinări de 10 obiecte luate cîte 4 în număr de C_{10}^4;

combinări de 15 obiecte luate cîte 7 în număr de C_{15}^7

și în general:

combinări de n obiecte luate cîte k în număr de C_n^k în care caz, evident, avem $k \leqslant n$.

În cazul general, pentru C_n^k putem da următoarea definiție:

Prin combinări de n obiecte luate cîte k înțelegem grupele care se pot forma din cele n obiecte, cu următoarele două condiții:

1) *fiecare grupă să conțină cîte k obiecte din cele n date;*

2) *grupele să se deosebească între ele prin natura obiectelor.*

Numărul combinărilor de n obiecte luate cîte k se notează cu C_n^k.

16. Înainte de a afla valoarea lui C_n^k, vom lua mai întîi un caz particular, adică vom forma toate *combinările de cinci obiecte luate întîi cîte două, apoi cîte trei.*

Cele cinci obiecte le vom nota, pentru simplificarea notațiilor, cu

$$1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5.$$

În cazul combinărilor celor cinci obiecte *1, 2, 3, 4, 5*, luate cîte două, vom scrie succesiv după fiecare obiect, obiectele care îi urmează în ordine naturală. Vom avea astfe grupele:

12	*23*	*34*	*45*
13	*24*	*35*	
14	*25*		
15			

(T_2)

și am format astfel *tabloul combinărilor de cinci obiecte luate cîte două*, adică (T_2).

Pentru a trece acum la *combinările celor cinci obiecte luate cîte trei*, vom lua fiecare *combinare de două obiecte* și la dreapta ei vom așeza, rînd pe rînd, obiectele care îi mai urmează în ordine naturală. Vom găsi astfel grupele:

1 2 3	*1* 3 4	*1* 4 5	2 3 4	2 4 5	3 4 5
1 2 4	*1* 3 5		2 3 5		
1 2 5					

(T_3)

Am format astfel *tabloul combinărilor de cinci obiecte luate cîte trei* (adică T_3).

Acum să găsim formula care ne dă numărul combinărilor de cinci obiecte luate cîte trei, adică C_5^3.

În tabloul combinărilor de cinci obiecte luate cîte trei vom lua fiecare grupă și îi vom permuta cele trei obiecte în toate modurile posibile. Întrucît $P_3 = 3! = 6$, înseamnă că din fiecare grupă vom obține cîte șase grupe.

Formăm un nou tablou, așezînd grupele formate prin permutări pe cîte o coloană, în modul următor:

123	*124*	*125*	*134*	*135*	*145*	*234*	*235*	*245*	*345*
132	*142*	*152*	*143*	*153*	*154*	*243*	*253*	*254*	*354*
213	*214*	*215*	*314*	*315*	*415*	*324*	*325*	*425*	*435*
231	*241*	*251*	*341*	*351*	*451*	*342*	*352*	*452*	*453*
312	*412*	*512*	*413*	*513*	*514*	*423*	*523*	*524*	*534*
321	*421*	*521*	*431*	*531*	*541*	*432*	*532*	*542*	*543*

Cum tabloul e în formă de dreptunghi, aflăm mai întîi numărul grupelor de pe o linie, apoi numărul grupelor de pe o coloană și vom scrie că:

numărul grupelor de pe linie $\times$ *numărul grupelor de pe o coloană* $=$ *numărul total al grupelor.*

Pentru a afla *numărul grupelor de pe o linie*, privim numai prima linie unde am scris chiar combinările celor cinci obiecte luate cîte trei, deci acest număr este C_5^3.

Numărul grupelor de pe o coloană se vede imediat că este P_3, întrucît pe fiecare coloană am făcut toate permutările grupei inițiale din prima linie. Deci avem deocamdată:

numărul grupelor de pe o linie $\times$ *numărul grupelor de pe o coloană* $= C_5^3 \times P_3$.

Să încercăm să aflăm numărul grupelor din tabloul nostru dreptunghiular în alt mod, examinînd componența grupelor și mai ales *felul în care se deosebesc între ele.*

În această privință constatăm următoarele:

Grupele din prima linie, fiind combinări de cinci obiecte luate cîte trei, se deosebesc între ele evident *numai prin natura obiectelor.*

Grupele din fiecare coloană, fiind permutări de trei elemente, se vor deosebi între ele *numai prin ordinea obiectelor.*

Grupele din tabloul întreg, luate în ansamblu, constituie atunci *grupe formate din cinci obiecte luate cîte trei, care se deosebesc fie prin natura obiectelor, fie prin ordinea lor, adică chiar aranjamente de cinci obiecte luate cîte trei* și numărul lor este A_5^3.

Deci putem scrie:

$$C_5^3 \times P_3 = A_5^3.$$

Această egalitate s-ar putea citi astfel:
Combinările de cinci obiecte luate cîte trei, permutate cîte trei, ne dau aranjamente de cinci obiecte luate cîte trei.

Din egalitatea

$$C_5^3 \cdot P_3 = A_5^3 \quad \text{avem} \quad \boxed{C_5^3 = \frac{A_5^3}{P_3}}$$

În general avem:

$$C_n^k \cdot P_k = A_n^k \text{ de unde } \boxed{C_n^k = \frac{A_n^k}{P_k}}$$

care ne dă, în cazul general, *valoarea lui C_n^k*, cu ajutorul *aranjamentelor* și *permutărilor.*

Ultima relație s-ar putea obține, făcînd și pentru C_n^k același raționament ca în cazul C_5^3.

Să presupunem că am format toate combinările a n obiecte luate cîte k.

Pentru a găsi numărul lor, să luăm una din aceste combinări ce conține k obiecte și să permutăm în toate modurile posibile aceste k obiecte; vom obține P_k grupe.

Repetînd această operație pentru toate combinările, obținem în total $C_n^k \cdot P_k$ grupe, care nu sînt altceva decît aranjamente de *n obiecte luate cîte k*, al căror număr este A_n^k. Deci avem și pe această cale

$$C_n^k \cdot P_k = A_n^k$$

de unde avem

$$\boxed{C_n^k = \frac{A_n^k}{P_k} = \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1)}{1\cdot 2\cdot 3\ldots k}} \qquad (\mathrm{III}_1)$$

Formula (III_1) constituie *prima formulă a combinărilor* cu ajutorul *aranjamentelor* și *permutărilor.*

17. Orice număr de combinări în mod necesar trebuie să fie număr natural, deci:

$$C_n^k = \frac{A_n^k}{P_k} = \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1)}{1\cdot 2\cdot 3\ldots k}$$

trebuie să fie și el număr natural. De aci rezultă următoarea proprietate aritmetică:

Produsul a k numere naturale consecutive este totdeauna divizibil prin produsul primelor k numere naturale.

18. Expresia lui C_n^k, scrisă sub formă fracționară, se poate pune sub o altă formă, amplificînd fracția cu $(n-k)!$ Avem

$$C_n^k = \frac{A_n^k}{P_k} = \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1)}{1\cdot 2\cdot 3\ldots k} =$$

$$= \frac{[n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1)]\cdot[(n-k)(n-k-1)\ldots 2\cdot 1]}{(1\cdot 2\cdot 3\ldots k)\cdot[1\cdot 2\ldots(n-k-1)(n-k)]} =$$

$$= \frac{1\cdot 2\ldots(n-k-1)(n-k)(n-k+1)\ldots(n-2)(n-1)n}{(1\cdot 2\cdot 3\ldots k)\cdot[1\cdot 2\ldots(n-k-1)(n-k)]} =$$

$$= \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Am găsit deci formula

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}. \qquad (\mathrm{III}_2)$$

Aceasta este a doua formulă a combinărilor, cu ajutorul factorialelor, cunoscută încă sub numele de *forma factorială a combinărilor.*

19. Formula aceasta ne dă următoarea *proprietate:*

Produsul primelor n numere naturale consecutive este totdeauna divizibil prin produsul primelor k numere naturale înmulțit cu produsul primelor $(n-k)$ numere naturale, oricare ar fi k, cu condiția ca să avem $k < n$.

De exemplu:

Produsul $(1\cdot 2\ldots 12)$ va fi divizibil cu produsul $(1\cdot 2\ldots 8)$ înmulțit cu produsul $(1\cdot 2\cdot 3\cdot 4)$.

APLICAȚII

I. Să se demonstreze formula $C_n^k = C_n^{n-k}$, folosind formula (III_2).

II. Să se verifice aceeași egalitate, în cazul particular $C_{15}^6 = C_{15}^9$, cu cele două formule (III_1) și (III_2).

20. Alte formule relative la combinări. Să calculăm pentru cazul a 8 obiecte C_8^1, C_8^2, C_8^3 pînă la C_8^7. Găsim rezultatele:

$$C_8^1 = C_8^7 = 8 \qquad C_8^3 = C_8^5 = 56$$
$$C_8^2 = C_8^6 = 28 \qquad C_8^4 = 70.$$

Două combinări cum sînt C_8^1 și C_8^7, C_8^2 și C_8^6, C_8^3 și C_8^5, C_{18}^{10} și C_{18}^{8} și în general C_n^k și C_n^{n-k}, care se bucură de proprietatea că au același indice *inferior*, iar *suma indicilor superiori este egală cu indicele inferior*, se numesc *combinări complementare.*

Atunci, din calculele făcute mai sus, am constatat: *combinările complementare sînt egale între ele.*

Să demonstrăm atunci *egalitatea combinărilor complementare*, dată prin formula generală:

$$C_n^k = C_n^{n-k}. \qquad (\mathrm{IV}_1)$$

Presupunem că am făcut toate combinările celor n obiecte luate cîte k.

Fiecărei combinări care conține k obiecte putem face să-i corespundă o altă combinare, și numai una singură, de cîte $(n-k)$ obiecte și anume aceea care cuprinde obiectele care nu figurează în prima.

Aceste combinări se corespund una cîte una, deci putem forma atîtea grupe de k obiecte, cîte grupe de $n-k)$ obiecte există.

Rezultă că numărul combinărilor de n obiecte luate cîte k este egal cu numărul combinărilor de n obiecte luate cîte (n — k), adică:

$$C_n^k = C_n^{n-k}.$$

Deoarece pentru $k = n$, formula (IV_1) dă: $C_n^0 = C_n^n = 1$, iar formula (III_2) ne dă: $C_n^n = \frac{n!}{n! \cdot 0!} = 1$, convenim să luăm

$$0! = 1$$

21. O altă formulă remarcabilă la combinări este dată prin proprietatea următoare:

Numărul combinărilor de n obiecte luate cîte k este egal cu numărul combinărilor de (n — 1) obiecte luate cîte k, adunat cu numărul combinărilor de (n — 1) obiecte luate cîte (k — 1), adică avem

$$C_n^k = C_{n-1}^k + C_{n-1}^{k-1}. \qquad (\mathrm{IV}_2)$$

Această formulă se numește *formula de descompunere a combinărilor*; într-adevăr cu ajutorul ei descompunem C_n^k în alte combinări.

Observăm că formula se poate memoriza ușor, dacă reținem următoarele:

1) întîi micșorăm indicele de jos,
2) apoi micșorăm și indicele de sus.

22. Demonstrarea formulei (IV_2) **referitoare la proprietatea de descompunere a combinărilor.**

Fie

$$a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{n-1}, a_n \text{ cele } n \text{ obiecte.}$$

Presupunem că am format toate *combinările celor n obiecte luate cîte k* și că le-am așezat într-un dreptunghi, separîndu-le în două părți; în prima parte punem combinările care nu conțin pe a_n, și în partea a doua combinările care conțin pe a_n, iar din toate aceste combinări scoatem obiectul a_n.

Vom avea schema următoare:

$$C_n^k$$

Grupe care *nu* conțin pe a_n în număr de C_{n-1}^k	Grupe care conțin pe a_n, dar îl *scoatem* din toate grupele în număr de C_{n-1}^{k-1}

Combinările care nu conțin pe a_n sînt în acest caz grupe formate din *numai* $(n-1)$ obiecte, luate cîte k, deci numărul lor este C_{n-1}^k.

Combinările care conțin pe a_n, dar din care scoatem acest obiect din toate grupele, vor fi atunci grupe formate din *numai* $(n-1)$ obiecte, dar luate *numai cîte* $(k-1)$, întrucît din fiecare grupă de k obiecte am scos un obiect. Numărul acestor grupe va fi atunci C_{n-1}^{k-1}.

Întrucît numărul total al grupelor este C_n^k, avem

$$C_n^k = C_{n-1}^k + C_{n-1}^{k-1}.$$

Aplicație. Să reluăm formula de descompunere a combinărilor

$$C_n^k = C_{n-1}^k + C_{n-1}^{k-1}. \qquad (\mathrm{IV}_2)$$

Să aplicăm din nou aceeași formulă de descompunere de mai multe ori la rînd, însă numai primei combinări.

Vom găsi succesiv repetînd relația de mai sus

$$C_n^k = C_{n-1}^k + C_{n-1}^{k-1}$$
$$C_{n-1}^k = C_{n-2}^k + C_{n-2}^{k-1}$$
$$C_{n-2}^k = C_{n-3}^k + C_{n-3}^{k-1}$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$C_{k+2}^k = C_{k+1}^k + C_{k+1}^{k-1}$$
$$C_{k+1}^k = C_k^k + C_k^{k-1}.$$

Adunînd toate aceste egalități membru cu membru și observînd că o parte din termeni se reduc, găsim

$$C_n^k = C_k^k + C_{n-1}^{k-1} + C_{n-2}^{k-1} + C_{n-3}^{k-1} + \dots + C_{k+1}^{k-1} + C_k^{k-1};$$

primul termen $C_k^k = C_{k-1}^{k-1} = 1$ îl trecem la urmă și vom avea

$$\boxed{C_n^k = C_{n-1}^{k-1} + C_{n-2}^{k-1} + C_{n-3}^{k-1} + \dots + C_{k+1}^{k-1} + C_k^{k-1} + C_{k-1}^{k-1}} \quad \text{(V)}$$

Aceasta reprezintă o altă *formulă de descompunere* a lui C_n^k într-o sumă de combinări.

Această formulă se poate pune și sub altă formă; notînd

$$k - 1 = r,\ n - 1 = m$$
$$k = r + 1,\ n = m + 1,$$

formula devine

$$\boxed{C_{m+1}^{r+1} = C_m^r + C_{m-1}^r + C_{m-2}^r + \dots + C_{r+1}^r + C_r^r} \quad \text{(V')}$$

Dacă în formula (V) dăm valori particulare pentru n și k, găsim diferite relații.

Spre exemplu, pentru $n = 10$ și $k = 6$ vom avea

$$C_{10}^6 = C_9^5 + C_8^5 + C_7^5 + C_6^5 + C_5^5.$$

Pentru $n = 12$ și $k = 5$ vom găsi

$$C_{12}^5 = C_{11}^4 + C_{10}^4 + C_9^4 + C_8^4 + C_7^4 + C_6^4 + C_5^4 + C_4^4.$$

Asupra formulei (V) vom mai reveni, cînd vom arăta și semnificația ei.

REZUMAT

1) **Aranjamente** (grupări care diferă sau prin natura obiectelor sau prin ordinea acestora):

$$\boxed{A_n^k = n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1)} \quad \text{(I)}$$

Avem un produs de k numere naturale consecutive descrescătoare, începînd cu n.

2) **Permutări** (grupări care diferă numai prin ordinea obiectelor):

$$\boxed{P_n = n! = 1\cdot 2\cdot 3\dots(n-1)n} \quad \text{(II)}$$

Avem un produs de n numere naturale consecutive crescătoare, începînd cu 1 (produsul primelor n numere naturale).

3) **Exprimarea unui factorial oarecare printr-un factorial mai mic sau mai mare.**

$$\boxed{n! = (n-1)!\,n = (n-2)!\,(n-1)n} \quad \text{(II}_1\text{)}$$

$$\boxed{n! = \frac{(n+1)!}{n+1} = \frac{(n+2)!}{(n+1)(n+2)}} \quad \text{(II}_2\text{)}$$

4) **Combinări** (grupări care diferă numai prin natura obiectelor).

Prima formulă, cu ajutorul *aranjamentelor și permutărilor*:

$$\boxed{C_n^k = \frac{A_n^k}{P_k} = \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1)}{1\cdot 2\cdot 3\dots k}} \quad \text{(III}_1\text{)}$$

Formula a doua, cu ajutorul *factorialelor*:

$$\boxed{C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{\text{factorialul indicelui mare}}{\text{(fact. ind. mic) (fact. diferenței)}}} \quad \text{(III}_2\text{)}$$

5) **Alte formule importante cu privire la combinări**

a. *Egalitatea combinărilor complementare:*

$$\boxed{C_n^k = C_n^{n-k}} \qquad (IV_1)$$

b. *Proprietatea de descompunere a combinărilor:*

$$\boxed{C_n^k = C_{n-1}^k + C_{n-1}^{k-1}} \qquad (IV_2)$$

EXERCIȚII REZOLVATE

1) Din 10 pionieri trebuie aleși 3 ca să meargă într-o excursie.

În cîte feluri diferite se poate face alegerea?

Numărul căutat este numărul combinărilor din 10 elemente, luate cîte 3, adică

$$C_{10}^3 = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 120.$$

2) În cîte feluri diferite putem scoate 9 numere dintr-un săculeț, cuprinzînd numerele de la 1 la 90?

Numărul căutat reprezintă numărul combinărilor de 90 luate cîte 9, adică

$$C_{90}^9 = \frac{A_{90}^9}{P_9} = \frac{90 \cdot 89 \cdot 88 \ldots 82}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots 9} = 706\ 252\ 528\ 630$$

3) $C_{11}^4 = \dfrac{A_{11}^4}{P_4} = \dfrac{11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = 330.$

În cazul cînd la C_n^k, indicele superior k este mai mare decît jumătate din indicele inferior n, folosim formula combinărilor complementare:

$$\boxed{C_n^k = C_n^{n-k}} \qquad (IV_1)$$

4) $C_{12}^7 = C_{12}^5 = \dfrac{A_{12}^5}{P_5} = \dfrac{12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} = 792.$

5) $C_{40}^{38} = C_{40}^2 = \dfrac{40 \cdot 39}{1 \cdot 2} = 780.$

6) $C_{4x+9}^{4(x+1)} = C_{4x+9}^{4x+9-4(x+1)} = C_{4x+9}^5.$

7) Să se demonstreze formula (I'_2):

a) prin calcul direct, folosind formula (III_1),

b) cu ajutorul factorialelor, folosind formula (III_2).

8) Să se verifice că $C_{15}^9 = C_{14}^9 + C_{14}^8$; $C_{35}^{10} = C_{34}^{10} + C_{34}^9$.

EXERCIȚII ȘI PROBLEME PROPUSE

Analiza combinatorie

1. Cîte numere formate din 5 cifre diferite se pot scrie cu ajutorul cifrelor 1,2,3,4,5,6,7,8,9 (fără a se repeta)?

2. Cîte numere diferite cu cîte 5 cifre se pot scrie cu ajutorul cifrelor 0, 1, 3, 5, 7?

3. În cîte feluri se poate face garda cu 3 soldați și un ofițer, dacă sînt 80 de soldați și 3 ofițeri?

4. Cîte cazuri se pot distinge la alegerea a 2 creioane și 3 tocuri, din 5 creioane diferite și 5 tocuri diferite?

5. La 9 sonde trebuie repartizați 3 ingineri, fiecăruia repartizîndu-i-se cîte 3 sonde.

În cîte moduri se poate face repartiția?

6. Să se calculeze

a) C_{n+1}^{k+1}; *b)* C_{n-k}^{k+1}.

7. Să se calculeze

a) $\dfrac{A_n^5 + A_n^4}{A_n^3}$; *b)* $\dfrac{A_{n+k}^{k+2} + A_{n+k}^{k+1}}{A_{n+k}^k}$.

8. Să se verifice egalitățile

a) $C_{n+1}^4 - C_n^3 = C_n^4$;

b) $C_n^2 + C_n^3 + C_{n+1}^4 + C_{n+2}^5 + C_{n+3}^6 + C_{n+4}^7 = C_{n+5}^7$.

9. Să se simplifice expresiile

a) $\dfrac{P_{2n+1}}{A_{2n-1}^{k-1} \cdot P_{2n-k}}$; *b)* $\dfrac{A_{n-1}^{k-1} \cdot P_{n-k}}{10P_{n-1}}$.

10. În cîte feluri se pot instala patru călători într-o cabină de vapor de 4 locuri?

11. Un tren de persoane are 10 vagoane. În cîte feluri pot fi așezate vagoanele pentru formarea trenului?

12. În cîte feluri se pot așeza 6 persoane pe o bancă?

13. Întîlnindu-se 12 persoane, și-au dat mîna. Cîte strîngeri de mînă au avut loc?

14. Într-o clasă cu 30 de elevi, toți elevii au dorit să facă schimb de fotografii.

De cîte fotografii a fost nevoie?

15. În cîte feluri se poate forma o brigadă de 5 oameni, dintr-un grup de 12 oameni?

16. În cîte feluri diferite se poate alege, din 15 persoane, o delegație formată din 3 persoane?

17. Dintr-o brigadă formată din 13 persoane, dintre care 5 bărbați și 8 femei, pot pleca într-o excursie 8 persoane, și anume 3 bărbați și 5 femei.

În cîte moduri se poate pleca în excursie?

18. 12 elevi închiriază 3 bărci: una cu 3 locuri, a doua cu 4 locuri, a treia cu 5 locuri.

În cîte moduri pot să se așeze ei în cele 3 bărci?

19. Într-o cutie am 10 cartoane albe și 6 cartoane galbene. Se scot cîte 6 cartoane din cutie.

În cîte feluri se pot scoate aceste cartoane, astfel ca să am cel puțin două galbene?

20. Să se găsească numărul permutărilor ce se pot face cu cifrele 1, 2, 3, 4, 5, 6 astfel ca suma cifrelor egal depărtate de extreme să fie aceeași.

21. Între permutările făcute cu cifrele 1, 2, 3, 4, 5, cîte nu încep cu cifra 5? cu numărul 12? cu numărul 123?

22. Între combinările făcute din 10 litere a, b, c... luate cîte 4, cîte sînt care nu cuprind litera a? literele a și b?

23. Între aranjamentele din 12 litere a, b, c... luate cîte 5, cîte sînt care nu conțin litera a? literele a și b?

24. Între combinările de n litere luate cîte k, cîte sînt care conțin p litere date?

25. Între aranjamentele de n litere luate cîte k, cîte sînt acelea care conțin p litere date?

26. La un examen sînt 12 candidați.

a) În cîte feluri se pot așeza în fața comisiei, dacă sînt ascultați toți în aceeași serie?

b) Dar în cazul că sînt ascultați în grupe de cîte 4?

c) Dar în cazul că fiind ascultați în grupe de cîte 4, li se cere ca în fața comisiei să se așeze în ordine alfabetică?

27. În aranjamentele de n litere luate cîte k:

a) Cîte încep cu o literă dată?

b) Cîte conțin o literă dată?

c) Cîte încep cu 2 litere date?

d) Cîte conțin 2 litere date?

e) Cîte încep cu p litere date?

f) Cîte conțin p litere date?

28. În cîte moduri se pot așeza n persoane în jurul unei mese circulare?

29. Să se rezolve ecuațiile

$$a)\ C_x^3 = \frac{5x(x-3)}{4}; \qquad b)\ C_x^3 + C_x^2 = 15(x-1).$$

30. Să se rezolve ecuațiile

$$a)\ \frac{A_x^7 - A_x^5}{A_x^5} = 89; \qquad b)\ C_{x+1}^5 = \frac{3A_x^3}{8}.$$

31. Să se rezolve ecuația $30\, C_{x-3}^{x-9} = 19\, A_{x-4}^4$.

32. Să se rezolve ecuațiile

$$a)\ C_{4x+9}^{4(x+1)} = 5\, A_{4x+7}^3; \qquad b)\ C_{x+8}^{x+3} = 5\, A_{x+6}^3.$$

33. Cîte fracții supraunitare diferite se pot forma avînd ca termeni două din numerele: 3, 5, 7, 11, 13, 17?

34. Cîte produse diferite, multiple de 10, se pot forma din numerele 7, 2, 11, 9, 5, 3?

35. Să se rezolve sistemele de ecuații

$$a)\ \begin{cases} A_x^y : A_x^{y-1} = 10 \\ C_x^y : C_x^{y+1} = \dfrac{5}{3}; \end{cases} \qquad b)\ \begin{cases} C_x^{y+1} = 2{,}5x. \\ C_{x-1}^y = 10. \end{cases}$$

36. Știind că numărul aranjamentelor a n obiecte luate cîte 6 este egal cu de 12 ori numărul aranjamentelor acelorași obiecte luate cîte 4, să se găsească n.

37. Știind că numărul aranjamentelor a n obiecte luate cîte k este egal cu de p ori numărul aranjamentelor acelorași obiecte luate cîte $k-2$, să se găsească n.

Cum trebuie să fie p, pentru ca problema să fie posibilă și în acest caz cîte soluții avem?

38. Să se deducă egalitățile

$$a)\ C_n^k = C_{n-2}^k + 2C_{n-2}^{k-1} + C_{n-2}^{k-2};$$

$$b)\ C_n^k = C_{n-3}^k + 3C_{n-3}^{k-1} + 3C_{n-3}^{k-2} + C_{n-3}^{k-3}.$$

39. Care este numărul maxim de plane care trec prin p puncte oarecare din spațiu, știind că numai n dintre aceste puncte sînt situate în același plan?

40. Într-o sală de spectacol sînt n scaune numerotate în continuare și $n-1$ spectatori. În cîte moduri deosebite se pot distribui spectatorii pe cele n locuri?

41. Dintr-un comitet de 11 persoane format din 7 bărbați și 4 femei trebuie să se alcătuiască un subcomitet de 5 persoane care să conțină: *a)* două femei, *b)* cel puțin două femei. În cîte moduri distincte se poate realiza acest fapt?

BINOMUL LUI NEWTON

PRODUSUL UNOR BINOAME CARE DIFERĂ NUMAI PRIN TERMENII LIBERI

1. Să se calculeze produsul $(x + a_1)(x + a_2)$ a două binoame de gradul I.

Notînd produsul cu $P_2(x)$, putem scrie

$$P_2(x) = x^2 + (a_1 + a_2)x + a_1a_2. \qquad (1)$$

Polinomul $P_2(x)$ este un polinom de gradul II, ordonat după puterile descrescătoare ale lui x.

Relația (1) poate constitui o formulă pentru înmulțirea a două binoame de gradul I.

De exemplu, putem scrie

a) $(x+5)(x+3)=x^2+(5+3)x+5\cdot3=x^2+8x+15.$
b) $(x+7)(x+4)=x^2+(7+4)x+7\cdot4=x^2+11x+28.$
c) $(x+6)(x-5)=x^2+(6-5)x+6(-5)=x^2+x-30.$
d) $(x-8)(x-4)=x^2+(-8-4)x+(-8)(-4)=x^2-12x+$ $+32$, și tot așa mai departe.

2. Să calculăm produsul $(x + a_1)(x + a_2)(x + a_3)$ a trei binoame de gradul I.

Notăm produsul cu $P_3(x)$, care va fi un polinom de gradul III în x.

Acest polinom îl putem calcula în două moduri.

În primul mod, pe o cale mai elementară, înmulțim mai întîi primele două binoame, pe urmă rezultatul găsit — care e dat în relația (1) — cu binomul al treilea.

Putem însă proceda și altfel.

Polinomul $P_3(x)$, de gradul III în x, îl putem nota provizoriu sub forma următoare

$$P_3(x) = x^3 + S_1x^2 + S_2x + S_3, \qquad (2)$$

unde am notat cu S_1 coeficientul lui x^2, cu S_2 coeficientul lui x și cu S_3 termenul liber.

Pentru a găsi termenul S_1x^2, luăm termenul x din doi factori și termenul liber din al treilea factor, așa că avem

$$S_1x^2 = a_1x^2 + a_2x^2 + a_3x^2 = (a_1 + a_2 + a_3)x^2,$$

deci

$$S_1 = a_1 + a_2 + a_3. \qquad (3)$$

Pentru a găsi termenul S_2x, trebuie să luăm pentru înmulțire termenul x dintr-un singur factor și termenul liber din doi factori, așa că avem

$$S_2x = a_1a_2x + a_1a_3x + a_2a_3x = (a_1a_2 + a_1a_3 + a_2a_3)x,$$

deci

$$S_2 = a_1a_2 + a_1a_3 + a_2a_3. \qquad (4)$$

Pentru a găsi termenul S_3, observăm că S_3 reprezintă *chiar* produsul termenilor liberi, adică

$$S_3 = a_1a_2a_3.$$

Înlocuind expresiile lui S_1, S_2, S_3 în relația (2) avem

$$P_3(x)=(x+a_1)(x+a_2)(x+a_3)=x^3+(a_1+a_2+a_3)x^2+ +(a_1a_2+a_1a_3+a_2a_3)x+a_1a_2a_3. \qquad (5)$$

Relația (5) poate constitui o formulă pentru înmulțirea a trei binoame de gradul I.

De exemplu, putem scrie

$$(x + 2)(x + 3)(x + 5) = x^3 + (2 + 3 + 5)x^2 + + (3\cdot2 + 2\cdot5 + 3\cdot5)x + 2\cdot3\cdot5 = x^3 + 10x^2 + 31x + 30.$$

3. Să considerăm acum cazul general al unui produs de n binoame de gradul I. Luăm deci

$$P_n(x) = (x+a_1)(x+a_2)(x+a_3)\dots(x+a_{n-1})(x+a_n). \quad (6)$$

Produsul $P_n(x)$ va fi un polinom de gradul n în x, care se poate scrie în modul următor

$$P_n(x) = x^n + S_1x^{n-1} + S_2x^{n-2} + S_3x^{n-3} + \dots$$
$$\dots + S_kx^{n-k} + \dots + S_{n-1}x + S_n. \quad (7)$$

Raționînd analog ca în exemplele precedente, vom găsi

$$S_1 = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_k + \dots + a_{n-1} + a_n. \quad (8)$$

Termenii din S_1 reprezintă *chiar* combinările celor n elemente $a_1, a_2, a_3, \dots, a_k, \dots, a_{n-1}, a_n$, luate cîte 1. Numărul termenilor este C_n^1.

$$S_2 = a_1a_2 + a_1a_3 + \dots + a_1a_n + \dots + a_{n-1}a_n. \quad (9)$$

S_2 reprezintă suma produselor celor n elemente, luate cîte două, aceste produse reprezintă combinările celor n elemente luate cîte două şi numărul termenilor este C_n^2.

Pentru coeficientul următor vom găsi

$$S_3 = a_1a_2a_3 + a_1a_2a_4 + \dots + a_{n-2}a_{n-1}a_n \quad (10)$$

de unde se vede la fel că S_3 reprezintă suma produselor celor n elemente luate cîte trei; aceste produse reprezintă combinările celor n elemente luate cîte trei, şi numărul termenilor este C_n^3.

Termenul S_kx^{n-k} din relația (7) reprezintă *termenul general* de gradul $n-k$ şi el se obține înmulțind termenii x din $n-k$ binoame cu termenii liberi din cele k binoame rămase.

Atunci S_k va reprezenta suma produselor celor n elemente luate cîte k; aceste produse reprezintă deci combinările celor n elemente luate cîte k şi numărul termenilor este C_n^k.

În fine S_n, care este termenul liber sau termenul independent de x, se va obține făcînd produsul termenilor liberi din cele n binoame, adică

$$S_n = a_1a_2a_3\dots a_n. \quad (11)$$

Se vede că S_n are un singur termen; considerînd numărul termenilor egal cu C_n^n avem *chiar* $C_n^n = 1$.

Să rezumăm cele obținute pentru $P_n(x)$. Am găsit

$$\boxed{\begin{aligned} &P_n(x) = (x+a_1)(x+a_2)(x+a_3)\dots(x+a_k)\dots \\ &\dots(x+a_{n-1})(x+a_n) = x^n + S_1x^{n-1} + S_2x^{n-2} + S_3x^{n-3} + \dots \\ &\dots + S_kx^{n-k} + \dots + S_{n-1}x + S_n \end{aligned}} \quad (12)$$

unde

$$\begin{array}{ll} S_1 = a_1 + a_2 + \dots + a_n & \text{are } C_n^1 \text{ termeni} \\ S_2 = a_1a_2 + \dots & \text{are } C_n^2 \text{ termeni} \\ S_3 = a_1a_2a_3 + \dots & \text{are } C_n^3 \text{ termeni} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots & \\ S_k = a_1a_2\dots a_k + \dots & \text{are } C_n^k \text{ termeni} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots & \\ S_n = a_1a_2a_3\dots a_n & \text{are } C_n^n \text{ termeni.} \end{array} \quad (13)$$

BINOMUL LUI NEWTON

4. În produsul $P_n(x)$ să facem acum ipoteza că toți termenii liberi devin egali între ei, adică

$$a_1 = a_2 = a_3 = \dots = a_k = \dots = a_{n-1} = a_n = a. \quad (14)$$

În acest caz, partea stîngă din relația (12) devine

$$P_n(x) = \underbrace{(x+a)(x+a)(x+a)\dots(x+a)\dots(x+a)}_{\text{de } n \text{ ori}} = (x+a)^n. \quad (15)$$

Ca să găsim ce devine partea dreaptă, aflăm mai întîi ce devin coeficienții $S_1, S_2, S_3, \dots, S_k, \dots, S_n$.

Pentru aceasta vom urmări egalitățile din relația (13)

$$S_1 = a + a + \dots + a \text{ de } C_n^1 \text{ ori, deci } S_1 = C_n^1a \quad (16)$$
$$S_2 = a^2 + a^2 + \dots + a^2 \text{ de } C_n^2 \text{ ori, deci } S_2 = C_n^2a^2 \quad (17)$$
$$S_3 = a^3 + a^3 + \dots + a^3 \text{ de } C_n^3 \text{ ori, deci } S_3 = C_n^3a^3 \quad (18)$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$S_k = a^k + a^k + \dots + a^k \text{ de } C_n^k \text{ ori, deci } S_k = C_n^ka^k \quad (19)$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$S_n = a^n \quad \text{de } C_n^n \text{ ori, deci } S_n = C_n^na^n. \quad (20)$$

Atunci partea dreaptă din relația (12) devine

$$P_n(x) = x^n + C_n^1 a x^{n-1} + C_n^2 a^2 x^{n-2} + C_n^3 a^3 x^{n-3} + \dots$$
$$\dots + C_n^k a^k x^{n-k} + \dots + C_n^{n-1} a^{n-1} x + C_n^n a^n. \qquad (21)$$

Reunind rezultatele pentru partea stîngă din relația (15) și partea dreaptă din relația (21), găsim formula

$$\boxed{\begin{aligned}(x+a)^n = x^n + C_n^1 a x^{n-1} + C_n^2 a^2 x^{n-2} + C_n^3 a^3 x^{n-3} + \dots \\ \dots + C_n^k a^k x^{n-k} + \dots + C_n^{n-1} a^{n-1} x + C_n^n a^n\end{aligned}} \qquad (22)$$

Dacă în această dezvoltare înlocuim combinările cu valorile lor, avem

$$(x+a)^n = x^n + \frac{n}{1} a x^{n-1} + \frac{n(n-1)}{1\cdot 2} a^2 x^{n-2} +$$
$$+ \frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3} a^3 x^{n-3} + \dots + \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1)}{1\cdot 2\cdot 3\dots k} a^k x^{n-k} +$$
$$+ \dots + a^n. \qquad (23)$$

Această formulă se numește *formula binomului lui Newton* sau pe scurt *binomul lui Newton*.

Putem deci spune că prin *binomul lui Newton* înțelegem acea formulă cu ajutorul căreia putem dezvolta o putere întreagă oarecare a unui binom.

Dacă în dezvoltarea binomului lui Newton, dată în (22), schimbăm binomul $(x + a)$ cu forma $(a + b)$, avem

$$(a+b)^n = a^n + C_n^1 a^{n-1} b + C_n^2 a^{n-2} b^2 + C_n^3 a^{n-3} b^3 + \dots$$
$$\dots + C_n^k a^{n-k} b^k + \dots + C_n^n b^n. \qquad (24)$$

În această formulă, dacă punem $-b$ în locul lui b, obținem

$$(a-b)^n = a^n + C_n^1 a^{n-1}(-b) + C_n^2 a^{n-2}(-b)^2 + C_n^3 a^{n-3}(-b)^3 +$$
$$\dots + C_n^k a^{n-k}(-b)^k + \dots + C_n^n(-b)^n.$$

Făcînd toate calculele, găsim dezvoltarea lui $(a-b)^n$

$$(a-b)^n = a^n - C_n^1 a^{n-1} b + C_n^2 a^{n-2} b^2 - C_n^3 a^{n-3} b^3 + \dots$$
$$\dots + (-1)^k C_n^k a^{n-k} b^k + \dots + (-1)^n C_n^n b^n. \qquad (25)$$

Să scriem expresiile lui $(a + b)^n$ și $(a - b)^n$, pentru cîteva valori ale lui n.

Pentru $n = 2$ și $n = 3$ avem

$$\boxed{\begin{aligned}(a+b)^2 &= a^2 + 2ab + b^2 \\ (a-b)^2 &= a^2 - 2ab + b^2\end{aligned}} \qquad (26)$$

$$\boxed{\begin{aligned}(a+b)^3 &= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 \\ (a-b)^3 &= a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3\end{aligned}} \qquad (27)$$

Pentru $n = 6$ vom găsi

$$(a+b)^6 = a^6 + C_6^1 a^5 b + C_6^2 a^4 b^2 + C_6^3 a^3 b^3 + C_6^4 a^2 b^4 +$$
$$+ C_6^5 a b^5 + C_6^6 b^6.$$

Valorile coeficienților sînt

$C_6^1 = \frac{6}{1} = 6$; $C_6^2 = \frac{6\cdot 5}{1\cdot 2} = 15$; $C_6^3 = \frac{6\cdot 5\cdot 4}{1\cdot 2\cdot 3} = 20$

$C_6^4 = C_6^2 = 15$ (fiind combinări complementare)

$C_6^5 = C_6^1 = 6$ (fiind tot combinări complementare)

$C_6^6 = 1$.

Atunci vom avea

$$\boxed{(a+b)^6 = a^6 + 6a^5b + 15a^4b^2 + 20a^3b^3 + 15a^2b^4 + 6ab^5 + b^6} \quad (28)$$

Să se calculeze în mod analog $(a \pm b)^4$ și $(a \pm b)^5$.

APLICAȚII

I) Să se calculeze $(3x + 2y)^4$.

Avem

$$(3x+2y)^4 = (3x)^4 + 4(3x)^3\cdot(2y) + 6(3x)^2(2y)^2 +$$
$$+ 4(3x)(2y)^3 + (2y)^4 = 81x^4 + 4(27x^3)2y + 6(9x^2)(4y^2) +$$
$$+ 4(3x)(8y^3) + 16y^4 = 81x^4 + 216x^3y + 216x^2y^2 +$$
$$+ 96xy^3 + 16y^4.$$

II) Să se calculeze $(\sqrt{2x} - \sqrt{3y})^6$.

Avem

$$(\sqrt{2x} - \sqrt{3y})^6 = (\sqrt{2x})^6 - 6(\sqrt{2x})^5(\sqrt{3y}) + 15(\sqrt{2x})^4(\sqrt{3y})^2 - 20(\sqrt{2x})^3(\sqrt{3y})^3 + 15(\sqrt{2x})^2(\sqrt{3y})^4 - 6(\sqrt{2x})(\sqrt{3y})^5 + (\sqrt{3y})^6.$$

Efectuînd toate calculele, obținem

$$(\sqrt{2x} - \sqrt{3y})^6 = 8x^3 - 24x^2\sqrt{6xy} + 180x^2y - 120xy\sqrt{6xy} + 270xy^2 - 54y^2\sqrt{6xy} + 27y^3,$$

care se mai poate scrie și sub forma următoare

$$(\sqrt{2x} - \sqrt{3y})^6 = (8x^3 + 180x^2y + 270xy^2 + 27y^3) - (24x^2 + 120xy + 54y^2)\sqrt{6xy}.$$

III) Să se calculeze expresia

$$E = (\sqrt{x} + \sqrt{y})^5 + (\sqrt{x} - \sqrt{y})^5.$$

Vom calcula în prealabil expresia

$E_1 = (a + b)^5 + (a - b)^5$; avem

$$(a + b)^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5$$

$$(a - b)^5 = a^5 - 5a^4b + 10a^3b^2 - 10a^2b^3 + 5ab^4 - b^5$$

$$E_1 = (a + b)^5 + (a - b)^5 = 2(a^5 + 10a^3b^2 + 5ab^4) = 2a(a^4 + 10a^2b^2 + 5b^4).$$

Punînd acum $\sqrt{x}$ în locul lui a și $\sqrt{y}$ în locul lui b, vom găsi

$$E = 2\sqrt{x}[(\sqrt{x})^4 + 10(\sqrt{x})^2(\sqrt{y})^2 + 5(\sqrt{y})^4] = 2\sqrt{x}(x^2 + 10xy + 5y^2).$$

Deci putem scrie

$$E = (\sqrt{x} + \sqrt{y})^5 + (\sqrt{x} - \sqrt{y})^5 = 2(x^2 + 10xy + 5y^2)\sqrt{x}.$$

PROPRIETĂȚILE BINOMULUI LUI NEWTON

5. Scriem binomul lui Newton, luînd nu numai cîțiva termeni de la început și cîțiva termeni de la sfîrșit ci, pe lîngă termenul general și pe cel dinaintea lui, și pe cel care îi urmează

$$\boxed{\begin{aligned}(a + b)^n &= a^n + C_n^1a^{n-1}b + C_n^2a^{n-2}b^2 + C_n^3a^{n-3}b^3 + \dots \\ &\dots + C_n^{k-1}a^{n-k+1}b^{k-1} + C_n^ka^{n-k}b^k + C_n^{k+1}a^{n-k-1}b^{k+1} + \\ &+ \dots + C_n^{n-2}a^2b^{n-2} + C_n^{n-1}ab^{n-1} + C_n^nb^n\end{aligned}} \qquad (1)$$

Termenul $C_n^ka^{n-k}b^k$ din această dezvoltare se numește termenul de rangul „$k + 1$" și se notează cu T_{k+1}.

El se mai numește *termenul general* fiindcă dînd valori lui k de la 0 pînă la n, regăsim toți termenii dezvoltării.

Să trecem acum la arătarea proprietăților principale ale binomului lui Newton.

I. *(Referitor la numărul termenilor.)*

Numărul tuturor termenilor dezvoltării este egal cu exponentul puterii binomului plus 1, adică $n + 1$.

Într-adevăr, avem cîte un termen pentru fiecare putere a lui a, ceea ce face n termeni și în plus un termen, ultimul, b^n, care nu conține pe a.

În acest caz,

dacă n este cu *soț*, dezvoltarea are *un număr fără soț de termeni*;

dacă n este *fără soț*, dezvoltarea are *un număr cu soț de termeni*;

II. *(Referitor la exponenții lui a și b.)*

Exponenții lui a merg descrescînd cu cîte o unitate, exponenții lui b merg crescînd tot cu cîte o unitate, iar suma exponenților la fiecare termen este egală cu n (exponentul puterii binomului), astfel că dezvoltarea ne dă un polinom omogen de gradul n în a și b.

Coeficienții dezvoltării $C_n^1, C_n^2, \dots, C_n^k, \dots, C_n^n$ se numesc *coeficienți binomiali.*

III. Să luăm formula (1) și să examinăm coeficienții dezvoltării. Primul termen a^n are coeficientul 1.

Ultimul termen $C_n^nb^n$ are coeficientul $C_n^n = 1$, deci termenii extremi au coeficienții egali cu 1.

Al doilea termen de la început $C_n^1a^{n-1}b$ are coeficientul C_n^1, al doilea termen de la sfîrșit are coeficientul C_n^{n-1}, **dar $C_n^1 = C_n^{n-1}$ *fiind combinări complementare.***

La fel al treilea termen de la început $C_n^2 a^{n-2} b^2$ are coeficientul C_n^2, iar al treilea termen de la sfîrșit $C_n^{n-2} a^2 b^{n-2}$ are coeficientul egal cu C_n^{n-2}, dar $C_n^2 = C_n^{n-2}$ fiind de asemenea *combinări complementare*, și tot așa mai departe.

Deci putem conchide:

Coeficienții termenilor echidistanți de extremi sînt egali între ei, pe baza egalității combinărilor complementare.

6. *Coeficienții dezvoltării se pot deduce succesiv, unul din altul, după o lege foarte simplă.*

Luăm din dezvoltarea binomului $(a + b)^n$, după relația (1), termenul general $T_{k+1} = C_n^k a^{n-k} b^k$ și termenul următor $T_{k+2} = C_n^{k+1} a^{n-k-1} b^{k+1}$ și calculăm coeficienții acestor doi termeni, pe C_n^k și C_n^{k+1}.

Găsim

$$C_n^k = \frac{A_n^k}{P_k} = \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1)}{1\cdot 2\cdot 3\ldots k}$$

$$C_n^{k+1} = \frac{A_n^{k+1}}{P_{k+1}} = \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1)(n-k)}{1\cdot 2\cdot 3\ldots k(k+1)} =$$

$$= \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1)}{1\cdot 2\cdot 3\ldots k}\cdot\frac{n-k}{k+1} = C_n^k\cdot\frac{n-k}{k+1}.$$

Am găsit deci formula

$$\boxed{C_n^{k+1} = C_n^k\cdot\frac{n-k}{k+1}} \qquad (2)$$

Să interpretăm această formulă. Din ea putem deduce că, pentru a calcula pe C_n^{k+1} (coeficientul termenului T_{k+2}), luăm C_n^k (coeficientul termenului T_{k+1}, adică al termenului precedent) și-l înmulțim cu $n - k$, care este exponentul lui a din T_{k+1}, iar produsul îl împărțim cu $k + 1$, care este chiar rangul lui T_{k+1}.

Atunci, pe baza interpretării date formulei (2), putem da următoarea regulă pentru deducerea succesivă a coeficienților:

Coeficientul unui termen oarecare este egal cu coeficientul termenului precedent, înmulțit cu exponentul lui a din acel termen și împărțit cu rangul acelui termen.

Regula este foarte importantă, pentru că ea ne dă mijlocul de a dezvolta ușor o putere întreagă oarecare a unui binom, calculînd termenii unul după altul, nemaiavînd nevoie să calculăm coeficienții sub formă de combinări.

Cu ajutorul acestei reguli putem da și legea de trecere de la un termen la următorul, nu numai de la un coeficient la următorul.

Putem găsi ușor formula

$$\boxed{T_{k+2} = T_{k+1}\cdot\frac{n-k}{k+1}\cdot\frac{b}{a}} \qquad (3)$$

În sfîrșit, după ce am stabilit formula binomului lui Newton și am studiat proprietățile lui, putem da următoarea regulă:

Puterea a n-a a unui binom este o sumă de $n + 1$ termeni, în care fiecare termen este un produs de trei factori, și anume:

— *primul factor*, numit *coeficient binomial*, este o combinare avînd ca indice inferior exponentul n al puterii, iar ca indice superior rangul termenului micșorat cu o unitate;

— *al doilea factor* este primul termen al binomului la o putere egală cu diferența dintre indicele inferior și cel superior al coeficientului binomial;

— *al treilea factor* este termenul al doilea al binomului la o putere egală cu indicele superior al coeficientului binomial.

APLICAȚIE

Să se calculeze $(a + b)^9$.

Calculînd coeficienții, se va găsi

$$(a+b)^9 = a^9 + 9a^8b + 36a^7b^2 + 84a^6b^3 + 126a^5b^4 +$$
$$+ 126a^4b^5 + 84a^3b^6 + 36a^2b^7 + 9ab^8 + b^9,$$

unde $T_1 = a^9$; $T_2 = C_9^1 a^8 b = 9a^8b$;

$$T_3 = T_2\cdot\frac{9-1}{1+1}\,\frac{b}{a} = 9a^8b\,\frac{8}{2}\,\frac{b}{a} = 36a^7b^2;$$

$$T_4 = 36a^7b^2\cdot\frac{9-2}{2+1}\,\frac{b}{a} = 84a^6b^3;$$

$$T_5 = 84a^6b^3\cdot\frac{9-3}{3+1}\cdot\frac{b}{a} = 126a^5b^4 \text{ etc.}$$

7. Suma coeficienților binomului. Să reluăm dezvoltarea binomului $(a+b)^n$;

$$\boxed{\begin{aligned}(a+b)^n &= a^n + C_n^1 a^{n-1}b + C_n^2 a^{n-2}b^2 + \dots \\ &\dots + C_n^k a^{n-k}b^k + \dots + C_n^n b^n\end{aligned}} \qquad (4)$$

În această formulă să punem $a=1$, $b=1$, și obținem $2^n = 1 + C_n^1 + C_n^2 + C_n^3 + \dots + C_n^k + \dots + C_n^n$ de unde scoatem

$$\boxed{C_n^1 + C_n^2 + C_n^3 + \dots + C_n^n = 2^n - 1} \qquad (5)$$

Deci: *suma combinărilor a n obiecte luate cîte 1, cîte 2, cîte 3, ..., cîte n, este egală cu $2^n - 1$.*

De exemplu

$$C_7^1 + C_7^2 + C_7^3 + C_7^4 + C_7^5 + C_7^6 + C_7^7 = 2^7 - 1 = 128 - 1 = 127.$$

Dacă în formula (4) punem $a = +1$, $b = -1$, vom găsi

$$0 = 1 - C_n^1 + C_n^2 - C_n^3 + \dots + (-1)^k C_n^k + \dots + (-1)^n C_n^n$$

de unde scoatem

$$\boxed{C_n^1 + C_n^3 + C_n^5 + \dots = 1 + C_n^2 + C_n^4 + C_n^6 + \dots} \qquad (6)$$

Deci: *suma combinărilor ce se pot face din n obiecte luate în număr fără soț, este mai mare cu o unitate decît suma combinărilor acelorași obiecte luate în număr cu soț.*

Problemă. Să se verifice formulele (5) și (6) în cazul combinărilor de 8 obiecte.

8. În formula (6) avem o legătură între *suma combinărilor de n obiecte luate în număr fără soț și suma combinărilor acelorași obiecte luate în număr cu soț.*

Dar nu cunoaștem valoarea nici uneia din aceste sume. Pentru ca să putem afla aceste sume, notăm

$$\alpha = C_n^1 + C_n^3 + C_n^5 + \dots \qquad (7)$$

$$\beta = C_n^2 + C_n^4 + C_n^6 + \dots \qquad (8)$$

Relațiile (5) și (6) ne mai dau

$$\alpha + \beta = 2^n - 1 \qquad (5')$$

$$\alpha - \beta = 1. \qquad (6')$$

Din (5′) și (6′) scoatem

$$2\alpha = 2^n, \text{ de unde } \alpha = \frac{2^n}{2} = 2^{n-1}$$

$$2\beta = 2^n - 2, \text{ de unde } \beta = \frac{2^n - 2}{2} = 2^{n-1} - 1.$$

Atunci putem scrie

$$\alpha = C_n^1 + C_n^3 + C_n^5 + \dots = 2^{n-1} \qquad (9)$$

$$\beta = C_n^2 + C_n^4 + C_n^6 + \dots = 2^{n-1} - 1. \qquad (10)$$

9. Binomul lui Newton, scris sub altă formă. Să reluăm din nou binomul lui Newton, din relația (4)

$$(a+b)^n = a^n + C_n^1 a^{n-1}b + C_n^2 a^{n-2}b^2 + \dots + C_n^k a^{n-k}b^k + \dots$$
$$\dots + C_n^{n-1} ab^{n-1} + C_n^n b^n. \qquad (4)$$

Termenul de rangul $k+1$ din această dezvoltare

$$T_{k+1} = C_n^k a^{n-k} b^k \qquad (11)$$

am văzut că se numește *termenul general* al dezvoltării.

Atunci binomul lui Newton $(a+b)^n$ se mai poate scrie și sub următoarea formă restrînsă (formă de sumă)

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^{n-k} b^k, \qquad (12)$$

cu condiția $C_n^0 = 1$.

Această formă se mai poate scrie și astfel

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!\,(n-k)!} a^{n-k} b^k. \qquad (12')$$

Forma a doua (12′), a lui $(a+b)^n$, care s-ar putea numi și *forma factorială a binomului*, se mai poate pune și sub altă formă

$$(a+b)^n = \sum \frac{n!}{\alpha!\,\beta!} a^\alpha b^\beta, \qquad (12'')$$

cu condiția să avem $\alpha + \beta = n$.

SUMA PUTERILOR ASEMENEA ALE PRIMELOR NUMERE NATURALE

10. Ne propunem să găsim sumele următoare:

$S_1 = 1 + 2 + 3 + \ldots + n$, adică suma primelor n numere naturale;

$S_2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2$, adică *suma pătratelor* primelor n numere naturale;

$S_3 = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3$, adică *suma cuburilor* primelor n numere naturale;

$S_4 = 1^4 + 2^4 + 3^4 + \ldots + n^4$, adică *suma bipătratelor* primelor n numere naturale, şi, în general,

$S_k = 1^k + 2^k + 3^k + \ldots + n^k$, adică suma puterilor k ale primelor n numere naturale.

11. Pentru S_1 folosim formula care dă suma termenilor unei progresii aritmetice şi avem imediat

$$\boxed{S_1 = \frac{n(n+1)}{2}} \qquad \text{(I)}$$

Pentru S_2 vom folosi identitatea

$$(k+1)^3 = k^3 + 3k^2 + 3k + 1.$$

Vom pune în această identitate, în locul lui k, rînd pe rînd $1, 2, 3, \ldots, n-1, n$ şi vom găsi

$$2^3 = 1^3 + 3\cdot 1^2 + 3\cdot 1 + 1$$
$$3^3 = 2^3 + 3\cdot 2^2 + 3\cdot 2 + 1$$
$$4^3 = 3^3 + 3\cdot 3^2 + 3\cdot 3 + 1$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$n^3 = (n-1)^3 + 3(n-1)^2 + 3(n-1) + 1$$
$$(n+1)^3 = n^3 + 3n^2 + 3n + 1.$$

Adunînd aceste relaţii, găsim, după ce reducem termenii asemenea,

$$(n+1)^3 = 1 + 3(1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2) +$$
$$+ 3(1 + 2 + 3 + \ldots + n) + n\cdot 1$$
$$(n+1)^3 = 1 + 3S_2 + 3S_1 + n$$
$$3S_2 = (n+1)^3 - 3S_1 - (n+1).$$

Aceasta este o formulă de recurenţă care ne dă valoarea lui S_2 în funcţie de S_1.

Înlocuind mai sus pe $S_1 = \frac{n(n+1)}{2}$ şi efectuînd toate calculele, găsim

$$\boxed{S_2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}} \qquad \text{(II)}$$

12. Pentru a afla pe S_3, plecăm de la identitatea

$$(k+1)^4 = k^4 + 4k^3 + 6k^2 + 4k + 1.$$

Vom pune şi aici, în locul lui k, rînd pe rînd $1, 2, 3, 4, \ldots, n-1, n$ şi vom găsi

$$2^4 = 1^4 + 4\cdot 1^3 + 6\cdot 1^2 + 4\cdot 1 + 1$$
$$3^4 = 2^4 + 4\cdot 2^3 + 6\cdot 2^2 + 4\cdot 2 + 1$$
$$4^4 = 3^4 + 4\cdot 3^3 + 6\cdot 3^2 + 4\cdot 3 + 1$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$n^4 = (n-1)^4 + 4(n-1)^3 + 6(n-1)^2 + 4(n-1) + 1$$
$$(n+1)^4 = n^4 + 4n^3 + 6n^2 + 4n + 1.$$

Adunăm aceste relaţii şi, după ce reducem termenii asemenea, găsim

$$(n+1)^4 = 1 + 4S_3 + 6S_2 + 4S_1 + n$$
$$4S_3 = (n+1)^4 - 6S_2 - 4S_1 - (n+1).$$

Aceasta este o formulă de recurenţă, care ne dă valoarea lui S_3 în funcţie de S_1 şi S_2.

Înlocuind pe S_1 şi S_2 cu valorile lor, vom găsi după efectuarea tuturor calculelor

$$\boxed{S_3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}} \qquad \text{(III)}$$

Expresia lui S_3 se mai poate scrie

$$S_3 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2 \text{ dar } \frac{n(n+1)}{2} = S_1$$

deci mai avem

$$\boxed{S_3 = (S_1)^2} \qquad \text{(III')}$$

13. În general, pentru a afla pe S_k, adică

$$S_k = 1^k + 2^k + 3^k + \ldots + n^k,$$

vom pleca de la identitatea

$$1)\ (p+1)^{k+1} = p^{k+1} + C_{k+1}^1 p^k + C_{k+1}^2 p^{k-1} + C_{k+1}^3 p^{k-2} + \\ + \ldots + C_{k+1}^k p + C_{k+1}^{k+1}.$$

Vom pune în această identitate, în locul lui p, rînd pe rînd valorile $1, 2, 3, \ldots, n-1$, n și vom obține

$$2^{k+1} = 1 + C_{k+1}^1 \cdot 1^k + C_{k+1}^2 \cdot 1^{k-1} + C_{k+1}^3 \cdot 1^{k-2} + \ldots \\ \ldots + C_{k+1}^k \cdot 1 + C_{k+1}^{k+1}$$

$$3^{k+1} = 2^{k+1} + C_{k+1}^1 \cdot 2^k + C_{k+1}^2 \cdot 2^{k-1} + C_{k+1}^3 \cdot 2^{k-2} + \ldots \\ \ldots + C_{k+1}^k \cdot 2 + C_{k+1}^{k+1}$$

$$4^{k+1} = 3^{k+1} + C_{k+1}^1 \cdot 3^k + C_{k+1}^2 \cdot 3^{k-1} + C_{k+1}^3 \cdot 3^{k-2} + \ldots \\ \ldots + C_{k+1}^k \cdot 3 + C_{k+1}^{k+1}$$

. . . .

$$n^{k+1} = (n-1)^{k+1} + C_{k+1}^1 (n-1)^k + C_{k+1}^2 (n-1)^{k-1} + \\ + C_{k+1}^3 (n-1)^{k-2} + \ldots + C_{k+1}^k (n-1) + C_{k+1}^{k+1}$$

$$(n+1)^{k+1} = n^{k+1} + C_{k+1}^1 n^k + C_{k+1}^2 n^{k-1} + C_{k+1}^3 n^{k-2} + \ldots \\ \ldots + C_{k+1}^k n + C_{k+1}^{k+1}.$$

Adunînd aceste relații și făcînd reducerile termenilor asemenea, avem

$$(n+1)^{k+1} = 1 + C_{k+1}^1 \cdot S_k + C_{k+1}^2 \cdot S_{k-1} + C_{k+1}^3 \cdot S_{k-2} + \ldots \\ \ldots + C_{k+1}^k \cdot S_1 + n.$$

Aceasta este o formulă de recurență care ne dă valoarea lui S_k în funcție de toate sumele anterioare, adică de $S_1, S_2, S_3, \ldots, S_{k-1}$.

Pentru $k = 4$, de exemplu, vom găsi

$$(n+1)^5 = 1 + C_5^1 \cdot S_4 + C_5^2 \cdot S_3 + C_5^3 \cdot S_2 + C_5^4 \cdot S_1 + n,$$

care va fi formula de recurență pentru S_4.

Dacă înlocuim aici pe S_1, S_2 și S_3 cu valorile lor, se găsește

$$\boxed{S_4 = \frac{n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)}{30}} \qquad \text{(IV)}$$

REZUMAT ASUPRA BINOMULUI LUI NEWTON

I. Formula binomului lui Newton

$$\boxed{(a+b)^n = a^n + C_n^1 a^{n-1} b + C_n^2 a^{n-2} b^2 + C_n^3 a^{n-3} b^3 + \ldots + \\ + C_n^k a^{n-k} b^k + \ldots + C_n^{n-1} a b^{n-1} + C_n^n b^n} \qquad \text{(I)}$$

II. Dezvoltarea lui $(a-b)^n$ diferă de dezvoltarea precedentă prin aceea că termenii sînt alternativ + (plus) și — (minus).

III. Expresia termenului general

$$\boxed{T_{k+1} = C_n^k a^{n-k} b^k} \qquad \text{(II)}$$

IV. Formula binomului sub formă de sumă

$$\boxed{(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^{n-k} b^k} \qquad \text{(III}_1\text{)}$$

sau

$$\boxed{(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!\,(n-k)!} a^{n-k} b^k} \qquad \text{(III}_2\text{)}$$

sau încă

$$\boxed{(a+b)^n = \sum \frac{n!}{\alpha!\,\beta!} a^\alpha b^\beta} \qquad \text{(III}_3\text{)}$$

cu condiția să avem $\alpha + \beta = n$.

V. Formule de analiză combinatorie, demonstrate cu ajutorul binomului lui Newton

$$\boxed{C_n^1 + C_n^2 + C_n^3 + \ldots + C_n^n = 2^n - 1} \qquad (IV_1)$$

$$\boxed{C_n^1 + C_n^3 + C_n^5 + \ldots = 2^{n-1}} \qquad (IV_2)$$

$$\boxed{C_n^2 + C_n^4 + C_n^6 + \ldots = 2^{n-1} - 1} \qquad (IV_3)$$

VI. Formule pentru sumele puterilor asemenea ale primelor n numere naturale

$$\boxed{S_1 = 1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}} \qquad (V_1)$$

$$\boxed{S_2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}} \qquad (V_2)$$

$$\boxed{S_3 = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4} = (S_1)^2} \qquad (V_3)$$

APLICAŢII LA BINOMUL LUI NEWTON
PROBLEME REZOLVATE

1. Probleme în care se cere mai întîi *aflarea rangului k.*
E x e m p l u: Să se găsească *rangul termenului* din dezvoltarea $\left(\frac{3}{2}\sqrt[3]{a^2} + \frac{2}{3}\sqrt{a}\right)^{12}$, care conţine pe a^7.

Probleme de felul acesta ne conduc la *ecuaţii exponenţiale.*
Scriem termenul general al dezvoltării

$T_{k+1} = C_{12}^k \left(\frac{3}{2}\sqrt[3]{a^2}\right)^{12-k}\left(\frac{2}{3}\sqrt{a}\right)^k$; trebuie să ne dea a^7.

La început neglijăm toţi coeficienţii, păstrînd numai factorii în a, astfel că vom avea *ecuaţia exponenţială* $(\sqrt[3]{a^2})^{12-k}(\sqrt{a})^k = a^7$, care rezolvată ne dă $k = 6$.

Verificare:

$$T_7 = C_{12}^6\left(\frac{3}{2}\sqrt[3]{a^2}\right)^6\left(\frac{2}{3}\sqrt{a}\right)^6 = C_{12}^6 \frac{3^6}{2^6}\sqrt[3]{a^{12}} \cdot \frac{2^6}{3^6}\sqrt{a^6} =$$
$$= C_{12}^6 a^4 \cdot a^3 = C_{12}^6 a^7.$$

2. Probleme în care se cere întîi *aflarea exponentului n.*
E x e m p l u: Să se găsească termenul al 13-lea al dezvoltării binomului $\left(9x - \frac{1}{\sqrt{3x}}\right)^n$, *cunoscînd coeficientul binomial al termenului al 3-lea al dezvoltării, egal cu 105.*
Coeficientul termenului al treilea este C_n^2, deci scriem

$$C_n^2 = 105$$
$$\frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} = 105,$$

care rezolvată ne dă: $n_1 = 15$; $n_2 = -14$.
E acceptabilă numai rădăcina pozitivă, deci luăm $n = 15$.

Atunci binomul este $\left(9x - \frac{1}{\sqrt{3x}}\right)^{15}$ şi, întrucît se cere termenul al 13-lea, avem $T_{k+1} = T_{13}$, deci $k + 1 = 13$ sau $k = 12$.

Vom avea atunci

$$T_{13} = (-1)^{12} \cdot C_{15}^{12}(9x)^3\left(\frac{1}{\sqrt{3x}}\right)^{12} = C_{15}^3 \cdot 729x^3 \cdot \frac{1}{\sqrt{3^{12}x^{12}}} =$$
$$= \frac{15 \cdot 14 \cdot 13}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot 729\,x^3 \cdot \frac{1}{3^6 x^6} = 5 \cdot 7 \cdot 13 \cdot \frac{729}{729} \cdot \frac{1}{x^3} = \frac{455}{x^3}.$$

3. Probleme în care se cere *aflarea unor necunoscute care figurează fie în corpul binomului, fie în exponent.*
E x e m p l u: *Să se determine valoarea lui x din expresia* $\left(\frac{\sqrt[5]{a^4}}{\sqrt[x]{a^{x-1}}} + a\sqrt[x+1]{a^{x-1}}\right)^8$ *aşa încît termenul al 4-lea să fie egal cu* $56a^{5,5}$.

Vom scrie termenul al 4-lea al dezvoltării $T_{k+1} = T_4$, deci $k = 3$.

$$T_4 = C_8^3\left(\frac{\sqrt[5]{a^4}}{\sqrt[x]{a^{x-1}}}\right)^5\cdot\left(a\cdot\sqrt[x+1]{a^{x-1}}\right)^3 = 56a^{5,5}.$$

Rezultă o ecuație exponențială, care rezolvată ne dă $x_1 = 2$; $x_2 = -5$.

Verificăm rădăcina $x = 2$.

Binomul este $E = \left(\frac{\sqrt[5]{a^4}}{\sqrt{a}} + a\sqrt[3]{a}\right)^8$, care se mai poate scrie

$$E = \left(\sqrt[10]{\frac{a^8}{a^5}} + \sqrt[3]{a^3\cdot a}\right)^8 = \left(\sqrt[10]{a^3} + \sqrt[3]{a^4}\right)^8.$$

Calculăm termenul al 4-lea

$$T_4 = C_8^3\left(\sqrt[10]{a^3}\right)^5\left(\sqrt[3]{a^4}\right)^3 = \frac{8\cdot7\cdot6}{1\cdot2\cdot3}\sqrt[10]{a^{15}}\cdot a^4 = 56a^{\frac{15}{10}}\cdot a^4 =$$

$$= 56a^{\frac{3}{2}}\,a^4 = 56a^{\frac{11}{2}} = 56a^{5,5}.$$

4. Probleme cu *sume sau produse de binoame.*

Exemplu: Se dă polinomul

$$P(x) = x(2-3x)^5 + x^3(1+2x^2)^7 - x^4(3+2x^3)^9.$$

Să se determine coeficientul lui x^5 din acest polinom, după efectuarea tuturor operațiilor indicate.

Din $x(2-3x)^5$ va trebui să calculăm termenul în x^4 al dezvoltării $(2-3x)^5$, pe care să-l notăm cu a. Din $(1+2x^2)^7$ trebuie să calculăm termenul care conține x^2, fie el b. Din $(2x^3+3)^3$ trebuie să calculăm termenul care conține pe x, fie el c.

$a = (-1)^4 C_5^4(2)^1(3x)^4 = C_5^1\cdot2\cdot81x^4 = 5\cdot2\cdot81\,x^4 = 810x^4$

$b = C_7^1\cdot2x^2 = 7\cdot2x^2 = 14x^2$

$c = 0.$

Deci coeficientul lui x^5 din polinomul $P(x)$ va fi 824.

EXERCIȚII ȘI PROBLEME PROPUSE ASUPRA BINOMULUI LUI NEWTON

Să se dezvolte binoamele

1. $(x^2 - a)^6$; $\qquad (a + \sqrt{b})^9$

2. $(\sqrt{a} + \sqrt{b})^6$; $\qquad (\sqrt{3x} + \sqrt{2y})^7$

3. $\left(\sqrt{\frac{a}{b}} + \sqrt{\frac{b}{a}}\right)^6$; $\qquad (2\sqrt[3]{x} - 4\sqrt{x})^4$.

4. Să se calculeze sumele și diferențele următoare

$s_2 = (a+b)^2 + (a-b)^2$, $\qquad d_2 = (a+b)^2 - (a-b)^2$;

$s_3 = (a+b)^3 + (a-b)^3$, $\qquad d_3 = (a+b)^3 - (a-b)^3$;

$s_4 = (a+b)^4 + (a-b)^4$, $\qquad d_4 = (a+b)^4 - (a-b)^4$;

în general $\qquad$ în general

$s_n = (a+b)^n + (a-b)^n$, $\qquad d_n = (a+b)^n - (a-b)^n$.

5. Să se calculeze următoarele puteri

$99^7 = (100-1)^7$; $\qquad 102^5 = (100+2)^5$;

$1{,}02^7 = \left(1 + \frac{2}{100}\right)^7$; $\qquad (0{,}999)^5 = (1 - 0{,}001)^5$.

6. Să se afle

a) termenul al 4-lea din dezvoltarea binomului $(a+3)^7$;

b) termenul al 6-lea din dezvoltarea binomului $(a^2+b^3)^{13}$;

c) termenul din mijloc din dezvoltarea binomului $(\sqrt{a} - \sqrt{b})^8$.

7. Să se afle

a) cei doi termeni din mijloc din dezvoltarea binomului

$$(\sqrt{a} - \sqrt[3]{b})^{13};$$

b) cei doi termeni din mijloc din dezvoltarea binomului

$$(\sqrt[3]{a} - 2x\sqrt{x})^{19};$$

c) termenul al 5-lea din dezvoltarea binomului

$$\left(\sqrt[4]{2\sqrt{\frac{2}{11}}} - \frac{1}{3}\right)^{12}.$$

8. Să se afle

a) termenul din dezvoltarea binomului $(x+y)^9$ care conține pe x^7;

b) termenul din dezvoltarea binomului $(a + \sqrt[4]{a})^{13}$ care conține pe a^7.

9. Să se afle

a) termenul din dezvoltarea binomului $\left(\frac{\sqrt{x}}{b} + \frac{b}{\sqrt[3]{x}}\right)^{13}$ care conține pe x^4;

b) termenul din dezvoltarea binomului $\left(\frac{\sqrt[3]{x}}{b} + \frac{b}{\sqrt[4]{x}}\right)^{18}$ care conține pe x^{-1}.

10. Să se afle

a) termenul din dezvoltarea binomului $\left(\frac{1}{\sqrt[3]{a^2}} + \sqrt[4]{a^3}\right)^{17}$ care nu conține pe a;

b) termenul din dezvoltarea binomului $\left(\sqrt[3]{a} - \frac{1}{\sqrt{a}}\right)^{15}$ care nu conține pe a.

11. Să se găsească coeficientul termenului în x^{2r+1} din dezvoltarea lui $\left(x + \frac{1}{x}\right)^{2n+1}$.

12. Să se găsească rangul termenului din dezvoltarea $\left(\sqrt[3]{\frac{a}{\sqrt{b}}} + \sqrt{\frac{b}{\sqrt[3]{a}}}\right)^{21}$, în care a și b au puteri egale.

13. Să se găsească rangurile a trei termeni consecutivi ai dezvoltării binomului $(a + b)^{23}$, ai căror coeficienți formează *o progresie aritmetică.*

14. Să se afle acel termen al dezvoltării binomului $\left(x\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)^n$ care, după efectuarea simplificărilor, conține pe x^5, știind că suma coeficienților binomiali este egală cu 128.

15. În dezvoltarea binomului $\left(x\sqrt[4]{x} + x^{-\frac{1}{2}}\right)^n$ să se determine termenul care conține pe x^3, știind că suma coeficienților de rang impar ai termenilor dezvoltării este egală cu 128.

16. Exponentul puterii unui binom este mai mare cu 3 decît al altui binom.

Să se determine acești exponenți, dacă suma coeficienților din ambele dezvoltări este egală cu 144.

17. În dezvoltarea binomului $\left(\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)^n$, suma coeficienților este mai mică cu 240 decît suma coeficienților din dezvoltarea binomului $(a + b)^{2n}$. Să se găsească termenul al 3-lea al primei dezvoltări.

18. Să se afle x, y și z, știind că termenii al 2-lea, al 3-lea și al 4-lea ai dezvoltării binomului $(x + y)^z$ sînt respectiv 240, 720 și 1 080.

19. Să se găsească pentru ce valori ale lui x, diferența dintre termenul al 4-lea și al 6-lea din dezvoltarea binomului $\left(\frac{\sqrt{2^x}}{\sqrt[16]{8}} + \frac{\sqrt[16]{32}}{\sqrt{2^x}}\right)^n$ este egală cu 56, dacă se știe că exponentul binomului, n, este mai mic cu 20 decît coeficientul binomial al termenului al 3-lea al dezvoltării.

20. Să se găsească pentru ce valori ale lui x, suma dintre termenul al 3-lea și al 5-lea din dezvoltarea binomului $\left(\sqrt{2^x} + \frac{1}{\sqrt{2^{x-1}}}\right)^n$ este egală cu 135, dacă suma coeficienților ultimilor trei termeni este egală cu 22.

21. Să se determine coeficientul lui x^3 din produsul următoarelor dezvoltări

$$(1 + x)^7 \cdot (1 - x)^4.$$

22. Să se găsească coeficientul lui x^4 în expresia

$$P(x) = x(1 - x)^4 + x^2(1 + 2x)^8 + x^3(1 + 3x)^{12}$$

fără să se scrie termenii de prisos.

23. Să se găsească coeficientul lui x^3 în expresia

$$P(x) = (1 + x)^3 + (1 + x)^4 + (1 + x)^5 + \ldots + (1 + x)^{15}.$$

24. În dezvoltarea expresiei

$$P(x) = 1 + (1 + x) + (1 + x)^2 + \ldots + (1 + x)^n$$

să se găsească termenul care conține pe x^k.

25. Să se verifice identitățile

$$C_{m+n}^1 = C_m^1 + C_n^1$$

$$C_{m+n}^2 = C_m^2 + C_m^1C_n^1 + C_n^2$$

$$C_{m+n}^3 = C_m^3 + C_m^2C_n^1 + C_m^1C_n^2 + C_n^3$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$C_{m+n}^k = C_m^k + C_m^{k-1}C_n^1 + C_m^{k-2}C_n^2 + \ldots + C_n^k.$$

26. Să se demonstreze identitatea

$$(x+a)^n-(x+b)^n+C_n^1\,[(x+a)^{n-1}b-(x+b)^{n-1}a]+$$
$$+C_n^2\,[(x+a)^{n-2}b^2-(x+b)^{n-2}a^2]+\ldots+$$
$$+C_n^{n-1}\,[(x+a)b^{n-1}-(x+b)a^{n-1}]+b^n-a^n=0.$$

27. Dacă a_1, a_2, a_3 și a_4 sînt coeficienți consecutivi în dezvoltarea lui $(1+x)^n$, atunci avem

$$\frac{a_1}{a_1+a_2}+\frac{a_3}{a_3+a_4}=\frac{2a_2}{a_2+a_3}.$$

28. Să se demonstreze identitățile

a) $C_n^n+C_{n+1}^n+C_{n+2}^n+\ldots+C_{n+k}^n=C_{n+k+1}^{n+1}$

b) $C_n^0-C_n^1+C_n^2+\ldots+(-1)^k C_n^k=(-1)^k C_{n-1}^k$.

29. Să se găsească termenii raționali ai dezvoltării din binoamele următoare:

a) $(\sqrt{x}+\sqrt[4]{x})^5$; b) $(\sqrt{5}-\sqrt{2})^8$.

30. Să se determine m întreg pozitiv, astfel ca termenul al 10-lea din dezvoltarea $(3+m)^m$ să fie cel mai mare.

31. În dezvoltarea $\left(x+1+\frac{2}{x}\right)^6$ să se ia termenul liber, fără să se scrie termenii care conțin pe x.

32. Să se descompună în factori expresia

$$E(a,\,b)=(a+b)^7-a^7-b^7.$$

33. Să se simplifice fracția

$$E=\frac{[(x^2+y^2)^4+(x^2-y^2)^4+(2xy)^4]^2}{(x^2+y^2)^8+(x^2-y^2)^8+(2xy)^8}.$$

34. Să se calculeze suma

$$E=\frac{1\cdot 3+2\cdot 4+3\cdot 5+4\cdot 6+\ldots+n(n+2)}{C_{n+2}^{n-1}}.$$

35. Să se calculeze suma

$$F=\frac{1^3+2^3+3^3+\ldots+n^3}{1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2}-\frac{3n}{4}.$$

36. Să se demonstreze următoarea formulă generală

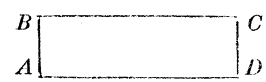
$$(k+1)\,S_k+\frac{(k+1)k}{1\cdot 2}\,S_{k-1}+\frac{(k+1)k(k-1)}{1\cdot 2\cdot 3}\,S_{k-2}+\ldots+$$
$$+(k+1)\,S_1+S_0=(n+1)^{k+1}-1.$$

37. Într-un magazin „Alimentara“, cutiile de conserve sînt stivuite în formă de piramidă cu bază pătrată. Făcîndu-se inventarul, trebuie numărate cutiile din stivă. Să se indice un mijloc simplu de a afla numărul cutiilor de conserve.

A p l i c a ț i e: Cîte cutii sînt în 6 stive care au laturile bazei respectiv de 5 cutii, 6 cutii, 7 cutii, 8 cutii, 9 cutii și 10 cutii?

METODA INDUCȚIEI MATEMATICE

1. Din punct de vedere al cantității (adică în funcție de numărul obiectelor la care se referă), judecățile se împart în: *singulare* sau *particulare* și *universale*. Vom da mai jos cîteva exemple de *judecăți universale* și, alături de ele, *judecata singulară corespunzătoare*.

Judecata universală	Judecata singulară corespunzătoare
1) Toți elevii care au trecut examenul de maturitate se pot prezenta la examenul de admitere în învățămîntul superior.	1) Ionel a trecut cu succes examenul de maturitate, el se poate prezenta la examenul de admitere în învățămîntul superior.
2) Toate numerele care se termină cu două zerouri sînt divizibile cu 25.	2) 300 este divizibil cu 25.
3) Într-un paralelogram, laturile opuse sînt egale două cîte două.	3) B C A D  Dreptunghiul $ABCD$ este paralelogram, deci laturile opuse sînt egale două cîte două, $AB=CD$ și $AD=BC$.

2. Trecerea de la judecățile universale la cele particulare sau la cele singulare se numește *deducție*.

De exemplu

1) Toate numerele care se termină cu două zerouri sînt divizibile cu 25.

Miile se termină cu două zerouri.

Miile sînt divizibile cu 25.

2) Toate numerele care se termină cu două zerouri sînt divizibile cu 25.

800 se termină cu două zerouri.

800 este divizibil cu 25.

În aceste cazuri putem spune că pe baza *judecății universale* **am dedus** *judecata particulară, respectiv pe cea singulară.*

Invers, trecerea de la judecățile particulare la cele universale se numește *inducție.*

3. *Inducția* însă poate să ducă atît la *concluzii adevărate*, cît și la *concluzii false*.

Vom ilustra această afirmație prin 2 exemple.

1) Numărul 258 este divizibil cu 3.	1) Numărul 459 este divizibil cu 3.
2) Suma cifrelor numărului 258, $2+5+8=15$, este divizibilă cu 3.	2) Numărul 459 are ultima cifră 9.
3) Toate numerele care au suma cifrelor divizibilă cu 3 sînt divizibile cu 3.	3) Toate numerele care au ultima cifră divizibilă cu 3 sînt divizibile cu 3.
În acest caz din *cazurile particulare* 1) și 2) am obținut *concluzia generală* 3).	În acest caz, la fel din *cazurile particulare* 1) și 2), am obținut *concluzia generală* 3).
Concluzia 3) este **adevărată.**	*Concluzia* 3) este însă **falsă.**

Constatăm, prin urmare, că, prin folosirea inducției, într-un caz am ajuns la o *concluzie adevărată*, pe cînd în alt caz am ajuns la o *concluzie falsă*.

Trebuie să examinăm atunci, în cele ce urmează, modul cum trebuie să aplicăm *metoda inducției*, pentru a ajunge numai la *concluzii adevărate*.

În algebra elementară, la studiul progresiilor aritmetice și geometrice, s-a găsit expresia *termenului general* a_n, respectiv b_n și anume

$$a_n = a_1 + (n-1)r \quad \textit{la progresiile aritmetice,}$$
$$b_n = b_1 \cdot q^{n-1} \quad \textit{la progresiile geometrice.}$$

Să recapitulăm puțin modul cum au fost deduse aceste formule, bazîndu-ne evident, atît la progresiile aritmetice cît și la cele geometrice, pe definiția progresiilor respective.

	La progresiile aritmetice	*La progresiile geometrice*
Termenul al doilea	$a_2=a_1+r$	$b_2=b_1\cdot q$
„ „ treilea	$a_3=a_2+r=a_1+2r$;	$b_3=b_2\cdot q=b_1\cdot q^2$
„ „ patrulea	$a_4=a_3+r=a_1+3r$;	$b_4=b_3\cdot q=b_1\cdot q^3$
. . . .	. . . .	. . . .
Termenul al 25-lea	$a_{25}=a_1+24r$	$b_{25}=b_1\cdot q^{24}$
. . . .	. . . .	. . . .
Termenul al n-lea	$a_n=a_1+(n-1)r$;	$b_n=b_1\cdot q^{n-1}$.

Constatăm atunci, în aceste două cazuri, că după ce am dedus expresia pentru termenii al doilea, al treilea și al patrulea am tras concluzia că acea regulă este valabilă și în cazul general.

Defectul acestei demonstrații constă în aceea că: *pe baza cîtorva cazuri particulare am tras concluzii generale.*

Raționamentul făcut în cazul acesta se numește inducție incompletă.

4. Inducția incompletă ne face de multe ori să prevedem reguli generale, dar ele trebuie demonstrate, pentru că aceste previderi ne pot duce uneori la concluzii false.

În cele de mai jos, vom da cîteva exemple.

Exemplul 1. Dacă se ia expresia

$$E(n) = n^2 + n + 41$$

și punem în locul lui n numerele 0, 1, 2, 3, ... etc., constatăm următoarele:

$E(0)=41$ număr prim
$E(1)=43$ „ „
$E(2)=47$ „ „
$E(3)=53$ „ „
$E(4)=61$ „ „
$E(5)=71$ „ „
$E(6)=83$ „ „
$E(7)=97$ „ „
$E(8)=113$ „ „
$E(9)=131$ „ „
$E(10)=151$ „ „

Am putea crede în acest caz că expresia $E(n)$ ne va da un *număr prim* pentru orice valoare a lui n, cu atît mai mult că, dacă am continua cu încercările, am găsi numere prime și mai departe pînă la $n=39$.

Însă pentru $n=40$ se găsește $E(40)=41^2$, care nu mai este număr prim.

Deci, în acest exemplu, dacă pe baza cîtorva cazuri particulare (în cazul nostru chiar destul de multe: 39) am fi tras o concluzie generală, ea ar fi fost *falsă*.

Exemplul II. Fermat a făcut presupunerea că numerele de forma $2^{2^n} + 1$, unde n este un număr întreg pozitiv, sînt *numere prime*. Într-adevăr pentru

$n=0$ avem $2^{2^0} + 1 = 2^1 + 1 = 2 + 1 = 3$ *număr prim*

$n=1$ avem $2^{2^1} + 1 = 2^2 + 1 = 4 + 1 = 5$ „ „

$n=2$ avem $2^{2^2} + 1 = 2^4 + 1 = 16 + 1 = 17$ *număr prim*

$n=3$ avem $2^{2^3} + 1 = 2^8 + 1 = 256 + 1 = 257$ „ „

$n=4$ avem $2^{2^4} + 1 = 2^{16} + 1 = 65\,537$ tot *număr prim*.

S-a crezut atunci că presupunerea lui Fermat este justă. Euler însă a dat un exemplu care dezminte această afirmație, și anume pentru $n = 5$ s-a găsit

$$2^{2^5} + 1 = 2^{32} + 1 = 4\,294\,967\,297 = 641 \times 6\,700\,417,$$

deci *nu este număr prim*.

Ulterior s-a mai găsit, după calcule foarte lungi, că expresia lui Fermat: $2^{2^n} + 1$ dă numere neprime și pentru alte valori ale lui n ca: $n = 6, 7, 8, 9, 11, 12, 18, 23, 36, 38, 73$.

Exemplul III. Un exemplu și mai elocvent, care ilustrează și mai convingător netemeinicia concluziilor trase cu ajutorul inducției incomplete, a fost dat de matematicianul polonez Serpinski.

El a considerat numărul $991\,n^2 + 1$ care dă pătrate neperfecte pentru foarte multe valori întregi puse în locul lui n.

Cea mai mică valoare a lui n, pentru care $991\,n^2 + 1$ dă pătrat perfect, este un număr format din nu mai puțin decît 29 de cifre.

5. Aceste cîteva exemple sînt suficiente ca să ne convingă de greșeala pe care o comitem cînd tragem o concluzie cu ajutorul inducției incomplete.

O proprietate, o relație sau o formulă care depinde de numărul natural n și care a fost găsită ca justă și valabilă chiar pentru foarte multe numere din șirul natural al numerelor, nu poate fi totuși generalizată, adică nu putem scoate concluzia că ea este valabilă și în cazul general, sau că este adevărată pentru orice număr din șirul natural al numerelor.

Dar atunci, imediat se pune întrebarea: ce-i de făcut? Ce trebuie să facem ca să putem demonstra că o proprietate găsită valabilă în cîteva cazuri particulare este valabilă și în cazul general?

Problema verificării directe nu e suficientă, pentru că pe lîngă faptul că ea se poate face numai într-un număr redus de cazuri, dar oricîte verificări s-ar face, ele nu se termină niciodată, căci șirul numerelor naturale este infinit.

Urmează că pe calea verificării nu putem ajunge la un rezultat concludent și, pe calea aceasta, caracterul general al proprietății verificate tot n-a fost demonstrat.

Rămîne atunci o altă cale.

Pentru a demonstra că o proprietate sau o relație descoperită pe calea inducției incomplete este valabilă și în cazul general, verificarea trebuie completată cu un *raționament complementar*.

Acest raționament constă în a dovedi că dacă proprietatea sau relația stabilită pe cazuri particulare este valabilă pentru un număr oarecare n, atunci ea este valabilă și pentru $n + 1$.

Prin acest procedeu am obținut *metoda inducției complete* sau, pe scurt, metoda *inducției matematice*.

Această „întregire“ nu este o simplă modificare cantitativă, ci este o schimbare calitativă, o abordare într-un chip *nou*, care poate fi considerată fie o *axiomă* a numerelor naturale, fie o teoremă dedusă din alte axiome, asupra cărora nu mai insistăm aci.

Această metodă ne dă posibilitatea unor demonstrații riguroase din punct de vedere matematic.

Metoda inducției complete se definește deci în modul următor:

Dacă o proprietate sau o relație oarecare, depinzînd de un număr natural **n**, *este justă pentru numărul natural* **a** *și dacă din presupunerea că ea este adevărată pentru un număr oarecare n rezultă valabilitatea ei și pentru numărul următor* **n + 1**, *atunci acea proprietate este adevărată pentru toate numerele naturale începînd cu a.*

În adevăr, avînd de cercetat dacă o proprietate $P(n)$ este adevărată oricare ar fi numărul natural n, conform celor de mai sus, se vor efectua două cercetări:

1) Întîi înlocuim pe n cu un număr natural a și constatăm că proprietatea $P(a)$ este adevărată.

2) Presupunînd proprietatea $P(n)$ adevărată, dovedim că ea rămîne adevărată cînd majorăm pe n cu o unitate, adică $P(n+1)$ este adevărată.

Raționăm apoi astfel:

$P(n)$ este adevărată pentru $n = a$, deci ea este adevărată și cînd majorăm pe a cu 1, adică pentru $n = a + 1$; fiind adevărată pentru $n = a + 1$, este adevărată și cînd majorăm pe $a + 1$ cu o unitate, deci pentru $n = a + 2$, și așa mai departe, rezultă că $P(n)$ este adevărată pentru *orice* număr natural n, începînd de la numărul a.

6. În practică, metoda inducției complete se efectuează în două etape distincte:

Etapa de verificare, în care verificăm că proprietatea sau relația dată este valabilă pentru un număr oarecare a. (Acest număr este de obicei 1 sau 2.)

Etapa de demonstrație, în care presupunem că proprietatea e valabilă pentru numărul natural n, și demonstrăm că e valabilă și pentru $n + 1$.

7. *Pentru ca metoda inducției complete* să fie aplicată în mod judicios sau, cum am mai putea spune, complet, *este absolut necesar ca să fie parcurse ambele etape*, nu avem voie să omitem nici *etapa de verificare*, nici *etapa de demonstrație*.

Pentru necesitatea etapei de demonstrație nu-i nevoie să mai insistăm, dar se pune întrebarea dacă este oare necesară și etapa de verificare?

Vom da un exemplu din care vom vedea că nu putem omite nici prima etapă, cea de verificare.

Exemplu. Să presupunem că avem de demonstrat proprietatea: *Orice număr natural este egal cu numărul natural care urmează după el.*

Demonstrația o vom face prin *metoda inducției matematice.*

Presupunem că $n = n + 1$. (1)

Să demonstrăm că $n + 1 = n + 2$. (2)

Dacă adăugăm 1 la fiecare parte a egalității (1) obținem egalitatea (2).

Rezultă că dacă afirmația este valabilă pentru numărul natural n, aceasta este valabilă și pentru $n + 1$.

Etapa a doua de demonstrație a fost efectuată, totuși, afirmația făcută în enunțul problemei nu este adevărată.

Cum să vedem de ce nu e adevărată? Să efectuăm și *prima etapă de verificare* și se verifică imediat că

$$1 \neq 2,$$

deci afirmația făcută în enunț este *falsă*.

8. Să studiem suma

$$S_n = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \dots + \frac{1}{n(n+1)}.$$

Pentru diferite valori ale lui n găsim:

$$S_1 = \frac{1}{1\cdot 2} = \frac{1}{2}$$

$$S_2 = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} = \frac{3+1}{6} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

$$S_3 = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} = \frac{6+2+1}{12} = \frac{9}{12} = \frac{3}{4}$$

$$S_4 = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \frac{1}{4\cdot 5} = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \frac{1}{20} =$$

$$= \frac{30+10+5+3}{60} = \frac{48}{60} = \frac{4}{5}.$$

Aceste rezultate ne conduc la ipoteza că

$$\boxed{S_n = \frac{n}{n+1}}$$

pentru orice valoare a lui n.

Pînă acum am efectuat *etapa I, de verificare.*

Să efectuăm și *etapa II, de demonstrație.*

Dacă expresia lui S_n e valabilă și pentru $n + 1$, va trebui să găsim

$$S_{n+1} = \frac{n+1}{n+2}.$$

Avem

$$S_{n+1} = S_n + \frac{1}{(n+1)(n+2)} = \frac{n}{n+1} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} = \frac{n(n+2)+1}{(n+1)(n+2)} =$$

$$= \frac{n^2+2n+1}{(n+1)(n+2)} = \frac{(n+1)^2}{(n+1)(n+2)} = \frac{n+1}{n+2}.$$

Am demonstrat deci că dacă formula este valabilă pentru n, ea este valabilă şi pentru $n+1$. Fiind valabilă pentru $1, 2, 3, 4$, ea este valabilă pentru orice n.

Să presupunem că, studiind pe S_n, am fi emis ipoteza că

$$S_n = \frac{4n-2}{5n-1}.$$

Pentru $n=1$, avem $S_1 = \frac{4-2}{5-1} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$; pentru $n=2$, avem $S_2 = \frac{8-2}{10-1} = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$, deci formula este adevărată.

Dacă formula ar fi adevărată pentru orice n, pentru S_{n+1} ar trebui să găsim

$$S_{n+1} = \frac{4(n+1)-2}{5(n+1)-1} = \frac{4n+2}{5n+4}.$$

Avem însă

$$S_{n+1} = S_n + \frac{1}{(n+1)(n+2)} = \frac{4n-2}{5n-1} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} =$$
$$= \frac{(4n-2)(n+1)(n+2)+5n-1}{(5n-1)(n+1)(n+2)} = \frac{4n^3+10n^2+7n-5}{(5n-1)(n+1)(n+2)},$$

adică am obţinut alt rezultat.

Urmează că ipoteza admisă pentru S_n a fost falsă, ceea ce am constatat cînd am efectuat etapa II, de demonstraţie, de trecere de la n la $n+1$.

PROBLEME REZOLVATE

I. Să se demonstreze prin *metoda inducţiei complete* formula $a_n = a_1 + (n-1)r$, care dă expresia termenului general al unei progresii aritmetice.

Etapa I. $a_1 = a_1$
$a_2 = a_1 + r$
$a_3 = a_1 + 2r.$

Etapa II. Dacă $a_n = a_1 + (n-1)r$, pentru a_{n+1} va trebuie să găsim

$$a_{n+1} = a_1 + (n+1-1)r = a_1 + nr.$$

Dar, în baza definiţiei progresiei aritmetice, avem $a_{n+1} = a_n + r = a_1 + (n-1)r + r = a_1 + nr - r + r = a_1 + nr$, ceea ce era de demonstrat.

II. Să se demonstreze, prin *metoda inducţiei complete*, formula

$$S_n = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Etapa I. $S_1 = \frac{1\cdot 2\cdot 3}{6} = \frac{6}{6} = 1$; într-adevăr $S_1 = 1^2 = 1$.

$S_2 = \frac{2\cdot 3\cdot 5}{6} = 5$; într-adevăr $S_2 = 1^2 + 2^2 = 5$.

Etapa II. Pentru S_{n+1} va trebui să găsim

$$S_{n+1} = \frac{(n+1)(n+1+1)(2n+2+1)}{6} = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}.$$

Dar avem

$$S_{n+1} = S_n + (n+1)^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2 =$$
$$= \frac{n(n+1)(2n+1)+6(n+1)^2}{6} = \frac{(n+1)[n(2n+1)+6(n+1)]}{6} =$$
$$= \frac{(n+1)(2n^2+7n+6)}{6} = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}.$$

Deci formula este valabilă pentru orice n.

III. Utilizînd *metoda inducţiei complete*, să se demonstreze formula

$$S_n = 1^2 + 3^2 + 5^2 + \dots + (2n-1)^2 = \frac{n(2n+1)(2n-1)}{3}.$$

Etapa I. Pentru $n=1$ avem

$S_1 = \frac{1\cdot 3\cdot 1}{3} = 1$; într-adevăr $S_1 = 1^2 = 1$.

Pentru $n=2$ avem

$S_2 = \frac{2\cdot 5\cdot 3}{3} = 10$; într-adevăr $S_2 = 1^2 + 3^2 = 1 + 9 = 10$.

Etapa II. Trebuie să arătăm că formula presupusă adevărată pentru n este adevărată și pentru $n+1$, adică avem

$$S_{n+1} = 1^2 + 3^2 + 5^2 + \ldots + (2n-1)^2 + (2n+1)^2 = \frac{(n+1)(2n+3)(2n+1)}{3}.$$

Putem scrie

$$S_{n+1} = S_n + (2n+1)^2 = \frac{n(2n+1)(2n-1)}{3} + (2n+1)^2 =$$

$$= \frac{n(2n+1)(2n-1)+3(2n+1)^2}{3} = \frac{(2n+1)[n(2n-1)+3(2n+1)]}{3} =$$

$$= \frac{(2n+1)(2n^2+5n+3)}{3} = \frac{(2n+1)(n+1)(2n+3)}{3},$$

ceea ce era de demonstrat.

PROBLEME PROPUSE

1. Să se demonstreze că

$$1^2 + 3^2 + 5^2 + \ldots + (2n-1)^2 = \frac{n(4n^2-1)}{3}.$$

2. Să se arate că dacă $n \geqslant 10$, atunci $2^n > n^3$.
3. Să se demonstreze că

a) $$1\cdot 2 + 2\cdot 3 + 3\cdot 4 + \ldots + n(n+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3};$$

b) $$1\cdot 2\cdot 3 + 2\cdot 3\cdot 4 + 3\cdot 4\cdot 5 + \ldots + n(n+1)(n+2) = \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}.$$

4. Să se demonstreze că

$$\frac{1^2}{1\cdot 3} + \frac{2^2}{3\cdot 5} + \frac{3^2}{5\cdot 7} + \ldots + \frac{n^2}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{n(n+1)}{2(2n+1)}.$$

5. Să se demonstreze că

$$\frac{1}{1\cdot 4} + \frac{1}{4\cdot 7} + \frac{1}{7\cdot 10} + \ldots + \frac{1}{(3n-2)(3n+1)} = \frac{n}{3n+1}.$$

6. Să se demonstreze că

$$\frac{1}{1\cdot 5} + \frac{1}{5\cdot 9} + \frac{1}{9\cdot 13} + \ldots + \frac{1}{4n-3)(4n+1)} = \frac{n}{4n+1}.$$

7. Să se calculeze

$$S_n = 1\cdot 1! + 2\cdot 2! + 3\cdot 3! + \ldots + n\cdot n!,$$

apoi să se demonstreze formula găsită.

8. Să se demonstreze identitatea

$$\frac{1}{1+x} + \frac{2}{1+x^2} + \frac{4}{1+x^4} + \frac{8}{1+x^8} + \ldots + \frac{2^n}{1+x^{2^n}} = \frac{1}{x-1} + \frac{2^{n+1}}{1-x^{2^{n+1}}};\ (x \neq 1).$$

9. Să se demonstreze că orice sumă de bani într-un număr întreg de lei, mai mare de 7 lei, se poate plăti fără rest, în bancnote de 3 lei și 5 lei.

10. Să se demonstreze că pentru orice număr natural $n > 1$ avem

$$\boxed{\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{2n} > \frac{13}{14}}$$

11. Să se demonstreze prin metoda *inducției matematice* formula binomului lui Newton

$$\boxed{\begin{aligned}(a+b)^n = a^n + C_n^1 a^{n-1}b + C_n^2 a^{n-2}b^2 + C_n^3 a^{n-3}b^3 + \ldots +\\ + C_n^{k-1} a^{n-k+1} b^{k-1} + C_n^k a^{n-k} b^k + \ldots + C_n^{n-1} ab^{n-1} + C_n^n b^n\end{aligned}}$$

12. Să se demonstreze prin metoda inducției complete inegalitatea lui Buneakovski

$$E(n) = (a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + \ldots + b_n^2) -$$

$-(a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots + a_nb_n)^2 \geqslant 0$, unde $a_1, a_2, \ldots, a_n, b_1, b_2, \ldots, b_n$ sînt numere reale oarecare.

CAPITOLUL II

DIVIZIBILITATEA NUMERELOR ȘI POLINOAMELOR

DEFINIȚIA GENERALĂ A ÎMPĂRȚIRII NUMERELOR NATURALE

1. În sistemul numerelor naturale, pentru *împărțirea fără rest* și *împărțirea cu rest* se poate da următoarea definiție generală:

A împărți numărul D la numărul I înseamnă a găsi două numere Q (cîtul) și R (restul), care să satisfacă relațiile

$$D = I \cdot Q + R \text{ și } R < I$$

Din această egalitate rezultă că

$$D = \underbrace{I + I + I + \ldots + I}_{\text{de } Q \text{ ori.}} + R$$

Deoarece $R < I$, cîtul Q indică cel mai mare număr întreg care arată de cîte ori împărțitorul se cuprinde în deîmpărțit.

Dacă împărțitorul I nu este egal cu zero, operația împărțirii este întotdeauna posibilă și dă întotdeauna un singur rezultat.

În matematică spunem în acest caz că se poate da:
1) *o teoremă de existență* și
2) *o teoremă de unicitate.*

Aceste două teoreme sînt strîns legate una de alta și ele se pun în multe probleme ale matematicii.

În problema *noastră*, cele două teoreme *se pun* astfel:
Dacă se dau două numere D și I, se pot determina în mod unic două numere Q și R care să satisfacă relațiile

$$D = I \cdot Q + R \text{ și } R < I.$$

Într-adevăr,
1) dacă $D < I$, atunci $Q = 0$ și $R = D$; în acest caz, această și numai această pereche de numere satisface condiția pusă.
2) Dacă $D = I$, atunci $Q = 1$ și $R = 0$ și în acest caz nici o altă pereche de numere nu satisface condiția pusă.
3) Dacă $D > I$, atunci cîtul Q arată numărul cel mai mare de cîte ori I este conținut în deîmpărțitul D; de aceea, dacă $I \neq 0$, avem întotdeauna un cît și acesta nu poate fi decît unul singur.

În acest caz, putem avea și un rest $R = D - I \cdot Q$ și, întrucît scăderea este o operație unic determinată, restul nu poate fi decît unul singur.

Mai putem observa că, în cazul împărțirii numărului D prin numărul I, se poate obține ca rest un număr oarecare al șirului următor

$$0, 1, 2, 3, \ldots, I - 1.$$

Deci numărul de *resturi distincte* ce s-ar putea obține în cazul împărțirii diferitelor numere naturale prin I este egal cu *numărul I.*

Observare. În cazul $I = 2$, putem avea numai două resturi: 0 și 1, care ne vor da numerele *pare* și *impare.*

În cazul $I = 3$, putem avea resturile 0, 1, 2, zicem că față de 3 un număr natural poate avea una din formele

$$3n,\ 3n + 1,\ 3n + 2 \text{ sau } 3n,\ 3n \pm 1.$$

În cazul $I = 4$ avem resturile 0, 1, 2, 3 și deci orice număr natural poate avea una din formele

$$4n,\ 4n + 1,\ 4n + 2,\ 4n + 3, \text{ sau } 4n,\ 4n \pm 1,\ 4n + 2.$$

În cazul $I = 5$, avem resturile 0,1,2,3,4 și deci orice număr natural poate avea una din formele

$$5n,\ 5n + 1,\ 5n + 2,\ 5n + 3,\ 5n + 4,$$

care se mai pot scrie

$$5n,\ 5n \pm 1,\ 5n \pm 2.$$

În cazul $I = 6$, avem resturile 0, 1, 2, 3, 4, 5 și deci orice număr natural poate avea una din formele

$$6n,\ 6n \pm 1,\ 6n \pm 2,\ 6n + 3.$$

DIVIZIBILITATEA NUMERELOR

2. Am văzut mai sus, cînd am reamintit definiția împărțirii, că împărțirea poate fi de două feluri:

1) împărțire fără rest sau împărțire exactă și
2) împărțire cu rest sau împărțire neexactă.

În capitolul asupra divizibilității numerelor, vom avea de-a face numai cu împărțiri exacte.

Într-o împărțire exactă putem spune de exemplu:

36 se împarte exact cu 4, sau
36 se divide cu 4, sau încă
36 este divizibil cu 4.

În cele de mai jos vom folosi mai mult ultima exprimare.

3. Într-o împărțire exactă, deîmpărțitul se zice că este un *multiplu* al împărțitorului, împărțitorul se zice că este un *divizor* al deîmpărțitului.

În exemplul de mai sus putem spune că 36 este un multiplu al lui 4, și 4 este un divizor al lui 36.

În general vom spune că numărul N este divizibil cu a, dacă N se împarte exact sau se divide cu a.

Numărul N este un multiplu al numărului a, iar numărul a este un divizor al numărului N.

Am văzut mai sus că 36 are ca *divizor* pe 4, dar pentru numărul 36 mai putem găsi și alți divizori afară de 4, de exemplu 2, 3, 6 etc.

Pentru *divizibilitate* sau pentru *proprietatea de împărțire* exactă, s-a introdus în aritmetică o notație specială, trei puncte așezate unul sub altul ⋮, așa că vom scrie în loc de 36 este divizibil cu 4 pe scurt:

$$36 \vdots 4.$$

Vom da aici toți divizorii numărului 36, scriind $36 \vdots 1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18, 36$; avem 9 divizori.

4. Știm din clasa a V-a următoarele:

1) Numărul 1 (unitatea) este singurul număr care are numai un singur divizor.

2) Unele numere ca de exemplu 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, n-au decît doi divizori, pe 1 și pe ele însele.

Astfel de numere se zic *numere prime*. Putem spune deci: *Se numește număr prim acel număr care nu are decît doi divizori, adică este divizibil cu 1 și cu el însuși.*

3) Alte numere, ca de exemplu 12, 15, 16, 18, 20 etc., care au mai mult de doi divizori, se numesc *numere neprime* sau *compuse*. Putem spune atunci:

Se numește număr neprim sau compus acel număr care admite cel puțin un singur divizor altul decît el însuși și unitatea.

Numerele întregi sînt astfel împărțite în trei clase:

1) *unitatea*;
2) *numerele prime*;
3) *numerele compuse.*

Prima clasă nu conține decît un singur număr.

Clasa a treia conține evident o infinitate de numere, căci ea cuprinde, printre alte numere, toate numerele de forma

$$2^2, 2^3, 2^4, \ldots, 3^2, 3^3, 3^4, \ldots$$

care sînt în număr infinit.

În clasa a doua, a numerelor prime, se poate demonstra la fel că avem o infinitate de numere.

5. Matematicianul grec Eratostene, care a trăit cam cu 250 ani înaintea erei noastre, a alcătuit, primul după cît se pare, o mică tabelă a numerelor prime.

Principiul de alcătuire al acestei tabele se cunoaște tot din clasa a V-a, așa că nu mai insistăm asupra lui.

TEOREME ASUPRA DIVIZIBILITĂȚII

6. Teorema I. *Dacă fiecare din termenii unei sume date este divizibil printr-un același număr, atunci și suma lor este divizibilă prin acel număr.*

Vom da demonstrația pentru cazul a trei termeni.

$$\text{Dacă} \left\{ \begin{matrix} N_1 \vdots b \\ N_2 \vdots b \\ N_3 \vdots b \end{matrix} \right\} \text{ atunci și } (N_1 + N_2 + N_3) \vdots b.$$

Pe baza definiției împărțirii, putem scrie

$$\begin{aligned} N_1 : b &= q_1, \text{ de unde } & N_1 &= b \cdot q_1 \\ N_2 : b &= q_2, \text{ de unde } & N_2 &= b \cdot q_2 \\ N_3 : b &= q_3, \text{ de unde } & N_3 &= b \cdot q_3. \end{aligned}$$

Prin adunare avem

$$N_1 + N_2 + N_3 = b \cdot q_1 + b \cdot q_2 + b \cdot q_3 = b\,(q_1 + q_2 + q_3),$$

deci

$$(N_1 + N_2 + N_3) \vdots b.$$

Exemplu. 28, 32 și 44 sînt divizibile cu 4, atunci și suma lor $28+32+44$, adică 104, este divizibilă cu 4.

Teorema II. *Dacă două numere sînt divizibile cu un același număr, și diferența lor va fi divizibilă cu același număr.*

$$\text{Dacă } \begin{cases} N_1 \vdots b \\ N_2 \vdots b \end{cases} \text{ atunci și } (N_1 - N_2) \vdots b.$$

Demonstrație. Pe baza definiției împărțirii, putem scrie

$N_1 : b = q_1$ de unde $N_1 = b \cdot q_1$
$N_2 : b = q_2$ de unde $N_2 = b \cdot q_2$.

Prin scădere avem

$$N_1 - N_2 = b \cdot q_1 - b \cdot q_2 = b\,(q_1 - q_2),$$

deci

$$(N_1 - N_2) \vdots b.$$

Exemplu. 72 și 54 sînt divizibile cu 6, atunci și diferența lor $(72-54)$, adică 18, va fi divizibilă cu 6.

Consecințe:

1) *Orice multiplu al unui număr dat este un multiplu și pentru fiecare din divizorii acelui număr.*

Dacă $N_1 \vdots N_2$, $N_2 \vdots b$, atunci $N_1 \vdots b$.

Putem scrie $N_1 : N_2 = q$ deci $N_1 = N_2 \cdot q = \overbrace{N_2 + N_2 + \ldots + N_2}^{q \text{ termeni}}$.

Cum fiecare termen al sumei e divizibil cu b, și suma lor adică N_1 va fi divizibilă cu b.

2) *Dacă suma a doi termeni și unul din ei se divide printr-un număr oarecare, atunci și cel de-al doilea termen se va divide prin același număr.*

Suma celor doi termeni poate fi luată ca *descăzutul*, iar unul din ei ca *scăzătorul* unei scăderi, și atunci și *diferența*, adică *al doilea termen*, va fi divizibilă cu același număr.

Această consecință este extrem de importantă, deoarece de ea ne folosim la stabilirea criteriului general de divizibilitate a numerelor.

3) *Dacă diferența a doi termeni și unul din ei se divide printr-un număr oarecare, atunci și al doilea termen se divide prin același număr.*

Avem $N_1 - N_2 = d$ și se dă $(N_1 - N_2) \vdots b$, $N_1 \vdots b$, atunci și $N_2 \vdots b$.

Prin ipoteză avem $N_1 - N_2 = d$ deci $N_1 = N_2 + d$ și atunci sîntem în cazul consecinței a II-a, cînd suma N_1 a doi termeni și unul din termeni d sînt divizibili cu numărul b, deci și al doilea termen adică N_2 va fi divizibil cu același număr b.

Exemplu. $100-36=64$; $100 \vdots 4$ și $64 \vdots 4$, deci și $36 \vdots 4$.

4) *Dacă, dintre două numere date, unul este divizibil printr-un număr oarecare, iar celălalt nu se divide prin același număr, atunci atît diferența, cît și suma lor nu va fi divizibilă prin acel număr.*

Se dă $N_1 - N_2 = d$, $N_1 \vdots b$, N_2 nu $\vdots b$.

Să se demonstreze că d nu $\vdots b$.

Demonstrăm prin reducere la absurd.

Admitem că $d \vdots b$, atunci în baza consecinței a III-a, ar trebui ca și $N_2 \vdots b$, însă acest lucru contrazice ipoteza teoremei.

Deci rămîne că d nu $\vdots b$.

Observare. La 3) și 4) demonstrația se face la fel, în ipoteza $N_2 \vdots b$.

DIVIZIBILITATEA UNUI PRODUS PRINTR-UN NUMĂR DAT

7. Se știe că pentru ca să împărțim un produs de mai mulți factori printr-un număr dat, este suficient să împărțim prin acel număr unul din factorii produsului.

De aici urmează că, pentru ca un produs de mai mulți factori să fie divizibil printr-un număr oarecare, este suficient ca unul din factorii produsului dat să se dividă prin acel număr.

Această condiție este suficientă, însă nu este necesară. Într-adevăr, produsul $40 \times 24 = 960$ este divizibil cu 15, cu toate că nici 40, nici 24 nu sînt divizibile cu 15.

8. Teoreme asupra divizibilității deîmpărțitului, împărțitorului și restului printr-un număr dat.

1) *Dacă în cazul împărțirii cu rest, deîmpărțitul și împărțitorul se divid printr-un număr oarecare, atunci și restul se va divide prin acel număr.*

Se dă $D = I \cdot Q + R$ și $D \vdots b$, $I \vdots b$ atunci și $R \vdots b$.

Din condițiile ipotezei avem

$I \cdot Q \vdots b$, de unde $(D - I \cdot Q) \vdots b$ adică $R \vdots b$.

2) *Dacă restul împărțirii și împărțitorul se divid printr-un număr oarecare, atunci și deîmpărțitul se divide prin același număr.*

Se dă $D = I \cdot Q + R$ și $I \vdots b$, $R \vdots b$, atunci și $D \vdots b$.

Din condițiile ipotezei avem

$I \cdot Q \vdots b$ de unde $(I \cdot Q + R) \vdots b$, adică $D \vdots b$.

CRITERIILE DE DIVIZIBILITATE A NUMERELOR

9. Prin *criteriu de divizibilitate* sau *regulă de divizibilitate* a unui număr N printr-un divizor oarecare d, înțelegem *condiția* necesară și suficientă pentru ca numărul N să se împartă fără rest prin numărul d.

Căutarea criteriilor de divizibilitate se face la trei serii de divizori și aceasta indiferent de baza sistemului de numerație, și anume:

1) *divizorii bazei* și *puterile acestor divizori*;

2) *baza + 1* sau *baza — 1 și divizorii acestor numere*; prin *baza + 1* sau *baza — 1*, înțelegem baza sistemului de numerație, majorată sau micșorată cu o unitate.

3) *alte numere decît cele precedente* și care în cazul sistemului nostru de numerație, cel zecimal, pot fi *numere prime*, ca: 7, 13, 17, 19 etc. sau *numere compuse*, ca 6, 12, 15, 18, 20 etc.

În cadrul sistemului zecimal, în prima categorie vor intra numerele

2 și 5; $2^2 = 4$ și $5^2 = 25$; $2^3 = 8$ și $5^3 = 125$; în general 2^k și 5^k.

În categoria a doua vor intra numerele

$10 - 1 = 9$; $10 + 1 = 11$ și divizorul lui 9 adică 3.

Pentru a căuta criteriile de divizibilitate ale unui număr N printr-unul oarecare din acești divizori, vom scrie numărul N, dat în sistemul de numerație zecimal, sub formă de polinom, astfel

$$\boxed{N = a_n \cdot 10^n + a_{n-1}10^{n-1} + \ldots + a_3 10^3 + a_2 10^2 + a_1 10 + a_0} \qquad (1)$$

De exemplu, putem scrie

$87 = 8 \cdot 10 + 7$

$345 = 3 \cdot 10^2 + 4 \cdot 10 + 5$

$5\,976 = 5 \cdot 10^3 + 9 \cdot 10^2 + 7 \cdot 10 + 6$ etc.

10. Criteriile de divizibilitate a numerelor prin divizorii bazei și puterile acestor divizori.

I. *Criteriul de divizibilitate prin 2 și 5.*

Scriem numărul N dat în relația (1) sub forma unei sume, în modul următor

$$N = (a_n \cdot 10^n + a_{n-1} \cdot 10^{n-1} + \ldots + a_3 \cdot 10^3 + a_2 \cdot 10^2 + a_1 \cdot 10) + a_0. \qquad (2)$$

Sub forma aceasta se vede că prima parte a sumei din dreapta, fiind alcătuită din zeci, este divizibilă prin divizorii lui 10, adică prin 2 și 5.

Înseamnă că pentru ca numărul N, care este o sumă, să fie divizibil prin 2 sau 5, este necesar și suficient ca și al doilea termen al sumei, adică numărul a_0, care e ultima cifră a numărului N, să fie divizibil prin 2 (sau 5). Atunci putem da *regula de divizibilitate pentru 2 și 5.*

Un număr este divizibil cu 2 atunci, și numai atunci cînd ultima cifră este 0 sau este divizibilă cu 2.

Un număr este divizibil cu 5, atunci și numai atunci cînd ultima cifră este 0 sau 5.

II. *Criteriul de divizibilitate prin $2^2 = 4$ și $5^2 = 25$.*

Vom scrie numărul N tot sub forma unei sume, astfel

$$N = (a_n \cdot 10^n + a_{n-1} \cdot 10^{n-1} + \ldots + a_3 \cdot 10^3 + a_2 \cdot 10^2) + (a_1 \cdot 10 + a_0). \qquad (3)$$

Sub forma aceasta se vede la fel că prima parte a sumei din dreapta este divizibilă prin 100, deci și prin divizorii lui 100, adică 4 și 25.

Înseamnă că pentru ca numărul N, care este o sumă, să fie divizibil prin 4 (respectiv prin 25), este necesar și suficient ca și al doilea termen al sumei: $a_1 \cdot 10 + a_0$, care este numărul format din ultimele 2 cifre ale numărului N, să fie divizibil prin 4 (respectiv prin 25).

Putem da atunci *regulile de divizibilitate pentru 4 și 25.*

Un număr este divizibil cu 4, atunci și numai atunci cînd numărul format din ultimele 2 cifre este divizibil cu 4 sau se compune din 2 zerouri.

Un număr este divizibil cu 25, atunci și numai atunci cînd numărul format din ultimele două cifre este divizibil cu 25, adică este 25, 50, 75 sau două zerouri.

III. *Criteriul de divizibilitate prin $2^3 = 8$ și $5^3 = 125$.*

Vom scrie numărul N tot sub forma unei sume, astfel

$$N = (a_n \cdot 10^n + a_{n-1} \cdot 10^{n-1} + \ldots + a_3 \cdot 10^3) + \\ + (a_2 \cdot 10^2 + a_1 \cdot 10 + a_0). \quad (4)$$

După un raționament analog, ca și în cazurile precedente, vedem că pentru ca numărul N să fie divizibil prin 8 (respectiv prin 125), este necesar și suficient ca și al doilea termen al sumei: $a_2 \cdot 10^2 + a_1 \cdot 10 + a_0$, care este numărul format din ultimele trei cifre ale numărului N, să fie divizibil prin 8 (respectiv prin 125).

Putem da atunci *regulile de divizibilitate pentru 8 și 125.*

Un număr este divizibil cu 8, atunci și numai atunci cînd numărul format din ultimele trei cifre este divizibil cu 8 sau se compune din 3 zerouri.

Un număr este divizibil cu 125, atunci și numai atunci cînd numărul format din ultimele trei cifre este divizibil cu 125, adică este 125, 250, 375, 500, 625, 750, 875, sau cînd se compune din trei zerouri.

Observare. Am văzut la stabilirea regulilor de divizibilitate de pînă acum că am amintit de fiecare dată de *condiția necesară și suficientă.*

Putem să lămurim acum prin exemple ce înseamnă o condiție necesară și cînd o condiție se consideră suficientă.

a) *Condiție necesară.* Pentru ca un număr să fie divizibil cu 8, am văzut că acel număr trebuie să fie cu soț.

Această condiție e *necesară*, deoarece nici un număr impar nu e divizibil cu 8, condiția însă nu este și *suficientă*, deoarece nu toate numerele pare sînt divizibile cu 8.

De exemplu numărul 46 este par, dar nu este divizibil cu 8. Vom spune în acest caz că *condiția este necesară dar nu este suficientă.*

b) *Condiție suficientă.* Dacă un număr se termină cu trei zerouri (000), atunci el este divizibil cu 8.

Această *condiție este suficientă dar nu este necesară*, pentru că nu numai numerele terminate cu trei zerouri sînt divizibile cu 8.

c) *Condiție necesară și suficientă.* Pe lîngă condițiile care sînt *necesare dar nu suficiente* sau *suficiente dar nu necesare*, mai există și condiții care în același timp sînt și *necesare și suficiente.*

Teorema de care ne-am folosit pentru a stabili criteriile de divizibilitate de pînă acum și pe care am demonstrat-o a fost următoarea:

Dacă unul din cei doi termeni ai unei sume se divide printr-un număr oarecare, pentru ca întreaga sumă să se dividă prin acel număr, este necesar și suficient ca și al doilea termen al sumei să se dividă prin același număr.

În această teoremă, ca și în criteriile de divizibilitate stabilite pînă acum, *condiția* fixată a fost și *necesară și suficientă.*

IV. *Criteriul de divizibilitate prin 2^k și 5^k.*

Vom scrie numărul N sub forma unei sume, în modul următor

$$N = (a_n \cdot 10^n + a_{n-1} \cdot 10^{n-1} + \ldots + a_k \cdot 10^k) + \\ + (a_{k-1} \cdot 10^{k-1} + \ldots + a_3 \cdot 10^3 + a_2 \cdot 10^2 + a_1 \cdot 10 + a_0). \quad (5)$$

Raționînd în mod analog, putem deduce *regula de divizibilitate prin 2^k (respectiv 5^k).*

Un număr este divizibil prin 2^k (respectiv 5^k), atunci cînd numărul format din ultimele k cifre este divizibil prin 2^k (respectiv 5^k), sau se termină cu k zerouri.

11. Criteriul de divizibilitate a numerelor prin 9 (= baza — 1).

Scriem numărul N tot sub formă de polinom

$$N = a_n \cdot 10^n + a_{n-1} \cdot 10^{n-1} + \ldots + a_3 \cdot 10^3 + a_2 \cdot 10^2 + a_1 \cdot 10 + a_0. \quad (1)$$

Vom arăta mai întîi că orice număr întreg, format din 1 (unu) urmat de un zero sau de mai multe zerouri, este egal cu un multiplu de 9, mărit cu o unitate.

Într-adevăr, avem

$$10^1 = 9 + 1 = 9 \cdot 1 + 1 = m\,9 + 1$$

(Cu m 9 am notat multiplu de 9)

$$10^2 = 99 + 1 = 9 \cdot 11 + 1 = m\,9 + 1$$

$$10^3 = 999 + 1 = 9 \cdot 111 + 1 = m\,9 + 1$$

. . . .

$$10^{n-1} = 9 \cdot \overbrace{111 \ldots 1}^{(n-1)\text{ cifre}} + 1 = m\,9 + 1$$

$$10^n = 9 \cdot \overbrace{111 \ldots 1}^{n\text{ cifre}} + 1 = m\,9 + 1.$$

Atunci numărul N va deveni

$$N = a_n(m\,9 + 1) + a_{n-1}(m\,9 + 1) + \ldots + a_3\,(m\,9 + 1) + $$
$$+ a_2\,(m\,9 + 1) + a_1\,(m\,9 + 1) + a_0,$$

care se mai poate scrie

$$N = m\,9 + (a_n + a_{n-1} + \ldots + a_3 + a_2 + a_1 + a_0) \qquad (2)$$

sau încă

$$N = m\,9 + (\text{suma cifrelor}). \qquad (2')$$

Sub ultima formă se vede că numărul N este pus sub forma unei sume de doi termeni, din care primul termen $m\,9$ este evident divizibil cu 9, și atunci, pentru ca numărul N să fie divizibil cu 9, trebuie ca și al doilea termen al sumei, care este format din *suma cifrelor*, să fie divizibil cu 9.

Așa că putem da *regula de divizibilitate prin 9 (respectiv prin 3).*

Un număr este divizibil cu 9, sau cu 3, atunci cînd suma cifrelor sale este divizibilă cu 9 sau cu 3.

12. Criteriul de divizibilitate a numerelor prin 11 (= baza + 1).

Scriem numărul N tot sub formă de polinom

$$N = a_n \cdot 10^n + a_{n-1} \cdot 10^{n-1} + \ldots + a_3 \cdot 10^3 + a_2 \cdot 10^2 +$$
$$+ a_1 \cdot 10 + a_0. \qquad (1)$$

Vom arăta mai întîi că orice număr întreg, format din 1 urmat de un zero sau de mai multe zerouri, este egal cu un multiplu de 11, micșorat sau mărit cu o unitate.

Într-adevăr, avem

$$10^1 = 11 - 1 = m\,11 - 1$$
$$10^2 = (11 - 1)^2 = m\,11 + 1$$
$$10^3 = (11 - 1)^3 = m\,11 - 1$$
$$10^4 = (11 - 1)^4 = m\,11 + 1$$

. . . .

$$10^n = (11 - 1)^n = m\,11 + (-1)^n.$$

Atunci numărul N devine

$$N = a_n\,[m\,11 + (-1)^n] + a_{n-1}\,[m\,11 + (-1)^{n-1}] + \ldots +$$
$$+ a_3\,(m\,11 - 1) + a_2\,(m\,11 + 1) + a_1\,(m\,11 - 1) + a_0 \qquad (2)$$

care se mai poate scrie

$$N = m11 + [(-1)^n a_n + (-1)^{n-1} a_{n-1} + \ldots - a_3 + a_2 - a_1 + a_0] \qquad (3)$$

sau încă

$N = m$ 11 + (suma cifrelor de rang impar — suma cifrelor de rang par). (3')

Sub forma aceasta, putem enunța *regula de divizibilitate pentru 11*:

Un număr este divizibil cu 11, atunci cînd diferența dintre suma cifrelor de rang impar și suma cifrelor de rang par este 0 (zero) sau este divizibilă cu 11.

Exemplu. Să se vadă dacă numărul 35 842 este divizibil cu 11.

Suma cifrelor de rang impar $= 2 + 8 + 3 = 13.$
Suma cifrelor de rang par $= 4 + 5 = 9.$
$13 - 9 = 4$ nu e divizibil cu 11, deci nici numărul 35 842 nu e divizibil cu 11.

Observare. Dacă *suma cifrelor de rang impar* este mai mică decît *suma cifrelor de rang par*, se mărește cea dintîi sumă cu 11 sau cu un multiplu de 11, pînă cînd scăderea se poate face.

Exemplu. Să se vadă dacă numărul 18 295 este sau nu divizibil cu 11.

Suma cifrelor de rang impar $= 5 + 2 + 1 = 8.$
Suma cifrelor de rang par $= 9 + 8 = 17.$

Diferența 8—17 nu se poate efectua; mărim atunci prima sumă cu 11; $8 + 11 = 19$.

Noua diferență este $19-17 = 2$, care nu e divizibil cu 11, deci nici numărul dat 18 295 nu va fi divizibil cu 11.

13. Criteriul de divizibilitate prin 7, 11 și 13.

Se dă numărul N.

Însemnăm prin A numărul reprezentat de ultimele trei cifre ale numărului N, iar prin B, numărul exprimat de toate celelalte cifre; vom avea

$$N = 1\,000 \cdot B + A. \qquad (1)$$

De exemplu, pentru

1. $N = 725\,582$; avem $A = 582$, $B = 725$ și avem

$$N = 725 \cdot 1\,000 + 582.$$

2. $N = 1\,369\,312$; avem $A = 312$, $B = 1\,369$ și putem scrie

$$N = 1\,369 \cdot 1\,000 + 312.$$

3. $N = 78\,455$; avem $A = 455$, $B = 78$ și putem scrie

$$N = 78 \cdot 1\,000 + 455.$$

Observăm că $7 \cdot 11 \cdot 13 = 1\,001$, așa că transformăm numărul N, scris în relația (1) astfel:

$$N = (1\,000\,B + B) + (A - B), \qquad (2)$$

adică am adunat B și am scăzut B, ceea ce nu a modificat valoarea părții a doua.

Dar mai putem scrie

$$N = 1\,001 \cdot B + (A - B). \qquad (3)$$

Dacă $A<B$, diferența $A - B$ nu se poate efectua și atunci vom scrie pe N astfel:

$$N = 1\,001 \cdot B - (B - A). \qquad (3')$$

În primul caz, $A>B$, N e o *sumă* și *primul termen* al sumei $1\,001 \cdot B$ este *divizibil prin 7, prin 11 și prin 13.*

În cazul al doilea, $A<B$, N este o *diferență* și primul număr (descăzutul) $1\,001 \cdot B$ de asemenea este divizibil *prin 7, prin 11 și prin 13.*

În primul caz, pentru ca *suma* N să fie divizibilă prin *7*, *11* sau *13*, trebuie ca și al doilea termen al sumei, adică $A-B$ să fie *divizibil cu 7, cu 11 sau cu 13.*

În cazul al doilea, pentru ca *diferența* N să fie divizibilă prin *7*, *11* sau *13*, trebuie ca și scăzătorul, adică $B-A$, să fie *divizibil cu 7, 11 sau 13.*

Așa că putem da acum *regula de divizibilitate pentru 7, 11 și 13*:

Un număr este divizibil cu 7, 11 sau 13, dacă diferența obținută prin scăderea numărului exprimat de ultimele trei cifre ale numărului dat, din numărul exprimat de toate celelalte cifre (sau invers) este egală cu 0 sau este divizibilă prin 7, 11 sau 13.

APLICAȚII

Exemplul I. $N = 725\,582$. Aici $A = 582$, $B = 725$.

Facem diferența $B-A = 725 - 582 = 143$, care este divizibilă cu 11 și 13, deci numărul dat va fi și el divizibil cu 11 și 13.

Exemplul II. $N = 1\,369\,312$. Aici $A = 312$, $B = 1\,369$.

Facem diferența $B-A = 1\,369 - 312 = 1\,057$, care este divizibilă *numai cu 7*, deci numărul dat este și el *divizibil numai cu 7*.

Exemplul III. $N = 78\,455$. Aici $A = 455$, $B = 78$.

Vom face diferența $A-B = 455 - 78 = 377$, care este divizibilă *numai cu 13*, deci numărul dat va fi și el *divizibil numai cu 13.*

EXERCIȚII ȘI PROBLEME PROPUSE

Exerciții numerice

1. Să se scrie trei numere formate din 6 cifre, dintre care nici una zero, divizibile cu 8.
2. Să se scrie trei numere formate din 7 cifre, printre care și zero, divizibile cu 8.
3. Care dintre numerele: 225, 6 534, 15 930, 49 581 sînt divizibile cu 9? Dar cu 3?

4. Conducîndu-ne după regulile de divizibilitate a numerelor, să se stabilească cu ce numere sînt divizibile numerele următoare:

1 032; 14 212; 2 001; 7 254; 14 016.

Exerciții teoretice

5. Să se arate că un număr este divizibil cu 4, cînd cifra unităților mărită cu dublul cifrei zecilor dă o sumă divizibilă cu 4.

6. Să se arate că un număr este divizibil cu 8, cînd cifra unităților mărită cu dublul cifrei zecilor și cu împătritul cifrei sutelor dă o sumă divizibilă cu 8.

7. Pătratul unui număr care nu e divizibil cu 3 este un multiplu de 3 mărit cu 1.

8. Pătratul unui număr care nu e divizibil cu 5 este un multiplu de 5 mărit sau micșorat cu 1.

9. Cubul unui număr care nu e divizibil cu 7 este un multiplu de 7 mărit sau micșorat cu 1.

10. Diferența bipătratelor a două numere care nu sînt divizibile cu 5 este divizibilă cu 5.

11. Diferența puterilor a șasea a două numere care nu sînt divizibile cu 7 este divizibilă cu 7.

12. Să se arate că $E = n(2n^2 + 1)$ se divide cu 3.

13. Dacă n și k sînt numere impare, expresia $E = n^2 + k^2 - 2$ se divide cu 8.

14. Dacă n este un număr cu soț, atunci cele patru expresii

$$E_1 = n(n^2 + 4) \qquad E_3 = n(n^2 + 20)$$
$$E_2 = n(n^2 - 4) \qquad E_4 = n(n^2 - 20)$$

sînt divizibile cu 8.

15. Dacă n este un număr fără soț, expresia

$$E = n^{12} - n^8 - n^4 + 1$$

este divizibilă cu 512.

DIVIZIBILITATEA POLINOAMELOR

1. După ce am trecut în revistă diferitele teoreme asupra divizibilității și am dat regulile de divizibilitate în aritmetică, să vedem divizibilitatea și în cadrul algebrei, și anume în cazul polinoamelor algebrice de o singură variabilă.

Vom da pentru aceasta mai întîi forma generală a unui polinom în x, de gradul n.

Un polinom de gradul n în x îl scriem astfel

$$P_n(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n$$

($a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}, a_n$ sînt coeficienții polinomului, iar $a_0 \neq 0$).

De exemplu, polinomul de gradul 5 este

$P_5(x) = a_0x^5 + a_1x^4 + a_2x^3 + a_3x^2 + a_4x + a_5$, iar cel de gradul 2:

$$P_2(x) = a_0x^2 + a_1x + a_2.$$

Polinomul poate fi *complet*, cînd conține toate puterile lui x, și *incomplet* sau cu *lacune*, cînd lipsesc unele puteri ale variabilei.

Exemple.

$P_4(x) = a_0x^4 + a_1x^3 + a_2x^2 + a_3x + a_4$ complet

$P_5(x) = a_0x^5 + a_2x^3 + a_3x^2 + a_5$ cu lacune sau incomplet.

La un polinom $f(x)$ de gradul n, asupra coeficienților se pot face trei ipoteze:

1) coeficienții sînt întregi;
2) coeficienții sînt raționali;
3) coeficienții sînt reali.

În cazul cînd nu se face nici o precizare asupra coeficienților, vom presupune totdeauna că polinomul are coeficienții raționali.

DEFINIȚIA DIVIZIBILITĂȚII A DOUĂ POLINOAME

2. Să luăm două polinoame: $f(x)$ de gradul n, $g(x)$ de gradul k

$$f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \ldots + a_{n-2}x^2 + a_{n-1}x + a_n \qquad (1)$$

și $g(x) = b_0x^k + b_1x^{k-1} + b_2x^{k-2} + \ldots + b_{k-2}x^2 + b_{k-1}x + b_k, \qquad (2)$

cu $a_0 \neq 0$ și $b_0 \neq 0$.

Definiția divizibilității. *Polinomul $f(x)$ se divide prin polinomul $g(x)$, dacă există un al treilea polinom $q(x)$, astfel încît să aibă loc identitatea*

$$\boxed{f(x) \equiv g(x) \cdot q(x)} \quad (3)$$

Polinoamele $g(x)$ și $q(x)$ se numesc divizori ai lui $f(x)$.

De exemplu, avînd $x^2 - 9 = (x-3)\cdot(x+3)$, polinoamele de gr. I, $x-3$ și $x+3$, sînt divizorii polinomului de gradul II, $x^2 - 9$.

3. Fie k_1 un număr arbitrar, diferit de zero; avem

$$f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n =$$

$$= k_1\left(\frac{a_0}{k_1}x^n + \frac{a_1}{k_1}x^{n-1} + \ldots + \frac{a_{n-1}}{k_1}x + \frac{a_n}{k_1}\right).$$

De aici putem vedea că:

a) orice număr diferit de zero este *divizorul* oricărui polinom;

b) orice polinom ai cărui coeficienți diferă de coeficienții polinomului dat printr-un factor numeric diferit de zero este de asemenea *divizorul* polinomului dat.

Acești divizori se numesc *divizori banali*, spre deosebire de ceilalți divizori.

Exemplu. Fie polinomul de gradul IV: $x^4 - 1$; el se poate scrie $x^4 - 1 = (x^2-1)(x^2+1) = (x-1)(x+1)(x^2+1)$

sau $x^4 - 1 = (x-1)(x^3 + x^2 + x + 1)$,

sau $x^4 - 1 = (x+1)(x^3 - x^2 + x - 1)$.

Din aceste descompuneri se vede că pentru polinomul de gradul IV, $x^4 - 1$, putem avea următorii divizori nebanali:

De gradul I : $x - 1$; $x + 1$;

de gradul II : $x^2 - 1$; $x^2 + 1$;

de gradul III : $x^3 + x^2 + x + 1$; $x^3 - x^2 + x - 1$.

Tot pentru polinomul $x^4 - 1$ am avea ca *divizori banali* pe $3x^4 - 3$ sau $\frac{1}{5}x^4 - \frac{1}{5}$; într-adevăr, putem scrie

$$x^4 - 1 = \frac{1}{3}(3x^4 - 3) \text{ și}$$

$$x^4 - 1 = 5\left(\frac{1}{5}x^4 - \frac{1}{5}\right).$$

4. Cîteva proprietăți ale divizibilității polinoamelor.

I. *Dacă două polinoame $f_1(x)$ și $f_2(x)$ se împart ambele cu un al treilea polinom $g(x)$, atunci suma lor $f_1(x)+f_2(x)$ și diferența lor $f_1(x) - f_2(x)$ se împart fiecare cu $g(x)$.*

Folosind pentru *divizibilitate* notația din aritmetică, cu trei puncte așezate unul sub altul, $\vdots$, teorema aceasta (ipoteza și concluzia), se poate scrie schematic astfel:

Dacă

$$\boxed{\begin{matrix} f_1(x) \vdots g(x), \\ f_2(x) \vdots g(x) \end{matrix}, \text{ atunci și } [f_1(x) \pm f_2(x)] \vdots g(x)}$$

Pentru demonstrație ne vom baza pe definiția divizibilității polinoamelor.

Din $f_1(x) \vdots g(x)$ rezultă că $f_1(x) = g(x)\cdot q_1(x)$, la fel din $f_2(x) \vdots g(x)$ rezultă că $f_2(x) = g(x)\cdot q_2(x)$.

Adunînd, respectiv scăzînd, avem

$f_1(x) \pm f_2(x) = g(x)\cdot[q_1(x) \pm q_2(x)]$ care se mai poate scrie

$f_1(x) \pm f_2(x) = g(x)\cdot q(x)$,

ceea ce probează că *suma* $f_1(x)+f_2(x)$ *sau diferența* $f_1(x) - f_2(x)$ se împart cu $g(x)$.

II. Teorema precedentă se poate generaliza în modul următor:

Dacă polinoamele $f_1(x)$, $f_2(x)$, ..., $f_k(x)$ se împart cu polinomul $g(x)$, atunci expresia $E = c_1f_1(x) + c_2f_2(x) + \ldots + c_kf_k(x)$ se împarte la $g(x)$.

Demonstrația se bazează tot pe definiția divizibilității polinoamelor.

III. *Fiind date polinoamele $f(x)$, $g(x)$ și $h(x)$, dacă $f(x)$ se împarte la $g(x)$ și $g(x)$ se împarte la $h(x)$, atunci $f(x)$ se împarte la $h(x)$.*

Schema teoremei este

$$\boxed{\text{Dacă } f(x) \vdots g(x) \text{ și } g(x) \vdots h(x), \text{ atunci și } f(x) \vdots h(x)}$$

Pentru demonstrație ne bazăm tot pe definiția divizibilității.

Din $f(x) \vdots g(x)$ rezultă că $f(x) = g(x)\cdot q_1(x)$, iar din $g(x) \vdots h(x)$ rezultă că $g(x) = h(x)\cdot q_2(x)$.

Înlocuind pe $g(x)$ din egalitatea a doua în prima, putem scrie

$$f(x) = h(x) \cdot q_2(x) \cdot q_1(x) \text{ sau } f(x) = h(x) \cdot q(x),$$

ceea ce probează că $f(x)$ se împarte la $h(x)$.

Aceste trei teoreme asupra divizibilității polinoamelor sînt analoge cu teoremele de la divizibilitatea numerelor. Se mai pot da și alte teoreme analoge; noi am luat aici pe cele mai importante, de care ne vom servi în cele ce urmează.

ÎMPĂRȚIREA CU REST

5. În cazul polinoamelor, ca și în aritmetică în cazul numerelor întregi, împărțirea exactă nu este totdeauna posibilă și, în majoritatea cazurilor, după împărțire mai rămîne și un rest.

Asupra împărțirii cu rest, în cazul polinoamelor, avem ca și în aritmetică următoarea *teoremă de existență și de unicitate*:

Teoremă. *Fiind date două polinoame oarecare, $f(x)$ de gradul n și $g(x)$ de gradul k, cu $g(x) \neq 0$ există o singură pereche de polinoame $q(x)$ și $r(x)$, care să satisfacă identitatea*

$$\boxed{f(x) \equiv g(x) \cdot q(x) + r(x)} \tag{1}$$

și dacă $r(x) \neq 0$, gradul lui $r(x)$ este mai mic decît gradul lui $g(x)$.

Polinomul $f(x)$ se numește *deîmpărțit*, $g(x)$ *împărțitor*, $q(x)$ *cît*, iar $r(x)$ *rest*.

Demonstrație

Fie

$$f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \dots + a_{n-2} x^2 + a_{n-1} x + a_n \ (a_0 \neq 0),$$

$$g(x) = b_0 x^k + b_1 x^{k-1} + b_2 x^{k-2} + \dots + b_{k-2} x^2 + b_{k-1} x + b_k \ (b_0 \neq 0).$$

Dacă $n < k$, atunci $q(x) = 0$, iar $r(x) = f(x)$, și atunci aceste două polinoame, și numai ele, verifică egalitatea (1).

Presupunem atunci $n \geqslant k$; vom lucra în modul următor:

Împărțim termenul de gradul cel mai mare din $f(x)$ prin termenul de gradul cel mai mare din $g(x)$, avem $\frac{a_0}{b_0} x^{n-k}$ și cu acest termen

înmulțim tot polinomul $g(x)$ și produsul îl scădem din $f(x)$; putem scrie atunci

$$f(x) - \frac{a_0}{b_0} x^{n-k} \cdot g(x) = f_1(x). \tag{2}$$

Prin această scădere, termenul de gradul cel mai mare $a_0 x^n$ va dispare și diferența, adică *polinomul* $f_1(x)$, va fi de un grad mai mic decît n; vom nota gradul lui $f_1(x)$ cu n_1.

$$f_1(x) = a'_0 x^{n_1} + a'_1 x^{n_1-1} + a'_2 x^{n_1-2} + \dots + a'_n \ (a'_0 \neq 0;\ n_1 < n).$$

Dacă gradul lui $f_1(x)$ este mai mare sau egal cu gradul lui $g(x)$, repetăm din nou procesul de coborîre a gradului, printr-o nouă scădere:

$$f_1(x) - \frac{a_0}{b_0} x^{n_1-k} \cdot g(x) = f_2(x). \tag{3}$$

Gradul lui $f_2(x)$ îl notăm cu n_2, și avem evident

$$n_2 < n_1 < n.$$

Deoarece gradele $n, n_1, n_2, \dots$ nu pot scădea nelimitat, la urma urmelor va trebui să ajungem la polinomul $r(x)$, al cărui grad va fi mai mic decît gradul lui $g(x)$.

În felul acesta vom avea următorul șir de egalități

$$f(x) - \frac{a_0}{b_0} x^{n-k} g(x) = f_1(x)$$

$$f_1(x) - \frac{a'_0}{b_0} x^{n_1-k} g(x) = f_2(x)$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$f_p(x) - \frac{a_0^{(p)}}{b_0} x^{n_p-k} g(x) = r(x).$$

Adunînd toate aceste egalități, termen cu termen, și făcînd reducerile evidente cu $f_1(x), f_2(x), \dots, f_p(x)$, vom obține

$$f(x) - \left[\frac{a_0}{b_0} x^{n-k} + \frac{a_0}{b_0} x^{n_1-k} + \dots + \frac{a_0^{(p)}}{b_0} x^{n_p-k}\right] g(x) = r(x). \tag{4}$$

Dacă notăm aici

$$q(x) = \frac{a_0}{b_0} x^{n-k} + \frac{a_0}{b_0} x^{n_1-k} + \dots + \frac{a_0^{(p)}}{b_0} x^{n_p-k}, \tag{5}$$

egalitatea (4) se poate scrie

$$\boxed{f(x) \equiv g(x) \cdot q(x) + r(x)} \tag{6}$$

Cu aceasta *teorema de existență* este demonstrată.

Acum să trecem la demonstrarea *teoremei de unicitate*, adică să arătăm că $q(x)$ și $r(x)$ formează unica pereche de polinoame care satisface identitatea (6).

Să presupunem că în afară de perechea $q(x)$ şi $r(x)$, mai există o altă pereche de polinoame $q_1(x)$ şi $r_1(x)$, în care gradul lui r_1 este mai mic decît k, deci am avea identitatea

$$f(x) \equiv g(x)\cdot q_1(x) + r_1(x). \tag{7}$$

Din identităţile (6) şi (7) obţinem

$$g(x)\cdot q(x) + r(x) \equiv g(x)\cdot q_1(x) + r_1(x), \tag{8}$$

care se mai poate scrie

$$g(x)\,[q(x) - q_1(x)] \equiv r_1(x) - r(x). \tag{9}$$

Ultima egalitate este posibilă numai cu condiţia ca să avem $q(x) = q_1(x)$.

Într-adevăr, dacă polinoamele $q(x)$ şi $q_1(x)$ nu sînt identice, atunci în partea stîngă a egalităţii (9) avînd produsul

$$g(x)\,[q(x) - q_1(x)]$$

unde $g(x)$ e de gradul k, iar diferenţa $q(x) - q_1(x)$ cel puţin de *gradul zero*, produsul este de *un grad mai mare sau cel puţin egal cu* k.

În partea dreaptă a egalităţii (9), atît $r(x)$ cît şi $r_1(x)$ sînt de un grad mai mic decît k, deci diferenţa lor va fi de asemenea *de un grad mai mic decît* k.

Aşa că ipoteza $q(x) \neq q_1(x)$ nu poate să aibă loc, căci ne conduce la un rezultat absurd.

Rămîne atunci numai $q(x) = q_1(x)$, ceea ce atrage după sine şi $r(x) = r_1(x)$.

Cu aceasta *am demonstrat şi teorema de unicitate.*

Procesul împărţirii cu rest necesită efectuarea asupra coeficienţilor polinoamelor $f(x)$ şi $g(x)$ a celor patru operaţii aritmetice: adunarea, scăderea, înmulţirea şi împărţirea; de aceea $q(x)$ şi $r(x)$ vor avea de asemenea *coeficienţi raţionali.*

Modul cum am obţinut în demonstraţia expusă cîtul şi restul împărţirii redă tocmai regula de împărţire a polinoamelor cunoscută încă din algebra elementară.

Astfel că, demonstrînd teorema împărţirii cu rest, am dat în acelaşi timp fundamentarea regulii elementare de împărţire a polinoamelor.

POLINOM IDENTIC NUL

6. Fie polinomul $P(x)$:

$$P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \dots + a_{n-3}x^3 + \\ + a_{n-2}x^2 + a_{n-1}x + a_n.$$

Dacă în acest polinom toţi coeficienţii sînt nuli, adică avem

$$a_0 = a_1 = a_2 = \dots = a_{n-2} = a_{n-1} = a_n = 0$$

căpătăm aşa-numitul *polinom identic nul.*

Polinomul identic nul evident ia valoarea zero pentru orice valori ale variabilei x.

Teoremă. *Pentru ca un polinom $P(x)$ să fie nul pentru orice valoare atribuită lui x, e necesar şi suficient ca toţi coeficienţii săi să fie nuli.*

Condiţia este evident *suficientă*, rămîne deci să arătăm că e şi *necesară.*

Asupra acestei teoreme vom mai reveni mai departe, în capitolul privitor la rezolvarea ecuaţiilor.

Acum vom da o demonstraţie, folosind *metoda inducţiei matematice.*

Pentru polinoamele de gradul întîi

$$P(x) = a_0x + a_1$$

teorema este adevărată.

Într-adevăr, dacă pentru orice valori ale lui x binomul $P(x)$ ia valoarea zero, atunci punînd (în particular) $x = 0$, obţinem $a_1 = 0$ şi, prin urmare, rămîne

$$P(x) = a_0x \equiv 0.$$

Punem acum $x = 1$; obţinem $a_0 = 0$.

Prin urmare, polinomul $P(x)$ este un *polinom identic nul.*

Să presupunem acum teorema adevărată pentru polinoamele de grade mai mici decît n.

Vom arăta că în această ipoteză ea este adevărată şi pentru polinoamele de gradul n.

Să presupunem că pentru toate valorile lui x, polinomul

$$P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \dots + a_{n-2}x^2 + a_{n-1}x + a_n = 0 \tag{1}$$

şi vom arăta că atunci $a_0 = a_1 = a_2 = \dots = a_n = 0$.

Pentru aceasta vom înlocui în identitatea (1) pe x cu $2x$; vom obţine

$$P(2x) = a_0(2x)^n + a_1(2x)^{n-1} + a_2(2x)^{n-2} + \dots + \\ + a_{n-2}(2x)^2 + a_{n-1}(2x) + a_n = 0 \tag{2}$$

sau încă

$$P(2x) = 2^n\cdot a_0x^n + 2^{n-1}\cdot a_1x^{n-1} + 2^{n-2}a_2x^{n-2} + \dots + \\ + 2^2\cdot a_{n-2}x^2 + 2\cdot a_{n-1}x + a_n = 0. \tag{3}$$

Să înmulțim egalitatea (1) cu 2^n și să scădem din ea, termen cu termen, egalitatea (3); vom obține

$$2^{n-1}(2-1)a_1x^{n-1} + 2^{n-2}(2^2-1)a_2x^{n-2} + \ldots +$$
$$+ 2^2(2^{n-2}-1)\cdot a_{n-2}x^2 + 2(2^{n-1}-1)\cdot a_{n-1}x + (2^n-1)a_n = 0. \qquad (4)$$

Prin ipoteză, un polinom de grad mai mic decît n nu poate fi nul pentru orice valoare a lui x decît dacă toți coeficienții săi sînt egali cu zero.

Din identitatea (4) rezultă atunci

$$\begin{array}{ll}
2^{n-1}(2-1)a_1 = 0 & \text{de unde } a_1 = 0 \\
2^{n-2}(2^2-1)a_2 = 0 & \text{de unde } a_2 = 0 \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots \\
2^2(2^{n-2}-1)a_{n-2} = 0 & \text{de unde } a_{n-2} = 0 \\
2(2^{n-1}-1)a_{n-1} = 0 & \text{de unde } a_{n-1} = 0 \\
(2^n-1)a_n = 0 & \text{de unde } a_n = 0.
\end{array}$$

Înlocuind aceste valori în identitatea (1), ne rămîne $a_0x^n = 0$ și, punînd aici $x = 1$, găsim $a_0 = 0$.

Teorema fiind adevărată pentru polinoamele de gradul I, va fi adevărată și pentru cele de gradul II; fiind adevărată pentru polinoamele de gradul II va fi adevărată și pentru cele de gradul III. În concluzie, va fi adevărată, din aproape în aproape, pentru polinoamele de orice grad.

CONDIȚIA CA DOUĂ POLINOAME SĂ FIE IDENTICE

7. Fie polinoamele $P(x)$ și $Q(x)$ de același grad n:

$$P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \ldots + a_{n-2}x^2 + a_{n-1}x + a_n \qquad (1)$$

și

$$Q(x) = b_0x^n + b_1x^{n-1} + b_2x^{n-2} + \ldots + b_{n-2}x^2 + b_{n-1}x + b_n, \qquad (2)$$

$$\text{cu } a_0 \neq 0 \text{ și } b_0 \neq 0.$$

Presupunem că ele sînt identice, adică:

$$P(x) \equiv Q(x) \qquad (3)$$

care se mai scrie

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \ldots + a_{n-2}x^2 + a_{n-1}x + a_n \equiv$$
$$\equiv b_0x^n + b_1x^{n-1} + b_2x^{n-2} + \ldots + b_{n-2}x^2 + b_{n-1}x + b_n. \qquad (4)$$

Atunci diferența celor două polinoame trebuie să fie un *polinom identic nul*, adică:

$$P(x) - Q(x) \equiv 0 \qquad (5)$$

sau

$$(a_0 - b_0)x^n + (a_1 - b_1)x^{n-1} + (a_2 - b_2)x^{n-2} + \ldots +$$
$$+ (a_{n-2} - b_{n-2})x^2 + (a_{n-1} - b_{n-1})x + (a_n - b_n) \equiv 0. \qquad (6)$$

În baza teoremei care dă condiția ca un polinom să fie identic nul, trebuie să avem:

$$\left.\begin{array}{l}
a_0 - b_0 = 0 \\
a_1 - b_1 = 0 \\
a_2 - b_2 = 0 \\
\ldots\ldots\ldots\ldots \\
a_{n-2} - b_{n-2} = 0 \\
a_{n-1} - b_{n-1} = 0 \\
a_n - b_n = 0
\end{array}\right\} (7) \quad \text{de unde găsim} \quad \boxed{\begin{array}{l}
a_0 = b_0 \\
a_1 = b_1 \\
a_2 = b_2 \\
\ldots\ldots\ldots\ldots \\
a_{n-2} = b_{n-2} \\
a_{n-1} = b_{n-1} \\
a_n = b_n
\end{array}} \qquad (8)$$

Egalitățile (8) reprezintă condiția ca cele două polinoame să fie identice. Așa că putem enunța următoarea

Teoremă. *Pentru ca două polinoame $P(x)$ și $Q(x)$, de același grad n să fie identice, e necesar și suficient ca termenii de același grad să aibă coeficienți egali.*

Observare. Trebuie să fim foarte atenți ca atunci cînd avem o identitate, să punem nu semnul $=$ (egal, cu două linii), ci $\equiv$ (identic egal, cu trei linii). În general $P(x) \equiv Q(x)$ este o *afirmație* și arată că $P(x)$ este egal cu $Q(x)$ pentru orice x.

$P(x) = Q(x)$ este o *întrebare* și pune în fața noastră problema: pentru ce valori ale lui x vom avea $P(x)$ egal cu $Q(x)$?

METODA COEFICIENȚILOR NEDETERMINAȚI

8. Această metodă se aplică de obicei în cazurile cînd se cunoaște dinainte forma expresiei la care trebuie să se ajungă în urma transformării unei expresii date, dar nu se cunosc coeficienții.

Coeficienții numerici căutați se notează cu litere și se consideră ca necunoscute.

În cazul polinoamelor, coeficienții corespunzători din expresia polinomului dat și din expresia transformată trebuie să fie egali, punînd condiția ca cele două polinoame să fie identice.

Obținem astfel un sistem de ecuații pentru determinarea coeficienților necunoscuți.

Mai putem obține un sistem de ecuații pentru determinarea coeficienților necunoscuți și astfel: egalînd valoarea expresiei date și a celei transformate pentru valori particulare ale variabilelor.

Vom lămuri aplicarea metodei pe cîteva exemple.

Exemplul I. Să se efectueze produsul

$$(x+2)(x+3)(x+4)(x+5).$$

Produsul este un polinom de gradul IV, coeficientul lui x^4 fiind egal cu 1, iar termenul liber $2\cdot3\cdot4\cdot5=120$; putem scrie deci

$$(x+2)(x+3)(x+4)(x+5) \equiv x^4 + Ax^3 + Bx^2 + Cx + 120. \qquad (1)$$

Pentru aflarea coeficienților necunoscuți A, B, C vom da valori particulare lui x. Astfel

pentru $x=-2$ avem $-8A+4B-2C+136=0$ (2)

pentru $x=-3$ avem $-27A+9B-3C+201=0$ (3)

pentru $x=-4$ avem $-64A+16B-4C+376=0.$ (4)

Rezolvînd sistemul format de ecuațiile (2), (3) și (4), se găsește

$$A=14; \quad B=71; \quad C=154.$$

Prin urmare, putem scrie

$$(x+2)(x+3)(x+4)(x+5)=x^4+14x^3+71x^2+154x+120.$$

Exemplul II. Să se facă împărțirea

$$(6x^5+7x^4-33x^2-29x-42):(3x^3-4x^2+x-7)$$

utilizînd *metoda coeficienților nedeterminați.*

Cîtul va fi un polinom de gradul II, de forma ax^2+bx+c, coeficienții a, b, c rămînînd deocamdată *nedeterminați.*

Restul, trebuind să fie de un grad mai mic decît împărțitorul, va fi cel mult de gradul II, de forma px^2+qx+r, unde coeficienții p,q,r, rămîn deocamdată tot *nedeterminați.*

În baza identității împărțirii cu rest

$$P(x) \equiv I(x)\cdot Q(x) + R(x),$$

putem scrie

$$6x^5+7x^4-33x^2-29x-42 \equiv$$
$$\equiv (3x^3-4x^2+x-7)(ax^2+bx+c)+px^2+qx+r \qquad (1)$$

sau, efectuînd toate calculele și ordonînd în partea dreaptă, avem:

$$6x^5+7x^4-33x^2-29x-42 \equiv 3ax^5+(-4a+3b)x^4+ (a-4b+3c)x^3+(-7a+b-4c+p)x^2+ (-7b+c+q)x+(-7c+r). \qquad (2)$$

Aplicăm condiția ca cele două polinoame să fie identice, scriind că termenii de același grad au coeficienții egali

$$\left.\begin{array}{c|ll} x^5 & 3a & =6 \\ x^4 & -4a+3b & =7 \\ x^3 & a-4b+3c & =0 \\ x^2 & -7a+b-4c+p & =-33 \\ x^1 & -7b+c+q & =-29 \\ x^0 & -7c+r & =-42. \end{array}\right\} \qquad (3)$$

Relațiile (3) formează un *sistem de 6 ecuații cu 6 necunoscute*: a, b, c, p, q, r.

Rezolvînd acest sistem, se găsește

$$\boxed{a=2;\ b=5;\ c=6;\ p=0;\ q=0;\ r=0}$$

Coeficienții restului fiind toți nuli, înseamnă că împărțirea se face exact și putem scrie:

$$6x^5+7x^4-33x^2-29x-42 \equiv$$
$$\equiv (3x^3-4x^2+x-7)(2x^2+5x+6).$$

9. Să analizăm cazul particular, foarte important în aplicații, de împărțire a polinomului $P(x)$ de gradul n

$$P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \ldots + a_{n-2}x^2 + a_{n-1}x + a_n \quad (1)$$

prin binomul $x-a$.

Să demonstrăm următoarea

Teoremă. *Restul împărțirii unui polinom* $P(x)$ *prin* $(x - a)$ *este egal cu valoarea numerică a acestui polinom pentru* $x = a$, *adică*

$$R = P(a) = a_0a^n + a_1a^{n-1} + \ldots + a_{n-1}\, a + a_n. \quad (2)$$

Demonstrație.

Scriem identitatea împărțirii cu rest, în cazul nostru

$$P(x) \equiv (x - a) \cdot Q(x) + R. \quad (3)$$

Cîtul căutat $Q(x)$ este un polinom de gradul $n-1$, iar restul trebuind să fie de un grad mai mic decît 1, gradul împărțitorului $x-a$, el va fi o constantă, adică un număr.

Identitatea (3) este valabilă pentru orice valoare pusă în locul lui x.

Vom lua pentru x valoarea a; atunci vom avea

$$P(a) = (a - a) \cdot Q(a) + R$$

sau, deoarece $a - a = 0$, ne rămîne

$$\boxed{P(a) = R} \quad (4)$$

Deci, teorema e demonstrată.

Această teoremă, cunoscută sub numele de *teorema lui Bézout*, este foarte importantă și utilă atît în aplicații cît și prin consecințele pe care le are.

Folosind această teoremă, se poate găsi restul fără a mai face împărțirea polinomului $P(x)$ *prin* $x-a$.

Exemplul I. Pentru a găsi restul împărțirii polinomului

$$P(x) = 2x^3 - 3x^2 - x + 1 \qquad \text{prin } x - 2,$$

substituim în polinom $x=2$; avem

$$R=P(2)=2 \cdot 2^3-3 \cdot 2^2-2+1=2 \cdot 8-3 \cdot 4-1=16-12-1=3.$$

Exemplul II. Să se găsească restul împărțirii polinomului

$$P(x) = 3x^4 - x^3 - 2x^2 - x + 1$$

prin binomul $x+2$, fără să se facă împărțirea.

Deoarece putem scrie $x+2=x-(-2)$, aici avem $a=-2$.

Așa că vom avea

$$R = P(-2) = 3(-2)^4-(-2)^3-2(-2)^2-(-2)+1 =$$
$$= 3 \cdot 16-(-8)-2 \cdot 4+2+1 = 48+8-8+3 = 51.$$

10. Regula de aflare a cîtului. Schema lui Horner. Pentru calculul coeficienților cîtului și ai restului diviziunii polinomului

$$P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \ldots + a_{n-2}x^2 + a_{n-1}x + a_n \quad (1)$$

prin binomul $x - a$, folosim următorul procedeu:

Scriem identitatea împărțirii cu rest

$$P(x) \equiv (x - a) \cdot Q(x) + R. \quad (2)$$

Deoarece gradul *cîtului* $Q(x)$ obținut prin împărțirea polinomului $P(x)$ cu $x-a$ trebuie să fie mai mic cu o unitate, $Q(x)$ va fi de gradul $n-1$, așa că putem pune

$$Q(x) = b_0x^{n-1} + b_1x^{n-2} + \ldots + b_{n-2}x + b_{n-1}. \quad (3)$$

Înlocuim expresiile lui $P(x)$ și $Q(x)$ în egalitatea (2); obținem

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \ldots + a_{n-2}x^2 + a_{n-1}x + a_n \equiv$$
$$\equiv (x-a) \cdot (b_0x^{n-1} + b_1x^{n-2} + b_2x^{n-3} + \ldots + b_{n-2}x + b_{n-1}) + R. \quad (4)$$

Efectuăm separat înmulțirea în partea dreaptă

$$(b_0x^{n-1} + b_1x^{n-2} + b_2x^{n-3} + \ldots + b_{n-2}x + b_{n-1})(x - a)$$

$$\begin{array}{l}
\hline
b_0x^n + b_1x^{n-1} + b_2x^{n-2} + \ldots + b_{n-2}x^2 + b_{n-1}x \\
- ab_0x^{n-1} - ab_1x^{n-2} - \ldots - ab_{n-2}x - ab_{n-1} \\
\hline
b_0x^n + (b_1 - ab_0)x^{n-1} + (b_2 - ab_1)x^{n-2} + \ldots + \\
+ (b_{n-1} - ab_{n-2})x - ab_{n-1}.
\end{array}$$

Înlocuind acest rezultat în egalitatea (4) avem

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \dots + a_{n-2}x^2 + a_{n-1}x + a_n \equiv$$
$$\equiv b_0x^n + (b_1 - ab_0)x^{n-1} + (b_2 - ab_1)x^{n-2} + \dots +$$
$$+ (b_{n-1} - ab_{n-2})x + (R - ab_{n-1}). \qquad (5)$$

Egalînd în (5) coeficienții acelorași puteri ale lui x, obținem egalitățile

$$\left.\begin{array}{l|l} \text{coef. lui } x^n & a_0 = b_0 \\ \text{coef. lui } x^{n-1} & a_1 = b_1 - ab_0 \\ \text{coef. lui } x^{n-2} & a_2 = b_2 - ab_1 \\ \dots\dots\dots & \dots\dots\dots\dots\dots \\ \text{coef. lui } x & a_{n-1} = b_{n-1} - ab_{n-2} \\ \text{termenul liber} & a_n = R - ab_{n-1} \end{array}\right\} \qquad (6)$$

Din egalitățile (6) găsim treptat

$$\boxed{\begin{array}{l} b_0 = a_0 \\ b_1 = ab_0 + a_1 \\ b_2 = ab_1 + a_2 \\ \dots\dots\dots\dots \\ b_{n-1} = ab_{n-2} + a_{n-1} \\ R = ab_{n-1} + a_n \end{array}} \qquad (7)$$

Formulele (7) ne dau posibilitatea să găsim succesiv coeficienții cîtului și restul.

Calculele după formulele (7) se fac cel mai simplu după schema următoare, cunoscută sub denumirea de *schema lui Horner*.

x^n	x^{n-1}	x^{n-2}	$\dots x^1$	x^0
a_0	a_1	a_2	$\dots a_{n-1}$	a_n
a_0	$ab_0 + a_1$	$ab_1 + a_2$	$\dots ab_{n-2} + a_{n-1}$	$ab_{n-1} + a_n$
b_0	b_1	b_2	$\dots b_{n-1}$	R
		Cîtul $Q(x)$		Restul

În rîndul de sus al schemei lui Horner sînt scriși coeficienții polinomului $P(x)$, iar în rîndul de jos, coeficienții $b_0, b_1, b_2, \dots, b_{n-1}$ ai cîtului și restul R.

Să examinăm schema lui Horner, ca să vedem cum putem deduce coeficienții cîtului

$$Q(x) = b_0x^{n-1} + b_1x^{n-2} + b_2x^{n-3} + \dots + b_{n-2}x + b_{n-1}$$

și *restul* R.

Primul coeficient al cîtului b_0 este egal cu a_0, tocmai primul coeficient al polinomului $P(x)$ (presupunem că am ordonat deîmpărțitul după puterile *descrescătoare* ale lui x).

Al doilea coeficient $b_1 = ab_0 + a_1$ a fost format astfel: am înmulțit coeficientul precedent b_0 (adică a_0) cu a și la produs am adăugat a_1.

Coeficientul al treilea $b_2 = ab_1 + a_2$ a fost format în mod analog: s-a înmulțit coeficientul precedent b_1 tot cu a și la produs s-a adăugat a_2 și așa mai departe.

Pentru o mai bună lămurire a modului cum se aplică schema lui Horner, vom da cîteva exemple.

Exemplul I. Utilizînd schema lui Horner, să se împartă polinomul

$$P(x) = 2x^5 - 5x^3 - 8x + 1$$

cu binomul $x - 3$.

Vom forma schema lui Horner. În cazul de față însă trebuie să fim atenți, ca să scriem toți coeficienții lui $P(x)$, fără a omite nici unul.

Astfel, în polinomul dat lipsesc termenii cu x^4 și x^2, de aceea coeficienții lor sînt egali cu 0 (zero).

Pentru a evita vreo omisiune la scrierea coeficienților în schema lui Horner, se recomandă ca deasupra schemei să notăm în prealabil toate puterile lui x, în cazul nostru de la x^5 pînă la x^0, care reprezintă termenul liber.

Procedînd așa, vom fi siguri că nu ne va scăpa nici un coeficient.

Așa că vom avea

	x^5	x^4	x^3	x^2	x^1	x^0
	2	0	-5	0	-8	1
3	2	$2\cdot3+0=6$	$6\cdot3-5=13$	$13\cdot3+0=39$	$39\cdot3-8=109$	$109\cdot3+1=328$
			Cîtul $Q(x)$			Restul R

Facem din nou schema lui Horner și pentru polinomul $Q_1(x) = x^4 - x^3 + x - 1$

	x^4	x^3	x^2	x^1	x^0
	1	-1	0	1	-1
1	1	0	0	1	0

Cîtul $Q_2(x)$ Restul R_2

Avem atunci $Q_1(x) = (x - 1)\ Q_2(x)$ sau

$$x^4 - x^3 + x - 1 = (x - 1)(x^3 + 1).$$

Se vede imediat că noul cît x^3+1 nu se mai împarte la $(x - 1)$.

În felul acesta, polinomul $P(x)$ se împarte la $(x - 1)^2$, însă nu se împarte la $(x - 1)^3$, astfel că 1 este *rădăcină dublă* a lui $P(x)$ și putem scrie

$$x^5 - 2x^4 + x^3 + x^2 - 2x + 1 = (x - 1)^2(x^3 + 1).$$

Observare. La același rezultat putem ajunge în cazul de față printr-o grupare convenabilă a termenilor polinomului

$$x^5 - 2x^4 + x^3 + x^2 - 2x + 1 = x^3(x^2 - 2x + 1) +$$
$$+ (x^2 - 2x + 1) = (x^2 - 2x + 1)(x^3 + 1) = (x - 1)^2(x^3 + 1).$$

EXERCIȚII ȘI PROBLEME PROPUSE

Fără a efectua împărțirea, să se afle restul împărțirilor

1. a) $(3x^4 - 2x^3 + 5x^2 - x + 2) : (x - 1)$;
   b) $(x^6 - x^5 - x^4 + 3x^3 - 2x^2 + 5x - 4) : (x + 2)$.
2. a) $(x^4 + 2x^3 + x^2 - 4x + 6) : \left(x - \frac{1}{2}\right)$;
   b) $(x^5 - x^4 - 2x^3 + x^2 - x - 2) : \left(x + \frac{3}{5}\right)$.
3. a) $(x^3 + 6x^2 - 4x - 2) : (2x + 1)$;
   b) $(2x^4 - 6x^3 + 4x^2 + 8x - 2) : (2x - 3)$.

4. Să se determine pentru ce valoare a lui a polinomul $2x^5 - 3x^3 + 11x^2 - x + a$ împărțit cu $x + 2$ dă restul 3.

5. Pentru ce valoare a lui k, polinomul $2x^3 - 3x^2 + kx - 6$ împărțit cu $x - 2$ dă un rest egal cu 6?

6. Se dă polinomul $2x^3 - 3x^2 - ax + b$. Să se determine valorile numerice ale lui a și b, astfel încît polinomul împărțit cu $x+1$ să dea un rest egal cu 7 și împărțit cu $x - 1$ să dea un rest egal cu 5.

7. Se dă fracția $\dfrac{x^5 + x^4 - 5x^3 - 5x^2 + 4x + 4}{x^4 + 5x^3 + 5x^2 - 5x - 6}$.

Folosind teorema lui Bézout, să se spună dacă fracția poate fi simplificată cu: $x-1$; $x+1$; $x-2$; $x+2$; $x-3$; $x+3$.

Să se afle restul și cîtul împărțirii polinoamelor:

8. $2x^6-11x^5+8x^4+17x^3-7x^2+13x-10$ prin $(x-4)$.

9. $3x^8-2x^7+5x^6-20x^5-16x^4+7x^3+2x^2+3x-10$ prin $(x-2)$.

10. Să se arate că polinomul

$$x^7 - 3x^6 + 2x^5 + 2x^4 - 2x^3 - 2x^2 + 3x - 1$$

este divizibil prin $(x - 1)^3$ și să se afle cîtul.

11. Să se arate că polinomul $x^5 + x^4 - 6x^3 - 14x^2 - 11x - 3$ se divide prin $(x + 1)^4$. Să se afle cîtul.

12. Polinomul $P(x) = nx^{n+1} - (n+1)x^n + 1$, unde n este întreg și pozitiv, e divizibil prin $(x - 1)^2$. Să se afle cîtul.

13. Polinomul

$$P(x) = n^2x^{n+2} - (2n^2 + 2n - 1)x^{n+1} + (n+1)^2x^n - x - 1$$

(n întreg și pozitiv) e divizibil prin $(x-1)^3$. Să se afle cîtul.

14. Să se determine m, n, p, astfel ca polinomul $P(x) = x^4 + 5x^3 + mx^2 + nx + p$ să se împartă exact cu $Q(x) = x^3 + 2x^2 + 3x + 4$ și în acest caz să se afle cîtul.

15. Să se determine a și b, astfel încît polinomul $P(x) = x^4 + ax^3 - x^2 + bx + 3$ împărțit cu $(x - 2)$ să dea restul $+5$, iar împărțit cu $(x + 3)$ să dea restul $+120$.

16. Să se determine coeficienții A și B, astfel încît polinomul $P(x) = Ax^{n+1} + Bx^n + 2$ să fie divizibil cu $(x - 1)^2$.

17. Să se determine polinomul $P(x) = x^5 + ax^2 + bx + c$, știind că împărțit cu $x - 1$; $x + 1$; $x - 2$ dă respectiv resturile $+1$; -1; $+41$.

18. Să se găsească restul împărțirii unui polinom $f(x)$ prin $x^2 + 1$.

19. Care este ordinul de multiplicitate al rădăcinii $x_0 = 2$ pentru polinomul $f(x) = x^5 - 5x^4 + 7x^3 - 2x^2 + 4x - 8$?

20. Să se determine A și B, astfel încît $Ax^4 + Bx^3 + 1$ să fie divizibil cu $(x - 1)^2$.

Exerciții. 1. Să se găsească *cîtul* și *restul* în următoarele împărțiri

1) $2x^4 - x^3 - x^2 + 3x - 2$ prin $x - 2$
2) $x^4 - x^2 + 2x - 3$ prin $x + 1$
3) $x^4 - 2x^3 - 3x + 1$ prin $x - 2$
4) $x^5 - 2x^4 + x^2 - x + 3$ prin $x + 2$
5) $x^5 - 2x^3 + x^2 - 3x + 4$ prin $x - 1$
6) $x^6 - x^4 + 2x^3 - 6x^2 + 2$ prin $x + 1$.

2. Să se arate că

1) $x^n - a^n$ este divizibil prin $x - a$,
2) $x^{2n+1} + a^{2n+1}$ este divizibil prin $x + a$.
3) $x^{2n} - a^{2n}$ este divizibil prin $x - a$ și prin $x + a$.

RĂDĂCINILE POLINOMULUI

12. La împărțirea polinomului $P(x)$ prin binomul $x - a$, prezintă o importanță deosebită cazul cînd *împărțirea se face exact.* Acest caz este strîns legat de noțiunea de *rădăcină.*

Definiție. *Numărul a se numește rădăcina polinomului $P(x)$, dacă valoarea polinomului $P(x)$ pentru $x = a$ este egală cu zero, adică $P(a) = 0$.*

Așadar, orice rădăcină a polinomului este o soluție a ecuației $P(x) = 0$.

Exemplu. Numărul -3 *este rădăcina* polinomului

$$2x^3 + 7x^2 + 5x + 6,$$

deoarece pentru $x = -3$ valoarea corespunzătoare a polinomului este egală cu zero.

Teoremă. *Pentru ca polinomul $P(x)$ să fie divizibil prin binomul $(x - a)$, este necesar și suficient ca numărul a să fie o rădăcină a polinomului $P(x)$.*

Demonstrație.

Condiția este necesară. Într-adevăr, dacă $P(x)$ se divide prin $(x - a)$, atunci are loc identitatea

$$P(x) \equiv (x - a)Q(x).$$

Dar pentru $x = a$, partea a doua, deci și $P(x)$, se anulează, adică $P(a) = 0$.

Condiția este suficientă. Într-adevăr, dacă a este o rădăcină a polinomului, atunci $P(a) = 0$.

Dar $P(a) = R$ este restul diviziunii lui $P(x)$ prin $(x - a)$.

Prin urmare, $R = 0$ și $P(x)$ se divide prin $(x - a)$.

Observare. Cîteodată, în loc să vorbim despre rădăcina polinomului $P(x)$ vorbim despre rădăcina ecuației algebrice $P(x) = 0$.

Teorema de mai sus constituie una din consecințele cele mai importante ale teoremei lui Bézout și pe care o vom reține sub forma următoare:

Pentru ca $P(x) \vdots (x - a)$, trebuie ca $P(a) = 0$, adică a să fie o rădăcină a ecuației $P(x) = 0$.

Invers, putem spune:

Dacă a este o rădăcină a ecuației $P(x) = 0$, adică $P(a) = 0$, atunci $P(x)$ este divizibil cu $(x - a)$.

13. Rădăcini multiple. Se poate întîmpla ca polinomul $P(x)$ de gradul n să se împartă nu numai la $(x - a)$, dar și la o putere oarecare a lui $(x - a)$.

În acest caz, facem convenția ca a să fie denumită *rădăcină de ordinul k de multiplicitate* a polinomului $P(x)$, dacă $P(x)$ se împarte la $(x - a)^k$, dar nu se împarte la $(x - a)^{k+1}$.

De exemplu, dacă $P(x) \vdots (x - a)^2$, dar $P(x)$ nu $\vdots (x - a)^3$, zicem că a este rădăcina dublă a lui $P(x)$ (sau este *rădăcina de ordinul de multiplicitate 2*).

De asemenea, dacă $P(x) \vdots (x - a)^3$, dar $P(x)$ nu $\vdots (x - a)^4$, zicem că a este rădăcină triplă a lui $P(x)$ (sau este *rădăcină de ordinul de multiplicitate 3*).

Exemplu. Numărul 1 este rădăcina polinomului

$$P(x) = x^5 - 2x^4 + x^3 + x^2 - 2x + 1.$$

Să se găsească ordinul de multiplicitate al acestei rădăcini. Facem schema lui Horner.

	x^5	x^4	x^3	x^2	x^1	x^0
	1	-2	1	1	-2	1
1	1	-1	0	1	-1	0

Cîtul $Q_1(x)$ Restul R_1

Avem atunci deocamdată $P(x) = (x - a) \cdot Q_1(x)$, adică

$$x^5 - 2x^4 + x^3 + x^2 - 2x + 1 = (x - 1)(x^4 - x^3 + x - 1).$$

Facem din nou schema lui Horner și pentru polinomul $Q_1(x) = x^4 - x^3 + x - 1$

	x^4	x^3	x^2	x^1	x^0
	1	-1	0	1	-1
1	1	0	0	1	0

Cîtul $Q_2(x)$ Restul R_2

Avem atunci $Q_1(x) = (x - 1)\, Q_2(x)$ sau

$$x^4 - x^3 + x - 1 = (x - 1)(x^3 + 1).$$

Se vede imediat că noul cît x^3+1 nu se mai împarte la $(x - 1)$.

În felul acesta, polinomul $P(x)$ se împarte la $(x - 1)^2$, însă nu se împarte la $(x-1)^3$, astfel că 1 este *rădăcină dublă* a lui $P(x)$ și putem scrie

$$x^5 - 2x^4 + x^3 + x^2 - 2x + 1 = (x - 1)^2(x^3 + 1).$$

Observare. La același rezultat putem ajunge în cazul de față printr-o grupare convenabilă a termenilor polinomului

$$x^5 - 2x^4 + x^3 + x^2 - 2x + 1 = x^3(x^2 - 2x + 1) +$$
$$+ (x^2 - 2x + 1) = (x^2 - 2x + 1)(x^3 + 1) = (x - 1)^2(x^3 + 1).$$

EXERCIȚII ȘI PROBLEME PROPUSE

Fără a efectua împărțirea, să se afle restul împărțirilor

1. *a)* $(3x^4 - 2x^3 + 5x^2 - x + 2) : (x - 1)$;
   b) $(x^6 - x^5 - x^4 + 3x^3 - 2x^2 + 5x - 4) : (x + 2)$.

2. *a)* $(x^4 + 2x^3 + x^2 - 4x + 6) : \left(x - \frac{1}{2}\right)$;
   b) $(x^5 - x^4 - 2x^3 + x^2 - x - 2) : \left(x + \frac{3}{5}\right)$.

3. *a)* $(x^3 + 6x^2 - 4x - 2) : (2x + 1)$;
   b) $(2x^4 - 6x^3 + 4x^2 + 8x - 2) : (2x - 3)$.

4. Să se determine pentru ce valoare a lui a polinomul $2x^5 - 3x^3 + 11x^2 - x + a$ împărțit cu $x + 2$ dă restul 3.

5. Pentru ce valoare a lui k, polinomul $2x^3 - 3x^2 + kx - 6$ împărțit cu $x - 2$ dă un rest egal cu 6?

6. Se dă polinomul $2x^3 - 3x^2 - ax + b$. Să se determine valorile numerice ale lui a și b, astfel încît polinomul împărțit cu $x+1$ să dea un rest egal cu 7 și împărțit cu $x-1$ să dea un rest egal cu 5.

7. Se dă fracția $\dfrac{x^5 + x^4 - 5x^3 - 5x^2 + 4x + 4}{x^4 + 5x^3 + 5x^2 - 5x - 6}$.

Folosind teorema lui Bézout, să se spună dacă fracția poate fi simplificată cu: $x-1$; $x+1$; $x-2$; $x+2$; $x-3$; $x+3$.

Să se afle restul și cîtul împărțirii polinoamelor:

8. $2x^6-11x^5+8x^4+17x^3-7x^2+13x-10$ prin $(x-4)$.

9. $3x^8-2x^7+5x^6-20x^5-16x^4+7x^3+2x^2+3x-10$ prin $(x-2)$.

10. Să se arate că polinomul

$$x^7 - 3x^6 + 2x^5 + 2x^4 - 2x^3 - 2x^2 + 3x - 1$$

este divizibil prin $(x - 1)^3$ și să se afle cîtul.

11. Să se arate că polinomul $x^5 + x^4 - 6x^3 - 14x^2 - 11x - 3$ se divide prin $(x + 1)^4$. Să se afle cîtul.

12. Polinomul $P(x) = nx^{n+1} - (n+1)x^n + 1$, unde n este întreg și pozitiv, e divizibil prin $(x-1)^2$. Să se afle cîtul.

13. Polinomul

$$P(x) = n^2x^{n+2} - (2n^2 + 2n - 1)x^{n+1} + (n + 1)^2x^n - x - 1$$

(n întreg și pozitiv) e divizibil prin $(x-1)^3$. Să se afle cîtul.

14. Să se determine m, n, p, astfel ca polinomul $P(x) = x^4 + 5x^3 + mx^2 + nx + p$ să se împartă exact cu $Q(x) = x^3 + 2x^2 + 3x + 4$ și în acest caz să se afle cîtul.

15. Să se determine a și b, astfel încît polinomul $P(x) = x^4 + ax^3 - x^2 + bx + 3$ împărțit cu $(x - 2)$ să dea restul $+5$, iar împărțit cu $(x + 3)$ să dea restul $+120$.

16. Să se determine coeficienții A și B, astfel încît polinomul $P(x) = Ax^{n+1} + Bx^n + 2$ să fie divizibil cu $(x - 1)^2$.

17. Să se determine polinomul $P(x) = x^5 + ax^2 + bx + c$, știind că împărțit cu $x - 1$; $x + 1$; $x - 2$ dă respectiv resturile $+1$; -1; $+41$.

18. Să se găsească restul împărțirii unui polinom $f(x)$ prin $x^2 + 1$.

19. Care este ordinul de multiplicitate al rădăcinii $x_0 = 2$ pentru polinomul $f(x) = x^5 - 5x^4 + 7x^3 - 2x^2 + 4x - 8$?

20. Să se determine A și B, astfel încît $Ax^4 + Bx^3 + 1$ să fie divizibil cu $(x - 1)^2$.

CAPITOLUL III

CEL MAI MARE DIVIZOR COMUN ȘI CEL MAI MIC MULTIPLU COMUN AI NUMERELOR ȘI POLINOAMELOR

CEL MAI MARE DIVIZOR COMUN ȘI CEL MAI MIC MULTIPLU COMUN AI NUMERELOR

DIVIZORUL COMUN ȘI CEL MAI MARE DIVIZOR COMUN A DOUĂ NUMERE

1. Am văzut că numerele naturale se împart în trei clase:

1) *Numere prime* care nu au decît doi divizori: unitatea și ele însele.

2) *Numere compuse* care în afară de unitate și de ele însele mai au și alți divizori.

3) *Unitatea* care nu face parte nici dintre numerele prime, nici dintre cele compuse. Ea este singurul număr care are un singur divizor.

Să luăm două numere compuse, de exemplu 36 și 48, și să scriem toți divizorii lor:

36 ⋮ 1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18, 36 (9 divizori)
48 ⋮ 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 16, 24, 48 (10 divizori).

Numărul divizorilor unui număr oarecare, evident, este finit; în cazul nostru, observăm că 36 are 9 divizori, iar 48 are 10 divizori.

Printre acești divizori sînt unii care figurează atît la 36, cît și la 48 și putem scrie:

(36, 48) ⋮ 1, 2, 3, 4, 6, 12.

Acești divizori, care sînt comuni celor două numere, se numesc *divizori comuni*, deci:

Prin divizor comun a două sau mai multe numere date se înțelege un număr prin care se divid toate numerele date.

În cazul nostru, numerele *36* și *48* au ca *divizori comuni* numerele: 1, 2, 3, 4, 6, 12 (6 divizori comuni).

Numărul divizorilor comuni evident că este și el *finit*.

Dintre acești divizori comuni, *cel mai mic* este evident totdeauna 1, iar *cel mai mare* (în cazul nostru 12) prezintă o importanță deosebită. El se numește *cel mai mare divizor comun*, prescurtat c.m.m.d.c., deci:

Cel mai mare divizor comun a două sau mai multe numere date este cel mai mare dintre divizorii comuni ai acestor numere.

Dacă avem două numere, a și b, cel mai mare divizor comun al lor se notează prin simbolul $(a;\ b)$ și în cele de mai jos vom folosi această notație.

În cazul numerelor 36 și 48 putem scrie $(36;\ 48) = 12$. Tot astfel, putem găsi

$$(12;\ 15) = 3; \qquad (25;\ 35) = 5; \qquad (72;\ 96) = 24.$$

NUMERE PRIME ÎNTRE ELE

2. *Se numesc* **prime între ele** *numerele al căror cel mai mare divizor comun este unitatea.*

De exemplu $(10;\ 21) = 1$.

În acest caz, *cel mai mic divizor comun*, care evident este 1, se confundă cu *cel mai mare divizor comun*.

Observare. Să nu se confunde noțiunile de *prime între ele* și *prim*. Două numere pot fi *prime între ele*, fără ca să fie și *prime* fiecare separat. De exemplu: 12, 35.

Dacă $(a;\ b;\ c;\ldots) = 1$, atunci numerele $a;\ b;\ c;\ldots$ sînt *numere prime între ele*.

Dacă fiecare dintre numerele $a, b, c, \ldots$ este *prim* cu fiecare din celelalte numere, atunci numerele $a, b, c, \ldots$ se numesc *prime două cîte două*. Este evident că în cazul a două numere, noțiunea „*prime între ele*" coincide cu noțiunea „*prime două cîte două*".

Exemplul 1. $(29;\ 53;\ 100;\ 105) = 1$, deci numerele 29, 53, 100 și 105 sînt *prime între ele* deoarece, în afară de 1, ele nu au nici un alt divizor comun. Observăm, în cazul de față, că din cele patru numere, două: 29 și 53 sînt *numere prime*, iar celelalte două: 100 și 105 sînt *numere compuse*.

Exemplul 2. $(11; 17; 24) = 1$, în cazul acesta numerele sînt nu numai *prime între ele*, dar mai sînt și *prime două cîte două*; într-adevăr $(11; 17) = 1$, $(11; 24) = 1$, $(17; 24) = 1$.

AFLAREA CELUI MAI MARE DIVIZOR COMUN AL MAI MULTOR NUMERE

3. Aflarea celui mai mare divizor comun a două sau mai multor numere este una dintre problemele importante ale aritmeticii.

În clasele elementare el se află prin *metoda descompunerii numerelor în factori primi.*

De exemplu, pentru a găsi *c.m.m.d.c.* al numerelor *540* și *576*, s-a procedat în felul următor:

1) S-au descompus întîi numerele în factori primi, găsindu-se: $540 = 2^2 \times 3^3 \times 5$, $576 = 2^6 \times 3^2$.

2) S-a luat produsul factorilor primi comuni, luați fiecare la puterea cea mai mică la care se găsesc

$(540; 576) = 2^2 \times 3^2 = 36$.

Dacă, de exemplu, s-ar fi cerut să se afle *c.m.m.d.c.* pentru numerele 540; 558; 576, s-ar fi găsit

$$1)\ 540 = 2^2 \times 3^2 \times 5; \quad 2)\ (540; 558; 576) = 2 \times 3^2 = 18.$$
$$558 = 2 \times 3^2 \times 31$$
$$576 = 2^6 \times 3^2.$$

Această metodă elementară din aritmetică, de a găsi c.m.m.d.c. al mai multor numere, cu ajutorul descompunerii numerelor în factori primi, prezintă avantajul că este expeditivă din punctul de vedere al desfășurării calculelor, are însă marele dezavantaj că metoda nu se poate aplica și în algebră, cînd va trebui să găsim c.m.m.d.c. a două polinoame.

Vom da de aceea, în cele de mai jos, o metodă, care se va putea aplica atît în aritmetică, la aflarea c.m.m.d.c. al numerelor, cît și în algebră, la aflarea c.m.m.d.c. al polinoamelor.

Vom da, în prealabil, două teoreme de care ne vom folosi în cele de mai jos, pentru *aflarea c.m.m.d.c. a două numere.*

Teorema I. *Dacă din două numere date, numărul cel mare este divizibil prin cel mic, c.m.m.d.c. al lor este numărul cel mic.*

Trebuie să arătăm că

$$\text{dacă } a \vdots b \quad \text{atunci } (a; b) = b.$$

Prin ipoteză, avem: $a \vdots b$, iar numărul mic b este evident divizibil prin el însuși $b \vdots b$, rezultă că acest număr este un divizor comun al numerelor date a și b, și anume c.m.m.d.c., deci avem: $(a; b) = b$.

Teorema II. *Dacă din două numere date, numărul cel mare nu este divizibil prin cel mic, atunci c.m.m.d.c. al acestor numere va fi același cu c.m.m.d.c. dintre numărul cel mic și restul provenit din împărțirea numărului mai mare la numărul mai mic.*

Se dau numerele naturale a și b, cu condițiile

$$1)\ a > b,\ 2)\ a \text{ nu} \vdots b, \text{ deci} \quad 3)\ a = bq + r.$$

Se cere să se demonstreze că:

$$\text{dacă } 4)\ (b; r) = c, \text{ atunci } 5)\ (a; b) = c.$$

Luăm egalitatea $a = bq + r$.

Observăm că orice *divizor comun* al numerelor a și b, divizînd pe a și primul termen bq al sumei din partea a doua, va divide și pe r; deci va fi *divizor comun* al numerelor b și r, adică al numărului cel mic b și al restului diviziunii numerelor a și b.

Invers, orice *divizor comun* al numerelor b și r va divide și suma $bq + r$, adică pe a, deci va fi un *divizor comun* al numerelor a și b.

În concluzie, c.m.m.d.c. al numerelor a și b este și c.m.m.d.c. al numerelor b și r și invers.

Deci, putem scrie $(a; b) = (b; r)$.

De exemplu, dacă luăm numerele 96 și 60, avem $96 = 60 \cdot 1 + 36$ și $(96; 60) = (60; 36)$.

Dar $(60; 36) = 12$, deci și $(96; 60) = 12$.

ALGORITMUL LUI EUCLID

4. În matematică, alături de rezolvarea unor probleme separate, joacă un rol important *schemele de rezolvare a unor categorii de probleme asemănătoare.*

Folosirea acestor scheme e tot atît de veche ca şi matematica însăşi, dar abia în timpul orînduirii feudale, o dată cu dezvoltarea comerţului, li s-a acordat o importanţă deosebită. Acestor scheme li s-a dat numele de *algoritm*.

În timpul orînduirii feudale, prin *algoritm* se înţelegeau regulile pe baza cărora se făceau cele patru operaţii aritmetice în sistemul zecimal.

În veacul al IX-lea, astfel de reguli au fost date de matematicianul arab Alhvarismi.

După numele lui, aceste reguli au fost denumite în Europa prin cuvîntul *alhovism*. Mai tîrziu, din cauza amestecării acestui cuvînt cu cuvîntul grec *aritmos* = număr, această denumire s-a transformat în *algoritm*.

Noţiunea vagă şi imprecisă de algoritm, care în primă aproximaţie se poate caracteriza ca un ansamblu de reguli bine determinate, care fiind aplicate mecanic duc la un rezultat sigur într-un mare număr de cazuri, a fost studiată din mai multe puncte de vedere, definindu-se astfel noţiunea de algoritm în mai multe feluri; cea mai interesantă, deoarece depăşeşte cadrul operaţiilor aritmetice şi e susceptibilă de aplicaţii la conducerea proceselor de producţie, este definiţia *algoritmului normal* — stabilită de savantul sovietic A. A. Markov în 1948.

Sub influenţa unor rezultate obţinute de matematicianul sovietic P.S. Novikov şi de către alţi matematicieni, precum şi datorită nevoilor impuse de automatică, în U.R.S.S. teoria algoritmelor a luat o mare dezvoltare.

Planul septenal sovietic prevede o dezvoltare deosebită a tehnicii calculului, care este strîns legată de teoria şi practica algoritmizării.

Algoritmul lui Euclid serveşte pentru găsirea celui mai mare divizor comun a două numere date, prin metoda împărţirilor succesive.

Fie a şi b, două numere naturale; dacă

$$a = b, \text{ atunci evident } (a;\ b) = a.$$

Să presupunem că numerele a şi b sînt diferite; pentru a fixa ideile, să admitem că $a > b$ şi acum să trecem la găsirea *celui mai mare divizor comun* al numerelor a şi b, prin procesul de calcul care este *algoritmul lui Euclid*.

Acest proces constă în următoarele:

1) Împărţim a cu b; avem $a = bq_1 + r_1$, (1)
unde q_1 este un număr natural, iar $r_1 < b$;
dacă $r_1 = 0$, procesul este terminat şi $(a;\ b) = b$.

2) Dacă $r_1 \neq 0$, împărţim b la r_1;
avem $b = r_1q_2 + r_2$, (2)
unde q_2 este, de asemenea, un număr natural, iar $r_2 < r_1$;
dacă $r_2 = 0$, procesul este terminat şi $(a;\ b) = (b;\ r_1) = r_1$.

3) Dacă $r_2 \neq 0$, împărţim, r_1 la r_2;
avem $r_1 = r_2 \cdot q_3 + r_3$. (3) etc.

Să arătăm că procesul este totdeauna finit, adică pentru un indice $n + 1$ anumit, restul r_{n+1} se va anula.

Să presupunem că procesul ar fi infinit; vom arăta că acest lucru nu poate să se întîmple.

Deoarece $b > r_1 > r_2 > r_3 > \ldots$, rezultă că resturile, fiind numere întregi pozitive descrescătoare, nu pot descreşte nemărginit, prin urmare, procesul este finit şi pentru un anumit indice „$n + 1$", avem

$$r_{n+1} = 0.$$

Ultima egalitate a acestui proces va fi

$$r_{n-1} = r_nq_{n+1}.$$

Să scriem tot şirul de împărţiri cu egalităţile respective ce rezultă din ele

1) $a : b = q_1$ (rest r_1) de unde $a = b \cdot q_1 + r_1$
2) $b : r_1 = q_2$ (rest r_2) de unde $b = r_1 \cdot q_2 + r_2$
3) $r_1 : r_2 = q_3$ (rest r_3) de unde $r_1 = r_2q_3 + r_3$
4) $r_2 : r_3 = q_4$ (rest r_4) de unde $r_2 = r_3q_4 + r_4$
5) ....
....

$n-1$) $r_{n-3} : r_{n-2} = q_{n-1}$ (rest r_{n-1}) de unde $r_{n-3} = r_{n-2} \cdot q_{n-1} + r_{n-1}$

n) $r_{n-2} : r_{n-1} = q_n$ (rest r_n) de unde $r_{n-2} = r_{n-1} \cdot q_n + r_n$

$n+1$) $r_{n-1} : r_n = q_{n+1}$ (fără rest) de unde $r_{n-1} = r_n \cdot q_{n+1}$.

Să arătăm că ultimul rest diferit de zero (sau, ceea ce e tot una, ultimul împărţitor), adică numărul r_n, este c.m.m.d.c. al numerelor a şi b.

În adevăr, în virtutea teoremei a II-a, demonstrată mai sus, putem scrie

$(a;\, b) = (b;r_1) = (r_1;\, r_2) = (r_2;\, r_3) = (r_3;\, r_4) = \ldots =$
$= (r_{n-2};\; r_{n-1}) = (r_{n-1};\, r_n)$, iar în virtutea teoremei I, $(r_{n-1};\, r_n) = r_n$, deoarece $r_{n-1} \vdots r_n$.

Deci am demonstrat că

$$\boxed{(a;\, b) = r_n}$$

Operația de aflare a *celui mai mare divizor comun* a două numere a și b se dispune astfel

Cîturile	q_1	q_2	q_3	q_4	. . . . .		q_{n-1}	q_n	q_{n+1}
a	b	r_1	r_2	r_3	. . .	r_{n-3}	r_{n-2}	r_{n-1}	r_n
r_1	r_2	r_3	r_4	. . .	. . .	r_{n-1}	r_n	0	Resturile

E x e m p l u l I. Să se găsească *c.m.m.d.c.* al numerelor *1679* și *345.*

Începem împărțirile succesive; vom găsi

1) $1\,679 : 345 = 4$ deci $1\,679 = 345 \cdot 4 + 299$
$1\,380$
$=299$ și $(1\,679;345) = (345;299)$.

2) $345 : 299 = 1$ deci $345 = 299 \cdot 1 + 46$
299
$=46$ și $(345;299) = (299;46)$.

3) $299 : 46 = 6$ deci $299 = 46 \cdot 6 + 23$
276
$=23$ și $(299;\, 46) = (46;23)$.

4) $46 : 23 = 2$ deci $(46;23) = 23$, pentru că $46 \vdots 23$
46
$==$

Așa că am găsit $(1\,679;345) = 23$.

Calculele făcute se pot rezuma în tabloul următor

Cîturi	4	1	6	2
1 679	345	299	46	23
299	46	23	0	Resturi

și (1 679; 345) = 23.

E bine să ne obișnuim ca toate calculele intermediare să le facem mintal, sau, eventual, separat și problema s-o începem direct cu acest tablou.

E x e m p l u l II. Să se găsească *c.m.m.d.c.* al numerelor 852 și 192.

Vom avea direct tabloul

Cîturi	4	2	3	2
852	192	84	24	12
84	24	12	0	Resturi

deci $(852;192) = 12$

Întrucît *c.m.m.d.c.* a două numere se găsește prin algoritmul lui Euclid printr-un șir de împărțiri succesive, metoda întrebuințată se mai numește și *metoda împărțirilor succesive.*

Acum putem să dăm și o regulă.

Pentru a găsi c.m.m.d.c. a două numere prin metoda împărțirilor succesive (algoritmul lui Euclid) împărțim numărul cel mai mare prin cel mai mic, după aceea pe cel mai mic prin primul rest, apoi primul rest prin al doilea, pe urmă restul al doilea prin al treilea etc., pînă ce se obține un rest zero. Atunci ultimul împărțitor (adică ultimul rest diferit de zero) va fi cel mai mare divizor comun al numerelor date.

O b s e r v a r e a I: *Cel mai mare divizor comun a două sau mai multe numere se mai numește și* **codivizor maxim.**

O b s e r v a r e a II: Dacă ultimul rest este egal cu *unitatea*, numerele date nu au alt divizor comun decît unitatea; astfel de numere se știe că sînt prime între ele.

De exemplu, să se găsească c.m.m.d.c. al numerelor 29 și 105. Avem

	3	1	1	1	1	1	3
105	29	18	11	7	4	3	1
18	11	7	4	3	1	0	

Deci $(29; 105) = 1$ și cele două numere sînt *prime între ele*.

Observarea III: Dacă două resturi consecutive se recunosc ca *prime între ele*, putem să nu mai continuăm împărțirile, căci ultimul rest va fi 1 și deci numerele date vor fi și ele *prime între ele*.

Observarea IV: Algoritmul ui Euclid este de preferat cînd descompunerea în factori primi este dificilă.

PROPRIETĂȚILE FUNDAMENTALE ALE CELUI MAI MARE DIVIZOR COMUN

5. C.m.m.d.c. a două numere are următoarele proprietăți mai importante:

I. *Orice divizor comun al numerelor a și b este un divizor al numărului* $(a; b)$.

Se dă $(a; b)=r_n$; $a \vdots d$; $b \vdots d$.

Se cere să se demonstreze că $r_n \vdots d$.

Demonstrație:

Scriem șirul de egalități al algoritmului lui Euclid, prin care găsim *cel mai mare divizor comun* al numerelor a și b.

1) $a = bq_1 + r_1$
2) $b = r_1q_2 + r_2$
3) $r_1 = r_2q_3 + r_3$

. . . .

$n-1)$ $r_{n-3} = r_{n-2}\, q_{n-1} + r_{n-1}$

$n)$ $r_{n-2} = r_{n-1}\, q_n + r_n$

$n+1)$ $r_{n-1} = r_n \cdot q_{n+1}$

Din acest algoritm am căpătat $(a; b) = r_n$, ceea ce e dat în ipoteză. $(r_{n+1} = 0)$.

Din aceste egalități deducem treptat, pe baza ipotezelor $a \vdots d$, $b \vdots d$.
Din egalitatea 1) dacă $a \vdots d$; $b \vdots d$, atunci și $r_1 \vdots d$
Din egalitatea 2) dacă $b \vdots d$; $r_1 \vdots d$, atunci și $r_2 \vdots d$
Din egalitatea 3) dacă $r_1 \vdots d$; $r_2 \vdots d$, atunci și $r_3 \vdots d$

. . . .

În mod analog, treptat vom deduce și

$r_{n-3} \vdots d$; $r_{n-2} \vdots d$; $r_{n-1} \vdots d$ și în sfîrșit $r_n \vdots d$.

Am văzut deci că divizorul comun d al numerelor date a și b, divizînd aceste numere, divide restul r_1 al împărțirii lor și în mod analog se vede că va divide și resturile sucesive $r_2, r_3, r_4, \ldots$ ale împărțirilor făcute pentru aflarea c.m.m.d.c., deci și pe ultimul rest r_n, care este chiar cel mai mare divizor comun al lor.

În concluzie: *dacă un număr divide două numere, divide și pe cel mai mare divizor comun al lor.*

Exemplu $(48; 120) = 24$.
$48 \vdots 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 16, 24, 48,$
$120 \vdots 1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 10, 12, 15, 20, 24, 30, 40, 60, 120,$
$(48; 120) \vdots 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24$, iar
$24 \vdots 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24.$

Era evident că 24, c.m.m.d.c. al numerelor 48 și 120 este divizibil cu toți divizorii comuni ai celor două numere.

II. Invers: *Orice divizor al numărului* $(a; b)$ *este un divizor comun al numerelor a și b.*

Se dă $(a; b) = r_n$; $r_n \vdots d$.

Se cere să se demonstreze că $a \vdots d$ și $b \vdots d$.

Demonstrație.

Scriem din $(a; b) = r_n$ $\qquad a = a' \cdot r_n$ și $b = b' \cdot r_n$
și din $r_n \vdots d$ $\qquad r_n = r' \cdot d$

Înlocuind pe r_n cu valoarea $r' \cdot d$, avem

$$a = a'r'd \text{ și } b = b'r'd,$$

deci a și b se prezintă ca niște produse și se știe că fiecare din aceste numere este divizibil cu fiecare factor în parte, deci vom avea $a \vdots d$ și $b \vdots d$, adică tocmai ceea ce era de demonstrat.

Exemplu $(72; 180) = 36$.
$36 \vdots$ *1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18, 36.*
$72 \vdots$ *1, 2, 3, 4, 6*, 8, *9, 12, 18*, 24, *36*, 72.
$180 \vdots$ *1, 2, 3, 4*, 5, *6, 9*, 10, *12*, 15, *18*, 20, 30, *36*, 45, 60, 90, 180.

Am scris aplecat pe aceia dintre divizorii lui 72 și 180 care se găsesc și la 36; am observat că

(72 și 180) $\vdots$ 1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18, 36,

deci fiecare divizor al lui $(72; 180) = 36$ este un *divizor comun* al numerelor 72 și 180.

III. *Dacă vom înmulți sau vom împărți două numere date a și b cu un număr natural oarecare m, atunci și cel* *mai mare divizor comun al lor se va înmulţi sau se va împărţi cu acelaşi număr m.*

Se dă $(a;\ b) = r_n$.

Să se demonstreze

$$(am;\ bm) = r_n m \text{ şi } \left(\frac{a}{m};\ \frac{b}{m}\right) = \frac{r_n}{m}.$$

Demonstraţie.

Ne vom referi tot la şirul de egalităţi din algoritmul lui Euclid. Se ştie că, avînd egalitatea împărţirii cu rest

$$D = I \cdot Q + R,$$

dacă *înmulţim* sau *împărţim* deîmpărţitul D şi împărţitorul I prin acelaşi număr, cîtul Q nu se schimbă, iar restul R *se înmulţeşte* sau *se împarte* şi el cu acelaşi număr.

Deci în şirul de egalităţi din algoritmul lui Euclid, dacă înmulţim sau împărţim numerele date a şi b prin acelaşi număr m, tot şirul de resturi şi, prin urmare, şi ultimul r_n, care este *cel mai mare divizor comun* al numerelor a şi b, se înmulţeşte sau se împarte cu acelaşi număr m.

E x e m p l u l I. Am văzut mai sus că $(48;\ 120) = 24$. Înmulţind pe fiecare din cele 2 numere cu 3, vom avea

$$(48 \cdot 3;\ 120 \cdot 3) = (144;\ 360) = 72,$$

deci şi *c.m.m.d.c.* a fost înmulţit cu 3.

E x e m p l u l II. Am avut $(72;\ 180) = 36$.

Să împărţim pe fiecare din cele două numere date cu 4, vom avea

$$\left(\frac{72}{4};\ \frac{180}{4}\right) = (18;\ 45) = 9,$$

deci şi c.m.m.d.c. s-a micşorat de patru ori.

O b s e r v a r e. Putem să ne folosim de ultima proprietate, cînd căutăm *c.m.m.d.c.* a două numere date, ca să simplificăm lucrarea în cazurile în care se văd uşor de la început divizorii comuni ai numerelor date.

În asemenea cazuri, putem împărţi numerele date printr-un divizor comun al lor şi să găsim c.m.m.d.c. al cîturilor obţinute; după aceea vom înmulţi c.m.m.d.c. găsit prin numărul cu care am împărţit la început numerele date. Produsul obţinut va fi c.m.m.d.c. căutat.

E x e m p l u. Să se afle c.m.m.d.c. al numerelor 5 400 şi 7 200.

Vom judeca astfel

$$\left(\frac{5\,400}{100};\ \frac{7\,200}{100}\right) = (54;\ 72) = 18,$$

deci $(5\,400;\ 7\,200) = 18 \times 100 = 1\,800$.

IV. *Cîturile împărţirii a două numere* **a** *şi* **b** *prin cel mai mare divizor comun al lor* $\mathbf{r}_n = (\mathbf{a};\ \mathbf{b})$ *sînt numere prime între ele.*

Proprietatea este o consecinţă imediată a proprietăţii precedente (în cazul împărţirii).

Am văzut că dacă

$$(a;\ b) = r_n, \text{ atunci } \left(\frac{a}{m};\ \frac{b}{m}\right) = \frac{r_n}{m}.$$

Deci $\left(\frac{a}{r_n};\ \frac{b}{r_n}\right) = \frac{r_n}{r_n} = 1$, dar se ştie că dacă *c.m.m.d.c.* a două numere este 1, *acele numere sînt prime între ele.*

E x e m p l u. Să luăm numerele *84*; *120*.

C.m.m.d.c. al lor $(84;\ 120) = 12$.

Să împărţim cele două numere cu 12, c.m.m.d.c. al lor. Vom avea

$$\left(\frac{84}{12};\ \frac{120}{12}\right) = (7;\ 10) = 1,$$

deci cele două cîturi sînt prime între ele.

V. *Cînd cîturile a două numere* **a** *şi* **b** *printr-un acelaşi număr* **d** *sînt prime între ele, cele două numere admit de c.m.m.d.c. chiar pe* **d**.

Dacă $a = a'd$ şi $b = b'd$, iar $(a';\ b') = 1$, atunci $(a;\ b) = d$.

Să notăm $(a;\ b) = d'$.

În baza proprietăţii a III-a, putem scrie

$$\left(\frac{a}{d};\ \frac{b}{d}\right) = \frac{d'}{d}, \text{ dar } \frac{a}{d} = \frac{a'd}{d} = a' \text{ şi } \frac{b}{d} = \frac{b'd}{d} = b'$$

şi, conform ipotezei

$$(a';\ b') = 1 \text{ deci } \frac{d'}{d} = 1 \text{ sau } d' = d,$$

adică $(a;\ b) = d$, ceea ce era de demonstrat.

Observare. Teorema a V-a este reciproca teoremei a IV-a. Reunindu-le într-una singură, putem spune: *condiția necesară și suficientă ca numărul* **d** *să fie c.m.m.d.c. al numerelor* **a** *și* **b** *este următoarea: citurile împărțirii numerelor* **a** *și* **b** *cu numărul* **d** *să fie numere prime între ele.*

VI. Teoremă asupra divizibilității produsului a două numere printr-un număr prim față de unul din factorii produsului.

Dacă produsul a doi factori se împarte fără rest printr-un număr oarecare, prim cu unul din factorii produsului, atunci celălalt factor este divizibil cu acest număr.

Se dă $N_1N_2 \vdots d$ și $(N_1;\ d) = 1$.

Se cere să se demonstreze că $N_2 \vdots d$.

Demonstrație.

Din $(N_1;\ d) = 1$ rezultă că $(N_1N_2;\ dN_2) = N_2$ în baza proprietății a III-a că dacă două numere se înmulțesc cu un același număr, c.m.m.d.c. al lor se înmulțește și el cu acel număr.

Cum $N_1N_2 \vdots d$ și $dN_2 \vdots d$, rezultă că $(N_1N_2;\ dN_2) \vdots d$, în baza proprietății I că orice divizor comun a două numere este un divizor și al c.m.m.d.c. al celor două numere.

Dar $(N_1N_2;\ dN_2) = N_2$ (de mai sus).

De unde rezultă, în sfîrșit, $N_2 \vdots d$, ceea ce era de demonstrat.

Exemplu. $7 \cdot 80 = 560$.

$7 \cdot 80 \vdots 20$, pentru că $560 \vdots 20$, dar $(7;\ 20) = 1$ sînt prime între ele, deci $80 \vdots 20$, adică al doilea factor se divide cu 20.

VII. Teoremă asupra divizibilității unui număr dat prin produsul a două numere prime între ele.

Dacă un număr dat se divide separat prin fiecare din două numere prime între ele, atunci acel număr se divide și prin produsul lor.

Dacă $\begin{matrix} N \vdots a_1 \\ N \vdots a_2 \end{matrix}$ și $(a_1;\ a_2) = 1$ (sînt prime între ele), să se demonstreze că $N \vdots a_1a_2$.

Demonstrație.

Din $N \vdots a_1$ rezultă că putem scrie $N = a_1q_1$.

Din $N \vdots a_2$ „ „ „ „ $N = a_2q_2$.

Atunci avem $a_1q_1 = a_2q_2$, de unde putem scoate

	sau	
$q_2 = \dfrac{a_1q_1}{a_2}$ este număr natural		$q_1 = \dfrac{a_2q_2}{a_1}$ este număr natural
deci		deci
$a_1q_1 \vdots a_2$, dar $(a_1;\ a_2) = 1$		$a_2q_2 \vdots a_1$, dar $(a_2;\ a_1) = 1$

de unde, în baza teoremei precedente că *dacă produsul a doi factori se împarte fără rest printr-un număr oarecare prim cu unul din factorii produsului, atunci celălalt factor este divizibil cu acest număr*, avem

$q_1 \vdots a_2$; înmulțim cu a_1	$q_2 \vdots a_1$; înmulțim cu a_2
$a_1q_1 \vdots a_1a_2$ sau în sfîrșit	$a_2q_2 \vdots a_1a_2$ sau în sfîrșit
$\boxed{N \vdots a_1a_2}$	$\boxed{N \vdots a_1a_2}$

Deci teorema este demonstrată.

Consecință.

Pe baza teoremei precedente, se poate da *regula de divizibilitate* printr-un *număr compus*, care poate fi pus sub forma unui *produs de două numere prime între ele.*

Astfel de numere compuse putem avea

$6 = 2 \cdot 3$; $12 = 3 \cdot 4$; $15 = 3 \cdot 5$; $18 = 2 \cdot 9$

$22 = 2 \cdot 11$; $24 = 3 \cdot 8$; $36 = 4 \cdot 9$; $40 = 5 \cdot 8$ etc.

Astfel că putem da următoarele reguli de divizibilitate:

1) *Pentru ca un număr să fie divizibil prin 6, este necesar și suficient ca acel număr să se dividă prin 2 și prin 3.*

2) *Pentru ca un număr să fie divizibil prin 12, este necesar și suficient ca acel număr să se dividă prin 3 și prin 4.*

3) *Pentru ca un număr să fie divizibil prin 15, este necesar și suficient ca acel număr să se dividă prin 3 și prin 5.*

Și tot așa se pot da regulile de divizibilitate pentru celelalte numere compuse de mai sus și, în general, pentru orice număr compus care îndeplinește condiția de a fi un produs de două numere prime între ele.

Observare. Trebuie să fim foarte atenți asupra aplicării teoremei precedente; ea este valabilă *numai atunci* cînd *cele două numere sînt numere prime între ele.*

Dacă însă cele două numere nu sînt numere prime între ele, atunci numărul dat, cu toate că se divide separat prin fiecare număr, se poate întîmpla să nu se dividă prin produsul lor.

Exemplu:

$30 \vdots 2$; $30 \vdots 6$, dar 30 nu se divide cu $2 \cdot 6$, adică cu 12.

Se vede că *nu putem* da regula de divizibilitate cu 12 astfel:

Un număr e divizibil cu 12, dacă e divizibil și cu 2 și cu 6.

Numerele 2 și 6 nu sînt prime între ele, deci regula astfel enunțată nu mai este corectă.

REZUMAT ASUPRA PROPRIETĂȚILOR CELUI MAI MARE DIVIZOR COMUN

Pentru a avea o vedere mai clară și de ansamblu asupra proprietăților celui mai mare divizor comun, vom face următorul tablou rezumativ:

Nr. crt.	Enunțul teoremei	Ipoteza	Concluzia	Caz numeric
I	Orice divizor comun a două numere este un divizor și al c.m.m.d.c. al lor.	$(a; b) = r_n$ $a \vdots d$ $b \vdots d$	$r_n \vdots d$	$(36; 96) = 12$ $36 \vdots 4$ $96 \vdots 4$ deci și $12 \vdots 4$
II	*Invers*: Orice divizor al c.m.m.d.c. a două numere este un divizor comun al celor două numere.	$(a; b) = r_n$ $r_n \vdots d$	$a \vdots d$ $b \vdots d$	$(72; 180) = 36$ $36 \vdots 9$ atunci și $72 \vdots 9$; $180 \vdots 9$
III	Dacă vom înmulți sau împărți două numere date a și b cu un număr natural oarecare m, atunci și c.m.m.d.c. al lor se va înmulți sau se va împărți cu același număr m.	$(a; b) = r_n$	$(am; bm) = r_n m$ și $\left(\frac{a}{m}; \frac{b}{m}\right) = \frac{r_n}{m}$.	Dacă $(36; 96) = 12$ atunci luînd $36 \cdot 10 = 360$ $96 \cdot 10 = 960$ $(360; 960) = 120$ și $\frac{36}{4} = 9$; $\frac{96}{4} = 24$ $(9; 24) = 3 = \frac{12}{4}$

Nr. crt.	Enunțul teoremei	Ipoteza	Concluzia	Caz numeric
IV	Cîturile a două numere prin c.m.m.d.c. al lor sînt numere prime între ele.	$(a; b) = r_n$	$\left(\frac{a}{r_n}; \frac{b}{r_n}\right) = 1$	Dacă $(72; 120) = 24$ și luăm $72 : 24 = 3$ $120 : 24 = 5$ atunci $(3; 5) = 1$
V	*Invers*: Cînd cîturile a două numere a și b printr-un același număr d sînt prime între ele, cele două numere admit ca c.m.m.d.c. chiar pe d.	$a = a' \cdot d$ $b = b' \cdot d$ $(a'; b') = 1$	$(a; b) = d$	Dacă avem $24 : 8 = 3$ $40 : 8 = 5$ și $(3; 5) = 1$ atunci $(24; 40) = 8$
VI	Dacă produsul a doi factori N_1 și N_2 este divizibil printr-un număr oarecare d, prim cu unul din factorii produsului, atunci celălalt factor va fi divizibil cu acest număr.	$N_1 N_2 \vdots d$ $(N_1; d) = 1$	$N_2 \vdots d$	$7 \cdot 80 = 560$ $560 \vdots 20$ și $(7; 20) = 1$ atunci $80 \vdots 20$
VII	Dacă un număr dat se divide separat prin două numere prime între ele, atunci acel număr se divide și cu produsul lor. *Consecință.* Regula de divizibilitate cu numere compuse ca 6, 12, 15 etc.	$N \vdots a_1$ $N \vdots a_2$ $(a_1; a_2) = 1$	$N \vdots a_1 a_2$	$144 \vdots 8$ $144 \vdots 9$ și $(8; 9) = 1$ atunci $144 \vdots 72$

CEL MAI MARE DIVIZOR COMUN A TREI SAU MAI MULTE NUMERE

6. Luăm mai multe numere naturale $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ în număr finit.

Numărul divizorilor unuia dintre aceste numere, de exemplu al lui a_k, nu este mai mare decît însuși numărul a_k;

rezultă atunci că numerele date vor avea un număr finit de *divizori comuni*, dintre care unul va fi *cel mai mare*.

Definiție. *Se numește cel mai mare divizor comun al mai multor numere naturale, numărul cel mai mare care divide pe fiecare din numerele date.*

Cel mai mare divizor comun al numerelor $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ se notează, ca și în cazul a două numere, cu simbolul

$$(a_1;\ a_2;\ a_3;\ \ldots;\ a_n).$$

7. *Ca să găsim c.m.m.d.c. al mai multor numere, este suficient să găsim mai întîi c.m.m.d.c. a două numere, după aceea c.m.m.d.c. al numărului găsit și al celui de-al treilea număr ș.a.m.d., pînă cînd vom epuiza toate numerele.*

Ultimul c.m.m.d.c. va fi c.m.m.d.c. al tuturor numerelor date.

În practică, deci, aflarea c.m.m.d.c. al mai multor numere se reduce la aflarea c.m.m.d.c. a două numere.

Se dau numerele $a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots, a_n$ și se cere să aflăm c.m.m.d.c. al lor.

Calculăm mai întîi $(a_1;\ a_2) = d_2$, pe urmă avem treptat

$$(a_1;\ a_2;\ a_3) = (d_2;\ a_3) = d_3$$

$$(a_1;\ a_2;\ a_3;\ a_4) = (d_3;\ a_4) = d_4 \text{ etc.}$$

Exemplul I. Să se calculeze (8; 12; 30; 96).

Avem treptat:

$(8;\ 12) = 4$
$(4;\ 30) = 2$ Deci $(8;\ 12;\ 30;\ 96) = 2$.
$(2;\ 96) = 2$.

Exemplul II. Să se calculeze c.m.m.d.c. al numerelor 840, 720, 640, 260.

Vom găsi, de asemenea, treptat

$(840;\ 720) = 120$
$(120;\ 640) = 40$ Deci $(840;\ 720;\ 640;\ 260) = 20$.
$(\ 40;\ 260) = 20$.

8. **Aplicarea c.m.m.d.c. la rezolvarea unor probleme aritmetice.** C.m.m.d.c. se poate folosi într-o serie de cazuri, pentru rezolvarea unor probleme aritmetice.

Ca exemplu, să considerăm următoarea problemă:

Problemă. Avem 320 de nuci, 240 de bomboane și 200 de prăjituri. Care este numărul cel mai mare de pachete identice ce se pot face din aceste lucruri, pentru a fi împărțite unor copii, și cîte nuci, cîte bomboane și cîte prăjituri va avea fiecare pachet?

Pentru a face pachete identice, este necesar să împărțim 320 de nuci, 240 de bomboane și 200 de prăjituri prin același număr. Pentru ca numărul de pachete să fie cel mai mare posibil, trebuie să împărțim numerele 320, 240 și 200 prin cel mai mare comun divizor al lor, care este 40.

Deci din 320 de nuci, 240 de bomboane și 200 de prăjituri se pot face cel mult 40 de pachete identice și în fiecare pachet vom avea: $320:40 = 8$ nuci, $240:40 = 6$ bomboane și $200:40 = 5$ prăjituri.

MULTIPLU COMUN ȘI CEL MAI MIC MULTIPLU COMUN AI MAI MULTOR NUMERE

9. **Definiții:**

1) *Prin multiplu comun al mai multor numere înțelegem un număr care este divizibil cu fiecare din numerele date.*

De exemplu, dacă luăm numerele 12 și 15, constatăm că numărul 12 are ca multipli numerele 24, 36, 48, 60 etc., numărul 15 are ca multipli numerele 30, 45, 60, 75, 90 etc.

Printre multiplii numerelor 12 și 15, avem unii care se găsesc și la 12 și la 15, adică sînt *comuni* celor două numere și care se numesc *multipli comuni*.

Pentru numerele 12 și 15 avem atunci *multiplii comuni* 60, 120, 180, 240 etc.

Șirul multiplilor unui număr este fără sfîrșit.

Șirul multiplilor comuni este și el, evident, fără sfîrșit. Dintre acești multipli comuni, o importanță deosebită are cel mai mic dintre ei și care se numește *cel mai mic multiplu comun*.

2) *Prin* **cel mai mic multiplu comun** *al mai multor numere înțelegem pe* **cel mai mic** *dintre toți multiplii comuni ai lor, adică* **cel mai mic număr** *care este divizibil cu fiecare din numerele date.*

În practica școlară, în clasele elementare, cel mai mic multiplu comun al mai multor numere se notează pentru prescurtare cu c.m.m.m.c.

Noi vom folosi simbolul [ ], așa că pentru două numere a și b vom scrie $[a; b]$, pentru trei numere a, b, c vom scrie $[a; b; c]$, iar în cazul a n numere $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ se scrie $[a_1; a_2; a_3; \ldots; a_n]$.

Observare. În loc de cel mai mic multiplu comun, se mai folosește uneori și numirea de comultiplu minim.

10. Aflarea c.m.m.m.c. a două numere.

Aflarea *celui mai mic multiplu comun* a două sau mai multe numere constituie și ea una din problemele importante ale aritmeticii.

În clasele inferioare, el se află ca și c.m.m.d.c., tot prin *metoda descompunerii numerelor în factori primi.*

De exemplu, pentru a găsi c.m.m.m.c. al numerelor 48 și 72, s-a procedat în felul următor:

S-au descompus întîi numerele în factori primi, găsindu-se:

$$48 = 2^4 \times 3, \qquad 72 = 2^3 \times 3^2.$$

S-a luat apoi produsul tuturor factorilor primi (și cei comuni și cei necomuni), luați fiecare la puterea cea mai mare la care se găsesc:

$$[48;\ 72] = 2^4 \times 3^2 = 144.$$

Dacă, de exemplu, s-ar fi cerut să se găsească c.m.m.m.c. al numerelor 48, 72 și 80, s-ar fi găsit

$$48 = 2^4 \times 3 \qquad [48;\ 72;\ 80] = 2^4 \times 3^2 \times 5 = 720.$$
$$72 = 2^3 \times 3^2$$
$$80 = 2^4 \times 5.$$

Această metodă elementară din aritmetică, de a găsi c.m.m.m.c. al mai multor numere, cu ajutorul descompunerii numerelor în factori primi, ca și în cazul celui mai mare divizor comun, prezintă avantajul că este expeditivă din punctul de vedere al desfășurării calculelor, are însă marele dezavantaj că, de multe ori, descompunerea în factori primi este adeseori dificilă, mai ales în algebră (la polinoame).

Vom da de aceea mai jos o metodă, care se va putea aplica atît în aritmetică la aflarea c.m.m.m.c. al numerelor, cît și în algebră, la aflarea c.m.m.m.c. al polinoamelor.

11. Teoreme pentru găsirea c.m.m.m.c. a două numere.

Teorema I. *Orice multiplu comun a două numere a și b este divizibil cu $\frac{ab}{(a;b)}$, adică cu cîtul dintre produsul celor două numere și c.m.m.d.c. al lor.*

Demonstrație.

Cele două numere fiind a și b,

fie $(a; b) = d$, (1) adică $a = a'd$ (2), $b = b'd$ (3), unde $(a'; b') = 1$. (4

Orice număr M, multiplu comun al numerelor a și b, trebuie să fie mai întîi multiplu al numărului a, adică

$$M = ma \qquad (5)$$

sau, ținînd seama de (2), $\quad M = ma'd.$ (6)

Dar M trebuie să fie multiplu și al numărului b, deci trebuie să avem $M \vdots b$(7) sau, după relația (6), $ma'd \vdots b$ (8).

Aceasta înseamnă că cîtul dintre $ma'd$ și b sau — dacă înlocuim pe b cu valoarea sa $b'd$ din relația (3) — cîtul dintre $ma'd$ și $b'd$ trebuie să fie număr natural.

Deci $\frac{ma'd}{b'd} = \frac{ma'}{b'}$ este număr natural (9), adică $ma' \vdots b'$ (10) și din relația (4) $(a'; b') = 1$ urmează că $m \vdots b'$ (11).

Putem pune atunci $m = k \cdot b'$ (12), unde k este număr natural.

Atunci, din relația (6) $M = ma'd$ și relația (12), vom găsi $M = ka'b'd$ (13).

Dar din relația (2) avem $a' = \frac{a}{d}$ (2'),

iar din relația (3) avem $b' = \frac{b}{d}$ (3').

Înlocuindu-le în relația (13), vom găsi

$$M = k \cdot \frac{a}{d} \cdot \frac{b}{d} \cdot d = k \cdot \frac{ab}{d}, \text{ dar } d = (a;\ b) \text{ din (1).}$$

Deci avem în sfîrșit

$\boxed{M = k \cdot \frac{ab}{(a;\ b)}}$ (14) și teorema este demonstrată.

Am arătat, prin formula (14), că $M \vdots \frac{ab}{(a;b)}$, adică un multiplu al numerelor a și b este divizibil cu $\frac{ab}{(a;b)}$.

Teorema II. *Cel mai mic multiplu comun al numerelor a și b este egal cu $\frac{ab}{(a;b)}$.*

În teorema precedentă am stabilit că orice multiplu al numerelor a și b este de forma $M = k \cdot \frac{ab}{(a;b)}$.

În acest produs, factorul k este arbitrar, putînd lua orice valoare, în schimb al doilea factor este un număr determinat.

Înseamnă că produsul va avea valoarea cea mai mică atunci cînd k va fi numărul natural cel mai mic, adică unitatea.

În concluzie, c.m.m.m.c. al numerelor a și b este egal cu $\frac{ab}{(a;b)}$, adică avem

$$\boxed{[a;b] = \frac{ab}{(a;b)}}$$,deci teorema este demonstrată.

Observare. În practică este mai comod ca pentru aflarea c.m.m.m.c. a două numere să folosim alte formule, pe care le putem scoate din relația

(13) $M = ka'b'd$

(2′) $a' = \frac{a}{d}$; (3′) $b' = \frac{b}{d}$; vom lua $k = 1$.

Înlocuim în (13) întîi numai pe a', apoi numai pe b'. Avem

$$1)\ M = \frac{a}{d} \cdot b'd = a \cdot b'.$$

$$2)\ M = a' \frac{b}{d} \cdot d = a'b.$$

Deci avem formulele practice

$$[a;b] = a \cdot b' \quad \text{și} \quad [a;b] = a'b,$$

unde reținem faptul că $a' = \frac{a}{d}$, $b' = \frac{b}{d}$, iar $d = (a;b)$.

Exemplul I. Să se găsească *c.m.m.m.c.* al numerelor 75 și 175.

Aflăm întîi c.m.m.d.c. al celor două numere, cu algoritmul lui Euclid.

	2	3
175	75	25
25	0	

, deci $(75; 175) = 25$

$$[75; 175] = \frac{75 \cdot 175}{25} = 3 \cdot 175 = 75 \cdot 7 = 525.$$

Exemplul II. Să se găsească c.m.m.m.c. al numerelor 315 și 72.

Aflăm la fel întîi c.m.m.d.c.

	4	2	1	2
315	72	27	18	9
27	18	9	0	

, deci $(315; 72) = 9$.

Apoi $[315; 72] = \frac{315 \times 72}{9} = 315 \times 8 = 35 \times 72 = 2\,520$.

12. Găsirea c.m.m.m.c. al mai multor numere.

Pentru a găsi **c.m.m.m.c.** *al mai multor numere date, este suficient să-l găsim pentru două din numerele date, după aceea să găsim* **c.m.m.m.c.** *pentru numărul găsit și pentru unul din numerele rămase, apoi pentru al doilea număr găsit și pentru altul din numerele rămase etc., pînă se vor epuiza toate numerele date.*

Ultimul **c.m.m.m.c.** *va fi* **c.m.m.m.c.** *al tuturor numerelor date*

$$[a_1; a_2; \ldots; a_{n-1}; a_n] = M.$$

În practică, deci, găsirea c.m.m.m.c. al mai multor numere se reduce la calculul c.m.m.m.c. a două numere.

Se dau numerele $a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots, a_n$ și se cere să găsim c.m.m.m.c al lor.

Calculăm mai întîi $[a_1; a_2] = M_2$, pe urmă avem treptat

$$[a_1;\ a_2;\ a_3] = [M_2;\ a_3] = M_3$$
$$[a_1;\ a_2;\ a_3;\ a_4] = [M_3;\ a_4] = M_4 \text{ etc.}$$

Exemplu. Să se calculeze c.m.m.m.c. al numerelor 2, 8, 12, 30, 96.

Avem treptat

$[2;\ 8] = 8$
$[2;\ 8;\ 12] = [8;\ 12] = 24$
$[2;\ 8;\ 12;\ 30] = [24;\ 30] = 120$ în sfîrșit
$[2;\ 8;\ 12;\ 30;\ 96] = [120;\ 96] = 480.$

EXERCIȚII ȘI PROBLEME PROPUSE

1. Care din numerele 132, 468, 1 250, 1 080, 9 720 sînt divizibile cu 6, 12, 15, 18, 20, 36, 50 și 75?

2. Să se găsească prin algoritmul lui Euclid cel mai mare divizor comun al numerelor
1) 180 și 756; 2) 375, 360 și 900; 3) 779, 399 și 5 700.

3. Prin metoda împărțirii succesive, să se găsească cel mai mare divizor comun al numerelor
1) 3 724 și 18 468; 2) 540, 588 și 576; 3) 375, 645, 600 și 1 515.

4. De cîte ori este mai mic sau mai mare cel mai mare divizor comun al numerelor 7 317, 4 336 și 3 523, decît cel mai mare divizor comun al numerelor 14 634, 7 046 și 18 970?

5. Să se găsească cel mai mic multiplu comun cu ajutorul calculării celui mai mare divizor comun, aflat prin algoritmul lui Euclid, al numerelor următoare
1) 960 și 1 200; 2) 30 295 și 36 354; 3) 12 345, 4 565 și 960.

6. Să se găsească cel mai mare divizor comun și cel mai mic multiplu comun al numerelor
1) 84, 378, 462, 840; 2) 315, 420, 630, 700.

7. Să se scrie toate numerele
1) prime cu numărul 16, dar mai mici decît el;
2) prime cu numărul 24, dar mai mici decît el;
3) prime cu numărul 36, dar mai mici decît el.

8. Cel mai mic multiplu comun a două numere este 5 040; cel mai mare divizor comun este 24. Unul din aceste numere este 240. Se se găsească celălalt număr.

9. Să se verifice, cu ajutorul a două numere, proprietățile următoare:
1) cîturile împărțirii celui mai mic multiplu comun cu fiecare din numere vor fi numere prime între ele;
2) cîturile împărțirii numerelor cu cel mai mare divizor comun vor fi de asemenea numere prime între ele.

10. La o anumită dată, planetele Venus și Mercur ocupă un anumit loc pe cer, față de stelele fixe.
Peste cîte zile, ambele planete se vor afla în aceeași poziție față de stele, dacă este cunoscut că planeta Mercur se învîrtește în jurul Soarelui în 88 de zile, iar Venus în 225 de zile?

11. Se știe că numărul bilelor dintr-o cutie este mai mare decît 300 și mai mic decît 400. De asemenea se știe că, numărînd aceste bile cîte 10 se obține un număr întreg de zeci și numărîndu-le cîte 12 se obține un număr întreg de duzini. Cîte bile sînt în cutie?

12. Dacă ouăle dintr-o ladă se numără cîte două, rămîne un singur ou; tot așa se întîmplă cînd se numără cîte trei, cîte patru, cîte cinci și cîte șase. Cînd se numără cîte șapte nu rămîne nici un ou.
Cîte ouă sînt în ladă, dacă numărul lor este cel mai mic dintre cele posibile?

13. C.m.m.d.c. a două numere este 5; cîturile împărțirilor succesive făcute pentru a-l obține sînt 1, 3, 2. Să se afle acele două numere.

14. La căutarea codivizorului maxim a două numere, am găsit rezultatul 18 și cîturile în ordine 12, 7, 4. Care sînt cele două numere?

15. Să se demonstreze că două numere întregi consecutive sînt prime între ele.

16. Numerele a și b fiind prime între ele, în ce caz $a + b$ și $a - b$ sînt prime între ele?

17. Numerele a și b sînt prime între ele; să se demonstreze în acest caz că suma $a + b$ și diferența $a - b$ sînt prime față de produsul ab.

18. Produsul a trei numere consecutive e totdeauna divizibil cu 6?

19. Produsul a cinci numere consecutive e totdeauna divizibil cu 120?

20. Dacă n e un număr întreg oarecare, expresia $n(n+1)(2n+1)$ e totdeauna divizibilă cu 6?

21. În ce caz produsul a trei numere consecutive este divizibil cu 24?

22. Orice număr prim, afară de 2 și 3, se poate scrie sub forma $6n \pm 1$; reciproca e adevărată?

23. Pătratul unui număr fără soț, micșorat cu o unitate, este divizibil cu 8.

24. Pătratul unui număr prim, afară de 2 și 3, micșorat cu o unitate, este totdeauna divizibil cu 24.

25. Dacă numerele a și b sînt prime între ele, să se vadă dacă sumele $a+b$ și a^2+b^2 sînt și ele prime între ele.

CEL MAI MARE DIVIZOR COMUN ȘI CEL MAI MIC MULTIPLU COMUN AI POLINOAMELOR

CEL MAI MARE DIVIZOR COMUN A DOUĂ POLINOAME

1. Dîndu-se polinoamele

$$f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\ldots+a_{n-1}x+a_n,\quad a_0\neq 0 \tag{1}$$

$$g(x)=b_0x^k+b_1x^{k-1}+b_2x^{k-2}+\ldots+b_{k-1}x+b_k,\quad b_0\neq 0 \tag{2}$$

polinomul $d(x)$ se numește divizorul comun al polinoamelor $f(x)$ și $g(x)$, dacă ele se împart fără rest prin $d(x)$, adică avem

$$f(x) = f_1(x)\cdot d(x) \tag{1'}$$

$$g(x) = g_1(x)\cdot d(x). \tag{2'}$$

Orice număr $c \neq 0$ poate fi considerat ca divizorul comun al celor două polinoame, deoarece c este divizorul oricărui polinom. Se știe însă că acesta constituie un așa-zis divizor banal.

2. **Definiția I.** *Două polinoame $f(x)$ și $g(x)$ se numesc prime între ele* (la fel ca și în aritmetică), *dacă ele nu au alți divizori comuni, afară de cei numerici* (banali).

Definiția II. *Se numește cel mai mare divizor comun a două polinoame $f(x)$ și $g(x)$ polinomul $d(x)$, de gradul cel mai mare posibil, care divide polinoamele $f(x)$ și $g(x)$.*

Cel mai mare divizor comun poate fi determinat pînă la un factor numeric diferit de zero. Aceasta înseamnă că, dacă $d(x)$ este cel mai mare divizor comun al polinoamelor date, atunci $c\cdot d(x)$ (unde $c\neq 0$) se consideră tot cel mai mare divizor comun al lor.

3. **Teorema fundamentală.** *Fiind date două polinoame $f(x)$ și $g(x)$, sau aceste două polinoame n-au nici un divizor comun, sau ele admit un anumit număr de divizori comuni, printre care există unul singur al cărui grad e superior gradelor tuturor celorlalți și care se numește cel mai mare divizor comun al polinoamelor date.*

Precum vedem, avem și aici o teoremă de existență și de unicitate.

Pentru a demonstra această teoremă, ne vom baza pe următoarele două leme:

Lema I. *Dacă polinomul $f(x)$ se împarte fără rest cu polinomul $g(x)$, atunci $g(x)$ este cel mai mare divizor comun între $f(x)$ și $g(x)$.*

Avem egalitatea

$$f(x) = g(x)\cdot q(x). \tag{3}$$

Din această egalitate se vede că orice divizor al lui $g(x)$ este evident divizor și al lui $f(x)$; prin urmare, divizorii comuni ai lui $f(x)$ și $g(x)$ se compun numai din divizorii lui $g(x)$. Dar gradele acestor divizori nu pot întrece gradul lui $g(x)$; iar orice divizor al lui $g(x)$, de același grad cu $g(x)$, este identic cu produsul lui $g(x)$, printr-un factor constant. Rezultă atunci, în mod necesar, că $g(x)$ este *cel mai mare divizor comun* între $f(x)$ și $g(x)$.

Lema II. *Dacă polinomul $f(x)$ nu se împarte exact cu $g(x)$, divizorii comuni între $f(x)$ și $g(x)$ sînt aceiași ca și divizorii comuni între $g(x)$ și restul împărțirii lui $f(x)$ prin $g(x)$.*

Întrucît împărțirea nu se face exact, avem egalitatea

$$f(x) = g(x)\cdot q_1(x) + r_1(x), \tag{4}$$

care se mai poate scrie

$$f(x) - g(x)\cdot q_1(x) = r_1(x). \tag{4'}$$

În aceste egalități, $q_1(x)$ reprezintă cîtul, iar $r_1(x)$ reprezintă restul împărțirii.

Din aceste egalități se vede ușor că orice divizor comun între $f(x)$ și $g(x)$ este divizor comun și al diferenței $f(x) - g(x) \cdot q_1(x)$, adică al lui $r_1(x)$.

Invers, orice divizor comun între $g(x)$ și $r_1(x)$ este divizor comun și al sumei $g(x) \cdot q_1(x) + r_1(x)$, adică al lui $f(x)$.

În concluzie, divizorii comuni între $f(x)$ și $g(x)$ sînt aceiași ca și *divizorii comuni* între $g(x)$ și $r_1(x)$.

4. Din cele două leme de mai sus, se vede ușor că algoritmul lui Euclid, folosit în aritmetică pentru aflarea *celui mai mare divizor comun a două numere întregi*, se extinde și în algebră, pentru aflarea *celui mai mare divizor comun a două polinoame*.

Să luăm două polinoame $f(x)$ și $g(x)$, gradul lui $f(x)$ fiind mai mare sau egal cu gradul lui $g(x)$.

Să împărțim $f(x)$ cu $g(x)$; dacă împărțirea se face fără rest, în baza lemei I, $g(x)$ va fi cel mai mare divizor comun căutat între $f(x)$ și $g(x)$.

Dacă împărțirea nu se face exact, avem egalitatea

$$f(x) = g(x) \cdot q_1(x) + r_1(x), \qquad (1)$$

și în baza lemei a II-a, divizorii comuni între $f(x)$ și $g(x)$ sînt aceiași cu divizorii comuni între $g(x)$ și $r_1(x)$.

Împărțim acum $g(x)$ cu $r_1(x)$; dacă împărțirea se face exact, procesul este terminat și $r_1(x)$ este *cel mai mare divizor comun* căutat. Dacă împărțirea nu se face exact, avem egalitatea

$$g(x) = r_1(x) \cdot q_2(x) + r_2(x) \qquad (2)$$

și, în baza lemei a II-a, divizorii comuni între $g(x)$ și $r_1(x)$ sînt aceiași cu divizorii comuni între $r_1(x)$ și $r_2(x)$. În consecință, divizorii comuni între $f(x)$ și $g(x)$ sînt aceiași cu divizorii comuni între $r_1(x)$ și $r_2(x)$.

Împărțim atunci $r_1(x)$ cu $r_2(x)$ și, la fel, dacă împărțirea se face exact, procesul este terminat și $r_2(x)$ este cel mai mare divizor comun căutat.

Dacă împărțirea nu se face exact, avem egalitatea

$$r_1(x) = r_2(x) \cdot q_3(x) + r_3(x) \qquad (3)$$

și, făcînd același raționament ca și mai sus, conchidem că divizorii comuni între $f(x)$ și $g(x)$ sînt aceiași cu divizorii comuni între $r_2(x)$ și $r_3(x)$.

Vom continua tot așa mai departe.

Resturile succesive $r_1(x)$, $r_2(x)$, $r_3(x)$,... sînt polinoame în x, la care gradele merg descrescînd, căci între două resturi consecutive, primul este împărțitorul, iar al doilea, restul aceleiași împărțiri. Putem scrie:

grad $g(x) >$ grad $r_1(x) >$ grad $r_2(x) >$ grad $r_3(x) \ldots$; va ajunge deci un moment cînd unul din resturi, de exemplu $r_{n+1}(x)$, va fi de gradul zero, deci nu va mai conține pe x, acest rest putînd fi nul sau egal cu un număr diferit de zero.

Putem scrie următorul șir de egalități

$$\begin{aligned}
f(x) &= g(x) \cdot q_1(x) + r_1(x) \\
g(x) &= r_1(x) \cdot q_2(x) + r_2(x) \\
r_1(x) &= r_2(x) \cdot q_3(x) + r_3(x) \\
r_2(x) &= r_3(x) \cdot q_4(x) + r_4(x) \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
r_{n-2}(x) &= r_{n-1}(x) \cdot q_n(x) + r_n(x) \\
r_{n-1}(x) &= r_n(x) \cdot q_{n+1}(x) + r_{n+1}(x);
\end{aligned}$$

aici $r_{n+1}(x)$ e de gradul zero.

Acum se pot întîmpla două lucruri:

1) $r_{n+1}(x) = 0$; în acest caz, $r_{n-1}(x)$ este divizibil prin $r_n(x)$, deci $r_n(x)$ este cel mai mare comun divizor între $r_{n-1}(x)$ și $r_n(x)$ și, în consecință, între $f(x)$ și $g(x)$ (prin extinderea lemei a II-a).

2) $r_{n+1}(x)$ e un număr diferit de zero, în acest caz, $r_{n-1}(x)$ și $r_n(x)$ n-au nici un divizor comun, pentru că orice divizor comun între $r_{n-1}(x)$ și $r_n(x)$ trebuie să fie divizor și pentru $r_{n+1}(x)$. Concludem deci că $f(x)$ și $g(x)$ n-au nici un divizor comun, cele două polinoame sînt *prime între ele*.

5. *Teorema fundamentală* dată mai sus a fost astfel demonstrată și din demonstrație rezultă mijlocul de a obține *cel mai mare divizor comun* a două polinoame, în cazul cînd el există.

Regulă. *(Algoritmul lui Euclid.)* Pentru a obține cel mai mare divizor comun a două polinoame $f(x)$ și $g(x)$, împărțim pe $f(x)$ cu $g(x)$. Dacă împărțirea se face exact, $g(x)$ este cel mai mare divizor comun; dacă nu, împărțim $g(x)$ cu restul împărțirii, împărțim pe urmă împărțitorul celei de-a doua împărțiri cu noul rest și așa mai departe, pînă ce obținem un rest independent de x. Dacă acest rest e diferit de zero, cele două polinoame $f(x)$ și $g(x)$ n-au nici un divizor comun; se zice că sînt prime între ele. Dacă acest rest e nul, împărțitorul ultimei împărțiri este cel mai mare divizor comun al polinoamelor $f(x)$ și $g(x)$.

Observarea I. Ca și în cazul numerelor naturale, putem nota cel mai mare divizor comun al polinoamelor $f(x)$ și $g(x)$ prin simbolul $(f(x); g(x))$.

Observarea II. Cînd polinoamele $f(x)$ și $g(x)$ au coeficienți întregi, pentru a evita, în decursul operațiilor, coeficienții fracționari, calculele se pot simplifica astfel:

Dacă, la una din împărțiri, primul termen al vreunui deîmpărțit parțial nu este divizibil prin primul termen al împărțitorului, se pot înmulți toți coeficienții deîmpărțitului cu un număr ales convenabil.

De asemenea, dacă toți coeficienții vreunui deîmpărțit sau împărțitor sînt divizibili cu același număr, îi putem împărți cu acel număr.

Într-adevăr, la căutarea celui mai mare divizor comun, ne interesează restul împărțirilor și nu cîtul, căci, cel mai mare divizor comun este un rest, deci putem schimba cîtul. Pe de altă parte, cînd se înmulțește deîmpărțitul cu un factor constant, restul și cîtul se vor înmulți prin acel factor constant.

Deci, înmulțind sau împărțind, în cursul unei împărțiri, vreun rest parțial printr-un factor constant, cîtul se schimbă, iar restul întreg se înmulțește sau se împarte cu acel factor, ceea ce nu schimbă pe cel mai mare divizor comun decît cu un factor constant.

Cîteva exemple ne vor lămuri asupra modului cum trebuie să lucrăm.

APLICAȚII

6. *Exemplul I.* Să se găsească cel mai mare divizor comun al polinoamelor

$$f(x) = 2x^5 - 3x^4 - 5x^3 + x^2 + 6x + 3,$$
$$g(x) = 3x^4 + 2x^3 - 3x^2 - 5x - 2.$$

Pentru a evita coeficienții fracționari, vom înmulți în prealabil pe $f(x)$ prin 3.

$$\begin{array}{l|l}
6x^5 - 9x^4 - 15x^3 + 3x^2 + 18x + 9 & 3x^4 + 2x^3 - 3x^2 - 5x - 2 \\ \cline{2-2}
-6x^5 - 4x^4 + 6x^3 + 10x^2 + 4x & 2x \\ \cline{1-1}
\quad -13x^4 - 9x^3 + 13x^2 + 22x + 9 &
\end{array}$$

Acum, pentru a evita din nou coeficienții fracționari, vom înmulți diferența obținută cu (-3).

$$\begin{array}{l|l}
39x^4 + 27x^3 - 39x^2 - 66x - 27 & 3x^4 + 2x^3 - 3x^2 - 5x - 2 \\ \cline{2-2}
-39x^4 - 26x^3 + 39x^2 + 65x + 26 & 13 \\ \cline{1-1}
\qquad x^3 \qquad - x - 1 &
\end{array}$$

Acum vom împărți împărțitorul cu restul

$$\begin{array}{l|l}
3x^4 + 2x^3 - 3x^2 - 5x - 2 & x^3 - x - 1 \\ \cline{2-2}
-3x^4 \qquad + 3x^2 + 3x & 3x + 2 \\ \cline{1-1}
\qquad 2x^3 \qquad - 2x - 2 & \\
\quad -2x^3 \qquad + 2x + 2 & \\ \cline{1-1}
\qquad = \qquad\quad = \ = &
\end{array}$$

Împărțirea făcîndu-se exact, $x^3 - x - 1$ este cel mai mare divizor comun al polinoamelor $f(x)$ și $g(x)$.

Exemplul II. Să se afle cel mai mare divizor comun al polinoamelor

$$f(x) = x^3 - 2x^2 + 7x - 5$$
$$g(x) = x^2 + 1.$$

Prima împărțire.

$$\begin{array}{l|l}
x^3 - 2x^2 + 7x - 5 & x^2 + 1 \\ \cline{2-2}
-x^3 \qquad - x & x - 2 \\ \cline{1-1}
\quad -2x^2 + 6x - 5 & \\
\quad\ \ 2x^2 \qquad + 2 & \\ \cline{1-1}
\qquad (6x - 3):3 & \\ \cline{1-1}
\qquad 2x - 1 &
\end{array}$$

A doua împărțire (înmulțim pe $x^2 + 1$ cu 2).

$$
\begin{array}{r|l}
2x^2 + 2 & 2x - 1 \\
-2x^2 + x & \overline{x + 1} \\
\hline
(x + 2)\cdot 2 & \\
\hline
2x + 4 & \\
-2x + 1 & \\
\hline
5 &
\end{array}
$$

Restul este 5, deci diferit de zero, ceea ce înseamnă că polinoamele $f(x)$ și $g(x)$ *n-au nici un divizor comun*, adică *sînt prime între ele.*

Exemplul III. Să se găsească cel mai mare divizor comun al polinoamelor

$$f(x) = x^4 - 2x^3 - 4x^2 + 4x - 3$$

$$g(x) = 2x^3 - 5x^2 - 4x + 3.$$

Prima împărțire (înmulțim pe $f(x)$ cu 2).

$$
\begin{array}{r|l}
2x^4 - 4x^3 - 8x^2 + 8x - 6 & 2x^3 - 5x^2 - 4x + 3 \\
-2x^4 + 5x^3 + 4x^2 - 3x & \overline{x + 1} \\
\hline
(x^3 - 4x^2 + 5x - 6)\cdot 2 & \\
\hline
2x^3 - 8x^2 + 10x - 12 & \\
-2x^3 + 5x^2 + 4x - 3 & \\
\hline
-3x^2 + 14x - 15 &
\end{array}
$$

Înmulțim pe $2x^3 - 5x^2 - 4x + 3$ cu 3, iar pe

$$-3x^2 + 14x - 15 \text{ cu } (-1).$$

A doua împărțire.

$$
\begin{array}{r|l}
6x^3 - 15x^2 - 12x + 9 & 3x^2 - 14x + 15 \\
-6x^3 + 28x^2 - 30x & \overline{2x + 13} \\
\hline
(13x^2 - 42x + 9)\cdot 3 & \\
\hline
39x^2 - 126x + 27 & \\
-39x^2 + 182x - 195 & \\
\hline
(56x - 168) : 56 & \\
\hline
x - 3 &
\end{array}
$$

A treia împărțire.

$$
\begin{array}{r|l}
3x^2 - 14x + 15 & x - 3 \\
-3x^2 + 9x & \overline{3x - 5} \\
\hline
-5x + 15 & \\
+5x - 15 & \\
\hline
= \quad = &
\end{array}
$$

Ultima împărțire făcîndu-se exact, ultimul împărțitor, adică $x - 3$, va fi *cel mai mare divizor comun* al polinoamelor $f(x)$ și $g(x)$.

Exemplul IV. Să se găsească condiția ca polinoamele

$$ax^2 + bx + c \text{ și } a'x^2 + b'x + c'$$

să aibă un divizor comun de gradul întîi.

Pentru aceste două polinoame

$$ax^2 + bx + c \text{ și } a'x^2 + b'x + c'$$

atît cel mai mare divizor comun cît și condiția căutată se pot găsi și pe o cale mult mai simplă decît prin împărțiri succesive.

Divizorul comun al polinoamelor ax^2+bx+c și $a'x^2+$ $+b'x+c'$ va fi divizor comun și pentru polinomul

$$a'(ax^2+bx+c) - a(a'x^2+b'x+c') = a'bx+a'c-ab'x-ac' =$$

$$= (a'b - ab')x + (a'c - ac').$$

Deci, acest divizor comun este

$$(a'b - ab')x + (a'c - ac').$$

Dacă înlocuim în polinomul $ax^2 + bx + c$ pe x cu valoarea $\frac{ac' - a'c}{a'b - ab'}$ scoasă din $(a'b - ab')x + (a'c - ac') = 0$, vom găsi

$$a\frac{(ac' - a'c)^2}{(ab' - a'b)^2} + b\frac{ac' - a'c}{a'b - ab'} + c = 0$$

și, făcînd aici toate calculele, avem

$$\boxed{(ac' - a'c)^2 - (ab' - a'b)(bc' - b'c) = 0}$$

adică condiția căutată.

7. Pentru a găsi *cel mai mare divizor comun* a trei polinoame, se va proceda ca și în aritmetică. Întîi se va căuta cel mai mare divizor comun între două din aceste polinoame și apoi cel mai mare divizor între acesta și polinomul al treilea.

8. Proprietățile celui mai mare divizor comun. Proprietățile celui mai mare divizor comun a două polinoame sînt aceleași ca și ale celui mai mare divizor comun a două numere întregi; demonstrarea acestor proprietăți se face ca și în aritmetică.

Vom da într-un tablou aceste proprietăți, punîndu-le în paralelă cu proprietățile celui mai mare divizor comun a două numere.

PARALELĂ ÎNTRE PROPRIETĂȚILE CELUI MAI MARE DIVIZOR COMUN A DOUĂ NUMERE NATURALE ȘI PROPRIETĂȚILE CELUI MAI MARE DIVIZOR COMUN A DOUĂ POLINOAME

Nr. de ord.	Teoreme pentru c.m.m.d.c. a două numere	Teoremele analoge pentru c.m.m.d.c. a două polinoame
I	Orice divizor comun a două numere este un divizor și al c.m.m.d.c. al lor.	Orice divizor comun a două polinoame $f(x)$ și $g(x)$ este un divizor și al c.m.m.d.c. al lor.
II	Orice divizor al c.m.m.d.c. a două numere este un divizor comun al celor două numere.	Orice divizor al c.m.m.d.c. a două polinoame $f(x)$ și $g(x)$ este un divizor comun al celor două polinoame.
III	Dacă vom înmulți sau vom împărți două numere date a și b cu un număr natural oarecare m, atunci și c.m.m.d.c. al lor se va înmulți sau se va împărți cu același număr.	Dacă vom înmulți sau vom împărți două polinoame date $f(x)$ și $g(x)$ cu un alt polinom $p(x)$, atunci și c.m.m.d.c. al celor două polinoame va fi înmulțit sau împărțit cu același polinom $p(x)$.

Nr. de ord.	Teoreme pentru c.m.m.d.c. a două numere	Teoremele analoge pentru c.m.m.d.c. a două polinoame
IV	Cîturile a două numere prin c.m.m.d.c. al lor sînt numere prime între ele.	Dacă împărțim două polinoame prin c.m.m.d.c. al lor, cîturile obținute sînt prime între ele.
V	Cînd cîturile a două numere a și b printr-un același număr d sînt prime între ele, cele două numere admit drept c.m.m.d.c. chiar pe d.	Dacă două polinoame $f(x)$ și $g(x)$ sînt divizibile printr-un polinom $d(x)$ și cîturile obținute sînt prime între ele, cele două polinoame admit drept c.m.m.d.c. chiar pe $d(x)$.
VI	Dacă produsul a doi factori este divizibil printr-un număr oarecare prim cu unul din factorii produsului, atunci celălalt factor este divizibil cu acest număr.	Dacă un polinom divide (adică se cuprinde exact în) produsul altor două polinoame și dacă este prim față de unul din ele, divide pe al doilea polinom.
VII	Dacă un număr dat se divide prin fiecare dintre două numere prime între ele, atunci acel număr se divide și cu produsul lor. *Consecință.* Regula de divizibilitate cu numere compuse ca 6, 12, 15 etc.	Dacă un polinom este divizibil prin fiecare dintre două polinoame prime între ele, atunci acel polinom este divizibil și cu produsul celor două polinoame. *Consecință.* Un polinom divizibil atît prin $(x-a)$ cît și prin $(x-b)$ este divizibil și prin produsul lor $(x-a)(x-b)$.

Dintre aceste teoreme o deosebită importanță în aplicații o prezintă consecința teoremei a VII-a, pe care o scriem din nou.

Teoremă. *Dacă un polinom* $P(x)$ *este divizibil atît prin* $(x-a)$ *cît și prin* $(x-b)$ *este divizibil și prin produsul lor.*

Ea se poate extinde și pentru cazul a trei factori, așa că putem scrie în acest caz:

Dacă un polinom $P(x)$ este divizibil prin fiecare dintre factorii $(x-a)$, $(x-b)$ și $(x-c)$, el este divizibil și prin produsul lor.

Teorema se poate generaliza și pentru cazul a k factori de gradul întîi $(x-a_1)$, $(x-a_2)$, $(x-a_3)$, ..., $(x-a_k)$.

CEL MAI MIC MULTIPLU COMUN A DOUĂ POLINOAME

9. Cel mai mic multiplu comun a două polinoame este polinomul de gradul cel mai mic care se împarte exact cu polinoamele date.

Dacă polinoamele sînt descompuse în factori primi sau se pot ușor descompune în factori primi, ca de exemplu în cazul următor

$$f(x) = x^3(x-1)^4(x+1)^2$$
$$g(x) = x^2(x+1)(x-1)^2(x+2),$$

cel mai mic multiplu comun al celor două polinoame se află prin metoda elementară din aritmetică: se face produsul tuturor factorilor, comuni și necomuni, luați fiecare cu exponenții cei mai mari la care se găsesc.

În cazul nostru, vom avea

$$[f(x);\, g(x)] = x^3(x-1)^4(x+1)^2(x+2).$$

În cazul cînd polinoamele date nu se pot descompune în factori primi, cel mai mic multiplu comun al celor două polinoame se află ca și în aritmetică, adică:

Înmulțim polinoamele și produsul obținut îl împărțim prin cel mai mare divizor comun al lor.

În formulă, putem scrie

$$[f(x);\, g(x)] = \frac{f(x)\cdot g(x)}{(f(x);\, g(x))}$$

APLICAȚII

10. *E x e m p l u l I. Să se afle cel mai mic multiplu comun al polinoamelor*

$$f(x) = 2x^5 - 3x^4 - 5x^3 + x^2 + 6x + 3$$
$$g(x) = 3x^4 + 2x^3 - 3x^2 - 5x - 2.$$

Polinoamele le-am mai întîlnit la aflarea *celui mai mare divizor comun* și atunci am găsit

$$(f(x);\, g(x)) = x^3 - x - 1.$$

Așa că putem scrie

$$[f(x);\, g(x)] = \frac{f(x)\cdot g(x)}{(f(x);\, g(x))} =$$
$$= \frac{(2x^5 - 3x^4 - 5x^3 + x^2 + 6x + 3)(3x^4 + 2x^3 - 3x^2 - 5x - 2)}{x^3 - x - 1}.$$

Aici putem să folosim proprietatea că cel mai mare divizor comun a două polinoame divide pe fiecare din cele două polinoame. În cazul nostru, putem scrie

$$2x^5 - 3x^4 - 5x^3 + x^2 + 6x + 3 \equiv (x^3 - x - 1)(2x^2 - 3x - 3)$$
$$3x^4 + 2x^3 - 3x^2 - 5x - 2 \equiv (x^3 - x - 1)(3x + 2)$$

așa că vom avea

$$[f(x);\, g(x)] = \frac{(x^3 - x - 1)(2x^2 - 3x - 3)\cdot(x^3 - x - 1)(3x + 2)}{x^3 - x - 1} =$$
$$= (x^3 - x - 1)(2x^2 - 3x - 3)\cdot(3x + 2) = (2x^5 - 3x^4 - 5x^3 +$$
$$+ x^2 + 6x + 3)(3x + 2).$$

Efectuînd înmulțirea a doua, vom găsi

$$[f(x);\, g(x)] = 6x^6 - 5x^5 - 21x^4 - 7x^3 + 20x^2 + 21x + 6.$$

E x e m p l u l II. Să se găsească cel mai mic multiplu comun al polinoamelor

$$f(x) = x^3 - 2x^2 + 7x - 5$$
$$g(x) = x^2 + 1.$$

Polinoamele le-am întîlnit de asemenea la aflarea *celui mai mare divizor comun* și am văzut acolo că aceste două polinoame *n-au nici un* divizor comun, sînt prime între ele.

În acest caz, *cel mai mic multiplu comun* este însuși produsul, adică vom avea

$$[f(x);\, g(x)] = (x^3 - 2x^2 + 7x - 5)\cdot(x^2 + 1) =$$
$$= x^5 - 2x^4 + 8x^3 - 7x^2 + 7x - 5.$$

EXERCIȚII ȘI PROBLEME PROPUSE

Să se determine *cel mai mare divizor comun* al polinoamelor

1. $x^4 + x^3 - 3x^2 - 4x - 1$ și $x^3 + x^2 - x - 1$.

2. $x^6 + 2x^4 - 4x^3 - 3x^2 + 8x - 5$ și $x^5 + x^2 - x + 1$,

3. $x^4 - 4x^3 + 1$ și $x^3 - 3x^2 + 1$.

4. $3x^6 - x^5 - 9x^4 - 14x^3 - 11x^2 - 3x - 1$ și

$$3x^5 + 8x^4 + 9x^3 + 15x^2 + 10x + 9.$$

Folosind metoda elementară de găsire a celui mai mare divizor comun, din aritmetică, să se afle cel mai mare divizor comun al polinoamelor

5. $(x-1)^3(x+2)^2(x-3)(x-4)$ și $(x-1)^2(x+2)(x+5)$.

6. $(x-1)(x^2-1)(x^3-1)(x^4-1)$ și

$$(x+1)(x^2+1)(x^3+1)(x^4+1).$$

7. $(x^3-1)(x^2-2x+1)$ și $(x^2-1)^3$.

8. Cunoscînd resturile A și B ale împărțirii unui polinom $f(x)$ prin $x-a$ și $x-b$, să se calculeze restul împărțirii acestui polinom prin produsul $(x-a)(x-b)$.

9. Știind că un polinom împărțit cu $x-2$ și $x-3$ dă, respectiv, resturile $+5$ și $+120$, să se afle restul împărțirii acestui polinom prin produsul $(x-2)(x-3)$.

10. Cunoscînd resturile A, B și C ale împărțirii unui polinom $f(x)$ prin $x-a$, $x-b$ și $x-c$, să se calculeze restul împărțirii acestui polinom prin produsul $(x-a)(x-b)(x-c)$.

11. Să se determine polinomul

$$x^5 + x^4 + Ax^3 + Bx^2 + Cx + D$$

astfel ca să fie divizibil cu (x^2-1) și cu (x^2-4).

12. Să se determine m, n și p, astfel ca polinomul $x^4 - mx^3 + nx^2 - px$ să dea același rest, atunci cînd se împarte prin (x^2-1), $(x-2)$ și $(x-3)$.

13. Să se determine, fără a face împărțirea, restul împărțirii polinomului $x^5 - 6x^4 + 2x^2 - 9x + 1$ prin $x^2 - 1$.

14. Dacă n este un număr întreg și pozitiv, să se arate că polinomul

$$P(x) = (x-2)^{2n} + (x-1)^n - 1$$

este divizibil prin

$$(x-1)(x-2)$$

și să se afle cîtul.

15. Dacă n este un număr întreg și pozitiv, să se arate că polinomul

$$f(x) = (x+1)^{2n} - x^{2n} - 2x - 1$$

e divizibil prin $x(x+1)(2x+1)$. Să se afle cîtul.

16. Să se arate că polinomul

$$(a+b+c)^n - a^n - b^n - c^n,$$

unde n este întreg, pozitiv și fără soț, este divizibil prin produsul $(b+c)(c+a)(a+b)$.

Să se calculeze cîtul pentru $n=3$ și $n=5$.

17. Să se determine a și b astfel ca polinomul

$$P(x) = 12x^5 - 16x^4 - 37x^3 + 37x^2 + ax + b$$

să fie divizibil prin $(x-2)(2x+3)$.

Să se descompună apoi polinomul în factori, fără a rezolva ecuația $P(x) = 0$.

18. Să se demonstreze că polinomul

$$x^4(y-z) + y^4(z-x) + z^4(x-y)$$

este divizibil prin $(x-y)(y-z)(z-x)$.

19. Se dau polinoamele

$$P(x) = x^5 - 10x^4 + 33x^3 + ax^2 + bx + c$$

$$Q(x) = x^3 - 9x^2 + 26x - 24.$$

Se cere:

a) Să se determine a, b, c, astfel încît $P(x)$ să se împartă exact cu $Q(x)$.

b) Să se rezolve apoi ecuația $f(x) = 0$, unde

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}.$$

20. Se consideră polinomul de gradul III

$$P_3(x) = (x + a - 1)(x + a)(x + a + 1) - C_3^1(a - 2)(x + a)(x + a + 1) + C_3^2(a - 1)(a - 2)(x + a + 1) - C_3^3 a(a - 1)(a - 2)$$

și se cere:

a) Să se arate că $P_3(x)$ se anulează pentru $x = -1$; $x = -2$; $x = -3$.

b) Să se deducă identitatea

$$P_3(x) \equiv (x + 1)(x + 2)(x + 3).$$

c) Să se stabilească din nou identitatea precedentă fără a folosi proprietatea de la primul punct, întrebuințînd pentru aceasta grupări convenabile de termeni în expresia $P_3(x)$.

(Olimpiada matematică din Cluj — aprilie 1954.)

21. Să se găsească relația dintre coeficienții polinomului

$$P(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e,$$

astfel ca polinomul să fie divizibil cu $x^2 - 1$.

22. Să se arate că expresia:

$$E = (x + y)(y + z)(z + x) + xyz$$

se divide cu $x + y + z$ și să se afle cîtul.

23. Se dă polinomul $P(x) = 3x^4 + ax^3 + 8x^2 + bx - 1$.

Să se determine parametrii a și b astfel ca $P(x)$ împărțit cu $Q(x) = x^2 + 2x + 3$ să dea restul $x + 2$.

CAPITOLUL IV

NUMERE COMPLEXE

NOȚIUNI

1. Noțiunea de număr n-a rămas neschimbată, ci a evoluat paralel cu întreaga gîndire matematică. La începutul științei grecești, numerele trebuiau să se poată reprezenta prin lungimi luate pe linii drepte. S-a crezut deci că singurele numere sînt numerele întregi și fracționare. Cînd Pitagora a arătat că se pot construi linii drepte a căror lungime să nu poată fi reprezentată printr-un număr întreg sau fracționar (de exemplu, dacă se ia un pătrat cu latura egală cu unitatea, diagonala pătratului este o lungime ce se poate construi, dar nu are nici un număr întreg, nici un număr fracționar de unități), domeniul numerelor a fost lărgit, ca să poată cuprinde toate lungimile ce se pot construi. Numerele întregi și cele fracționare au fost socotite ca o categorie particulară a numerelor și au fost numite numere raționale. Alături de ele s-a constituit o altă categorie de numere, care pot fi reprezentate prin lungimi, dar care nu sînt raționale; acestea sînt numerele iraționale. Concepția greacă de a privi numerele ca mărimi reprezentate prin segmente liniare a străbătut aproape întreg evul mediu.

Introducerea algebrei printre preocupările matematice a influențat asupra lărgirii sferei noțiunii de număr.

Date fiind paradoxele pe care le ridică, numerele complexe au constituit timp îndelungat obiect de luptă în cadrul matematicii. Matematicienii au disputat asupra necesității sau absurdității calculului cu elemente „imaginare".

Numerele complexe au fost cunoscute mai întîi în India în legătură cu rezolvarea ecuației de gradul II și extragerea rădăcinii pătrate dintr-un număr negativ. S-a ajuns la concluzia că $\sqrt{-a}\ (a > 0)$ nu există în realitate (în mod obiectiv). Acest argument, precum și lipsa oricărei interpretări reale au făcut ca veacuri de-a rîndul, pînă în epoca Renașterii, să domine ideea că numerele „imposibile", „imaginare" sau „sofistice" sînt inutile și false, iar ecuația de gradul II corespunzătoare n-are soluție.

Noile probleme ridicate de tehnică, științele naturii și matematici impun însă tot mai mult calculul empiric cu aceste mărimi.

Sistematizînd rezultatele obţinute relativ la rezolvarea ecuaţiilor de gradul III şi IV de către Ferro, Tartaglia şi Ferrari, în cartea sa *Ars magnae sive de regulis algebraicis* (1545), matematicianul Cardan deduce din celebrul său *casus irreductibilis*, în care soluţiile *reale* ale unei ecuaţii cu coeficienţi *reali* se exprimă cu ajutorul unor numere *complexe*, necesitatea utilizării numerelor complexe, fără a putea totuşi explica aparenta contradicţie. De altfel, pentru exactitatea calculului trebuia să admită că pentru $a > 0$, $\sqrt{-a}\sqrt{-a} = -a$, rezultat care arată că acestor numere nu li se pot aplica direct vechile reguli de calcul:

$$a,b > 0, \sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = \sqrt{ab}.$$

În *Algebra* publicată la 1572, *Bombelli* stabileşte reguli de calcul cu numere complexe; definind egalitatea, adunarea şi înmulţirea, el arată că, în cazul ireductibil, rădăcinile cubice din numere complexe reprezintă numere complexe imaginar conjugate, a căror sumă dă numere reale. (Explicînd acest paradox, algebra modernă avea să demonstreze imposibilitatea exprimării rădăcinilor ecuaţiei de gradul III în cazul ireductibil prin radicali, fără ajutorul numerelor complexe.)

O dată cu numeroasele încercări de rezolvare a ecuaţiei de gradul V sau cu studiul ecuaţiilor generale de gradul n, în legătură cu numărul rădăcinilor şi al relaţiilor dintre coeficienţi şi rădăcini, numerele complexe, care permiteau o formulare generală a rezultatelor, devin tot mai necesare.

Astfel, în 1629, Girard enunţă pentru întîia dată teorema fundamentală: orice ecuaţie de gradul n are n rădăcini.*

Încă din secolul al XVII-lea, cu toată opoziţia concepţiilor conservatoare şi retrograde, numerele complexe se introduc treptat şi în analiza matematică, pe atunci în formare.

Cu toate numeroasele lor aplicaţii în calculul integralelor definite, rezolvarea ecuaţiilor diferenţiale, întocmirea hărţilor, în mecanică şi fizică, totuşi o serie de paradoxe (ca de pildă cel considerat de Leibniz, care ducea la $\frac{\pi}{4} = 0$), lipsa unei interpretări reale şi concepţiile metafizice dominante în secolul al XVIII-lea explică neîncrederea cu care majoritatea matematicienilor priveau numerele complexe. Euler însuşi, care la 1777 introduce notaţia devenită astăzi clasică: $i = \sqrt{-1}$ şi care demonstrează că expresii algebrice formate cu un număr finit de numere complexe sînt tot numere complexe, nu concepe încă sensul deplin al acestor numere şi le consideră ca pe nişte numere complementare, un auxiliar pentru studiul numerelor reale.

---

* Tot astfel în geometria analitică, inexistenţa punctului real de intersecţie în diversele probleme cu soluţii imaginare impune cu şi mai vădită necesitate utilizarea numerelor complexe. Însuşi Descartes, creatorul acestei geometrii, foloseşte numerele complexe în discuţia intersecţiei a două conice (cercuri, parabole).

Totuşi, încercările de a da o interpretare geometrică a numerelor complexe, începute în secolul al XVII-lea de Wallis, sînt continuate de Kühn, Wessel ş.a.

Reprezentarea geometrică a numerelor complexe în plan, după concepţia lui Argand şi Gauss (1801), în care numărului $z = x + iy$ i se asociază biunivoc punctul din plan de coordonate x, y (afixul său), a fost hotărîtoare pentru familiarizarea matematicienilor cu numerele complexe.

Către mijlocul secolului al XIX-lea (1830), interpretarea geometrică este urmată de teoria aritmetică a lui Hamilton, care stabileşte că numerele complexe sînt perechi ordonate de numere reale în care sînt definite operaţii de calcul, astfel încît:

1) Să verifice axiomele operaţiilor fundamentale ale algebrei.
2) Sistemul să includă numerele reale, în care caz operaţiile trebuie să coincidă cu cele cunoscute.
3) Ecuaţia $x^2 + 1 = 0$ să admită soluţie.

Algebra modernă arată că mulţimea numerelor complexe, adică mulţimea numerelor de forma $x + iy$, se bucură de proprietatea că orice operaţie algebrică cu aceste numere conduce de asemenea la un număr complex. Însă, abia în 1932, matematicianul sovietic *L. S. Pontreaghin* relevă sensul adînc al importanţei acestor numere în algebră, ca şi în analiză.

Dacă utilitatea numerelor complexe se vădea treptat tot mai mult, astfel că în secolul al XVIII-lea se considerau funcţii elementare de variabilă complexă, abia în prima jumătate a secolului al XIX-lea, teoria funcţiilor de o variabilă complexă avea să se constituie ca un tot unitar, ca o ramură distinctă a ştiinţelor matematice.

După cum arată Cauchy în *Cours d'Analyse*, 1821, studiul funcţiilor de variabilă complexă se impunea cu necesitate din punct de vedere logic.

Către mijlocul secolului trecut, Riemann (1826—1866) desăvîrşeşte teoria funcţiilor algebrice, deschizînd calea topologiei, disciplină menită să joace un rol fundamental în matematica zilelor noastre.

Matematicienii ruşi au obţinut rezultate remarcabile în domeniul teoriei funcţiilor şi al aplicaţiilor lor la tehnică. Astfel, sînt bine cunoscute pe de o parte cercetările, azi clasice, ale lui N. E. Jukovski şi S. A. Ceaplîghin cu privire la hidrodinamică şi aerodinamică şi ale lui G. V. Kolosov relative la teoria elasticităţii, iar pe de altă parte lucrările şcolii matematice din Moscova, reprezentată de N. N. Luzin ş.a.

În universităţile sovietice, ca şi în institutele Academiei de Ştiinţe a U.R.S.S., studiul şi cercetările în cele mai variate domenii ale teoriei funcţiilor de variabilă complexă traversează o epocă fecundă, plină de avînt, originalitate şi înalt nivel ştiinţific. Operele marilor matematicieni N. N. Luzin, I. I. Privalov, V. V. Golubev, M. A. Lavrentiev, A. I. Markuşievici etc. sînt cunoscute în lumea întreagă.

În ţara noastră, studiul funcţiilor de variabilă complexă începe la Universitatea din Bucureşti către sfîrşitul secolului trecut, o dată cu activitatea didactică a profesorului David Emanuel.

Merite importante în domeniul funcţiilor de variabilă complexă, pe linia preocupărilor lui Riemann, revin academicianului romîn Simion Stoilow.

2. Necesitatea introducerii numerelor complexe în rezolvarea ecuației de gradul al II-lea.

Ecuația generală de gradul II $ax^2 + bx + c = 0$, (1) unde $a \neq 0$. Prin împărțirea cu a se poate scrie $x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$. Adunînd și scăzînd $\frac{b^2}{4a^2}$, ecuația devine $x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a} - \frac{b^2}{4a^2} = 0$, care se mai poate scrie

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} = 0. \qquad (2)$$

a) Dacă $b^2 - 4ac > 0$, atunci și $\frac{b^2 - 4ac}{4a^2} > 0$ și

$$\sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}} = \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \text{ are sens.}$$

Deci ecuația (2) se scrie

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\right)^2 = 0,$$

sau, descompunînd în factori diferența de pătrate, avem

$$\left(x + \frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\right)\left(x + \frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\right) = 0,$$

care se descompune în două ecuații de gradul I și dau, respectiv

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \text{ și } x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}. \qquad (3)$$

În stabilirea acestor formule am presupus în mod esențial că $b^2 - 4ac > 0$, deci trebuie să examinăm separat cazurile $b^2 - 4ac = 0$ și $b^2 - 4ac < 0$.

b) Dacă $b^2 - 4ac = 0$, ecuația sub forma (2) devine

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = 0,$$

care este satisfăcută numai cînd

$$x + \frac{b}{2a} = 0,$$

de unde soluția

$$x = \frac{-b}{2a}.$$

Observăm că această soluție se obține și din formulele (3), dacă înlocuim $b^2 - 4ac = 0$.

Ambele formule ne dau în acest caz aceeași rădăcină $x_1 = \frac{-b}{2a}$, $x_2 = \frac{-b}{2a}$. De aceea, în acest caz, se zice că $x = \frac{-b}{2a}$ este *rădăcină dublă*.

În concluzie, formulele (3) sînt valabile cînd $b^2 - 4ac \geqslant 0$.

c) Dacă $b^2 - 4ac < 0$, atunci $4ac - b^2 > 0$ și ecuația (2) se poate scrie

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a^2} = 0, \qquad (2')$$

unde $\frac{4ac - b^2}{4a^2} > 0$ și cum $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 > 0$ pentru orice x, ecuația (2′) cere să găsim acele valori ale lui x pentru care suma de două numere *pozitive* din partea stîngă să devină *nulă*, ceea ce nu este posibil, deci ecuația *nu are soluții* în acest caz.

Pentru ca ecuația să aibă soluții și în acest caz, a trebuit să se introducă numere noi, al căror pătrat să fie negativ.

Vom introduce astfel de numere, cu următoarele definiții:

— *Numim unitate imaginară un simbol, pe care-l notăm cu litera i* și asupra căruia facem convenția ca în calcule pătratul lui să-l înlocuim cu -1, adică $i^2 = -1$.

— *a și b fiind două numere reale, o expresie de forma $a+ib$ o numim număr complex*, iar ib se numește număr imaginar.

Astfel, un număr complex $a+ib$ are partea reală a și partea imaginară ib.

— Dacă $b = 0$, numărul complex $a + ib$ se reduce la numărul real a, deci *numerele reale le putem considera un caz particular al numerelor complexe*. Dacă $a = 0$, numărul complex devine un număr imaginar, de forma bi; prin definiție $(ib)^2 = i^2b^2 = -b^2$.

— Două numere de forma $a + ib$ și $a - ib$, care au părțile reale egale și coeficienții părților imaginare egali în valoare absolută, dar de semne contrare, se numesc *numere complexe conjugate*.

Revenind acum la rezolvarea ecuației (2′), avînd $\frac{4ac - b^2}{4a^2} > 0$, are sens expresia

$$\sqrt{\frac{4ac - b^2}{4a^2}} = \sqrt{\frac{4ac - b^2}{2a}}$$

și ecuația (2′) o putem scrie

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(i\,\frac{\sqrt{4ac - b^2}}{2a}\right)^2 = 0$$

sau

$$\left(x + \frac{b}{2a} - i\,\frac{\sqrt{4ac - b^2}}{2a}\right)\left(x + \frac{b}{a} + i\,\frac{\sqrt{4ac - b^2}}{2a}\right) = 0,$$

care se descompune în două ecuații, care ne dau soluțiile

$$x_1 = \frac{-b + i\sqrt{4ac - b^2}}{2a} \text{ și } x_2 = \frac{-b - i\sqrt{4ac - b^2}}{2a}, \quad (3')$$

adică în acest caz soluțiile sînt două numere complexe avînd partea reală $\frac{-b}{2a}$, iar părțile imaginare $\pm\, i\frac{\sqrt{4ac - b^2}}{2a}$.

Comparînd formulele (3′) care dau soluțiile ecuației de gradul II în cazul $b^2 - 4ac < 0$ cu formulele (3), care dădeau soluțiile în cazul $b^2 - 4ac \geqslant 0$, observăm că formulele (3) vor deveni valabile și în cazul $b^2 - 4ac < 0$, dacă facem convenția ca

$$\sqrt{b^2 - 4ac} = i\sqrt{4ac - b^2}.$$

Exemple:

$$\sqrt{-4} = i\sqrt{4} = 2i,$$

$$\sqrt{-3} = i\sqrt{3}.$$

În acest fel

$$\sqrt{-1} = i.$$

Introducînd numerele complexe, a dispărut imposibilitatea rezolvării ecuației de gradul II în cazul $b^2 - 4ac < 0$.

3. Prin definiție, numărul complex $a + bi = 0$, cînd avem $a = 0$ și $b = 0$. Rezultă de aici că două numere com-

plexe, $a + bi$ și $a' + b'i$ sînt egale, adică $a + bi = a' + b'i$, dacă avem $a = a'$ și $b = b'$; aceasta înseamnă că părțile reale să fie egale între ele și coeficienții părților imaginare de asemenea să fie egali.

În adevăr, egalitatea $a + bi = a' + b'i$ se poate scrie $(a - a') + (b - b')i = 0$ însă aceasta echivalează cu egalitatea $a - a' = 0$ și $b - b' = 0$, sau $a = a'$ și $b = b'$. Trebuie să menționăm că, prin convenție, numerele complexe sînt supuse acelorași reguli de calcul ca și numerele reale.

A p l i c a ț i e. În baza condiției de egalitate a două numere complexe, să se determine x și y astfel ca să avem

$$2 + 5ix - 3iy = 14i + 3x - 5y.$$

$$\text{Avem} \begin{cases} 3x - 5y = 2. \\ 5x - 3y = 14. \end{cases} \qquad \text{De aici } x = 4,\ y = 2.$$

4. *Modulul cantității complexe* $a + bi$ este numărul pozitiv $+\sqrt{a^2 + b^2}$ și se scrie mod. $(a + bi) = \sqrt{a^2 + b^2}$ sau $|a + bi| = \sqrt{a^2 + b^2}$.

De exemplu

$$|3 + 2i| = \sqrt{9 + 4} = \sqrt{13}.$$

Numerele complexe $a + bi$, $a - bi$, $-a + bi$, $-a - bi$ au același modul.

Numărul $\sqrt{a^2 + b^2}$ este nul atunci și numai atunci cînd $a = 0$ și $b = 0$; de aici rezultă: *condiția necesară și suficientă ca un număr complex să fie nul este ca modulul său să fie nul.*

În cazul că $b = 0$, modulul se reduce la $\sqrt{a^2}$, deci modulul unui număr real este egal cu valoarea sa absolută.

OPERAȚII CU NUMERE COMPLEXE

Principiul general ce stă la baza operațiilor cu numere complexe constă în a aplica numerelor complexe regulile de calcul algebric, considerînd expresiile $a + bi$ și $a' + b'i$ ca binoame de forma $a + bx$ și $a' + b'x$, cu condiția ca, înlocuind totdeauna pe i^2 prin -1, după toate reducerile ce se pot face, rezultatul final să fie tot de forma $A + Bi$.

ADUNAREA

5. Suma mai multor numere complexe este tot un număr complex, avînd ca parte reală suma părților reale și drept coeficient al lui i suma coeficienților lui i din numerele date.

Avem deci relația

$$(a + bi) + (a' + b'i) = (a + a') + (b + b')i$$

sau

$$(a_1 + b_1i) + (a_2 + b_2i) + (a_3 + b_3i) = (a_1 + a_2 + a_3) + \\ + i(b_1 + b_2 + b_3)$$

și, în general,

$$(a_1 + b_1i) + (a_2 + b_2i) + (a_3 + b_3i) + \ldots + (a_n + b_ni) =$$

$$= (a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n) + i(b_1 + b_2 + b_3 + \ldots + b_n).$$

Dacă $b_1 + b_2 + b_3 + \ldots + b_n = 0$, suma obținută este un număr real.

În cazul cînd suma a două numere complexe este nulă, se spune că numerele complexe sînt opuse.

Suma a două numere complexe conjugate este un număr real $2a$, egal cu dublul părții reale

$$(a + bi) + (a - bi = 2a.$$

SCĂDEREA

6. Prin definiție, a scădea numărul complex $c + di$ din $a + bi$ înseamnă a afla un alt număr complex $x + iy$, care, adunat cu $c + di$, să ne dea numărul $a + bi$.

Deci

$$a + bi = c + di + x + iy,$$

de unde vom avea

$$a = c + x$$
$$b = d + y$$

și obținem

$$x = a - c$$
$$y = b - d,$$

deci

$$(a + bi) - (c + di) = (a - c) + i(b - d).$$

Rezultă că a scădea pe $c + di$ din $a+bi$, înseamnă să-i adunăm lui $a + bi$ pe $-c-di$, adică opusul lui.

Diferența a două numere complexe conjugate este un număr imaginar

$$(a + bi) - (a - bi) = 2bi.$$

ÎNMULȚIREA

7. Produsul expresiilor $a + bi$ prin $c + di$ se efectuează înmulțindu-le ca două binoame de gradul I în i, după regula înmulțirii algebrice, ținînd seama că $i^2 = -1$.

Deci $(a + bi) \cdot (c + di) = ac + i\ (bc + ad) + bdi^2 = = ac - bd + i\ (bc + ad)$.

Produsul a două numere complexe este tot un număr complex.

Produsul a două cantități complexe conjugate este un număr real, egal cu pătratul modulelor lor.

$$(a + bi) \cdot (a - bi) = a^2 - b^2i^2 = a^2 + b^2.$$

Produsul mai multor factori

$(a_1 + b_1i) \cdot (a_2 + b_2i) \cdot (a_3 + b_3i) \cdots (a_n + b_ni)$ se obține înmulțind primul factor cu al doilea, rezultatul cu al treilea și acest rezultat cu al patrulea și așa mai departe.

8. Valoarea produsului mai multor factori complecși nu depinde de ordinea factorilor. De aceea, cînd avem de înmulțit mai mulți factori de forma $E = (a + bi)\ (a - bi) \cdot \cdot (c + di) \cdot (c - di)$, vom înmulți factorii conjugați și apoi produsele rezultate și vom obține $E = (a^2 + b^2)\ (c^2 + d^2)$. Procedînd în alt mod, de exemplu înmulțind primul factor cu al treilea, apoi al doilea cu al patrulea, obținem $E = = (ac - bd)^2 + (ad + bc)^2$. Dacă înmulțim separat primul cu al patrulea și apoi pe al doilea cu al treilea factor, vom avea $E = (ac + bd)^2 + (ad - bc)^2$.

Comparînd aceste rezultate, putem scrie

$$(a^2 + b^2)(c^2 + d^2) = (ac + bd)^2 + (ad - bc)^2 \text{ și}$$

$(a^2 + b^2)(c^2 + d^2) = (ac - bd)^2 + (ad + bc)^2$, relație cunoscută sub numele de identitatea lui Lagrange. Acest exemplu ne arată însemnătatea introducerii numerelor complexe în teoria numerelor.

ÎMPĂRȚIREA

9. A împărți două numere complexe $a+bi$ prin $c+di$ înseamnă să aflăm un număr $x+iy$, care să satisfacă relația $(a+bi) = (c+di)(x+iy) = cx - dy + i(dx + cy)$. De aici avem

$$a = cx - dy$$
$$b = dx + cy;$$

rezolvînd sistemul, obținem

$$x = \frac{ac + bd}{c^2 + d^2} \text{ și } y = \frac{bc - ad}{c^2 + d^2}.$$

Dacă $c^2 + d^2 \neq 0$, adică $c + di$ este diferit de zero, există un număr complex
$\frac{ac + bd}{c^2 + d^2} + i\frac{bc - ad}{c^2 + d^2}$, care este cîtul împărțirii lui $a + bi$ prin $c + di$.

10. La același rezultat am fi putut ajunge mult mai repede, dacă am fi înmulțit și numărătorul și numitorul fracției $\frac{a + bi}{c + di}$ prin conjugata numitorului

$$\frac{(a + bi)\cdot(c - di)}{c^2 + d^2} = \frac{ac + bd}{c^2 + d^2} + i\frac{bc - ad}{c^2 + d^2}.$$

Exemple

1. $\frac{1 + i}{1 - i} = \frac{(1 + i)^2}{(1-i)(1+i)} = \frac{1 + 2i + i^2}{1 - i^2} = \frac{2i}{2} = i.$

2. Să se efectueze împărțirea

$$\frac{1 + i\sqrt{3}}{1 - i\sqrt{3}} = \frac{(1 + i\sqrt{3})^2}{(1 - i\sqrt{3})(1 + i\sqrt{3})} = \frac{1 + 2i\sqrt{3} + 3i^2}{1 - (i\sqrt{3})^2} = \frac{-2+2i\sqrt{3}}{4} =$$
$$= \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}.$$

PUTEREA NUMĂRULUI COMPLEX

11. Puterile unității imaginare. Am notat unitatea imaginară $\sqrt{-1}$ cu i. Ridicînd la puteri succesive pe i, obținem

$$i^2 = -1, \qquad i^5 = i^4 \cdot i = i,$$
$$i^3 = i^2 \cdot i = -i, \qquad i^6 = i^4 \cdot i^2 = -1,$$
$$i^4 = i^2 \cdot i^2 = +1, \qquad i^7 = i^4 \cdot i^3 = -i,$$
$$i^8 = i^4 \cdot i^4 = 1.$$

Continuînd în acest fel, vedem că puterile lui i se repetă în mod periodic și deci putem scrie

$$i^{4k} = (i^4)^k = +1, \qquad i^{4k+1} = i^{4k} \cdot i = +i,$$
$$i^{4k+2} = i^{4k} \cdot i^2 = -1, \qquad i^{4k+3} = i^{4k} \cdot i^3 = -i.$$

Puterile cu soț ale lui i sînt reale și egale cu ± 1, iar puterile fără soț sînt numere imaginare și egale cu $\pm i$.

12. Cantitatea complexă $a + bi$ se ridică la o putere oarecare ca orice binom de gradul I, ținînd însă seama de puterile lui i.

De exemplu $(a + bi)^2 = a^2 + 2abi - b^2$ și în mod analog vom putea ridica la puterea 3, 4, 5 etc.

Prin puterea a n-a a cantității complexe, n fiind întreg pozitiv, înțelegem produsul a n cantități complexe egale.

Deci, ținînd seama de puterile lui i, putem scrie

$$(a + bi)^n = \left(a^n - \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}a^{n-2}b^2 + \dots\right) +$$
$$+ \left(na^{n-1}b - \frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}a^{n-3}b^3 + \dots\right) i \text{ și}$$
$$(a - bi)^n = \left(a^n - \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}a^{n-2}b^2 + \dots\right) -$$
$$- \left(na^{n-1}b - \frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}a^{n-3}b^3 + \dots\right) i.$$

Deci $(a+bi)^n = A + Bi$, iar $(a - bi)^n = A - Bi$, unde prin A și B am notat expresiile din paranteze. Aceste rezultate e bine să le reținem, fiindcă au o deosebită importanță.

Înmulțind aceste relații, membru cu membru, avem

$$(a^2 + b^2)^n = A^2 + B^2.$$

13. Dacă luăm un polinom întreg în x

$$F(x) = A_0x^n + A_1x^{n-1} + A_2x^{n-2} + \dots + A_{n-1}x + A_n$$

unde $A_0, A_1, A_2, \dots$ sînt numere reale sau complexe și în acest polinom înlocuim pe x prin $a + bi$, după efectuarea calculelor, polinomul va lua forma unui număr complex, deci

$F(a+bi) = P + Qi$, fiindcă un termen oarecare A_px^{n-p} în cazul că $A_p = \alpha + \beta i$, va avea forma $(\alpha + \beta i)(a+bi)^{n-p} =$ un produs de două numere complexe, deci vom obține un număr complex.

În cazul cînd $P = 0$ și $Q = 0$, vom avea $F(a+bi) = 0$, ceea ce înseamnă că $a + bi$ este o rădăcină a ecuației $F(x) = 0$.

Această problemă o vom adînci în capitolul următor.

RĂDĂCINA PĂTRATĂ

14. A extrage rădăcina pătrată dintr-un număr complex $a + bi$ înseamnă să găsim un număr $x + iy$, care să satisfacă relația

$$(a + bi) = (x + iy)^2.$$

Această egalitate ne conduce la relațiile

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = a \\ 2xy = b, \end{cases}$$

deci vom avea de căutat soluțiile reale ale acestui sistem, întrucît x și y trebuie să fie numere reale.

Ridicînd la pătrat ecuațiile sistemului și adunînd membru cu membru, avem

$(x^2 + y^2)^2 = a^2 + b^2$; întrucît $x^2 + y^2$ este o mărime pozitivă, avem

$x^2 + y^2 = \sqrt{a^2 + b^2}$, care împreună cu $x^2 - y^2 = a$ ne va da

$$x = \pm\sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2} + a}{2}} \text{ și } y = \pm\sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2} - a}{2}};$$

trebuie să ținem seama și de semnul lui b, fiindcă dacă $b > 0$, produsul xy din ecuația sistemului este pozitiv, deci x și y au același semn și deci semnele din fața radicalului se asociază astfel: $+$ cu $+$ sau $-$ cu $-$.

În acest caz, avem

$$\sqrt{a + bi} = \pm\left(\sqrt{\frac{\sqrt{a^2 + b^2} + a}{2}} + i\sqrt{\frac{\sqrt{a^2 + b^2} - a}{2}}\right).$$

În cazul că $b < 0$, x și y au semne contrare, deci trebuie luat $+$ cu $-$ sau $-$ cu $+$

$$\sqrt{a + bi} = \pm\left(\sqrt{\frac{\sqrt{a^2 + b^2} + a}{2}} - i\sqrt{\frac{\sqrt{a^2 + b^2} - a}{2}}\right).$$

În ambele cazuri, rădăcina are două valori opuse.

Rădăcinile pătrate a două numere complexe conjugate sînt și ele conjugate.

Exemple

1) Să aflăm rădăcina pătrată a numărului $\frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}$.

Scriem că $\sqrt{\frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}} = x + iy$ și avem $x^2 - y^2 = -\frac{1}{2}$

și $2xy = \frac{\sqrt{3}}{2}$; rezolvînd sistemul, obținem

$$x = \pm\frac{1}{2}, \quad y = \pm\frac{\sqrt{3}}{2},$$

deci rădăcinile căutate sînt numerele opuse

$$\frac{1 + i\sqrt{3}}{2} \text{ şi } \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2}.$$

2) Să se calculeze $\sqrt{5 - 3i}$. Scriem $\sqrt{5 - 3i} = x + iy$ şi, rezolvînd sistemul

$$x^2 - y^2 = 5, \quad xy = -\frac{3}{2},$$

găsim valori pentru

$$x = \pm\sqrt{\frac{5 + \sqrt{34}}{2}}; \quad y = \pm\sqrt{\frac{-5 + \sqrt{34}}{2}}.$$

Deci

$$\sqrt{5 - 3i} = x + iy = -\sqrt{\frac{5 + \sqrt{34}}{2}} + i\sqrt{\frac{-5 + \sqrt{34}}{2}}$$

sau

$$\sqrt{\frac{5 + \sqrt{34}}{2}} - i\sqrt{\frac{-5 + \sqrt{34}}{2}}.$$

3) $$\sqrt{i} = \sqrt{0 + 1\cdot i} = \pm\left(\sqrt{\frac{\sqrt{0 + 1^2} + 0}{2}} + i\sqrt{\frac{\sqrt{0 + 1^2} - 0}{2}}\right) =$$

$$= \pm\left(\sqrt{\frac{1}{2}} + i\sqrt{\frac{1}{2}}\right) = \pm\left(\frac{\sqrt{2} + i\sqrt{2}}{2}\right).$$

15. Pentru a calcula rădăcina a m-a din $a + bi$, egalăm expresia $\sqrt[m]{a + bi} = x + iy$. Deci totul revine să calculăm valoarea lui x şi a lui y din relaţia $(x + iy)^m = a + bi$, de unde

$$x^m - C_m^2 x^{m-2}y^2 + C_m^4 x^{m-4}y^4 \ldots = a$$

$$C_m^1 x^{m-1}y - C_m^3 x^{m-3}y^3 + \ldots = b.$$

În cazul general, rezolvarea acestor ecuaţii este imposibilă pe cale algebrică, astfel că vom trata această chestiune prin altă metodă.

EXERCIŢII

1. Să se găsească valorile lui a şi b, astfel ca să avem relaţiile

1) $(a - b) + (a + b - 2)i = 0$.

2) $(a^2 + b^2 - 25) + (a - b - 1)i = 0$.

3) $a + bi = 3 - 2i$.

4) $a + bi = a^2 - b^2 + 4i$.

2. Să se determine x şi y, ca să avem

1) $\frac{8i}{x} + iy - 2 = 7i - \frac{10}{x} + y$.

2) $aix + biy - a = i - a^2x - b^2y$.

3. Să se efectueze produsele

$$(\sqrt{5} + i\sqrt{6})(\sqrt{6} + i\sqrt{5}); \quad (\sqrt{1 + i} - \sqrt{1 - i})^2;$$

$$(3 - i\sqrt{8})(\sqrt{3} + i\sqrt{2}).$$

4. Să se calculeze produsul

$(1 - i)(1 - 2i)(1 - 3i)(1 - 4i)$.

5. Să se calculeze

$(1 + i)(2 + i)(3 + i)(4 + i)$.

6. Să se verifice egalitatea

$i^7 + i^{18} + i^{25} + i^{35} + i^{97} + i^{100} = 0$.

7. Să se arate că

$$(2 + i\sqrt{2})^2 + (2 - i\sqrt{2})^2 = 2^2.$$

8. $(6 + i\sqrt{6})^3 + (6 - i\sqrt{6})^3 = 6^3$.

9. Dîndu-se $\alpha_1 = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}$, $\alpha_2 = \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2}$; $\alpha_3 = 1$, să se verifice egalitățile

1) $\alpha_1^3 = \alpha_2^3 = \alpha_3^3 = 1$;

2) $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 0$;

3) $\alpha_1 \cdot \alpha_2 \cdot \alpha_3 = 1$;

4) $\alpha_1^2 = \alpha_2$;

5) $\alpha_2^2 = \alpha_1$;

6) $1 + \alpha_1 + \alpha_1^2 = 0$.

10. Să se efectueze operațiile

$$(\sqrt{5+9i} + \sqrt{5-9i})^2$$

$$\frac{(a+ib)^2}{a-ib} - \frac{(a-ib)^2}{a+ib}.$$

11. Să se efectueze

$$\left(\frac{1+i\sqrt{7}}{2}\right)^4 + \left(\frac{1-i\sqrt{7}}{2}\right)^4.$$

12. Să se pună sub o formă mai simplă

$$a)\ \frac{1}{1+i} + \frac{1}{1-i},$$

$$b)\ \frac{1}{-1+i\sqrt{3}}.$$

13. Să se efectueze împărțirile

$a)\ \frac{1-i\sqrt{3}}{1+i\sqrt{3}}$, $b)\ \frac{2-i\sqrt{2}}{3+i\sqrt{2}}$, $c)\ \frac{-2\sqrt{3}+i}{1+2i\sqrt{3}}$, $d)\ \frac{a+i\sqrt{b}}{a-i\sqrt{b}}$,

$$e)\ \frac{a-bi}{b+ai}.$$

14. Să se efectueze

$$a)\ \frac{1+i\,\mathrm{tg}\,\alpha}{1-i\,\mathrm{tg}\,\alpha},\quad b)\ \frac{(1+2i)^2-(1-i)^3}{(3+2i)^3-(2+i)^2}.$$

15. Să se calculeze $\frac{1+i}{(1-i)^2}$, punîndu-se sub forma $a+bi$.

16. Să se pună expresia

$$\frac{1}{1-2i} - \frac{1}{1+i} + \frac{1}{1-7i}\ \text{sub forma}\ a+bi.$$

17. Să se scrie sub forma $a+bi$ cîtul $\frac{(1+i)(1+2i)(1+3i)}{1+4i}$.

18. Să se calculeze: $a)\ \sqrt{3-2i}$; $b)\ \sqrt{3+4i}$.

19. Să se calculeze: $\sqrt{5+12i}$; $\sqrt{4-3i}$.

20. Să se calculeze: $\sqrt{-i}$; $\sqrt{1+i\sqrt{3}}$.

21. Să se calculeze expresia

$$\sqrt{\frac{33+56i}{4i-3}}.$$

22. Să se verifice egalitatea

$$\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{\sqrt[7]{64}}\right)^7 = 1 + i\sqrt{3}.$$

REPREZENTAREA GEOMETRICĂ A NUMERELOR COMPLEXE

16. Expresia complexă de forma $a+bi$ poate fi reprezentată grafic printr-un punct, avînd coordonatele $x=a$ și $y=b$.

Numerele reale pozitive sau negative sînt reprezentate prin puncte situate pe $x'x$, deoarece au ordonata nulă. Această axă se numește *axă reală*. Numerele imaginare sînt reprezentate prin puncte situate pe axa $y'y$ și de aceea această axă se mai numește și *axă imaginară*.

Expresiile complexe $2+3i$, $-3+2i$, $-4-3i$ sînt reprezentate prin punctele A, B, C, iar imaginarele $-2i$, $+4i$, prin punctele D și E. Numerele reale 3, -5, prin punctele F, G.

Oricărui număr complex $a + bi$ îi corespunde un punct M în planul axelor, care se numește *imaginea* numărului, și, reciproc, oricărui punct M, avînd abscisa a și ordonata b, îi corespunde un număr complex $a + bi$, care se numește *afixul* acestui punct.

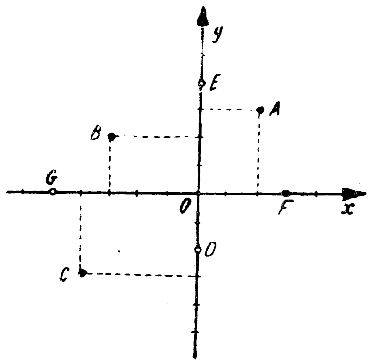


Fig. 1

Expresiile complexe conjugate $a + bi$ și $a - bi$ vor fi reprezentate prin două puncte simetrice în raport cu axa $x'x$, expresiile opuse $a + bi$ și $-a - bi$ reprezintă puncte simetrice în raport cu originea axelor, iar expresiile $a + bi$ și $-a + bi$, două puncte simetrice în raport cu axa $y'y$.

Exemplu

$2+3i$ și $2-3i$ sînt afixele punctelor A și B, simetrice în raport cu axa $x'x$; numerele complexe $2+3i$ și

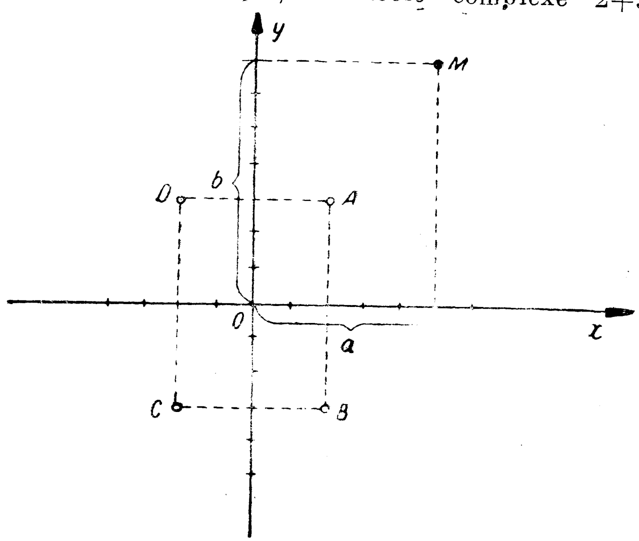


Fig. 2

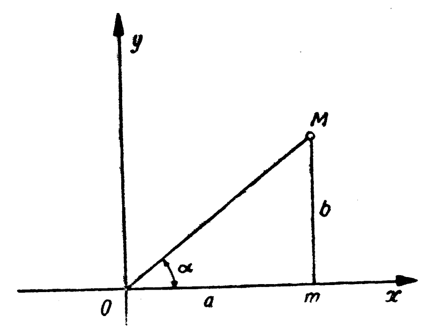
$-2-3i$ sînt afixele punctelor A și C, simetrice în raport cu originea; $2+3i$ și $-2+3i$ sînt afixele punctelor A și D, simetrice în raport cu axa yy'.

Totalitatea numerelor complexe corespunde punctelor din planul complex. Numerele reale reprezentate pe axa $x'x$ sînt cazuri particulare ale celor complexe.

FORMA TRIGONOMETRICĂ A NUMERELOR COMPLEXE

17. Am văzut că poziția punctelor M este determinată cînd se dau valorile a și b; adică mărimile a, b determină poziția punctului M în plan.

Lungimea OM, luată în valoare absolută, reprezintă modulul cantității complexe și este egală cu $+\sqrt{a^2+b^2} = r$, iar unghiul $mOM = \alpha$, pe care-l face direcția pozitivă a axei Ox cu OM, se numește *argumentul* cantității complexe. Acest unghi este socotit în sensul pozitiv trigonometric, adică sensul invers mișcării acelor de ceasornic, și poate varia între 0 și 2π. Dacă mărim unghiul α cu un multiplu de 2π, revenim la aceeași poziție a punctului M. Rezultă: *condiția necesară și suficientă ca două numere complexe să fie egale este ca modulele lor să fie egale și argumentele să fie egale sau să difere printr-un multiplu de* 2π.



Valorile lui a și b le putem exprima trigonometric din triunghiul OmM

$$a = r \cos \alpha, \quad b = r \sin \alpha, \qquad (1)$$

iar numărul complex $a + bi$ devine $a + bi = r(\cos \alpha + i \sin \alpha)$, care este *forma trigonometrică a expresiei complexe.*

Din relațiile (1) $a = r \cos\alpha$, $b = r \sin\alpha$, prin ridicare la pătrat și adunare se obține

$$r = \sqrt{a^2 + b^2}, \qquad \cos\alpha = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}, \quad \sin\alpha = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}},$$

relații care ne permit să trecem de la forma algebrică a numărului complex la forma sa trigonometrică. Dîndu-se valorile a și b, totdeauna putem determina un unghi α cuprins între 0 și 2π și o valoare r, care să satisfacă relațiile date. Nu e recomandabil să folosim relația $\operatorname{tg}\alpha = \frac{b}{a}$, căci în acest caz corespund pentru argument două valori α și $\alpha + \pi$, adică unui singur număr complex $a + bi$ i-ar corespunde două puncte diferite (diametral opuse).

Observare

Dacă în forma trigonometrică $r(\cos\alpha + i\sin\alpha)$ facem pe $\alpha = 0$ sau $\alpha = 0 + 2k\pi$, k un număr întreg, numărul complex se reduce la o cantitate pozitivă r, reprezentată printr-un segment luat pe sensul pozitiv al axei $x'x$.

Dacă $\alpha = \pi$ sau $\alpha = (2k+1)\pi$, cantitatea complexă se reduce la un număr negativ $-r$, reprezentat pe sensul negativ al axei $x'x$.

Dacă $\alpha = \frac{\pi}{2}$ sau $\alpha = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$, cantitatea complexă se reduce la $+ri$, număr imaginar, reprezentat pe partea pozitivă a axei $y'y$.

Și dacă $\alpha = \frac{3\pi}{2}$ sau $\alpha = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi$, cantitatea complexă se reduce la un număr imaginar, reprezentat pe sensul negativ al axei $y'y$.

Mai deducem următoarele:

1) Modulul unei cantități complexe nule este nul și reciproc.

2) Două numere complexe conjugate sînt de forma:
$r(\cos\alpha + i\sin\alpha)$ și $r[\cos(2k\pi - \alpha) + i\sin(2k\pi - \alpha)]$, avînd modulele egale și argumentele cu valori opuse sau completîndu-se la un multiplu de 2π.

3) Două numere complexe opuse sînt de forma $r(\cos\alpha + i\sin\alpha)$ și $r[\cos(\alpha+\pi) + i\sin(\alpha+\pi)]$; ele au modulele egale și argumentele diferă prin π.

Exemplul I. Să se treacă de la forma algebrică a expresiei $1 + i$ la forma trigonometrică.

Avem $a = 1$, $b = 1$, $r = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{2}$,

$$\cos\alpha = \frac{a}{r} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$\sin\alpha = \frac{b}{r} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}; \text{ deci } \alpha = \frac{\pi}{4}.$$

Astfel că $1 + i = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$.

Exemplul II. Să se scrie sub formă trigonometrică expresia $1 - i$.

Avem: $r = \sqrt{1 + (-1)^2} = \sqrt{2}$,

$$\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \sin\alpha = \frac{-1}{\sqrt{2}} = \frac{-\sqrt{2}}{2}.$$

Întrucît în acest caz $\cos\alpha$ este pozitiv, iar $\sin\alpha$ este negativ, înseamnă că α este în cadranul IV.

Deci $\alpha = 315°$ și putem scrie

$1 - i = \sqrt{2}(\cos 315° + i\sin 315°)$ sau, exprimînd unghiul în radiani, avem

$$1 - i = \sqrt{2}\left(\cos\frac{7\pi}{4} + i\sin\frac{7\pi}{4}\right).$$

Dar $\cos 315° = \cos(-45°) = \cos 45°$,
$\sin 315° = \sin(-45°) = -\sin 45°$,
numărul dat se scrie:

$$1 - i = \sqrt{2}(\cos 45° - i\sin 45°).$$

Exemplul III. Să se scrie numărul $5+12i$ sub formă trigonometrică.

Aplicînd formulele (1) găsim

$$r = \sqrt{5^2 + 12^2} = 13, \text{ apoi } \cos\alpha = \frac{5}{13}, \quad \sin\alpha = \frac{12}{13};$$

ambele sînt pozitive, unghiul se găsește în primul cadran și aflăm că $\alpha = 67°23'$.

Scriem

$$5 + 12i = 13(\cos 67°23' + i\sin 67°23').$$

Expresia obținută o putem scrie într-o formă generală $5 + 12i = 13[\cos(360°k + 67°23') + i\sin(360°k + 67°23')]$.

Exemplul IV. Să se exprime sub formă algebrică numărul 4 (cos 30°+i sin 30°); ştiind că $\cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}$ şi $\sin 30° = \frac{1}{2}$, avem $4(\cos 30° + i \sin 30°) = 4\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i\cdot\frac{1}{2}\right) =$

$$= 2\sqrt{3} + 2i.$$

Exemplul V. Să se scrie sub formă algebrică numărul $\cos\pi + i\sin\pi$.

Aici avem $r = 1$, $\alpha = \pi$, deci

$a = r\cos\pi = -1$

$b = r\sin\pi = 0$ şi putem scrie

$\cos\pi + i\sin\pi = -1$.

EXERCIŢII

1. Să se scrie sub formă trigonometrică următoarele expresii imaginare

1) i

2) $-i$

3) $-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$

4) $\sqrt{3} + i$

5) $\frac{3\sqrt{3}}{2} + i\frac{3}{2}$

6) $1 + i\sqrt{3}$

7) $2 + 2\sqrt{3}\,i$

8) $5\sqrt{3} - 5i$

9) $1 - i\sqrt{3}$, $1 + i\sqrt{3}$, $-1 + i\sqrt{3}$, $-1 - i\sqrt{3}$.

2. Să se scrie sub formă algebrică următoarele expresii complexe

1) $\cos 0° + i \sin 0°$

2) $4\left(\cos\frac{\pi}{10} + i\sin\frac{\pi}{10}\right)$

3) $\cos\frac{\pi}{5} + i\sin\frac{\pi}{5}$

4) $2\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)$

5) $2\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$

6) $7(\cos 0° + i\sin 0°)$

7) $5(\cos\pi + i\sin\pi)$

8) $5\sqrt{2}\left(\cos\frac{7\pi}{4} + i\sin\frac{7\pi}{4}\right)$

9) $8(\cos 75° + i\sin 75°)$

10) $11\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right)$.

OPERAŢII CU NUMERE COMPLEXE EXPRIMATE SUB FORMĂ TRIGONOMETRICĂ

ADUNAREA

18. Dacă avem două numere complexe $a + bi = r(\cos\alpha + i\sin\alpha)$ şi $a' + b'i = r'(\cos\beta + i\sin\beta)$, suma lor va fi $(a + a') + i(b + b')$ sau

$r\cos\alpha + r'\cos\beta + i(r\sin\alpha + r'\sin\beta)$ şi are ca modul $M^2 = (r\cos\alpha + r'\cos\beta)^2 + (r\sin\alpha + r'\sin\beta)^2 = r^2 + r'^2 + 2rr'\cos(\alpha - \beta)$.

Această expresie ne arată că modulul sumei este egal cu suma modulelor termenilor, cînd $\cos(\alpha - \beta) = 1$ sau $\alpha - \beta = 2K\pi$ (adică razele OM şi OM' au aceeaşi direcţie) şi este egal cu diferenţa modulelor termenilor, cînd $\alpha - \beta = 2K\pi + \pi$ (adică razele OM şi OM' au direcţii opuse).

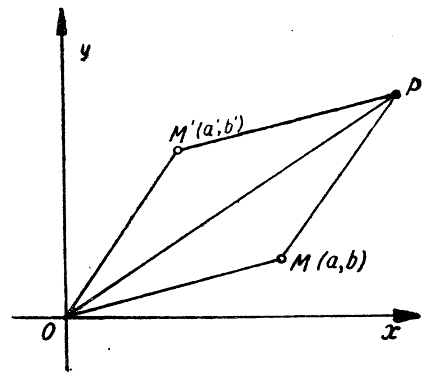


Fig. 4

Reprezentare geometrică. Construind într-un sistem de axe perpendiculare punctele M şi M', imaginile numerelor complexe $a + bi$ şi $a' + b'i$ şi paralelogramul $OMPM'$, punctul P este chiar imaginea sumei $(a + bi) + (a' + b'i)$, iar OP este modulul acestei sume. Din triunghiul OMP, putem deduce că $OP < OM + OM'(OM' = MP)$, adică:

Modulul unei sume este mai mic sau cel mult egal cu suma modulelor termenilor sumei.

Acest lucru se poate dovedi și pe cale algebrică, folosind proprietățile inegalităților.

Construcția pentru aflarea punctului P se întîlnește în fizică la compunerea forțelor după regula paralelogramului.

SCĂDEREA

19. A scădea din numărul $r(\cos\alpha + i\sin\alpha)$ pe $r'(\cos\beta + i\sin\beta)$ înseamnă a aduna primul număr cu opusul numărului al doilea.

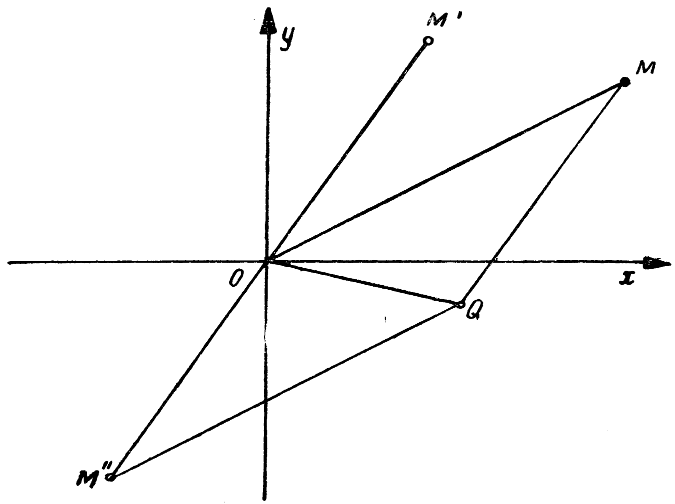


Fig. 5

Reprezentare geometrică. Luăm punctele M și M', imaginile numerelor date, apoi luăm pe M'', simetricul lui M'. Construim paralelogramul $OMQM''$. Punctul Q este imaginea diferenței, iar din triunghiul OMQ deducem

$$OQ > OM - OM' \qquad (OM' = MQ), \text{ deci:}$$

Modulul unei diferențe este mai mare sau cel puțin egal cu diferența modulelor termenilor ei.

Ca și la adunare, avem egalitate numai cînd cele două numere au același argument.

ÎNMULȚIREA

20. Dacă avem de înmulțit numerele complexe

$r(\cos\alpha + i\sin\alpha)$ și $r'(\cos\alpha' + i\sin\alpha')$, vom avea:

$$rr'[\cos\alpha\cos\alpha' + i\sin\alpha\cos\alpha' + i\sin\alpha'\cos\alpha + i^2\sin\alpha\cdot\sin\alpha'] =$$
$$= rr'[\cos\alpha\cos\alpha' - \sin\alpha\sin\alpha' + i(\sin\alpha\cos\alpha' +$$
$$+ \cos\alpha\cdot\sin\alpha')] = rr'[\cos(\alpha+\alpha') + i\sin(\alpha+\alpha')].$$

De aici deducem că:

Modulul produsului se obține înmulțind modulele factorilor săi, iar argumentul, adunînd argumentele factorilor.

Tot de aici putem deduce că produsul este nul, cînd cel puțin unul din factori este nul, căci în acest caz unul din modulele factorilor trebuie să fie nul.

Reprezentarea geometrică. Dacă luăm punctele M și M', imaginile numerelor date, ca să obținem imaginea N a produsului, ducem semidreapta OB astfel ca $\sphericalangle xOB = \alpha + \alpha'$, și luăm pe OB segmentul $ON = rr'$.

Dacă luăm pe Ox punctul u, imaginea numărului 1, triunghiurile OuM și $OM'N$ sînt asemenea.

Deci $\dfrac{1}{r'} = \dfrac{r}{ON}$, de aici

$ON = rr'$ și astfel am putut determina punctul N.

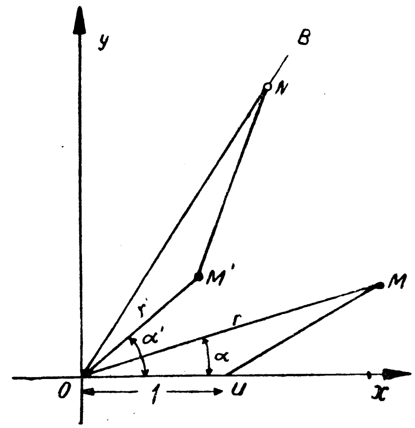


Fig. 6

APLICAȚIE

Să înmulțim numerele complexe

$$Z_1 = r_1(\cos\alpha_1 + i\sin\alpha_1),\ Z_2 = r_2(\cos\alpha_2 + i\sin\alpha_2)$$

și

$$Z_3 = r_3(\cos\alpha_3 + i\sin\alpha_3).$$

Înmulțim pe Z_1 cu Z_2 și avem:

$$Z_1\cdot Z_2 = r_1 r_2[\cos(\alpha_1+\alpha_2) + i\sin(\alpha_1+\alpha_2)];$$

11*

apoi acest rezultat îl înmulţim cu Z_3 şi obţinem

$$Z_1Z_2Z_3 = r_1r_2r_3[\cos(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3) + i\sin(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3)].$$

În mod analog, avem produsul

$$Z_1Z_2Z_3\ldots Z_n = r_1r_2r_3\ldots r_n[\cos(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\ldots+\alpha_n) + i\sin(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\ldots+\alpha_n)].$$

ÎMPĂRŢIREA

21. Numărul $r(\cos\alpha + i\sin\alpha)$ se împarte prin $r'(\cos\alpha' + i\sin\alpha')$, dacă aflăm numărul complex

$$R(\cos A + i\sin A),$$

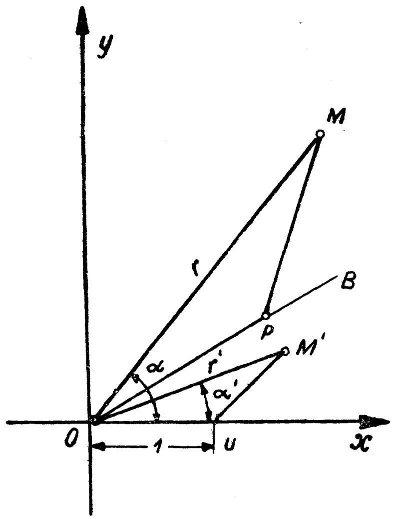


Fig. 7

care să satisfacă relaţia

$$r(\cos\alpha + i\sin\alpha) = [r'(\cos\alpha' + i\sin\alpha')]\cdot[R(\cos A + i\sin A)]$$

şi deci

$$r(\cos\alpha + i\sin\alpha) = r'R[\cos(\alpha'+A) + i\sin(\alpha'+A)],$$

de unde

$r = r'R$ şi $\alpha + 2K\pi = \alpha' + A$, $2K\pi$ fiind un multiplu de 2π.

De aici obţinem $R = \frac{r}{r'}$, şi $A = \alpha - \alpha' + 2K\pi$.

Sinusul şi cosinusul fiind funcţii periodice cu perioada 2π, putem scrie

$$\frac{r(\cos\alpha + i\sin\alpha)}{r'(\cos\alpha' + i\sin\alpha')} = \frac{r}{r'}[\cos(\alpha-\alpha') + i\sin(\alpha-\alpha')].$$

Modulul cîtului este egal cu cîtul dintre modulul deîmpărţitului şi acela al împărţitorului, iar argumentul cîtului este diferenţa dintre argumentul deîmpărţitului şi argumentul împărţitorului.

Reprezentare geometrică. Pentru ca să obţinem imaginea cîtului, ducem OB care face cu Ox un unghi egal cu $\alpha - \alpha'$, şi pe această semidreaptă luăm $OP = \frac{r}{r'}$. Punctul P este imaginea căutată.

Considerăm şi în acest caz punctul u, luat pe axa Ox, imaginea unităţii şi observăm că triunghiurile OuM' şi OPM sînt asemenea, deci putem scrie

$\frac{1}{OP} = \frac{r'}{r}$, $OP = \frac{r}{r'}$. Deci am construit punctul P, imaginea cîtului.

APLICAŢIE

Să se arate că

$$\frac{1}{\cos\alpha - i\sin\alpha} = \cos\alpha + i\sin\alpha.$$

1) Scriind numărătorul sub forma trigonometrică, fracţia devine

$$\frac{\cos 0 + i\sin 0}{\cos(-\alpha) + i\sin(-\alpha)} = \cos\alpha + i\sin\alpha.$$

2) Amplificînd fracţia prin conjugata numitorului, ea capătă forma

$$\frac{\cos\alpha + i\sin\alpha}{\cos^2\alpha + \sin^2\alpha} = \cos\alpha + i\sin\alpha.$$

RIDICAREA LA PUTERE

22. Pentru a ridica un număr complex la o putere oarecare, folosim formula obţinută la înmulţire. De exemplu $[r(\cos\alpha + i\sin\alpha)]^2 = r(\cos\alpha + i\sin\alpha)\cdot r(\cos\alpha + i\sin\alpha) = r^2[\cos(\alpha+\alpha) + i\sin(\alpha+\alpha)] = r^2(\cos 2\alpha + i\sin 2\alpha)$

şi în mod analog se poate arăta că

$$[r(\cos\alpha + i\sin\alpha)]^3 = r^3(\cos 3\alpha + i\sin 3\alpha).$$

În general, se poate arăta că avem

$$[r(\cos\alpha + i\sin\alpha)]^n = r^n(\cos n\alpha + i\sin n\alpha).$$

Modulul puterii unui număr complex este egal cu aceeaşi putere a modulului bazei, iar argumentul este egal cu argumentul bazei înmulţit cu exponentul puterii.

23. Dacă în relația $r^n(\cos\alpha + i\sin\alpha)^n = r^n(\cos n\alpha + i\sin n\alpha)$, enunțată mai înainte, facem pe $r = 1$, obținem formula lui *Moivre*[1]:

$$(\cos\alpha + i\sin\alpha)^n = \cos n\alpha + i\sin n\alpha.$$

Exemple

1. Să se ridice la cub numărul $z = 2(\cos 20° + i\sin 20°)$. Aplicînd formula lui Moivre, avem

$$z^3 = 2^3(\cos 3\cdot 20° + i\sin 3\cdot 20°) = 8(\cos 60° + i\sin 60°) =$$
$$= 8\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 4(1 + i\sqrt{3}).$$

2. Să se calculeze $\left(\frac{-1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{3p}$. Scriem numărul sub formă trigonometrică $r = 1$, $\cos\alpha = -\frac{1}{2}$, $\sin\alpha = -\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\alpha = 60° + 180° = 240°\left(\frac{4\pi}{3}\text{ radiani}\right)$ și deci numărul devine $\cos\left(\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3}\right)^{3p} = \cos 4p\pi + i\sin 4p\pi = 1.$

APLICAȚII ALE FORMULEI LUI MOIVRE

24. Din formula lui Moivre $(\cos\alpha + i\sin\alpha)^m = \cos m\alpha + i\sin m\alpha$ se pot deduce valorile lui $\cos m\alpha$ și $\sin m\alpha$ în funcție de $\cos\alpha$ și $\sin\alpha$.

Dezvoltînd membrul întîi și egalînd părțile reale și coeficienții părților imaginare, obținem

$$\cos m\alpha + i\sin m\alpha = \cos^m\alpha - C_m^2\cos^{m-2}\alpha\sin^2\alpha + C_m^4\cos^{m-4}\alpha\cdot$$
$$\cdot\sin^4\alpha + \ldots + i(C_m^1\cos^{m-1}\alpha\sin\alpha - C_m^3\cos^{m-3}\alpha\sin^3\alpha + \ldots)$$
$$\cos m\alpha = \cos^m\alpha - C_m^2\cos^{m-2}\alpha\sin^2\alpha + C_m^4\cos^{m-4}\alpha\sin^4\alpha + \ldots$$
$$\sin m\alpha = C_m^1\cos^{m-1}\alpha\sin\alpha - C_m^3\cos^{m-3}\alpha\sin^3\alpha +$$
$$+ C_m^5\cos^{m-5}\alpha\sin^5\alpha + \ldots;$$
$$\operatorname{tg} m\alpha = \frac{C_m^1\operatorname{tg}\alpha - C_m^3\operatorname{tg}^3\alpha + C_m^5\operatorname{tg}^5\alpha - \ldots}{1 - C_m^2\operatorname{tg}^2\alpha + C_m^4\operatorname{tg}^4\alpha - \ldots}.$$

[1] *Moivre* — matematician francez (1667—1754).

În cazul particular, cînd $m = 3$, obținem formulele cunoscute din trigonometrie

$$\cos 3\alpha = \cos^3\alpha - 3\cos\alpha\sin^2\alpha$$
$$\sin 3\alpha = 3\cos^2\alpha\sin\alpha - \sin^3\alpha$$
$$\operatorname{tg} 3\alpha = \frac{3\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}^3\alpha}{1 - 3\operatorname{tg}^2\alpha}.$$

Exerciții. Să se calculeze $\cos 4a$, $\sin 4a$, $\operatorname{tg} 4a$ în funcție de $\cos a$, $\sin a$ și $\operatorname{tg} a$.

RĂDĂCINA UNUI NUMĂR COMPLEX

25. Să extragem rădăcina pătrată din numărul

$$z = r(\cos\alpha + i\sin\alpha).$$

Dacă notăm cu x modulul și cu y argumentul rădăcinii căutate, vom avea

$$\sqrt{z} = \sqrt{r(\cos\alpha + i\sin\alpha)} = x(\cos y + i\sin y) = u.$$

Ridicînd la pătrat, obținem

$r(\cos\alpha + i\sin\alpha) = x^2(\cos 2y + i\sin 2y)$ și din condiția de egalitate a două numere complexe, vom avea

$$x^2 = r,\ \text{de unde}\ x = \sqrt{r}\ \text{(rădăcina aritmetică) și}$$
$$2y = \alpha + 2k\pi,\ 2k\pi\ \text{fiind un multiplu de}\ 2\pi$$
$$y = \frac{\alpha + 2k\pi}{2}.$$

Rădăcina pătrată din numărul dat va fi

$$\sqrt{r}\left[\cos\left(\frac{\alpha + 2k\pi}{2}\right) + i\sin\left(\frac{\alpha + 2k\pi}{2}\right)\right],$$

k fiind un număr întreg oarecare.

Să vedem cîte valori diferite ale rădăcinii vom obține dînd lui k valorile: 0, ± 1, ± 2 etc.

Cînd $k = 0$, avem

$$u_1 = \sqrt{r}\left(\cos\frac{\alpha}{2} + i\sin\frac{\alpha}{2}\right).$$

Cînd $k=1$, vom obține

$$u_2 = \sqrt{r}\left[\cos\left(\frac{\alpha}{2}+\pi\right)+i\sin\left(\frac{\alpha}{2}+\pi\right)\right]=$$

$$=\sqrt{r}\left[-\cos\left(+\frac{\alpha}{2}\right)-i\sin\left(+\frac{\alpha}{2}\right)\right]=-\sqrt{r}\left(\cos\frac{\alpha}{2}+i\sin\frac{\alpha}{2}\right).$$

Deci $u_2 = -u_1$.

Dacă dăm lui k valorile 2, 3, 4,... vom obține valori succesive egale cu u_1 și u_2; de asemenea, pentru valori negative ale lui k.

Rădăcina pătrată dintr-un număr complex are două valori diferite, două numere opuse.

În mod analog am putea să extragem rădăcina cubică din numărul $z = r(\cos\alpha + i\sin\alpha)$.

26. Rădăcina a n-a.

Pentru a afla rădăcina a n-a din $z = r(\cos\alpha + i\sin\alpha)$ trebuie să găsim un număr complex $x(\cos y + i\sin y)$ care ridicat la puterea a n-a, să fie egal cu numărul dat.

Deci

$$r(\cos\alpha + i\sin\alpha) = [x(\cos y + i\sin y)]^n =$$
$$= x^n(\cos ny + i\sin ny).$$

De unde rezultă

$x^n = r$, $ny = \alpha + 2k\pi$, $2k\pi$ fiind multiplu de 2π.

De aici deducem că

$x = \sqrt[n]{r}$, $y = \dfrac{\alpha+2k\pi}{n}$, $\sqrt[n]{r}$ este rădăcina a n-a aritmetică a lui r.

Avem deci formula

$$\sqrt[n]{r(\cos\alpha + i\sin\alpha)} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\alpha+2k\pi}{n} + i\sin\frac{\alpha+2k\pi}{n}\right),$$

care ne dă rădăcina a n-a dintr-un număr complex: k este un număr întreg oarecare.

Modulul rădăcinii de ordinul n dintr-un număr complex este egal cu rădăcina de același ordin din modulul numărului de sub radical, iar argumentul este egal cu argumentul numărului de sub radical mărit cu $2k\pi$, împărțit la indicele radicalului.

Dacă dăm lui k valorile $0, 1, 2, 3, \ldots, n-1$, obținem cele n valori ale rădăcinii, iar dacă vom da lui k valori în continuare, se repetă valorile obținute. Deci rădăcina de ordinul n are n valori distincte.

Această formulă se mai poate scrie

$$\sqrt[n]{r(\cos\alpha + i\sin\alpha)} =$$
$$= \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\alpha}{n} + i\sin\frac{\alpha}{n}\right)\left(\cos\frac{2k\pi}{n} + i\sin\frac{2k\pi}{n}\right).$$

27. Rădăcina n-a a unității.

Dacă în formula de mai sus facem pe $r=1$ și $\alpha=0$, obținem

$$\sqrt[n]{1} = \cos\frac{2k\pi}{n} + i\sin\frac{2k\pi}{n}.$$

Rădăcina a n-a a lui 1 are n valori, care se obțin făcînd în formulă pe $k = 0, 1, 2, \ldots, (n-1)$.

Rădăcinile reale de ordinul n ale unității se obțin cînd $\sin\frac{2k\pi}{n} = 0$, de unde $\frac{2k\pi}{n} = 0$ sau $\frac{2k\pi}{n} = \pi$, deci avem $k=0$ și $k = \frac{n}{2}$, cînd n este cu soț.

Prin urmare, dacă n este fără soț, avem o singură rădăcină reală de ordinul n a unității, egală cu 1. Dacă n este cu soț, două rădăcini de ordinul n ale unității sînt reale.

Ele se obțin făcînd pe $k=0$ și $k=\frac{n}{2}$ și sînt $+1$ și -1.

Exemplul 1. Să aflăm rădăcinile cubice ale unității.

$\sqrt[3]{1}$ se obține din egalitatea

$\sqrt[3]{1} = \cos\frac{2k\pi}{3} + i\sin\frac{2k\pi}{3}$; facem pe $k = 0, 1, 2$, și obținem $1, -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Aceste rădăcini sînt afixele vîrfurilor triunghiului echilateral ABC, înscris în cercul cu centrul în origine și raza 1.

Exemplul II. Rădăcina a 4-a a unității se obține din formula de mai sus, făcînd pe $n=4$ și $k=0, 1, 2, 3$. Rădăcinile sînt ± 1 și $\pm i$.

Cele n valori ale rădăcinii a n-a a unui număr complex se obțin înmulțind una din aceste rădăcini cu cele n rădăcini ale unității.

Din formula rădăcinii a n-a dintr-un număr complex, factorul $\sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\alpha}{n}+i\sin\frac{\alpha}{n}\right)$ este o valoare a rădăcinii a n-a din z, iar factorul al doilea este rădăcina a n-a a unității, care are n valori.

Exemplul I. Să calculăm $\sqrt[3]{i}$. Punînd pe i sub formă trigonometrică, avem

$i=\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}$. Una din rădăcinile cubice ale lui i este

$$\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{2}+i\frac{1}{2}=\frac{1}{2}(\sqrt{3}+i).$$

Rădăcinile cubice ale lui i se obțin înmulțind această rădăcină cu rădăcinile cubice ale unității și vom obține

$$\frac{1}{2}(\sqrt{3}+i);\ \frac{1}{2}(-\sqrt{3}+i);-i.$$

Exemplul II. Să se calculeze

$$\sqrt[4]{\frac{3\sqrt{3}}{2}+i\cdot\frac{3}{2}}.$$

Punem sub formă trigonometrică numărul

$\frac{3\sqrt{3}}{2}+i\cdot\frac{3}{2}$ și avem $\frac{3\sqrt{3}}{2}+i\cdot\frac{3}{2}=3\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)$.

Una din rădăcinile căutate este $\sqrt[4]{3}\left(\cos\frac{\pi}{24}+i\sin\frac{\pi}{24}\right)$. Pentru a obține cele patru rădăcini ale numărului dat, înmulțim această valoare cu cele patru rădăcini ale lui 1, care sînt ± 1 și $\pm i$.

Exemplul III. Să se extragă rădăcina de ordinul al 4-lea din numărul 81.

Scriem numărul 81 sub formă trigonometrică

$$81=81(\cos 2k\pi+i\sin 2k\pi)$$

și

$$\sqrt[4]{81}=\sqrt[4]{81(\cos 2k\pi+i\sin 2k\pi)}=3\left(\cos\frac{k\pi}{2}+i\sin\frac{k\pi}{2}\right);$$

dînd lui k valorile 0, 1, 2, 3, obținem patru valori pentru rădăcina de ordinul al 4-lea a numărului 81.

$$k=0;\ \sqrt[4]{81}=3(\cos 0^\circ+i\sin 0^\circ)=3$$

$$k=1;\ \sqrt[4]{81}=3\left(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}\right)=3i$$

$$k=2;\ \sqrt[4]{81}=3(\cos\pi+i\sin\pi)=-3$$

$$k=3;\ \sqrt[4]{81}=3\left(\cos\frac{3\pi}{2}+i\sin\frac{3\pi}{2}\right)=-3i.$$

Avem 3 și -3, rădăcini reale, și $3i$ și $-3i$, două rădăcini imaginare conjugate.

ECUAȚII BINOME

28. O ecuație de forma $x^m\pm A=0$, unde A este un număr oarecare se numește *ecuație binomă*. Rezolvarea ecuațiilor binome pe cale trigonometrică se reduce la operația extragerii rădăcinii, adică la găsirea celor m valori ale rădăcinii a m-a din A.

De exemplu, considerăm ecuația $x^m-A=0$, $x^m=A$, $x=\sqrt[m]{A}$. Dacă punem pe A sub formă trigonometrică

$$A=r(\cos\alpha+i\sin\alpha),$$

avem

$$x=\sqrt[m]{r(\cos\alpha+i\sin\alpha)}.$$

Cele m rădăcini ale ecuației binome sînt date de relația

$$x_k = \sqrt[m]{r}\left(\cos\frac{2k\pi+\alpha}{m} + i\sin\frac{2k\pi+\alpha}{m}\right),\quad k = 0,1,2,\ldots,m-1$$

sau

$$x_k = \sqrt[m]{r}\left(\cos\frac{\alpha}{m} + i\sin\frac{\alpha}{m}\right)\left(\cos\frac{2k\pi}{m} + i\sin\frac{2k\pi}{m}\right),$$

$$(k = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ m-1).$$

Din această relație se vede că cele m rădăcini ale ecuației binome $x^m - A = 0$ se obțin înmulțind cele m rădăcini ale unității, date de relația

$$\cos\frac{2k\pi}{m} + i\sin\frac{2k\pi}{m}\quad (k = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ m-1)$$

cu

$$\sqrt[m]{r}\left(\cos\frac{\alpha}{m} + i\sin\frac{\alpha}{m}\right),$$

unde $\sqrt[m]{r}$ este radicalul aritmetic din r.

E x e m p l e. I. Să se rezolve ecuația $x^3 + 8 = 0$.

Avem $x^3 = -8$ și $x = \sqrt[3]{-8}$; scriem numărul sub formă trigonometrică

$$-8 = 8[\cos(180° + 360°k) + i\sin(180° + 360°k)]$$

și deci

$$\sqrt[3]{-8} = 2[\cos(60° + 120°k) + i\sin(60° + 120°k)].$$

Cînd $k = 0,\ 1,\ 2$, vom avea

$$x_1 = 2(\cos 60° + i\sin 60°) = 2\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 1 + i\sqrt{3};$$

$$x_2 = 2(\cos 180° + i\sin 180°) = 2(-1 + i\cdot 0) = -2;$$

$$x_3 = 2(\cos 300° + i\sin 300°) = 2\left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 1 - i\sqrt{3}.$$

II. Să se rezolve ecuația $x^5 - 243 = 0$. Avem $x^5 = 243$, adică $x = \sqrt[5]{243}$, dar $243 = 243(\cos 360°k + i\sin 360°k)$ și

$$\sqrt[5]{243} = \sqrt[5]{243}(\cos 72°k + i\sin 72°k);$$

cînd $k = 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4$, obținem

$$x_1 = 3(\cos 0° + i\sin 0°) = 3;\quad x_3 = 3(\cos 144° + i\sin 144°);$$

$$x_2 = 3(\cos 72° + i\sin 72°);\quad x_4 = 3(\cos 216° + i\sin 216°);$$

$$x_5 = 3(\cos 288° + i\sin 288°).$$

Dacă aflăm sinusurile și cosinusurile argumentelor obținute, vom putea exprima algebric rădăcinile ecuației date.

APLICAREA NUMERELOR COMPLEXE ÎN FIZICĂ ȘI TEHNICĂ

Se știe că la trecerea unui curent alternativ printr-o bobină[1], în afară de rezistența ohmică (activă), apare o rezistență datorită inducției, numită reactanță inductivă, a cărei valoare este

$$R_L = 2\pi f\cdot L,$$

unde f = frecvența curentului și L = inductanța bobinei.

Rezistența totală se poate reprezenta printr-un număr complex

$$R = R_\Omega + iR_L.$$

Modulul $|R| = \sqrt{R_\Omega^2 + R_L^2}$ reprezintă impedanța, al cărei argument φ este dat de $\operatorname{tg}\varphi = \frac{R_L}{R_\Omega}$.

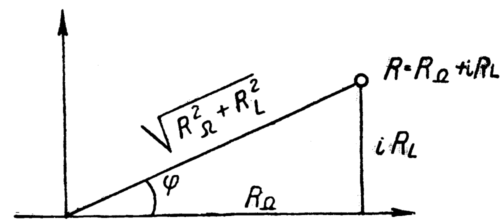


Fig. 8

Considerațiile de mai sus ne folosesc în cazul cînd într-un circuit avem intercalate mai multe bobine în serie sau paralel și cînd prin aplicarea relațiilor lui Kirchhoff putem

[1] v. *Fizica* cl. a X-a, cap. *Curentul alternativ.*

calcula impedanța totală ca o sumă de numere complexe de forma

$$R_\Omega + iR_L.$$

Luăm două exemple.

1. (Legarea în serie.) În circuitul din figura alăturată fie frecvența curentului ($f = 50$ Hz) și tensiunea ($U = 220$ V). Bobina S_1 are coeficientul de inducție proprie (inductanță) $L_1 = 7$ henry și bobina S_2 o inducție proprie

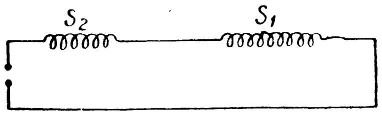


Fig. 9

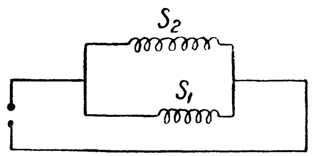


Fig. 10

$L_2 = 3{,}5$ henry și amîndouă o rezistență ohmică $R_{\Omega 1} = R_{\Omega 2} = 200\ \Omega$.

Ne propunem să calculăm intensitatea curentului. Avem

$$R_1 = R_{\Omega 1} + i2\pi f L_1 = 200 + i2\pi \cdot 50 \cdot 7 \approx 200 + 2\,200i,$$

$$R_2 = R_{\Omega 2} + i2\pi f L_2 = 200 + i2\pi \cdot 50 \cdot 3{,}5 \approx 200 + 1\,100i,$$

unde, pentru simplificare, pentru π luăm valoarea $\frac{22}{7}$.

Atunci $R = R_1 + R_2 \approx 400 + 3\,300i$ este rezistența totală complexă (impedanța) a circuitului.

Modulul numărului complex R este $\sqrt{400^2 + 3\,300^2} \approx \approx 3\,324$.

Intensitatea curentului va fi:

$$I = \frac{U}{|R|} \approx \frac{220}{3\,324}\ \text{A} \approx 0{,}066\ \text{A}.$$

2. (Legarea în paralel.) Așezăm ambele bobine în paralel și după relația lui Kirchhoff

$$R = \frac{R_1R_2}{R_1 + R_2} \approx \frac{(200 + 2\,200i)(200 + 1\,100i)}{400 + 3\,300i}.$$

Ne trebuie modulul lui R, adică impedanța; avem

$$|R| = \frac{|R_1| \cdot |R_2|}{|R_1 + R_2|} \approx \frac{2\,210 \cdot 1\,120}{3\,324} \approx 745,$$

apoi calculăm intensitatea

$$I = \frac{U}{|R|} \approx \frac{220}{745}\ \text{A} \approx 0{,}295\ \text{A}.$$

În mod analog se procedează și cînd în circuit se află un condensator, fiindcă condensatorul într-un circuit de curent alternativ se comportă ca o rezistență (reactanță capacitivă).

EXERCIȚII

1. Să se efectueze

$$\cos\left(\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)\left(\cos\frac{2\pi}{9} + i\sin\frac{2\pi}{9}\right)\left(\cos\frac{\pi}{9} + i\sin\frac{\pi}{9}\right).$$

2. Să se calculeze împărțirea

$$\frac{\cos\frac{4\pi}{9} + i\sin\frac{4\pi}{9}}{\cos\frac{5\pi}{18} + i\sin\frac{5\pi}{18}}.$$

3. Să se calculeze

$$\left[2\left(\cos\frac{\pi}{8} + i\sin\frac{\pi}{8}\right)\right]^2.$$

4. Să se calculeze

$$[2(\cos 12^\circ + i\sin 12^\circ)]^5.$$

5. Să se calculeze

$$\left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{3p+1}.$$

6. Să se rezolve ecuația bipătrată

$$ix^4 + (2 - i)x^2 - 1 - i = 0.$$

7. Să se calculeze modulul şi argumentul expresiei

$$\left[\frac{1+i+\sqrt{3}(1-i)}{1+i}\right]^3.$$

8. Să se calculeze

$$\sqrt[3]{4+4i\sqrt{3}}.$$

9. Să se calculeze rădăcinile cubice ale expresiei $i-\sqrt{3}$.

10. Să se rezolve ecuaţia

$$x^4-16=0.$$

11. Să se rezolve ecuaţiile

$$x^5-1=0;\quad x^6-1=0;\quad x^8-1=0.$$

12. Să se rezolve ecuaţia

$$x^2-(7+i)x+14+5i=0.$$

13. Să se rezolve ecuaţia

$$x^4+4(1-i)x^2+3-4i=0.$$

14. Să se arate că

$$\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^{2k}+\left(\frac{1-i}{1+i}\right)^{2k}=(-1)^k\cdot 2.$$

15. Să se arate că

$$(i+1)^{6n}=(-8i)^n.$$

16. Să se scrie numărul complex $\sin\alpha+i\cos\alpha$ sub formă trigonometrică.

17. Să se calculeze, folosind forma trigonometrică, numărul

$$A=\frac{\sqrt{3}+i}{(\sqrt{3}-i)^5}.$$

18. Să se calculeze expresia

$$B=\frac{\left(\cos\frac{\pi}{6}-i\sin\frac{\pi}{6}\right)^{\frac{11}{2}}}{\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)^{\frac{1}{2}}}.$$

19. Să se găsească expresia generală a arcului x, care satisface ecuaţia

$$(\cos x+i\sin x)(\cos 2x+i\sin 2x)\ldots$$
$$\ldots(\cos nx+i\sin nx)=1.$$

20. Să se calculeze expresia

$$A=(\sqrt{3}+i)^5\cdot(1+i)^3,$$

pe cale algebrică şi trigonometrică.

21. Să se calculeze sumele

$$S_1=1-C_n^2+C_n^4-C_n^6+\ldots$$
$$S_2=C_n^1-C_n^3+C_n^5-C_n^7+\ldots$$

22. Să se demonstreze că

1) $S_0=1+C_n^4+C_n^8+\ldots=\frac{1}{2}\left(2^{n-1}+2^{\frac{n}{2}}\cos\frac{n\pi}{4}\right)$

2) $S_1=C_n^1+C_n^5+C_n^9+\ldots=\frac{1}{2}\left(2^{n-1}+2^{\frac{n}{2}}\sin\frac{n\pi}{4}\right)$

3) $S_2=C_n^2+C_n^6+C_n^{10}+\ldots=\frac{1}{2}\left(2^{n-1}-2^{\frac{n}{2}}\cos\frac{n\pi}{4}\right)$

4) $S_3=C_n^3+C_n^7+C_n^{11}+\ldots=\frac{1}{2}\left(2^{n-1}-2^{\frac{n}{2}}\sin\frac{n\pi}{4}\right)$.

23. Să se demonstreze cu ajutorul numerelor complexe că, dacă z_1, z_2, z_3 sînt afixele vîrfurilor A, B şi C ale unui triunghi echilateral, iar P de afix z este un punct oarecare din plan, atunci cu distanţele PA, PB, PC se poate construi un triunghi. (Teorema lui Pompeiu.)

24. Fiind dat $\sin\omega=a$; să se formeze ecuaţiile care dau

$$1^\circ\ \sin\frac{\omega}{3}=x;\quad 2^\circ\ \sin\frac{\omega}{4}=y;\quad 3^\circ\ \sin\frac{\omega}{5}=z.$$

25. Fiind dat $\cos\omega=b$, să se formeze ecuaţiile care dau

$$1^\circ\ \cos\frac{\omega}{3}=x;\quad 2^\circ\ \cos\frac{\omega}{4}=y;\quad 3^\circ\ \cos\frac{\omega}{5}=z.$$

26. Din înmulțirea numerelor $a + bi$ și $x + yi$ să se deducă relația

$$\operatorname{arc\,tg} \frac{b}{a} + \operatorname{arc\,tg} \frac{y}{x} = \operatorname{arc\,tg} \frac{ay + bx}{ax - by}.$$

27. Un triunghi echilateral are două vîrfuri în punctele $z = 1$ și $z_1 = 2 + i$.

Să se afle al treilea vîrf.

28. Se cufundă în apă un con de lemn de 1 m înălțime, astfel ca axa lui să fie verticală.

Se cere înălțimea părții conului care intră în apă, făcînd să plutească conul cu vîrful în jos și apoi cu vîrful în sus. (Densitatea lemnului 0,5.)

CAPITOLUL V

PROPRIETĂȚI ALE POLINOAMELOR ȘI REZOLVAREA ECUAȚIILOR

1. Vom reaminti cîteva noțiuni pe care le-am mai întîlnit și în capitolele precedente.

Expresia

$$f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n \tag{1}$$

în care x este o *variabilă*, iar coeficienții $a_0, a_1, \ldots, a_n$ constante (cu cel puțin $a_0 \neq 0$), este *forma generală a unui polinom în x de gradul n.*

Dacă egalăm cu zero această expresie, obținem

$$f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n = 0, \tag{2}$$

care este *forma generală a unei ecuații algebrice de gradul n.*

Se zice că a este rădăcină a ecuației $f(x) = 0$, atunci cînd *înlocuind* în $f(x)$ pe x cu a, rezultatul înlocuirii este zero.

De exemplu, se poate verifica ușor că ecuația

$$x^4 - 8x^3 + 14x^2 + 8x - 15 = 0$$

admite ca rădăcini pe $x = 1$; $x = 3$; $x = 5$ și $x = -1$.

Dacă înlocuind în $f(x)$ pe x cu orice valoare, rezultatul înlocuirii este zero, vom zice că ecuația $f(x) = 0$ devine o *identitate.*

Polinomul $f(x)$ se zice că este *identic nul* și se scrie $f(x) \equiv 0$.

Exemplu: $a(x - x^2) + x(x^2 - a) + x^2(a - x) \equiv 0.$

TEOREMA LUI D'ALEMBERT

2. În capitolele precedente, am pomenit mereu de rădăcinile unei ecuații și întrucît în cîteva din chestiunile tratate, atît în aritmetică, cît și în algebră, am dat cîte o *teoremă de existență* și de *unicitate*, e firesc să punem întrebarea:

fiind dată o ecuație algebrică, sîntem siguri că ea are cel puțin o rădăcină ?

Răspunsul este afirmativ: *Orice ecuație algebrică, cu coeficienți reali sau complecși, admite cel puțin o rădăcină reală sau complexă.*

Această teoremă nu o putem demonstra aici, deoarece ea cere cunoștințe ce depășesc cadrul unui manual de școală medie.

Teorema aceasta celebră și fundamentală în teoria ecuațiilor poartă numele de *teorema lui d'Alembert.*

3. Cu ajutorul teoremei lui d'Alembert, putem scoate o altă teoremă tot atît de importantă (și care ar putea fi numită *consecința teoremei lui d'Alembert*).

Teoremă. *O ecuație algebrică de gradul n*

$$f(x) = A_0x^n + A_1x^{n-1} + \ldots + A_{n-1}x + A_n = 0 \quad (1)$$

admite n rădăcini.

Pentru demonstrarea ei, ne vom servi de teorema lui d'Alembert.

După această teoremă, ecuația $f(x) = 0$ admite o rădăcină reală sau complexă, fie ea x_1; atunci $f(x)$ se divide cu $(x - x_1)$, deci putem scrie

$$f(x) = (x - x_1) \cdot f_1(x), \quad (2)$$

unde $f_1(x)$ înseamnă un polinom de gradul $(n - 1)$.

Ecuația $f_1(x) = 0$, la rîndul său, admite și ea o rădăcină x_2, deci

$$f_1(x) = (x - x_2) \cdot f_2(x), \quad (3)$$

unde $f_2(x)$ va însemna un polinom de gradul $(n - 2)$.

Înlocuind pe $f_1(x)$ din (3) în expresia lui $f(x)$ din (2), putem scrie

$$f(x) = (x - x_1)(x - x_2) \cdot f_2(x). \quad (4)$$

Continuînd tot așa mai departe, se va obține, din aproape în aproape, identitatea următoare

$$f(x) = (x - x_1)(x - x_2) \ldots (x - x_n) A, \quad (5)$$

unde A este constantă.

Pentru a determina pe A, scriem din nou egalitatea (5), punînd în locul lui $f(x)$ valoarea sa dată în relația (1).

$$A_0x^n + A_1x^{n-1} + \ldots + A_{n-1}x + A_n = \\ = (x - x_1)(x - x_2) \ldots (x - x_n) A. \quad (6)$$

Sub forma aceasta, se vede că în partea stîngă x^n are coeficientul A_0, iar în partea dreaptă, după dezvoltarea produsului, x^n are coeficientul A.

Rezultă deci că

$$A = A_0 \quad (7)$$

și atunci relația (6) se va scrie astfel

$$\boxed{A_0x^n + A_1x^{n-1} + \ldots + A_{n-1}x + A_n \equiv \\ \equiv A_0(x - x_1) \cdot (x - x_2) \ldots (x - x_n)} \quad (8)$$

Se vede astfel că ecuația $f(x) = 0$ admite n rădăcini $x_1, x_2, \ldots, x_n$; se mai zice că aceste numere sînt rădăcinile polinomului $f(x)$.

Din relația (8) se vede că un polinom de gradul n se poate descompune totdeauna într-un produs de n factori liniari, de forma $(x - a)$, a fiind real sau complex.

Un binom de gradul 1 de forma $(x - a)$ se numește în algebră factor liniar. Un factor liniar nu mai poate fi descompus în factori mai simpli. El are în algebră rolul pe care numărul prim îl are în aritmetică.

Observare. Cele n rădăcini nu trebuie să fie în mod necesar distincte, se poate întîmpla ca în produsul celor n factori liniari un factor liniar să figureze de mai multe ori.

De exemplu, dacă avem α rădăcini egale cu a, β rădăcini egale cu b etc., λ rădăcini egale cu l, atunci ecuația dată $f(x) = 0$ va avea forma

$$f(x) = A_0(x - a)^\alpha \cdot (x - b)^\beta \ldots (x - l)^\lambda = 0, \quad (9)$$

cu condiția să avem

$$\alpha + \beta + \ldots + \lambda = n. \quad (10)$$

Se zice atunci că ecuaţia $f(x) = 0$ are *rădăcini multiple*

a este rădăcină multiplă de ordinul α de multiplicitate,
b este rădăcină multiplă de ordinul β de multiplicitate etc.

Dacă $\alpha = 2$, a se numeşte rădăcină *dublă*,
dacă $\alpha = 3$, a se numeşte rădăcină *triplă*,
dacă $\alpha = 4$, a se numeşte rădăcină *cuadruplă* etc.

Dacă, de exemplu, avem ecuaţia

$$f(x) = (x-1)^2 (x+3)^4 (x-4)^3 \left(x - \frac{2}{3}\right)^6 (x+5) = 0,$$

atunci putem spune că

1 este rădăcină dublă (multiplă de ordinul 2),
-3 este rădăcină cuadruplă (multiplă de ordinul 4),
4 este rădăcină triplă (multiplă de ordinul 3),
$\frac{2}{3}$ este rădăcină multiplă de ordinul 6,
-5 este rădăcină simplă.

4. În legătură cu descompunerea polinomului $f(x)$ în factori, se poate da următoarea *teoremă de unicitate*:

Teoremă. *Descompunerea unui polinom în factori liniari nu este posibilă decît numai într-un singur fel.*

Luăm mai întîi cazul cînd polinomul $f(x)$ are rădăcini distincte.

Fie polinomul $f(x)$ de gradul n.

Să presupunem că am avea pentru $f(x)$ următoarele două descompuneri distincte

$$f(x) = A_0(x-a)(x-b)\ldots(x-l) \tag{1}$$

$$f(x) = A_0(x-a')(x-b')\ldots(x-l'). \tag{2}$$

Vom arăta că cele două descompuneri cuprind aceiaşi factori. Va trebui să avem, oricare ar fi valoarea lui x

$$A_0(x-a)(x-b)\ldots(x-l) \equiv A_0(x-a')(x-b')\ldots(x-l'). \tag{3}$$

Întîi împărţim în ambele părţi cu A_0, pe urmă observăm că partea din stînga se anulează pentru $x = a$; va trebui să se anuleze şi partea a doua, aşa că vom avea:

$$(a-a')(a-b')\ldots(a-l') = 0. \tag{4}$$

Unul din factori trebuie să fie egal cu zero; trebuie deci ca a să fie egal cu unul din numerele $a', b', \ldots, l'$. Presupunem că $a = a'$ şi împărţim ambele părţi ale identităţii (3) prin $(x-a)$, vom obţine o nouă identitate

$$A_0(x-b)\ldots(x-l) \equiv A_0(x-b')\ldots(x-l'). \tag{5}$$

Repetînd raţionamentul de mai sus, vom găsi

$$b = b' \text{ şi din aproape în aproape } l = l'.$$

În concluzie, pentru polinomul $f(x)$ de gradul n, cu toate rădăcinile sale distincte, avem un mod unic de descompunere în factori liniari

$$\boxed{f(x) = A_0(x-a)(x-b)\ldots(x-l)} \tag{6}$$

Să luăm acum cazul cînd polinomul $f(x)$ de gradul n are şi rădăcini *multiple*.

Să presupunem că am descompus polinomul

$$f(x) = A_0x^n + A_1x^{n-1} + \ldots + A_{n-1}x + A_n \tag{1}$$

în factori

$$f(x) = A_0(x-a)^\alpha (x-b)^\beta \ldots (x-l)^\lambda \tag{2}$$

cu condiţia să avem

$$\alpha + \beta + \ldots + \lambda = n. \tag{2'}$$

Presupunînd descompunerea polinomului $f(x)$ în alţi factori, am putea scrie

$$f(x) = A_0(x-a')^{\alpha'} (x-b')^{\beta'} \ldots (x-l')^{\lambda'} \tag{3}$$

cu condiţia

$$\alpha' + \beta' + \ldots + \lambda' = n. \tag{3'}$$

Egalînd relaţia (2) cu (3), ar trebui să avem

$$A_0(x-a)^\alpha (x-b)^\beta \ldots (x-l)^\lambda \equiv A_0(x-a')^{\alpha'} (x-b')^{\beta'} \ldots (x-l')^{\lambda'} \tag{4}$$

sau, împărţind peste tot cu A_0,

$$(x-a)^\alpha (x-b)^\beta \ldots (x-l)^\lambda \equiv (x-a')^{\alpha'} (x-b')^{\beta'} \ldots (x-l')^{\lambda'}. \tag{5}$$

Partea din stînga se anulează pentru $x = a$; deci şi partea din dreapta trebuie să se anuleze, cînd vom înlocui pe x cu a. Deci trebuie să avem

$$(a-a')^{\alpha'} (a-b')^{\beta'} \ldots (a-l')^{\lambda'} = 0. \tag{6}$$

Avînd un produs de factori, ca să fie egal cu zero, unul din factori trebuie să fie egal cu zero; trebuie deci ca a să fie egal cu unul din numerele $a', b', \ldots, l'$.

Vom lua $a = a'$. Atunci egalitatea (5) se scrie:

$$(x-a)^\alpha (x-b)^\beta \ldots (x-l)^\lambda \equiv (x-a)^{\alpha'} (x-b')^{\beta'} \ldots (x-l')^{\lambda'}. \tag{7}$$

Aici şi în partea stîngă şi în partea dreaptă figurează $(x-a)$, ridicat la o putere oarecare.

Presupunînd că $\alpha > \alpha'$, împărţim toată egalitatea (7) cu $(x-a)^{\alpha'}$ şi obţinem:

$$(x-a)^{\alpha-\alpha'}(x-b)^{\beta}\ldots(x-l)^{\lambda} \equiv (x-b')^{\beta'}\ldots(x-l')^{\lambda'}. \quad (8)$$

Dacă punem acum $x = a$, se anulează numai partea din stînga, pe cînd partea din dreapta nu se anulează, deoarece a a fost diferit de $b', c', \ldots, l'$.

Rezultă că nici partea din stînga nu trebuie să se mai anuleze pentru $x = a$, adică să nu mai cuprindă factorul $(x-a)^{\alpha-\alpha'}$; acest lucru se întîmplă numai atunci cînd exponentul $\alpha - \alpha' = 0$, iar factorul se reduce la 1. Prin urmare, rezultă că:

$$\alpha = \alpha'.$$

Simplificînd atunci egalitatea (5) cu $(x-a)^{\alpha}$, vom obţine o nouă identitate

$$(x-b)^{\beta}(x-c)^{\gamma}\ldots(x-l)^{\lambda} \equiv (x-b')^{\beta'}(x-c')^{\gamma'}\ldots(x-l')^{\lambda'}. \quad (9)$$

Repetînd raţionamentul de mai sus, vom găsi, din aproape în aproape,

$$\begin{aligned} b = b',\ c = c',\ \ldots,\ l = l' \\ \beta = \beta',\ \gamma = \gamma',\ \ldots,\ \lambda = \lambda', \end{aligned} \quad (10)$$

adică descompunerea polinomului $f(x)$ în factori liniari se face numai într-un singur fel.

POLINOM IDENTIC NUL

5. *Dacă un polinom se anulează pentru un număr de valori ale lui x mai mare decît gradul său, acest polinom este identic egal cu zero, adică toţi coeficienţii săi se reduc la zero.*

Să presupunem că polinomul $f(x)$ de gradul n

$$f(x) = A_0x^n + A_1x^{n-1} + \ldots + A_{n-1}x + A_n, \quad (11)$$

se anulează pentru $(n+1)$ valori diferite ale lui x

$$x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n,\ x_{n+1}.$$

Polinomul $f(x)$, în particular, e divizibil prin

$$x-x_1,\ x-x_2,\ \ldots,\ x-x_n,$$

deci şi prin produsul

$$(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_n)$$

şi cum este de gradul n, avem identitatea

$$f(x) \equiv A_0(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_n). \quad (12)$$

Polinomul $f(x)$ se anulează însă şi pentru $x = x_{n+1}$, deci trebuie să avem

$$f(x_{n+1}) = A_0(x_{n+1}-x_1)(x_{n+1}-x_2)\ldots(x_{n+1}-x_n) = 0. \quad (13)$$

Factorii $x_{n+1}-x_1,\ x_{n+1}-x_2,\ \ldots,\ x_{n+1}-x_n$ sînt toţi diferiţi de zero, întrucît prin ipoteză valoarea x_{n+1} este distinctă de toate celelalte $x_1, x_2, \ldots, x_n$; urmează deci

$$A_0 = 0. \quad (14)$$

În acest caz însă, polinomul $f(x)$ de gradul n dat de relaţia (11) se reduce la un polinom de gradul $n-1$

$$f(x) \equiv A_1x^{n-1} + A_2x^{n-2} + \ldots + A_{n-1}x + A_n. \quad (15)$$

Printr-un raţionament analog, deducem că şi coeficientul A_1 trebuie să fie zero şi de asemenea

$$A_2 = A_3 = \ldots = A_{n-1} = 0. \text{ Deci } f(x) \equiv A_n.$$

În această identitate facem $x = x_1$, de exemplu; vom avea $f(x_1) = A_n$. Însă x_1 fiind rădăcină, rezultă $f(x_1) = 0$, deci $A_n = 0$.

Urmează deci că toţi coeficienţii polinomului dat se reduc la zero şi atunci polinomul este nul pentru orice valoare a lui x, adică polinomul este identic nul, ceea ce se scrie astfel

$$f(x) \equiv 0. \quad (16)$$

Consecinţă.

Dacă un polinom de gradul n ia aceeaşi valoare pentru (n + 1) valori ale lui x, acest polinom se reduce la o constantă.

Fie polinomul $f(x)$ de gradul n

$$f(x) = A_0x^n + A_1x^{n-1} + \ldots + A_{n-1}x + A_n, \quad (17)$$

care ia aceeaşi valoare K pentru $n+1$ valori ale lui x.

Aceasta înseamnă că polinomul de gradul n

$$f(x) - K \quad (18)$$

se anulează pentru $n + 1$ valori ale lui x, deci este identic nul, adică

$$f(x) - K \equiv 0, \tag{19}$$

de unde scoatem că

$$f(x) \equiv K, \tag{20}$$

ceea ce probează că polinomul $f(x)$ se reduce la o constantă.

CONDIŢIA CA DOUĂ ECUAŢII SĂ AIBĂ ACELEAŞI RĂDĂCINI

6. Teoremă. *Condiţia necesară şi suficientă ca două ecuaţii de acelaşi grad să aibă aceleaşi rădăcini cu aceleaşi ordine de multiplicitate este ca termenii de acelaşi grad în x să aibă coeficienţii proporţionali.*

Fie cele două ecuaţii

$$f(x) \equiv A_0x^n + A_1x^{n-1} + \ldots + A_{n-1}x + A_n = 0,\ A_0 \neq 0, \tag{21}$$

$$g(x) \equiv B_0x^n + B_1x^{n-1} + \ldots + B_{n-1}x + B_n = 0,\ B_0 \neq 0. \tag{22}$$

Presupunem că cele două ecuaţii au aceleaşi rădăcini

$$x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n;$$

atunci putem scrie

$$f(x) \equiv A_0(x - x_1)\ (x - x_2)\ \ldots\ (x - x_n), \tag{23}$$

$$g(x) \equiv B_0(x - x_1)\ (x - x_2)\ \ldots\ (x - x_n). \tag{24}$$

Împărţind cele două egalităţi, obţinem

$$\frac{f(x)}{g(x)} \equiv \frac{A_0}{B_0} = K \tag{25}$$

sau

$$f(x) \equiv K \cdot g(x). \tag{26}$$

Înlocuim aici pe $f(x)$ şi $g(x)$ cu valorile lor din (21) şi (22) avem

$$\begin{aligned} &A_0x^n + A_1x^{n-1} + \ldots + A_{n-1}x + A_n \equiv \\ &\equiv K(B_0x^n + B_1x^{n-1} + \ldots + B_{n-1}x + B_n), \end{aligned} \tag{27}$$

care se mai poate scrie

$$\begin{aligned} &(A_0 - KB_0)\,x^n + (A_1 - KB_1)x^{n-1} + \ldots + \\ &+ (A_{n-1} - KB_{n-1})\,x + (A_n - KB_n) \equiv 0. \end{aligned} \tag{28}$$

Dar pentru ca un polinom să fie identic nul, trebuie ca toţi coeficienţii săi să fie egali cu zero, adică trebuie să avem

$$\begin{aligned} A_0 - KB_0 = 0,\ A_1 - KB_1 = 0,\ \ldots\ A_{n-1} - \\ - KB_{n-1} = 0,\ A_n - KB_n = 0 \end{aligned} \tag{29}$$

sau

$$\frac{A_0}{B_0} = K,\ \frac{A_1}{B_1} = K,\ \ldots\ \frac{A_{n-1}}{B_{n-1}} = K,\ \frac{A_n}{B_n} = K \tag{30}$$

sau încă

$$\frac{A_0}{B_0} = \frac{A_1}{B_1} = \ldots = \frac{A_{n-1}}{B_{n-1}} = \frac{A_n}{B_n} = K. \tag{31}$$

În concluzie, pentru ca două ecuaţii să aibă aceleaşi rădăcini, trebuie să aibă coeficienţii proporţionali.

Invers: dacă două ecuaţii au coeficienţii proporţionali, putem înlocui coeficienţii $A_0 = KB_0$, $A_1 = KB_1, \ldots, A_n = KB_n$, şi atunci ecuaţia întîi se va reduce la ecuaţia a doua, prin urmare cele două ecuaţii vor avea aceleaşi rădăcini.

RELAŢIILE FUNDAMENTALE ÎNTRE RĂDĂCINILE ŞI COEFICIENŢII UNEI ECUAŢII DE GRADUL *n*

7. Fie o ecuaţie cu coeficienţi reali sau complecşi

$$f(x) \equiv A_0x^n + A_1x^{n-1} + A_2x^{n-2} + \ldots + A_{n-1}x + A_n = 0,\quad A_0 \neq 0. \tag{1}$$

Dacă notăm rădăcinile acestei ecuaţii cu

$$x_1,\ x_2,\ x_3, \ldots, x_{n-1},\ x_n,$$

în baza teoremei de descompunere a polinomului în factori de gradul I putem scrie

$$f(x) \equiv A_0\,(x - x_1)\,(x - x_2)\,(x - x_3)\ldots(x - x_{n-1})\,(x - x_n). \tag{2}$$

Deci avem

$$A_0 x^n + A_1 x^{n-1} + A_2 x^{n-2} + \dots + A_{n-1} x + A_n \equiv$$
$$\equiv A_0(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)(x - x_{n-1})(x - x_n)$$

sau, împărțind cu A_0,

$$x^n + \frac{A_1}{A_0} x^{n-1} + \frac{A_2}{A_0} x^{n-2} + \dots + \frac{A_{n-1}}{A_0} x + \frac{A_n}{A_0} =$$
$$= (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)\dots(x - x_n).$$

Dacă dezvoltăm produsul din partea dreaptă, avem

$$x^n + \frac{A_1}{A_0} x^{n-1} + \frac{A_2}{A_0} x^{n-2} + \dots + \frac{A_{n-1}}{A_0} x + \frac{A_n}{A_0} \equiv$$
$$\equiv x^n - S_1 x^{n-1} + S_2 x^{n-2} - S_3 x^{n-3} + \dots +$$
$$+ (-1)^{n-1} S_{n-1} x + (-1)^n S_n, \qquad (4)$$

unde se știe, după cele învățate în capitolul cu privire la binomul lui Newton, că $S_1, S_2, S_3, \dots, S_{n-1}, S_n$ reprezintă suma produselor cîte 1, cîte 2, cîte 3, ..., cîte $(n-1)$, cîte n, a celor n rădăcini ale ecuației.

Identificînd, adică scriind că coeficienții acelorași puteri ale lui x sînt egali, obținem

$$\boxed{\begin{aligned}
S_1 &= x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_{n-1} + x_n = -\frac{A_1}{A_0}\\
S_2 &= x_1 x_2 + x_1 x_3 + \dots + x_{n-1} x_n = +\frac{A_2}{A_0}\\
S_3 &= x_1 x_2 x_3 + \dots + x_{n-2} x_{n-1} x_n = -\frac{A_3}{A_0}\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
S_k &= x_1 x_2 \dots x_k + x_1 x_2 \dots x_{k-1} x_{k+1} + \dots = (-1)^k \cdot \frac{A_k}{A_0}\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
S_n &= x_1 x_2 x_3 \dots x_n = (-1)^n \cdot \frac{A_n}{A_0}
\end{aligned}} \qquad (5)$$

Relațiile (5), care stabilesc o legătură între rădăcinile $x_1, x_2, x_3, \dots, x_{n-1}, x_n$ ale ecuației și coeficienții $A_0, A_1, \dots, A_n$ ai aceleiași ecuații, se numesc **relații fundamentale între rădăcini și coeficienți.**

Între rădăcini și coeficienți pot exista nenumărate alte relații, de exemplu

$$x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 = \frac{A_1^2}{A_0^2} - 2 \cdot \frac{A_2}{A_0}.$$

Relațiile fundamentale formează un sistem de n ecuații cu n necunoscute

$$x_1, x_2, x_3, \dots, x_{n-1}, x_n.$$

Aceste relații însă nu simplifică întru nimic rezolvarea ecuației propuse.

Într-adevăr, pentru a rezolva acest sistem, ar trebui găsit un sistem echivalent cu el, în care să avem o ecuație care să nu conțină decît o singură necunoscută, de exemplu pe x_1. Însă, întrucît sistemul (5) e simetric în raport cu toate necunoscutele $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$, ecuația astfel obținută ar fi în mod egal verificată și de celelalte rădăcini $x_2, x_3, \dots, x_n$ și, prin urmare, ar fi identică chiar cu ecuația (1).

Această afirmație s-ar putea verifica, eliminînd de exemplu necunoscutele $x_2, x_3, \dots, x_n$ între ecuațiile sistemului (5). N-o facem din cauza lungimii calculelor; ea se poate face ușor în cazul ecuației de gradul III și eventual de gradul IV.

*Relațiile fundamentale între rădăcini și coeficienți pot deveni utile însă, **în cazul cînd pe lîngă ele se mai dă o relație suplimentară.***

Studierea acestor cazuri constituie obiectul capitolului de față.

8. *Ecuația de gradul III*, sub forma cea mai generală, se poate scrie

$$Ax^3 + Bx^2 + Cx + D = 0. \qquad (I)$$

În aplicație, de multe ori e convenabil ca primul coeficient al lui x^3 să fie egal cu 1 (unu), ceea ce putem face împărțind toată ecuația cu A

$$x^3 + \frac{B}{A} x^2 + \frac{C}{A} x + \frac{D}{A} = 0,$$

iar aici, în loc de formele fracționare $\frac{B}{A}, \frac{C}{A}, \frac{D}{A}$, punem b, c, d, așa că o altă formă a ecuației de gradul III va fi

$$x^3 + bx^2 + cx + d = 0. \qquad (II)$$

Uneori, ecuaţia de gradul III se prezintă sub forma

$$x^3 + px + q = 0 \qquad \text{(III)}$$

fără termen de gradul II.

Mai departe (§ 13), se va arăta că orice ecuaţie de gradul III poate fi adusă la forma (III).

În concluzie, pentru ecuaţia de gradul III, se pot lua următoarele trei forme generale

$$\text{(I)} \quad Ax^3 + Bx^2 + Cx + D = 0$$

$$\text{(II)} \quad x^3 + bx^2 + cx + d = 0$$

$$\text{(III)} \quad x^3 + px + q = 0.$$

În exerciţii şi probleme întîlnim cînd una, cînd alta din aceste forme, astfel că e bine ca ele să fie cunoscute. Vom scrie acum relaţiile dintre rădăcini şi coeficienţi, la ecuaţia de gradul III; găsim

$$\left\{\begin{aligned} S_1 &= x_1 + x_2 + x_3 = -\frac{B}{A} \\ S_2 &= x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = +\frac{C}{A} \\ S_3 &= x_1x_2x_3 = -\frac{D}{A} \end{aligned}\right\} \text{ în cazul formei (I).}$$

În cazul că ecuaţia dată are forma (II) sau (III), expresiile lui S_1, S_2 şi S_3 rămîn aceleaşi şi se schimbă numai valorile lor.

Oricare ar fi însă forma ecuaţiei de gradul III, atenţia noastră este îndreptată nu asupra rezultatelor găsite pentru S_1, S_2 şi S_3, ci asupra expresiilor lor, căci, cu ajutorul relaţiei suplimentare, termenii din aceste expresii se pot grupa în mod convenabil, astfel ca să ne dea cheia rezolvării problemei.

Astfel, se pot face grupările

$$S_1 = x_1 + x_2 + x_3 = (x_1 + x_2 + x_3) \text{ sau } (x_1 + x_3) + x_2 \text{ sau } (x_2 + x_3) + x_1;$$

$$S_2 = x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = x_1(x_2 + x_3) + x_2x_3$$

$$\text{sau } x_2(x_1 + x_3) + x_1x_3 \text{ sau încă } x_3(x_1 + x_2) + x_1x_2;$$

$$S_3 = x_1x_2x_3 = (x_1x_2)x_3 \text{ sau } (x_1x_3)x_2 \text{ sau încă } (x_2x_3)x_1.$$

Atunci, servindu-ne de relaţia suplimentară care ni se dă, luăm ca necunoscute noi suma sau produsul a două rădăcini şi rădăcina a treia şi căutăm să aflăm mai întîi acestea.

Întrucît cazul progresiei aritmetice şi geometrice este mai frecvent, în probleme ne vom opri mai mult asupra lor.

Dacă la o ecuaţie de gradul III, cele trei rădăcini x_1, x_2, x_3 sînt în progresie aritmetică, le putem nota astfel

$$\begin{aligned} x_1 &= u \\ x_2 &= u + v \\ x_3 &= u + 2v \end{aligned} \qquad \text{sau} \qquad \begin{aligned} x_1 &= u - v \\ x_2 &= u \\ x_3 &= u + v. \end{aligned}$$

În mod analog, dacă se dă că la ecuaţia de gradul III cele trei rădăcini sînt în progresie geometrică, le putem nota astfel

$$\begin{aligned} x_1 &= u \\ x_2 &= uq \\ x_3 &= uq^2 \end{aligned} \qquad \text{sau} \qquad \begin{aligned} x_1 &= \frac{u}{q} \\ x_2 &= u \\ x_3 &= uq. \end{aligned}$$

9. Pentru ecuaţia de gradul IV, în mod analog ca şi la cea de gradul III, putem avea următoarele trei forme generale

$$\boxed{\begin{aligned} &Ax^4 + Bx^3 + Cx^2 + Dx + E = 0 && \text{(I)} \\ &x^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0 && \text{(II)} \\ &x^4 + px^2 + qx + r = 0 && \text{(III)} \end{aligned}}$$

Relaţiile între rădăcini şi coeficienţi, în acest caz, vor fi pentru forma (I)

$$\boxed{\begin{aligned} &S_1 = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = -\frac{B}{A} && (1) \\ &S_2 = x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_4 + x_2x_3 + x_2x_4 + x_3x_4 = \frac{C}{A} && (2) \\ &S_3 = x_1x_2x_3 + x_1x_2x_4 + x_1x_3x_4 + x_2x_3x_4 = -\frac{D}{A} && (3) \\ &S_4 = x_1x_2x_3x_4 = \frac{E}{A} && (4) \end{aligned}}$$

În cazul că ecuaţia dată are forma (II) sau (III), expresiile lui S_1, S_2, S_3 şi S_4 rămîn aceleaşi şi se schimbă numai valorile lor.

Datorită faptului că avînd patru rădăcini x_1, x_2, x_3, x_4 ele se pot împărţi în două grupe de cîte două rădăcini, cele patru relaţii se pot scrie în diverse moduri, grupînd termenii într-un mod convenabil, astfel ca să avem suma şi produsul a cîte două rădăcini.

Putem grupa de exemplu pe x_1 cu x_2 şi pe x_3 cu x_4 şi, în acest caz, cele patru relaţii se vor scrie în modul următor

$$\boxed{\begin{aligned} S_1 &= (x_1 + x_2) + (x_3 + x_4) \\ S_2 &= (x_1 + x_2)(x_3 + x_4) + x_1x_2 + x_3x_4 \\ S_3 &= (x_1 + x_2)x_3x_4 + x_1x_2(x_3 + x_4) \\ S_4 &= (x_1x_2)(x_3x_4) \end{aligned}}$$

Tot aşa de bine am putea grupa x_1 cu x_3, x_2 cu x_4 sau x_1 cu x_4, x_2 cu x_3.

Dacă convenim să notăm suma a două rădăcini (indiferent care) cu s, suma celorlalte două rădăcini s', iar produsele aceloraşi perechi de rădăcini cu p şi p', cele patru relaţii se vor scrie astfel

$$\boxed{\begin{aligned} S_1 &= s + s' \\ S_2 &= ss' + p + p' \\ S_3 &= sp' + ps' \\ S_4 &= pp' \end{aligned}}$$

Scrierea relaţiilor între rădăcini şi coeficienţi, sub această formă, grupînd rădăcinile două cîte două, ne sugerează şi o metodă pentru rezolvarea problemelor, căci *relaţia suplimentară* care ni se dă, în majoritatea cazurilor, e o expresie în legătură cu *suma* sau *produsul* a cîte două rădăcini.

Dacă *relaţia suplimentară* care se dă cuprinde relaţii cu privire la *suma* sau *produsul* a două rădăcini, vom lua ca *necunoscute noi* în locul rădăcinilor x_1, x_2, x_3, x_4 sumele s şi s', precum şi *produsele* p şi p'.

Avînd pe urmă s şi p, aflăm două rădăcini din ecuaţia $x^2 - sx + p = 0$ şi, cunoscînd s' şi p', aflăm celelalte două rădăcini din ecuaţia $x^2 - s'x + p' = 0$.

În cazul cînd se dă condiţia ca rădăcinile ecuaţiei de gradul IV să fie în progresie aritmetică, cele patru rădăcini se pot nota astfel

$$\begin{aligned} x_1 &= u \\ x_2 &= u + v \\ x_3 &= u + 2v \\ x_4 &= u + 3v \end{aligned} \qquad \text{sau} \qquad \begin{aligned} x_1 &= u - 3v \\ x_2 &= u - v \\ x_3 &= u + v \\ x_4 &= u + 3v. \end{aligned}$$

10. La ecuaţiile de grad mai mare, de exemplu la ecuaţia de gradul V sau VI, după ce s-au scris relaţiile dintre rădăcini şi coeficienţi în prima lor formă, se vor face în ele modificările ce vor fi indicate de *relaţia suplimentară*, care cuprinde în majoritatea cazurilor relaţii cu privire la *suma* sau *produsul* a cîte *două* sau *trei rădăcini*.

EXERCIŢII ŞI PROBLEME

1. Să se rezolve ecuaţia

$x^3 - 16x^2 + 79x - 120 = 0$ ştiind că $x_1 + x_2 = x_3$.

2. Să se rezolve ecuaţia

$x^3 - 11x^2 + 36x - 36 = 0$ ştiind că $x_1 \cdot x_2 = 6$.

3. Să se rezolve ecuaţia

$$x^3 - 9x^2 + 23x - 15 = 0,$$

ştiind că rădăcinile sînt în *progresie aritmetică*.

4. Să se determine a şi apoi să se rezolve ecuaţia

$$x^3 - 21x^2 + 143x - a = 0,$$

ştiind că rădăcinile sînt în *progresie aritmetică*.

5. Ce relaţie trebuie să existe între coeficienţii ecuaţiei

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0,$$

ştiind că rădăcinile sînt în *progresie aritmetică*.

6. Să se rezolve ecuaţia

$$x^3 + ax^2 + bx + c = 0,$$

ştiind că rădăcinile sînt în *progresie geometrică*.

Aplicație la ecuația $8x^3 - 42x^2 + 63x - 27 = 0$.

7. Să se determine parametrul a și să se rezolve ecuația

$$8x^3 + 28x^2 - ax - 27 = 0,$$

știind că o rădăcină este *media geometrică a celorlalte două*.

8. Să se determine a, astfel ca una din rădăcinile ecuației

$$x^3 - 3ax^2 + 6x - 4 = 0$$

să fie *media aritmetică* a celorlalte două, apoi să se rezolve ecuația.

9. Să se determine p și să se rezolve ecuația

$$x^3 + px^2 - x + 2 = 0,$$

știind că are *două rădăcini egale în valoare absolută și de semne contrare*.

10. Fiind dată ecuația

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0,$$

ce relație trebuie să existe între coeficienții a, b, c, d, pentru ca suma a două rădăcini să fie egală cu un număr dat s^2.

Aplicație pentru ecuația $2x^3 - x^2 - 7x - 3 = 0$; $s = 1$.

11. Să se rezolve ecuația $3x^3 - 7x^2 + q = 0$, știind că *diferența a două rădăcini este 1*.

12. Fiind dată ecuația $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$, ce relație trebuie să existe între coeficienții a,b,c,d, pentru ca una din rădăcini să fie egală cu suma celorlalte două.

Aplicație la ecuațiile

$$x^3 - 2x^2 - x + 2 = 0 \quad \text{și} \quad 36x^3 - 12x^2 - 5x + 1 = 0.$$

13. Fiind dată ecuația $x^3 + px + q = 0$, ce relație trebuie să existe între coeficienții p și q, pentru ca una din rădăcini să fie egală cu produsul celorlalte două?

Să se rezolve apoi ecuația.

Aplicație pentru ecuația $x^3 - 6x - 4 = 0$.

14. Se dă ecuația $x^3 - 7x + \lambda = 0$.

Să se determine λ, știind că $x_1 = 2x_2$, apoi să se rezolve ecuația.

15. Să se rezolve ecuația $3x^3 + 8x^2 + 13x + 6 = 0$, știind că *una din rădăcini este egală cu suma inverselor celorlalte două*.

16. Să se rezolve ecuația $x^3 + (2a+1)x^2 + 3ax + a = 0$, știind că una din rădăcinile ei este media armonică a celorlalte două, adică avem $\frac{2}{x_1} = \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3}$.

17. Între rădăcinile x_1, x_2, x_3 ale ecuației $x^3 + px + q = 0$, se dă relația $x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0$.

Să se găsească rădăcinile și relația de condiție între coeficienți.

18. Se dă ecuația $x^4 - 4x^3 - 34x^2 + ax + b = 0$.

Să se determine a și b, știind că rădăcinile sînt în progresie aritmetică.

19. Să se rezolve ecuația $x^4 - 10x^3 + 35x^2 - 50x + 24 = 0$, știind că rădăcinile sînt în *progresie aritmetică*.

20. Să se rezolve ecuația $x^4 - 8x^3 + 14x^2 + 8x + a = 0$, știind că rădăcinile sînt în *progresie aritmetică*.

21. Să se rezolve ecuația $2x^4 - 15x^3 + 35x^2 - 30x + 8 = 0$, știind că rădăcinile sînt în *progresie geometrică*.

22. Să se rezolve ecuația $x^4 + 12x - 5 = 0$, știind că suma a două rădăcini este egală cu 2.

23. Să se rezolve ecuația $x^4 + x^3 - 2x^2 + x - 3 = 0$, știind că are *două rădăcini egale în valoare absolută și de semne contrare*.

24. Să se rezolve ecuația $x^4 + 3x^3 + x^2 - 5x - 12 = 0$, știind că produsul a două rădăcini este egal cu -4.

25. Să se determine p și să se rezolve ecuația $3x^4 + px^3 + 2x^2 + 12x - 8 = 0$, astfel ca produsul a două rădăcini să fie egal cu 2.

26. Să se rezolve ecuația $x^4 + 6x^3 + 13x^2 + 12x - 5 = 0$, știind că *suma a două rădăcini este egală cu suma celorlalte două*.

27. Fiind dată ecuația $x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$, să se afle *relația de condiție* dintre coeficienți pentru ca *produsul a două rădăcini* să fie egal *cu produsul celorlalte două*.

28. Să se determine parametrii a și b, astfel ca ecuația $x^4 + 2ax^3 + 3bx^2 - 2x - a = 0$ să aibă suma a două rădăcini egală cu -1, iar produsul celorlalte două rădăcini egal cu $\frac{4}{7}$.

29. Să se arate că ecuația $x^5 - 55x + 21 = 0$ admite două rădăcini al căror produs este 1 și să se afle aceste rădăcini.

30. Se dă ecuația de gradul V, $x^5 + px^3 + qx^2 + rx + s = 0$.

Să se găsească condițiile pentru ca rădăcinile să fie în *progresie aritmetică*.

31. Se dă ecuația $x^3+px^2+qx+r=0$.

Să se arate că suma puterilor a patra a rădăcinilor ecuației e dată de relația

$$S_4 = p^4 - 4p^2q + 4pr + 2q^2.$$

32. Să se rezolve ecuația

$$x^3 - x^2(r + 4R) + p^2x - Sp = 0,$$

unde r, R, p, S sînt elementele unui triunghi oarecare.

RĂDĂCINI DUBLE ȘI TRIPLE

Problema rădăcinilor duble și triple se rezolvă scriind *relațiile suplimentare*

$x_1 = x_2$ în cazul rădăcinii duble și

$x_1 = x_2 = x_3$ în cazul rădăcinii triple.

1. Se dă ecuația $x^3-4x^2+5x-a=0$. Să se determine valoarea lui a și apoi să se rezolve ecuația, știind că ecuația admite o rădăcină dublă.

2. Se dă ecuația $x^3 - 1 - m(x-1)=0$.

Să se determine parametrul m astfel ca ecuația să admită o *rădăcină dublă*.

3. Să se rezolve ecuația $x^4 - 5x^3 + 4x^2 + 3x + 9 = 0$, știind că are o *rădăcină dublă*.

4. Să se rezolve ecuația $x^4 - 16ax^3 + bx + c = 0$, știind că admite o rădăcină triplă și că suma acesteia cu cea simplă este egală cu 4.

5. Se dă ecuația $x^5+px^3-qx^2+rx-s=0$ și se cere:

a) Ce relații trebuie să existe între p, q, r și s, pentru ca această ecuație să admită *o rădăcină dublă și o rădăcină triplă*?

b) Să se afle aceste două rădăcini în funcție de coeficienți.

c) În cazul particular $q = \frac{2p}{3}$, să se calculeze ceilalți coeficienți și să se scrie ecuația obținută.

RĂDĂCINI COMUNE LA DOUĂ ECUAȚII

11. Să luăm două ecuații $P(x)=0$ și $Q(x)=0$, ambele cu coeficienți numerici.

Dacă polinoamele $P(x)$ și $Q(x)$ nu sînt prime între ele, fie $D(x)$ *cel mai mare divizor comun* al lor.

Pe baza celor învățate, putem scrie

$$P(x) = D(x)\cdot P_1(x) \qquad (1)$$

$$Q(x) = D(x)\cdot Q_1(x), \qquad (2)$$

unde $P_1(x)$ și $Q_1(x)$ sînt polinoame prime între ele, căci dacă am presupune contrariul, că ele ar avea un divizor comun, polinoamele $P(x)$ și $Q(x)$ ar avea și ele același divizor, prin urmare $P(x)$ și $Q(x)$ admițînd încă un divizor, afară de $D(x)$, ar urma că $D(x)$ nu e cel mai mare divizor comun al polinoamelor $P(x)$ și $Q(x)$.

Din egalitățile (1) și (2) se vede ușor că orice rădăcină a ecuației $D(x)=0$, va fi rădăcină și a ecuațiilor $P(x)=0$ și $Q(x)=0$, adică va fi o *rădăcină comună* a celor două ecuații.

Reciproc, o *rădăcină comună* a ecuațiilor $P(x)=0$ și $Q(x)=0$ este o rădăcină a *celui mai mare divizor comun* al polinoamelor $P(x)$ și $Q(x)$.

În concluzie, *pentru a găsi rădăcinile comune la două ecuații, aflăm întîi cel mai mare divizor comun al celor două polinoame și apoi aflăm rădăcinile acestuia.*

APLICAȚII

12. *Exemplul I.* Să se afle rădăcinile comune ale ecuațiilor

$$P(x) = 6x^5 - 29x^4 + 14x^3 + 60x^2 - 11x - 4 = 0.$$

$$Q(x) = 2x^4 - 3x^3 - 4x^2 - 6x - 1 = 0.$$

Se caută mai întîi *cel mai mare divizor comun* al polinoamelor $P(x)$ și $Q(x)$, cu metoda împărțirilor succesive (algoritmul lui Euclid); se găsește

$$D(x) = 2x^2 - 5x - 1.$$

Prin urmare, rădăcinile comune la ecuațiile $P(x)=0$ și $Q(x)=0$ sînt date de ecuația $2x^2-5x-1=0$, adică

$$x_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{33}}{4}.$$

Exemplul II. Să se afle rădăcinile comune ale ecuațiilor

$$P(x) = x^6 - 49x^4 + 67x^3 + 10x^2 - 25x - 4 = 0.$$

$$Q(x) = 2x^5 - 18x^4 + 39x^3 - 25x^2 + x + 1 = 0.$$

Pentru cel mai mare divizor comun se găsește

$$D(x) = x^3 - 7x^2 + 5x + 1.$$

Rezolvînd ecuația $x^3 - 7x^2 + 5x + 1 = 0$, se vede imediat că admite rădăcina $x = 1$; împărțim deci cu $(x-1)$ și avem

$$x^3 - 7x^2 + 5x + 1 \equiv (x-1)(x^2 - 6x - 1).$$

Celelalte două rădăcini sînt date de $x^2 - 6x - 1 = 0$ și sînt egale cu $3 \pm \sqrt{10}$.

Prin urmare, cele două ecuații admit rădăcinile comune

$$\boxed{x_1 = 1; \quad x_{2,3} = 3 \pm \sqrt{10}}$$

TRANSFORMAREA ECUAȚIILOR

13. A transforma o ecuație $f(x) = 0$, înseamnă a deduce din ea o altă ecuație $\varphi(y) = 0$, ale cărei rădăcini y să fie legate de rădăcinile x ale ecuației $f(x) = 0$ printr-o relație cunoscută.

Ecuația $\varphi(y) = 0$ se numește *transformata* ecuației $f(x) = 0$.

În legătură cu transformarea ecuațiilor, se pot pune următoarele probleme:

I. *Fiind dată ecuația $f(x) = 0$, să se găsească ecuația care admite ca rădăcini pe acelea ale ecuației $f(x) = 0$, luate cu semnul schimbat.*

În această transformare, legătura dintre x și y este dată prin relația:

$$y = -x \text{ de unde } x = -y,$$

deci, pentru a găsi transformata în $-y$ sau, cum se mai spune, în $-x$, înlocuim pe x cu $-y$.

Exemple

1) $$f(x) = 5x^3 - 4x^2 + 8x + 9 = 0$$
$$f(-y) = -5y^3 - 4y^2 - 8y + 9 = 0$$

sau

$$5y^3 + 4y^2 + 8y - 9 = 0$$

sau încă

$$-f(-x) = 5x^3 + 4x^2 + 8x - 9 = 0.$$

2) $$f(x) = 6x^4 - 8x^3 + 3x^2 + 5x + 14 = 0$$
$$f(-y) = 6y^4 + 8y^3 + 3y^2 - 5y + 14 = 0$$

sau

$$f(-x) = 6x^4 + 8x^3 + 3x^2 - 5x + 14 = 0.$$

Ecuația $f(-x) = 0$ se numește transformata în $(-x)$ a ecuației $f(x) = 0$.

În practică, pentru a face transformata în $(-x)$ a unei ecuații algebrice, la o ecuație de un grad cu soț schimbăm semnele numai la termenii de grad fără soț, iar dacă ecuația e de un grad fără soț, schimbăm semnele la termenii de grad cu soț.

II. *Să se formeze ecuația care admite ca rădăcini inversele rădăcinilor unei ecuații $f(x) = 0$.*

În această transformare, legătura dintre x și y este dată prin relația

$$y = \frac{1}{x}, \text{ de unde } x = \frac{1}{y},$$

deci, pentru a găsi transformata în $\frac{1}{y}$ $\left(\text{sau transformata în } \frac{1}{x}\right)$, înlocuim pe x cu $\frac{1}{y}$.

Exemplu

$$f(x) = 5x^3 + 8x^2 + 4x + 7 = 0$$

$$f\left(\frac{1}{y}\right) = \frac{5}{y^3} + \frac{8}{y^2} + \frac{4}{y} + 7 = 0$$

care ne va da

$$5 + 8y + 4y^2 + 7y^3 = 0$$

sau

$$7x^3 + 4x^2 + 8x + 5 = 0.$$

Cînd $x^n f\left(\frac{1}{x}\right)$ sau transformata în $\frac{1}{x}$ se confundă cu ecuația dată, ecuația $f(x)=0$ este o *ecuație reciprocă;* de exemplu

$$f(x) = 3x^4 + 5x^3 + 8x^2 + 5x + 3 = 0$$

$$x^4 f\left(\frac{1}{x}\right) = 3x^4 + 5x^3 + 8x^2 + 5x + 3 = 0.$$

III. *Să se transforme o ecuație cu coeficienți întregi*

$$f(x) = A_0 x^n + A_1 x^{n-1} + \dots + A_{n-1}x + A_n = 0$$

în alta, tot cu coeficienți întregi, în care primul coeficient să fie 1.

Dacă notăm cu y o rădăcină a ecuației transformate, vom pune

$y = A_0 x$, de unde $x = \frac{y}{A_0}$, deci, înlocuind în ecuația

$f(x) = 0$ pe x cu $\frac{y}{A_0}$, avem

$$f\left(\frac{y}{A_0}\right) = A_0 \frac{y^n}{A_0^n} + A_1 \frac{y^{n-1}}{A_0^{n-1}} + \dots + A_{n-1} \frac{y}{A_0} + A_n = 0;$$

dacă înmulțim ecuația cu A_0^{n-1}, găsim

$$y^n + A_1 y^{n-1} + \dots + A_{n-1} A_0^{n-2} y + A_n A_0^{n-1} = 0,$$

adică am găsit o altă ecuație în care primul coeficient e 1.

În practică, de multe ori problema se poate rezolva mai simplu.

Fie, de exemplu, ecuația

$$48x^4 + 14x^2 + 6x - 5 = 0.$$

Înlocuind pe x cu $\frac{y}{k}$, avem

$$\frac{48y^4}{k^4} + \frac{14y^2}{k^2} + \frac{6y}{k} - 5 = 0$$

și, eliminînd numitorii

$$48y^4 + 14k^2y^2 + 6k^3y - 5k^4 = 0.$$

Aici va fi suficient să luăm $k = 12$; într-adevăr, avem

$$48y^4 + 14 \cdot 12^2 y^2 + 6 \cdot 12^3 y - 5 \cdot 12^4 = 0 \mid : 12$$

$$4y^4 + 14 \cdot 12 y^2 + 6 \cdot 12^2 y - 5 \cdot 12^3 = 0 \mid : 4$$

$$y^4 + 14 \cdot 3y^2 + 6 \cdot 12 \cdot 3y - 5 \cdot 12^2 \cdot 3 = 0$$

sau

$$y^4 + 42y^2 + 216y - 2\,160 = 0.$$

IV. *Să se transforme o ecuație cu coeficienți întregi*

$$f(x) = A_0 x^n + A_1 x^{n-1} + A_2 x^{n-2} + \dots + A_{n-1} x + A_n = 0$$

în alta tot cu coeficienți întregi, în care să lipsească termenul de gradul $n-1$.

Vom înlocui în ecuația dată pe x cu $y + k$ și vom căuta să determinăm valoarea lui k astfel ca să fie îndeplinită condiția din enunț.

Avem

$$f(y+k) = A_0(y+k)^n + A_1(y+k)^{n-1} + \dots + A_{n-1}(y+k) + A_n = 0.$$

Vom afla, din dezvoltare, termenul de gradul $n-1$:

$$f(y+k) = A_0(y^n + n \cdot y^{n-1}k + \dots) + A_1(y^{n-1} + \dots) + \dots = 0$$

$$f(y+k) = A_0 y^n + (A_0 n \cdot k + A_1) y^{n-1} + \dots = 0.$$

Pentru ca din dezvoltare să lipsească termenul de gradul $n-1$, trebuie să avem

$$nA_0 k + A_1 = 0, \text{ de unde } \boxed{k = -\frac{A_1}{nA_0}}.$$

Deci, dacă în ecuația $f(x) = 0$ facem substituția

$$\boxed{x = y + k = y - \frac{A_1}{nA_0}}$$

noua ecuație nu va mai conține termeni de gradul $n-1$.

De exemplu:

Din ecuația $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$, prin substituția

$$\boxed{x = y - \frac{a}{3}}$$

căpătăm o ecuație de forma

$$y^3 + py + q = 0.$$

La fel, din ecuaţia $x^4+ax^3+bx^2+cx+d=0$ prin substituţia

$$\boxed{x = y - \frac{a}{4}}$$

căpătăm o ecuaţie de forma $y^4+py^2+qy+r=0$.

APLICAŢII

14. I. Să se rezolve ecuaţia $x^3-4x^2-19x-14=0$, (1) ştiind că o rădăcină este dublul alteia.

Să notăm rădăcinile ecuaţiei (1) cu a, $2a$ şi b; atunci putem scrie

$$x^3-4x^2-19x-14 \equiv (x-a)(x-2a)(x-b). \quad (2)$$

Să luăm acum o altă ecuaţie în y, care să aibă rădăcinile duble faţă de cele ale ecuaţiei (1), adică $2a$, $4a$, $2b$.

Adică avem

$$x_1=a;\quad x_2=2a;\quad x_3=b$$

şi punem

$$y_1=2a;\ y_2=4a;\ y_3=2b.$$

Pentru a putea construi ecuaţia în y, observăm că avem

$$y=2x, \quad (3)$$

de unde

$$x=\frac{y}{2}. \quad (4)$$

Vom înlocui deci în ecuaţia (1) pe x prin $\frac{y}{2}$.

Avem $\left(\frac{y}{2}\right)^3-4\left(\frac{y}{2}\right)^2-19\left(\frac{y}{2}\right)-14=0$

$$\frac{y^3}{8}-y^2-\frac{19y}{2}-14=0 \text{ sau } y^3-8y^2-76y-112=0. \quad (5)$$

Deoarece n-are importanţă litera cu care se notează necunoscuta, putem pune în ecuaţia (5) tot x în locul lui y, aşa că avem

$$x^3-8x^2-76x-112=0. \quad (6)$$

Acum observăm că

ec. (1) $x^3-4x^2-19x-14=0$ are rădăcinile a; $2a$; b, iar

ec. (6) $x^3-8x^2-76x-112=0$ are rădăcinile $2a$; $4a$; $2b$,

prin urmare au o rădăcină comună, pe $2a$.

Deci problema se reduce la aflarea rădăcinilor comune ale ecuaţiilor (1) şi (6) şi pentru aceasta aflăm cel mai mare divizor comun $D(x)$ al lor.

Făcînd calculele, se găseşte că $D(x)=x+2$. (7)

Ecuaţia (1) se poate scrie atunci

$$x^3-4x^2-19x-14 \equiv (x+2)(x^2-6x-7)=0 \quad (8)$$

şi are rădăcinile

$$\boxed{x_1=-1;\ x_2=-2;\ x_3=7}.$$

Observare. Problema s-ar fi putut rezolva şi cu ajutorul relaţiilor între rădăcini şi coeficienţi, luînd relaţia suplimentară $x_1=2x_2$.

II. Să se rezolve ecuaţia

$$x^4-12x^3+12x^2+300x-925=0, \quad (1)$$

ştiind că două rădăcini sînt egale în valoare absolută şi de semne contrare.

Dacă notăm rădăcinile ecuaţiei (1) cu a; $-a$; b; c, să construim ecuaţia în y, care să aibă rădăcinile egale în valoare absolută şi de semne contrare ca cele ale ec. (1), adică să fie $-a$; a; $-b$; $-c$.

Se vede că legătura dintre x şi y este

$$y=-x, \quad (2)$$

de unde

$$x=-y. \quad (3)$$

Pentru a găsi ecuaţia în y, vom pune deci în ecuaţia (1) $-y$ în locul lui x, sau cum se mai zice: facem transformata în $-y$ sau, fiindcă n-are importanţă litera cu care notăm necunoscuta, zicem că facem transformata în $-x$.

Atunci observăm că

$$F(x) = x^4 - 12x^3 + 12x^2 + 300x - 925 = 0$$

are rădăcinile a; $-a$; b; c; transformata în $-x$:

$$F(-x) = x^4 + 12x^3 + 12x^2 - 300x - 925 = 0$$

are rădăcinile $-a$; a; $-b$; $-c$.

Se vede că ecuațiile $F(x) = 0$ și $F(-x) = 0$ au două rădăcini comune, ceea ce înseamnă că polinoamele $F(x)$ și $F(-x)$ au un divizor comun de gradul (II).

Se găsește că el este $x^2 - 25$.

Atunci ecuația (1) se poate scrie

$$x^4 - 12x^3 + 12x^2 + 300x - 925 \equiv (x^2 - 25)(x^2 - 12x + 37) = 0$$

și se vede că are rădăcinile

$$\boxed{x_1 = 5; \quad x_2 = -5; \quad x_{3,4} = 6 \pm i}.$$

Observare. Problema s-ar fi putut rezolva și cu ajutorul relațiilor între rădăcini și coeficienți, folosind relația suplimentară.

$$x_1 = -x_2 \text{ sau } x_1 + x_2 = 0.$$

EXERCIȚII ȘI PROBLEME

1. Să se afle rădăcinile comune ale ecuațiilor

$$P(x) = x^4 - 3x^3 + 5x^2 - 9x + 6 = 0$$

și

$$Q(x) = x^3 - 8x^2 + 17x - 10 = 0.$$

2. Să se afle rădăcinile comune ale ecuațiilor

$$P(x) = x^6 - 7x^5 + 15x^4 - 40x^2 + 48x - 16 = 0$$

și

$$Q(x) = 6x^5 - 35x^4 + 60x^3 - 80x + 48 = 0.$$

3. Să se afle rădăcinile comune ale ecuațiilor

$$P(x) = x^5 - 2x^4 - 8x^3 + 16x^2 + 16x - 32 = 0$$

și

$$Q(x) = 5x^4 - 8x^3 - 24x^2 + 32x + 16 = 0.$$

4. Să se afle rădăcinile comune ale ecuațiilor

$$P(x) = x^8 + x^7 - 2x^6 - 3x^5 + 3x^3 + 2x^2 - x - 1$$

și

$$Q(x) = 8x^7 + 7x^6 - 12x^5 - 15x^4 + 9x^2 + 4x - 1.$$

5. Să se determine a și b astfel ca polinoamele

$$P(x) = x^4 - 2x^3 + 3x^2 + 2x + a$$

și

$$Q(x) = x^4 - 3x^3 + 4x^2 + 3x + b$$

să aibă un divizor comun de gradul al doilea.

6. Să se rezolve ecuația $2x^3 - x^2 - 2x + 1 = 0$, știind că o rădăcină este de două ori mai mare decît alta.

7. Să se rezolve ecuația $x^4 - 7x^3 + 15x^2 - 7x - 6 = 0$, știind că diferența a două rădăcini este 1.

8. Să se rezolve ecuația $6x^3 - 25x^2 + 32x - 12 = 0$, știind că două rădăcini sînt inverse una alteia.

9. Să se rezolve ecuațiile

$$P(x) = x^3 - 7x^2 + 36 = 0$$

și

$$Q(x) = x^3 - 3x^2 - 10x + 24 = 0,$$

știind că prima are o rădăcină care este egală în valoare absolută și de semn contrar cu una din rădăcinile celei de-a doua.

Observare. Problemele de la numerele 6, 7, 8 și 9 se mai pot rezolva și cu ajutorul relațiilor între rădăcini și coeficienți.

PROPRIETĂȚI SPECIALE ALE ECUAȚIILOR CU COEFICIENȚI REALI

15. Proprietatea I. *Dacă o ecuație algebrică cu coeficienți reali admite rădăcina complexă $a + bi$, admite și pe conjugata ei $a - bi$.*

Fie $f(x)$ un polinom de gradul n, cu coeficienți reali

$$f(x) = A_0x^n + A_1x^{n-1} + \ldots + A_{n-1}x + A_n, \; A_0 \neq 0. \quad (1)$$

El este o sumă de termeni de forma A_kx^{n-k}.

Punînd în acest termen în locul lui x pe $a+bi$, se știe că obținem, după ce facem toate calculele, un număr complex de forma $u + vi$, deci avem

$$A_k(a + bi)^{n-k} = u + vi, \qquad (2)$$

așa că pentru polinomul $f(x)$ putem scrie, făcînd înlocuirile în toți termenii și efectuînd toate calculele,

$$f(a + bi) = A + Bi. \qquad (3)$$

Deoarece am presupus că $a + bi$ e o rădăcină a polinomului $f(x)$, urmează că

$$A + Bi = 0. \qquad (4)$$

Se știe însă că un număr complex e nul atunci și numai atunci cînd atît partea reală cît și partea imaginară sînt nule, adică avem:

$$A = 0 \text{ și } B = 0. \qquad (5)$$

Dacă înlocuim în termenul A_0x^n pe x cu $a-bi$, se știe că obținem

$$A_0(a - bi)^n = u - vi \qquad (6)$$

și pentru polinomul întreg avem

$$f(a - bi) = A - Bi. \qquad (7)$$

Însă, pe baza relațiilor (5), avem și

$$f(a - bi) = A - Bi = 0, \qquad (8)$$

ceea ce probează că și $a - bi$ este o rădăcină pentru ecuația $f(x) = 0$, iar polinomul $f(x)$, în baza teoremei de descompunere, se divide cu

$$(x - a - bi)\ (x - a + bi) = (x - a)^2 + b^2. \qquad (9)$$

Urmează atunci că rădăcinile complexe *ale unei ecuații algebrice cu coeficienți reali sînt în număr cu soț.*

Observare. Proprietatea e valabilă numai atunci cînd ecuația are coeficienți reali.

Dacă $f(x)$ are coeficienți complecși, proprietatea nu mai e valabilă în general.

De exemplu, dacă luăm polinomul

$$f(x) = x^3 - (4 + i)x^2 + (5 + 3i)x - 2(1 + i)$$

se poate face verificarea că

$$f(1 + i) = 0, \text{ pe cînd } f(1 - i) \neq 0.$$

Aplicație. Să se rezolve ecuația $x^4 - x^3 + x^2 + 2 = 0$, știind că admite rădăcina $1 + i$.

Rezolvare. Ecuația admițînd rădăcina $x_1 = 1 + i$, admite și pe conjugata ei $x_2 = 1 - i$.

Atunci polinomul $f(x)$ va fi divizibil cu produsul

$$(x - x_1)\ (x - x_2) = (x - 1 - i)\ (x - 1 + i) =$$
$$= (x - 1)^2 + 1 = x^2 - 2x + 2.$$

Împărțind pe $f(x)$ cu $x^2 - 2x + 2$, se găsește

$$f(x) = x^4 - x^3 + x^2 + 2 = (x^2 - 2x + 2)\ (x^2 + x + 1).$$

Celelalte rădăcini sînt date de ecuația

$$x^2 + x + 1 = 0, \text{ care ne dă } x_{3,4} = \frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2}.$$

16. Proprietatea a II-a. *Dacă o ecuație algebrică cu coeficienți raționali admite rădăcina irațională $a + \sqrt{b}$ (a și b fiind raționali, iar $\sqrt{b}$ irațional), va admite și pe conjugata ei, $a - \sqrt{b}$.*

Luăm polinomul $f(x)$ de gradul n

$$f(x) = A_0x^n + A_1x^{n-1} + \ldots + A_{n-1}x + A_n,\ A_0 \neq 0. \qquad (1)$$

Inlocuind pe x cu $a + \sqrt{b}$, avem

$$f(a + \sqrt{b}) = A_0\,(a + \sqrt{b})^n + A_1\,(a + \sqrt{b})^{n-1} + \ldots$$
$$\ldots + A_{n-1}\,(a + \sqrt{b}) + A_n. \qquad (2)$$

Se știe că puterile cu soț ale lui $\sqrt{b}$ ne dau cantități raționale, iar cele fără soț ne dau termeni de forma $k\sqrt{b}$, unde k este *rațional.*

Deci, făcînd toate calculele, vom găsi

$$f(a + \sqrt{b}) = A + B\sqrt{b}. \qquad (3)$$

Întrucît presupunem că $a + \sqrt{b}$ e rădăcină, înseamnă că $f(a + \sqrt{b}) = A + B\sqrt{b} = 0. \qquad (4)$

Pentru ca $A + B\sqrt{b}$ să fie nul, trebuie să avem în același timp

$$A = 0 \text{ și } B = 0. \qquad (5)$$

Se știe însă că, dacă punem în locul lui x pe $a - \sqrt{b}$, obținem

$$f(a - \sqrt{b}) = A - B\sqrt{b}. \qquad (6)$$

Însă în baza relațiilor (5), urmează că avem și

$$f(a - \sqrt{b}) = 0, \qquad (7)$$

deci și $a - \sqrt{b}$ este rădăcina lui $f(x)$.

Urmează atunci că *rădăcinile iraționale de forma $a + \sqrt{b}$ ale unei ecuații cu coeficienți raționali sînt în număr cu soț.*

Ecuația $f(x) = 0$, admițînd ca rădăcină și pe $a + \sqrt{b}$ și pe $a - \sqrt{b}$, urmează că polinomul $f(x)$ se divide cu $(x - a - \sqrt{b})(x - a + \sqrt{b}) = (x - a)^2 - b$. (8)

Observare. Pentru ca proprietatea a II-a să fie valabilă, trebuie ca polinomul $f(x)$ să aibă toți coeficienții raționali. Dacă polinomul $f(x)$ are și coeficienți iraționali, proprietatea nu mai e valabilă în general.

De exemplu, dacă se ia polinomul

$$f(x) = x^3 - 2(3 - \sqrt{3})x^2 + 2(2 - \sqrt{3})x + (5 - 2\sqrt{3})$$

se poate verifica ușor că avem

$$f(5 - 2\sqrt{3}) = 0 \text{ dar } f(5 + 2\sqrt{3}) = 216 + 124\sqrt{3} \neq 0.$$

Aplicația I. Să se rezolve ecuația

$$x^4 + x^3 - 29x^2 + 13x + 42 = 0,$$

știind că admite rădăcina $3 + \sqrt{2}$.

Rezolvare. Ecuația admițînd rădăcina $x_1 = 3 + \sqrt{2}$, admite și pe conjugata ei $x_2 = 3 - \sqrt{2}$.

Atunci polinomul $f(x)$ va fi divizibil cu produsul

$$(x - x_1)(x - x_2) = (x - 3 - \sqrt{2})(x - 3 + \sqrt{2}) = (x - 3)^2 - 2 = x^2 - 6x + 7.$$

Împărțind pe $f(x)$ cu $x^2 - 6x + 7$, găsim

$$f(x) = x^4 + x^3 - 29x^2 + 13x + 42 = (x^2 - 6x + 7)(x^2 + 7x + 6).$$

Celelalte rădăcini sînt date de ecuația $x^2 + 7x + 6 = 0$, care ne dă $x_3 = -1$; $x_4 = -6$.

Aplicația II. Să se rezolve ecuația

$$f(x) = x^6 - 2x^5 - 2x^4 - 4x^3 + 17x^2 - 50x - 100 = 0$$

știind că admite rădăcina $\sqrt{2} + i\sqrt{3}$.

Rezolvare. Ecuația admițînd rădăcina $x_1 = \sqrt{2} + i\sqrt{3}$, va admite și rădăcinile $x_2 = \sqrt{2} - i\sqrt{3}$, $x_3 = -\sqrt{2} + i\sqrt{3}$, $x_4 = -\sqrt{2} - i\sqrt{3}$.

Atunci polinomul $f(x)$ va fi divizibil cu produsul

$$P_4 = (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)(x - x_4) = (x - \sqrt{2} - i\sqrt{3})(x - \sqrt{2} + i\sqrt{3})(x + \sqrt{2} - i\sqrt{3})(x + \sqrt{2} + i\sqrt{3}).$$

Efectuînd toate calculele, se găsește

$$P_4 = x^4 + 2x^2 + 25.$$

Împărțind pe $f(x)$ cu $x^4 + 2x^2 + 25$, găsim

$$f(x) = (x^4 + 2x^2 + 25)(x^2 - 2x - 4).$$

Celelalte rădăcini sînt date de ecuația $x^2 - 2x - 4 = 0$ care ne dă $x_{5,6} = 1 \pm \sqrt{5}$.

17. Se cunoaște din clasa a VIII-a noțiunea de ***polinom reductibil*** și *polinom ireductibil.* Repetăm definițiile lor.

Polinom reductibil se numește un polinom care se poate descompune într-un produs de polinoame cu coeficienți raționali.

Polinom ireductibil se numește un polinom care nu se poate descompune în produs de polinoame cu coeficienți raționali.

Reductibilitatea sau *ireductibilitatea*, conform acestei definiții, vom spune că o avem în *mulțimea numerelor raționale.*

În același mod putem vorbi de un *polinom reductibil în mulțimea numerelor reale*, dacă acel polinom se poate descompune într-un produs de polinoame cu *coeficienți reali.*

De exemplu, polinomul

$$f(x) = (x^2 - 3) = (x - \sqrt{3})(x + \sqrt{3})$$

zicem că este ireductibil în *mulțimea numerelor raționale*, dar este *reductibil* în mulțimea numerelor reale.

La fel, dacă luăm polinomul

$$f(x) = (x - 2)(4x^2 - 1)(2x + 1),$$

vom spune că este ireductibil în mulțimea numerelor întregi, dar este reductibil în mulțimea numerelor raționale.

Pentru ecuațiile algebrice e important să știm cînd se pot ele descompune în factori cu coeficienți întregi, raționali sau reali; în acest scop există anumite criterii; studiul lor nu intră în cadrul acestui manual.

1. Să se arate că polinomul

$$f(x) = (1 + x)^{6k+1} - (1 + x)^{6k+2} - 1$$

este divizibil cu $x^2 + x + 1$.

2. Să se determine coeficienţii a, b şi să se rezolve ecuaţia $2x^4-3x^3+ax^2-2x+b=0$, ştiind că admite rădăcina $\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$.

3. Să se rezolve ecuaţia $x^4-3x^3-x^2+9x-18=0$, ştiind că admite rădăcina $1 - i\sqrt{2}$.

4. Se dă ecuaţia $x^4 - x^3 - 13x^2 + \alpha x + \beta = 0$.
Să se determine α şi β astfel ca ecuaţia să admită rădăcina $\frac{1 + i\sqrt{11}}{2}$.

5. Să se rezolve ecuaţia $x^5-14x^4+69x^3-140x^2+74x+60=0$, ştiind că una din rădăcinile ei este $3+i$, iar alta $1 + \sqrt{2}$.

6. Să se rezolve ecuaţia $x^6-x^5-8x^4+2x^3+21x^2-9x-54=0$, ştiind că una din rădăcini este $\sqrt{2} + i$.

7. Să se rezolve ecuaţia $x^6-2x^5-x^4+4x^3+23x^2-50x+25=0$, ştiind că admite rădăcina $\sqrt{3} + i\sqrt{2}$.

8. Să se rezolve ecuaţia $x^4-3x^3-11x^2+25x+12=0$, ştiind că admite rădăcina $1 - \sqrt{2}$.

9. Să se determine numerele raţionale α şi β, astfel ca ecuaţia $x^4+4x^3-4\alpha x+4\beta=0$ să aibă o rădăcină dublă de forma $p + q\sqrt{3}$, p şi q fiind numere raţionale.

10. Să se rezolve ecuaţia

$$x^6 + 3x^5 - 12x^4 - 30x^3 + 21x^2 + 3x - 2 = 0,$$

ştiind că ea admite rădăcina $\sqrt{2}+\sqrt{3}$.

11. Ştiind că una din rădăcinile polinomului

$$P(x) = x^6 + x^5 + 3x^4 + 2x^3 + 3x^2 + x + 1$$

este i, să se găsească celelalte rădăcini.

12. Polinomul $P(x)=3x^4-5x^3+3x^2+4x-2$ să se descompună în factori:

a) în mulţimea numerelor raţionale;
b) în mulţimea numerelor reale;
c) în mulţimea numerelor complexe.

REZOLVAREA ECUAŢIILOR ALGEBRICE CU COEFICIENŢI RAŢIONALI

18. Putem presupune, în cele ce urmează, *că ecuaţia algebrică de rezolvat are coeficienţii numai numere întregi*, căci dacă are şi coeficienţi fracţionari, putem elimina numitorii, înmulţind ecuaţia cu cel mai mic multiplu comun al tuturor numitorilor.

Limitele rădăcinilor

19. Definiţii. Se zice că un număr pozitiv L e o *limită superioară* a rădăcinilor pozitive ale ecuaţiei $f(x) = 0$, dacă L este mai mare decît cea mai mare rădăcină pozitivă a acestei ecuaţii.

De exemplu, dacă o ecuaţie are rădăcinile pozitive 1, 3, 4, 5, numărul 6 poate fi luat ca *limita superioară a rădăcinilor pozitive*. Am putea lua tot aşa de bine ca limită şi pe 7, 8, 10 sau orice alt număr mai mare; avem însă tot interesul ca limita superioară găsită să fie cît mai mică posibil.

În mod analog, numărul pozitiv l va fi o *limită inferioară a rădăcinilor pozitive*, cînd l va fi mai mic decît cea mai mică rădăcină pozitivă.

De exemplu, dacă ecuaţia ar avea rădăcinile pozitive 4, 5 şi 7, putem lua ca limită inferioară a rădăcinilor pozitive oricare din numerele 1, 2, 3, cea mai convenabilă este însă 3, care este cea mai apropiată de cea mai mică rădăcină pozitivă.

Căutarea *limitei inferioare* l se reduce la căutarea limitei superioare, căci pentru ca l să fie o *limită inferioară a rădăcinilor pozitive*, e necesar şi suficient ca $\frac{1}{l}$ să fie o limită superioară a rădăcinilor pozitive ale ecuaţiei $f\left(\frac{1}{x}\right) = 0$.

De aceea, dacă vrem să găsim *limita inferioară l a rădăcinilor pozitive*, vom căuta limita superioară a rădăcinilor pozitive ale ecuaţiei transformate în $\frac{1}{x}$; inversa acestei limite va fi chiar limita inferioară a rădăcinilor pozitive ale ecuaţiei date.

Dacă știm să determinăm o *limită inferioară* l' și o *limită superioară* L' a rădăcinilor pozitive ale ecuației $f(-x)=0$, orice rădăcină negativă a ecuației $f(x)=0$ va fi cuprinsă între $-L'$ și $-l'$ astfel că $-L'$ va fi o *limită inferioară* și $-l'$ va fi o *limită superioară* a rădăcinilor negative ale ecuației propuse.

În concluzie, *totul se reduce la aflarea unei limite superioare L a rădăcinilor pozitive ale unei ecuații.*

De exemplu, avem ecuația $f(x)=0$ și ea are rădăcinile -6; -4; -3; -2; 3; 5; 8; vom putea lua

$L = 9$ limita superioară a rădăcinilor pozitive

$l = 2$ limita inferioară a rădăcinilor pozitive

$-L' = -7$ limita inferioară a rădăcinilor negative

$-l' = -1$ limita superioară a rădăcinilor negative.

Teoretic deci avem de-a face cu patru limite, în practică însă nu se caută decît L și $-L'$.

De aceea, cînd ni se dă o ecuație $f(x)=0$, se procedează în ordinea următoare:

1. Se caută limita superioară L a rădăcinilor pozitive ale lui $f(x)=0$.
2. Se face transformata în $-x$, adică $f(-x)$.
3. Se caută limita superioară L' a rădăcinilor pozitive ale ecuației $f(-x)=0$.
4. Limita inferioară a rădăcinilor negative ale lui $f(x)$ este $-L'$.

20. Determinarea limitei superioare a rădăcinilor pozitive. Am văzut mai sus că totul se reduce la *aflarea unei limite superioare a rădăcinilor pozitive.*

Înainte de a expune o metodă pentru aflarea acestei limite, vom enunța o lemă (teoremă ajutătoare).

Dacă un polinom $f(x)$ cu o singură variație (schimbare de semn între doi termeni consecutivi) și primul termen pozitiv, este pozitiv pentru $x=a$, a fiind mai mare decît zero, acel polinom va rămîne pozitiv pentru orice valoare a lui x mai mare decît a.

Să luăm, de exemplu, polinomul

$$f(x) = 4x^6 + 2x^5 - 3x^4 - 7x^3 - x^2 - 6, \qquad (1)$$

un polinom cu o singură variație; într-adevăr, el prezintă o singură schimbare de semn între doi termeni consecutivi.

Se poate verifica ușor că $f(2)=206>0$.

Vrem să arătăm că $f(x)$ va rămîne pozitiv pentru orice altă valoare a lui x mai mare decît 2, de exemplu 3, 4, 5,...

Într-adevăr, putem scrie treptat

$$f(x) = 4x^6 + 2x^5 - (3x^4 + 7x^3 + x^2 + 6) \qquad (2)$$

$$f(x) = x^4\left[4x^2 + 2x - \left(3 + \frac{7}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{6}{x^4}\right)\right]. \qquad (3)$$

Fiindcă $f(2)>0$, avem pentru $x=2$.

$$4x^2 + 2x > 3 + \frac{7}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{6}{x^4}.$$

Dacă în locul lui x vom pune alte valori mai mari decît 2, vom constata că partea stîngă $4x^2+2x$ crește din ce în ce, iar partea dreaptă $3 + \frac{7}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{6}{x^4}$ descrește, deci vom avea cu atît mai mult

$$f(3) > 0,\ f(4) > 0 \text{ etc.}$$

Rezultă de aici că pentru polinomul nostru $f(x)$ putem lua ca limită superioară L chiar 2, pentru că nu există nici o valoare a lui x mai mare decît 2 pentru care să avem $f(x)=0$.

În general: Dacă la o ecuație $f(x)=0$, partea stîngă e un polinom cu o singură variație și primul termen e pozitiv, vom putea obține o limită superioară a rădăcinilor pozitive, înlocuind în polinom variabila x pe rînd cu numerele 1,2,3,... și oprindu-ne la prima valoare a pentru care avem $f(a)>0$.

21. Metoda grupării termenilor. Dacă polinomul $f(x)$ prezintă mai multe variații, se procedează astfel:

Se pune polinomul $f(x)$ sub forma unei sume de mai multe grupe de termeni, avînd grijă ca fiecare grupă *să prezinte o singură variație*, termenii din grupă *să fie ordonați după puterile descrescătoare ale lui x și primul termen din grupă să fie pozitiv.*

Se caută atunci pentru fiecare grupă o valoare pozitivă a lui x pentru care grupa este pozitivă; întrucît în baza lemei orice valoare superioară acesteia va face grupa tot pozitivă, înseamnă că acea valoare va putea fi luată ca o limită L_1 pentru grupa respectivă.

Se caută astfel limitele L_1, L_2, L_3 etc. pentru toate grupele polinomului.

Cea mai mare dintre aceste limite superioare ale fiecărei grupe în parte va fi luată ca *limita superioară a rădăcinilor pozitive* pentru ecuația întreagă.

Nu se poate da o indicație precisă asupra modului cum trebuie să procedăm pentru ca limita să fie cît mai apropiată de rădăcini la gruparea termenilor, se recomandă numai să asociem termenii negativi ai căror coeficienți au cea mai mare valoare absolută cu cît mai mulți termeni pozitivi, sau ca diferența între grade să fie cît mai mare.

APLICAȚII

Exemplul I. Să se afle limita superioară a rădăcinilor pozitive pentru ecuația
$f(x) = x^5 + x^4 - x^3 + x - 10\,000 = 0.$

Grupăm astfel

$$f(x) = \underbrace{(x^5 + x - 10\,000)}_{7} + \underbrace{(x^4 - x^3)}_{2}.$$

Pentru grupa a doua se află imediat limita 2, prima grupă devine pozitivă pentru $x = 7$, deci 7 va fi o *limită superioară a rădăcinilor pozitive* pentru ecuația propusă.

Exemplul II. Să se afle limita superioară a rădăcinilor pozitive pentru ecuația

$$f(x) = 2x^6 + 3x^5 + 10x^4 - 7x^3 - 12x^2 + x - 4 = 0.$$

În cazul de față e convenabilă următoarea grupare $f(x) = (2x^6 - 12x^2) + (10x^4 - 7x^3) + (3x^5 - 4) + x$ care se mai scrie

$$f(x) = 2x^2\underbrace{(x^4 - 6)}_{2} + x^3\underbrace{(10x - 7)}_{1} + \underbrace{(3x^5 - 4)}_{2} + x.$$

Limitele pe grupe sînt 2, 1, 2, deci avem $L = 2$.

Calcularea rădăcinilor întregi și fracționare

22. Calcularea rădăcinilor întregi. După ce, folosind metoda grupării termenilor, am aflat limita superioară L a *rădăcinilor pozitive* și *limita inferioară* $-L'$ a *rădăcinilor negative* ale unei ecuații, adică am aflat intervalele în care se găsesc rădăcinile, ne propunem să calculăm aceste rădăcini.

Vom începe cu calcularea rădăcinilor întregi. Vom stabili însă în prealabil cîteva teoreme care să ușureze aflarea lor.

Teorema I. *O ecuație algebrică cu coeficienți întregi, în care coeficientul termenului de gradul cel mai înalt e 1, nu poate admite rădăcini raționale decît numere întregi.*

Să luăm de exemplu ecuația

$$f(x) = x^5 + bx^4 + cx^3 + dx^2 + ex + f = 0 \qquad (1)$$

și să presupunem că ea ar admite ca rădăcină fracția $\frac{p}{q}$ presupusă ireductibilă, deci p și q sînt numere prime între ele. Va trebui să avem atunci $f\left(\frac{p}{q}\right) = 0$, adică

$$\left(\frac{p}{q}\right)^5 + b\left(\frac{p}{q}\right)^4 + c\left(\frac{p}{q}\right)^3 + d\left(\frac{p}{q}\right)^2 + e\left(\frac{p}{q}\right) + f = 0. \qquad (2)$$

Înmulțind cu q^4, avem

$$\frac{p^5}{q} + bp^4 + cp^3q + dp^2q^2 + epq^3 + fq^4 = 0, \qquad (3)$$

care se mai poate scrie

$$\frac{p^5}{q} = -(bp^4 + cp^3q + dp^2q^2 + epq^3 + fq^4). \qquad (4)$$

Examinînd egalitatea ultimă, constatăm că am ajuns la un rezultat absurd, pentru că în partea dreaptă avem o sumă de numere întregi, deci un *număr întreg*, pe cînd în partea stîngă avem un *număr fracționar*, pentru că dacă p și q au fost presupuse prime între ele, p^5 și q sînt de asemenea prime între ele.

Urmează deci că ipoteza inițială că ecuația admite ca rădăcină pe $\frac{p}{q}$ nu este justă și rezultă că o ecuație cu coeficienți întregi în care primul coeficient este 1 va avea rădăcini raționale numai numere întregi.

Teorema II. *Rădăcinile întregi ale unei ecuații algebrice cu coeficienți întregi trebuie căutate printre divizorii termenului liber.*

Să luăm ecuația

$$f(x) = Ax^4 + Bx^3 + Cx^2 + Dx + E = 0 \qquad (1)$$

şi să presupunem că ea admite ca rădăcină numărul întreg k; atunci va trebui să avem

$$Ak^4 + Bk^3 + Ck^2 + Dk + E = 0, \quad (2)$$

care se mai poate scrie

$$Ak^4 + Bk^3 + Ck^2 + Dk = -E \quad (3) \text{ sau încă}$$

$$k(Ak^3 + Bk^2 + Ck + D) = -E. \quad (4)$$

Din ultima egalitate constatăm că partea stîngă e divizibilă cu k, deci partea dreaptă, adică termenul liber E trebuie să fie şi el divizibil cu k.

Prin urmare, *orice rădăcină întreagă a unei ecuaţii trebuie să fie un divizor al termenului liber.*

Dacă, de exemplu, la o ecuaţie termenul liber este 24, divizorii lui 24, care ar putea fi rădăcinile ecuaţiei, sînt

$$\pm 1; \ \pm 2; \ \pm 3; \ \pm 4; \ \pm 6; \ \pm 8; \ \pm 12; \ \pm 24,$$

în total avem 16 divizori.

Însă, dacă în prealabil s-a găsit că $L=5$ şi $-L'= -4$, vom păstra dintre aceşti divizori numai pe următorii

$$\pm 1; \ \pm 2; \ \pm 3; \ +4,$$

adică au rămas numai 7 divizori.

CRITERIUL DE ELIMINARE A ANUMITOR DIVIZORI

Dacă, după ce am găsit divizorii termenului liber şi am păstrat dintre divizori numai pe cei cuprinşi între cele două limite L şi $-L'$, tot mai rămîn prea mulţi divizori de încercat, putem reduce numărul încercărilor pe baza următorului raţionament:

Dacă a este o rădăcină întreagă a polinomului, putem scrie:

$$f(x) = (x - a) . \varphi(x) \quad (1)$$

unde $f(x)$ şi $\varphi(x)$ au coeficienţi întregi.

Din (1) avem $\varphi(x) = \dfrac{f(x)}{x - a}$ (2), polinom cu coeficienţi întregi.

Însă dacă într-un polinom cu coeficienţi întregi înlocuim pe x cu un număr întreg, rezultatul înlocuirii va trebui să fie tot număr întreg. Deci, va trebui să avem

$$\varphi(1) = \frac{f(1)}{1 - a} \text{ număr întreg}$$

$$\varphi(-1) = \frac{f(-1)}{-1 - a} \text{ sau } \frac{f(-1)}{1 + a} \text{ număr întreg.}$$

Observare. Identitatea $\varphi(x) = \dfrac{f(x)}{x - a}$ se poate verifica înlocuind x cu orice număr; am înlocuit cu $+1$ şi cu -1, pentru motivul că $f(1)$ şi $f(-1)$ se calculează mai uşor.

În concluzie, *criteriul de eliminare a divizorilor constă în a păstra dintre divizorii termenului liber, cuprinşi între limite, numai pe aceia pentru care atît*

$$\frac{f(1)}{1 - a} \text{ cît şi } \frac{f(-1)}{1 + a} \text{ sînt numere întregi.}$$

După toate acestea, putem să indicăm *calea pentru aflarea rădăcinilor întregi:*

1) Determinăm limitele: superioară pentru rădăcinile pozitive şi inferioară pentru rădăcinile negative.

2) Căutăm divizorii termenului liber şi dintre ei reţinem numai pe aceia care sînt cuprinşi între cele două limite.

3) Aplicăm criteriul de eliminare a anumitor divizori.

4) Facem încercări cu divizorii rămaşi.

APLICAŢII

Exemplul I. Să se afle rădăcinile întregi ale ecuaţiei

$$P(x) = 4x^4 - x^3 - 56x^2 + 57x + 36 = 0.$$

1) Determinăm limitele. Grupînd termenii, avem

$P(x) = (4x^4 - x^3 - 56x^2) + 57x + 36$ scriem însă astfel

$$P(x) = x^2 (4x^2 - x - 56) + \ldots$$

am pus... (puncte-puncte) pentru că fiind vorba de termeni pozitivi, ei nu mai influenţează asupra limitei. Se găseşte prin încercări, că singura grupă pe care o avem devine pozitivă pentru $x = 4$, deci

$$\boxed{L = 4}$$

Facem transformata în $(-x)$. Avem

$P(-x) = 4x^4 + x^3 - 56x^2 - 57x + 36;$ grupăm

$P(-x) = (4x^4 - 56x^2) + (x^3 - 57x) + 36$ sau

$P(-x) = 4x^2 \underbrace{(x^2 - 14)}_{4} + x \underbrace{(x^2 - 57)}_{8} + \ldots$, deci

$$\boxed{-L' = -8}$$

2) Divizorii termenului liber 36, cuprinşi între limitele -8 şi 4, sînt

$$\boxed{\pm 1,\ \pm 2,\ \pm 3,\ -4 \text{ şi } -6}$$

în total 8 divizori.

3) *Aplicăm criteriul de eliminare a divizorilor.* Pentru aceasta, calculăm $P(1)$ şi $P(-1)$. Avem

$$P(1) = 4 - 1 - 56 + 57 + 36 = 40$$

$$P(-1) = 4 + 1 - 56 - 57 + 36 = -72.$$

Se vede că $x = 1$ şi $x = -1$ nu sînt rădăcini.

Criteriul va trebui să-l aplicăm şi pentru ceilalţi 6 divizori.

E recomandabil ca operaţiile să fie dispuse sub forma următorului tablou:

	a	2	3	-2	-3	-4	-6
$P(1) = 40$	$1-a$	-1	-2	3	4	5	7
$P(-1) = -72$	$1+a$	3	4	-1	-2	-3	-5

Se vede de aici că în rîndul superior s-au aşezat, după a, toate valorile divizorilor rămaşi, întîi cei pozitivi, apoi cei negativi.

În rîndul al doilea am scris $P(1) = 40$, apoi $1 - a$ cu care trebuie să fie divizibil, pe urmă am calculat valorile lui $1 - a$ pentru fiecare divizor.

În rîndul al treilea am procedat analog.

Acum vom tăia acele valori ale lui $(1 - a)$ care nu se cuprind exact în $P(1) = 40$; avem de tăiat pe 7 şi pe 3 (deci şi rădăcinile corespunzătoare -6 şi -2).

La fel vom tăia acele valori ale lui $(1 + a)$ care nu se cuprind exact în $P(-1) = -72$; avem de tăiat numai pe -5.

Atunci, pe baza criteriului de eliminare a divizorilor, am putut elimina 2 divizori: pe -6 şi pe -2 şi ne-au rămas de încercat 4 divizori: 2; 3; -3; -4.

4) *Facem încercări cu aceşti divizori rămaşi*

Acum ar trebui să încercăm dacă polinomul $P(x)$ este divizibil cu $x - 2$, $x - 3$ etc.

Am putea face această încercare cu ajutorul schemei lui Horner. În cazul de faţă, fiindcă vom avea de făcut o serie de încercări, e mai convenabil să lucrăm după schema următoare:

Ştim că la împărţirea prin $(x - a)$ a polinomului $P(x) = A_0x^n + A_1x^{n-1} + \dots + A_{n-1}x + A_n$, obţinem cîtul $Q(x) = B_0x^{n-1} + B_1x^{n-2} + \dots + B_{n-2}x + B_{n-1}$ şi restul R, cu următoarele relaţii între coeficienţi:

$$\begin{array}{lll} A_0 & = B_0 & \\ A_1 & = B_1 & - B_0a \\ A_2 & = B_2 & - B_1a \\ A_3 & = B_3 & - B_2a \\ \vert & & \vert \\ A_{n-1} & = B_{n-1} & - B_{n-2}a \\ A_n & = R & - B_{n-1}a \end{array}$$

În cazul cînd $P(x)$ este divizibil prin $x - a$, deci $R = 0$ (atunci $x = a$ este rădăcină a ecuaţiei $P(x) = 0$) ecuaţiile ne dau:

$$\begin{array}{ll} -B_{n-1} & = \dfrac{A_n}{a} \\ -B_{n-2} & = \dfrac{A_{n-1} + (-B_{n-1})}{a} \\ -B_{n-3} & = \dfrac{A_{n-2} + (-B_{n-2})}{a} \\ \vert & \quad\vert \\ -B_2 & = \dfrac{A_3 + (-B_3)}{a} \\ -B_1 & = \dfrac{A_2 + (-B_2)}{a} \\ -B_0 & = \dfrac{A_1 + (-B_1)}{a} \end{array}$$

$$(-B_0) + A_0 = 0$$

unde B_i sînt şi ei coeficienţi întregi.

Am avut $P(x) = 4x^4 - x^3 - 56x^2 + 57x + 36 = 0.$

x^4	x^3	x^2	x^1	x^0	
4	-1	-56	57	36	
			fr.	75 18	2 nu e rădăcină
	-4	-12 -11	-33 23	69 12	$3 = x_1$
		fr.	-2 9	27 4	$x = 3$ (dublă?) nu este
			fr.	19 -4	-3 nu e rădăcină
		4	-16 -5	20 -3	$-4 = x_2$

Explicăm mai jos operațiile din schemă.

În prima linie am scris coeficienții ecuației. Cînd lipsește vreun termen, înlocuim coeficientul cu 0.

Pentru a evita orice omisiune la scrierea coeficienților, se recomandă a scrie deasupra (ca și în cazul schemei lui Horner) puterile lui x de la x^4 pînă la x^0, care înseamnă termenul liber.

Se încearcă pe urmă cu divizorii care se scriu la dreapta. Primul divizor încercat este 2. Zicem

$$36 : 2 = 18;\ 18 + 57 = 75;$$

$75 : 2 =$ fr. (fracționar, adică nu se împarte exact) aceasta înseamnă că 2 nu poate fi rădăcină.

Încercăm apoi cu 3, făcînd operațiile

$$\left.\begin{array}{ll} 36:3 = 12; & 12 + 57 = 69; \\ 69:3 = 23; & 23 - 56 = -33; \\ -33:3 = -11; & -11 - 1 = -12; \\ -12:3 = -4; & -4 + 4 = 0. \end{array}\right\}$$

Am făcut deci o succesiune de împărțiri și adunări.

Dacă toate împărțirile se fac exact și ultima sumă iese zero, e semn că divizorul încercat e *rădăcină*, ceea ce am constatat în cazul nostru pentru 3. Am încercat din nou rădăcina $x = 3$ și am constatat că $x = 3$ nu este rădăcină dublă.

Dacă vreuna dintre împărțiri nu se face exact sau ultima sumă nu e zero, e semn că acel divizor încercat nu poate fi rădăcină.

Avantajul acestei scheme constă în aceea că pe lîngă faptul că verifică dacă un divizor e rădăcină, în același timp efectuează și împărțirea polinomului prin $(x - a)$, adică prin x minus divizorul respectiv.

În cazul nostru se vede că în linia divizorului 3 am cîturile (de la stînga la dreapta) -4, -11, 23 și 12; aceasta înseamnă că cîtul lui $P(x)$ prin $x - 3$ este $4x^3 + 11x^2 - 23x - 12$ (am schimbat semnul).

La polinomul de gradul III găsit, continuăm încercările cu ceilalți divizori, pînă ce ajungem la un polinom de gradul II.

În cazul nostru avem $4x^2 - 5x - 3 = 0$, care are rădăcinile $x = \dfrac{5 \pm \sqrt{25 + 48}}{8} = \dfrac{5 \pm \sqrt{73}}{8}$.

Deci, ecuația dată are rădăcinile

$$\boxed{x_1 = 3;\ x_2 = -4;\ x_{3,4} = \frac{5 \pm \sqrt{73}}{8}}$$

Exemplul II. Să se rezolve ecuația

$F(x) = x^3 - 44x^2 - 45x + 12\,600 = 0$

1) *Aflăm limitele.*

$F(x) = x^3 - 44x^2 - 45x + 12\,600$

$F(x) = x(x^2 - 44x - 45) + \ldots$ deci $L = 46$

$-F(-x) = x^3 + 44x^2 - 45x - 12\,600$

$-F(-x) = (x^3 - 45x) + (44x^2 - 12\,600)$

$-F(-x) = x\,\underbrace{(x^2 - 45)}_{7} + 4(11x^2 - 3\,150).$

Prima grupă are limita 7, pentru a doua se găsește 17, deci $-L' = -17$.

2) Va trebui să găsim divizorii termenului liber 12 600, cuprinși între limitele -17 și 46.

Vom descompune pe 12 600 în factori primi

12 600	$2^2 \cdot 5^2$
126	2
63	3^2
7	7
1	

deci $12\,600 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdot 7$

Atunci se vede că vom avea divizorii

$$\boxed{\begin{array}{l}\pm1\pm2\pm3\pm4\pm5\pm6\pm7\pm8\pm9\pm10\\ \pm12\pm14\pm15+18+20+21+24\\ +25+28+30+35+36+40+42\end{array}}$$

adică nu mai puțin de 37 divizori.

3) Aplicăm criteriul de eliminare a divizorilor

$F(1) = 1 - 44 - 45 + 12\,600 = 12\,512$
$F(-1) = -1 - 44 + 45 + 12\,600 = 12\,600.$

Vom descompune 12 512 în factori primi.

12 512	2
6 256	2
3 128	2
1 564	2
782	2
391	17
23	23
1	

Deci avem

$12\,512 = 2^5 \cdot 17 \cdot 23$
$12\,600 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdot 7.$

Facem tabloul pentru aplicarea criteriului de eliminare

	a	2	3	4	5	6	7	8	9	10	12	14	15	18	20
$F(1) = 12\,512$	$1-a$	-1	-2	$-\cancel{3}$	-4	$-\cancel{5}$	$-\cancel{6}$	$-\cancel{7}$	-8	$-\cancel{9}$	$-\cancel{11}$	$-\cancel{13}$	$-\cancel{14}$	-17	$-\cancel{19}$
$F(-1) = 12\,600$	$1+a$	3	4	5	6	7	8	9	10	$\cancel{11}$	$\cancel{13}$	15	$\cancel{16}$	$\cancel{19}$	21

a	21	24	25	28	30	35	36	40	42	-2	-3	-4	-5	-6	-7	-8
$1-a$	$-\cancel{20}$	-23	$-\cancel{24}$	$-\cancel{27}$	$-\cancel{29}$	-34	$-\cancel{35}$	$-\cancel{39}$	$-\cancel{41}$	$\cancel{3}$	4	$\cancel{5}$	$\cancel{6}$	$\cancel{7}$	8	$\cancel{9}$
$1+a$	$\cancel{22}$	25	$\cancel{26}$	$\cancel{29}$	$\cancel{31}$	36	$\cancel{37}$	$\cancel{41}$	$\cancel{43}$	-1	-2	-3	-4	-5	-6	-7

a	-9	-10	-12	-14	-15
$1-a$	$\cancel{10}$	$\cancel{11}$	$\cancel{13}$	$\cancel{15}$	16
$1+a$	-8	-9	$-\cancel{11}$	$-\cancel{13}$	-14

Am tăiat în linia a doua toate valorile lui $1-a$ care nu se cuprind exact în $F(1) = 12\,512$.

Tăiem în linia a treia toate valorile lui $1+a$ care nu se cuprind exact în $F(-1) = 12\,600$.

Au rămas netăiați următorii divizori

$$\boxed{2;\ 3;\ 5;\ 9;\ 24;\ 35;\ -3;\ -7;\ -15}$$

Constatăm deci în cazul de față că în urma aplicării criteriului de eliminare, din 37 divizori ne-au mai rămas de încercat numai 9 *divizori*, deci criteriul s-a dovedit a fi destul de eficace.

4) Încercăm acești divizori rămași. Vom face schema

x^3	x^2	x^1	x^0	
1	-44	-45	12600	
		fr.	$\underline{6255}$ 6300	2 nu e rădăcină
	$\underline{448}$ 447	$\underline{1341}$ 1385	$\underline{4155}$ 4200	3 nu e rădăcină
	fr.	$\underline{451}$ 495	$\underline{2475}$ 2520	5 nu e rădăcină
		fr.	$\underline{1355}$ 1400	9 nu e rădăcină
	-1	$\underline{-24}$ 20	$\underline{480}$ 525	$24 = x_1$

Ecuația $f(x)=x^3-44x^2-45x+12\,600=0$ fiind de gradul III, e suficient să găsim o singură rădăcină, căci ecuația rămasă va fi de gradul II.

În cazul de față am găsit rădăcina $x_1=24$ și ne-a rămas ecuația $x^2-20x-525=0$, care ne dă rădăcinile -15 și 35.

Deci ecuația are rădăcinile

$$\boxed{x_1 = 24;\ x_2 = 35;\ x_3 = -15}$$

Calcularea rădăcinilor fracționare

23. *Căutarea rădăcinilor fracționare* ale unei ecuații algebrice trebuie făcută numai după ce *în prealabil am aflat toate rădăcinile întregi.*

În legătură cu rădăcinile fracționare, putem da o teoremă.

Fie ecuația $f(x)=0$ cu coeficienți întregi

$$f(x)=A_0x^n+A_1x^{n-1}+\ldots+A_{n-1}x+A_n=0, \quad (1)$$

despre care presupunem că admite rădăcina fracționară $\frac{p}{q}$ (p și q fiind prime între ele).

Atunci avem

$$f\left(\frac{p}{q}\right)=A_0\left(\frac{p}{q}\right)^n+A_1\left(\frac{p}{q}\right)^{n-1}+\ldots+A_{n-1}\left(\frac{p}{q}\right)+A_n=0 \quad (2)$$

sau $A_0\left(\frac{p^n}{q^n}\right)+A_1\left(\frac{p^{n-1}}{q^{n-1}}\right)+\ldots+A_{n-1}\left(\frac{p}{q}\right)+A_n=0.$ (3)

Eliminînd numitorii, vom avea

$$A_0p^n+A_1p^{n-1}q+\ldots+A_{n-1}pq^{n-1}+A_nq^n=0. \quad (4)$$

Relația (4) se poate scrie încă în următoarele două moduri

$$A_0p^n=-q(A_1p^{n-1}+\ldots+A_{n-1}pq^{n-2}+A_nq^{n-1}) \quad (5)$$

și

$$A_nq^n=-p(A_0p^{n-1}+A_1p^{n-2}q+\ldots+A_{n-1}q^{n-1}). \quad (6)$$

Din egalitatea (5) se vede că partea dreaptă e divizibilă cu q $\left(\text{numitorul fracției } \frac{p}{q}\right)$, deci partea stîngă trebuie să

fie de asemenea divizibilă cu q. Numerele p și q au fost presupuse prime între ele, atunci p^n și q sînt de asemenea prime între ele, urmează atunci că A_0, adică primul coeficient al ecuației, este divizibil cu numitorul q.

Din egalitatea (6), printr-un raționament identic, deducem că termenul liber A_n trebuie să fie divizibil cu numărătorul p. Atunci putem enunța următoarea **teoremă**:

Dacă o ecuație cu coeficienți întregi admite o rădăcină fracționară $\frac{p}{q}$, numărătorul p este divizorul termenului liber A_n, iar numitorul q este divizorul primului coeficient A_0.

Această teoremă nu este practică pentru aflarea rădăcinilor fracționare, dar folosește la verificarea lor.

Putem arăta că *se poate aduce calculul rădăcinilor fracționare la acel al rădăcinilor întregi.*

În adevăr, fie $f(x)=0$ o ecuație cu coeficienți întregi.

Dacă primul coeficient e 1, ecuația n-are rădăcini fracționare și, pe baza celor învățate, dacă are rădăcini raționale, ele trebuie să fie întregi.

Dacă primul coeficient nu e 1, putem transforma ecuația $f(x)=0$ într-alta în care primul coeficient să **fie 1**, înmulțind rădăcinile ecuației $f(x)=0$ cu un număr k ales convenabil.

E suficient atunci să aflăm rădăcinile întregi ale ecuației transformate și a le împărți pe urmă cu k, spre a găsi rădăcinile fracționare ale ecuației date.

E x e m p l u. Să se rezolve ecuația

$$f(x)=12x^4-8x^3-21x^2+5x+6=0. \quad (1)$$

1) *Aflăm limitele*

$f(x)=(12x^4-8x^3-21x^2)+5x+6$

$f(x)=x^2(12x^2-8x-21)+\ldots$ de unde $L=2$

$f(-x)=12x^4+8x^3-21x^2-5x+6$

$f(-x)=(12x^4-21x^2)+(8x^3-5x)+\ldots$

$f(-x)=3x^2(4x^2-7)+x(8x^2-5)+\ldots$ de unde $-L'=-2.$

2) Divizorii lui 6 cuprinși între limite sînt $+1$ și -1. Aici nu mai aplicăm criteriul de eliminare a divizorilor.

3) $f(1)=12-8-21+5+6=23-29=-6$

$f(-1)=12+8-21-5+6=26-26=0$, deci -1 este rădăcină.

4) Avem

$$12x^4-8x^3-21x^2+5x+6\equiv(x+1)\,(12x^3-20x^2-x+6).$$

Celelalte rădăcini vor fi date de ecuația

$$12x^3-20x^2-x+6=0 \tag{2}$$

care, nemaiavînd rădăcina -1, are cel mult rădăcini fracționare.

Pentru a găsi aceste rădăcini, transformăm ecuația (2) în alta, în care primul coeficient să fie 1.

Se pune $y=kx$ (3), de unde $x=\frac{y}{k}$ (3′); deci, înlocuind în ecuația (2) pe x prin $\frac{y}{k}$, vom avea

$$12\left(\frac{y}{k}\right)^3-20\left(\frac{y}{k}\right)^2-\frac{y}{k}+6=0$$

$$\frac{12y^3}{k^3}-\frac{20y^2}{k^2}-\frac{y}{k}+6=0; \quad \text{scăpăm de numitori}$$

$$12y^3-20ky^2-k^2y+6k^3=0. \tag{4}$$

Aici vom alege pentru k o valoare astfel ca ecuația să poată fi simplificată cu 12.

Se vede că e suficient dacă luăm $k=6$.

Atunci ecuația (4) devine

$$12y^3-20\cdot6\cdot y^2-36y+6\cdot216=0 \qquad |:12$$

$$\varphi(y)=y^3-10y^2-3y+108=0. \tag{5}$$

Cu ecuația (5) repetăm toate operațiile de la aflarea rădăcinilor întregi.

1) Aflăm limitele din nou

$\varphi(y)=y^3-10y^2-3y+108=y(y^2-10y-3)+\ldots$ de unde $L=11$.

$-\varphi(-y)=y^3+10y^2-3y-108=y^3-3y+10y^2-108=$

$=y(y^2-3)+2(5y^2-54)$, de unde $-L'=-4$.

Observare. Limitele vechi, pentru ecuația în x din (1) erau 2 și -2, așa că în baza relației (2) $y=kx=6x$, am fi putut pleca acum cu limitele de 6 ori mai mari față de cele vechi, adică 12 și -12. E bine însă ca la ecuația transformată să încercăm să aflăm limitele, pentru că de multe ori avem șansa să micșorăm limitele ce se deduc din cele vechi, prin înmulțirea lor cu factorul k, ceea ce s-a întîmplat în cazul de față, cînd pentru limitele noi, în loc de 12 și -12 am găsit 11 și -4.

2) Divizorii lui $108=2^2\cdot3^3$ cuprinși între limitele 11 și -4 sînt: ±1; ±2; ±3; 4; 6; 9.

Din aceste numere, în primul rînd excludem pe acelea care împărțite cu 6 dau numere întregi; astfel avem numărul 6.

Pentru ceilalți divizori, aplicăm criteriul de eliminare

$$\varphi(1)=1-10-3+108=96=2^5\cdot3.$$

$$\varphi(-1)=-1-10+3+108=100=2^2\cdot5^2.$$

Facem tabloul pentru aplicarea criteriului de eliminare

	a	2	3	4	9	-2	-3
$\varphi(1)=96$	$1-a$	-1	-2	-3	-8	3	4
$\varphi(-1)=100$	$1+a$	3	4	5	10	-1	-2

Rămîn de încercat divizorii 3; 4; 9; -2; -3.

Facem tabloul pentru încercarea acestor divizori

y^3	y^2	y^1	y^0	
1	-10	-3	108	
		1	33	3 nu e rădăcină
	fr.	11	36	
		-4	24	$4=y_1$
	-1	6	27	

Ne rămîne ecuația $y^2-6y-27=0$, care are rădăcinile

$$y_2=-3;\ y_3=9.$$

Atunci pentru x vom avea

$$x=\frac{4}{6}=\frac{2}{3};\quad x=\frac{-3}{6}=-\frac{1}{2};\quad x=\frac{9}{6}=\frac{3}{2}.$$

În concluzie, pentru ecuația

$$f(x)=12x^4-8x^3-21x^2+5x+6=0$$

am găsit rădăcinile

$$\boxed{x_1=-1;\ x_2=\frac{2}{3};\ x_3=\frac{3}{2};\ x_4=-\frac{1}{2}.}$$

EXERCIȚII ȘI PROBLEME

1. Să se găsească o limită superioară a rădăcinilor ecuației

$$x^7 - 5x^6 + 3x^5 - 6x^4 - 200x^3 + 2x^2 - 15x - 100 = 0$$

Să se rezolve ecuațiile

2. $x^4 + x^3 - 5x^2 + x - 6 = 0$
3. $20x^4 + 3x^3 + 18x^2 + 3x - 2 = 0$
4. $25x^4 + 110x^3 + 162x^2 + 38x - 15 = 0$
5. $10x^4 - 13x^3 + 7x^2 - 13x - 3 = 0$
6. $6x^4 - x^3 + 5x^2 - x - 1 = 0$
7. $x^5 - 5x^4 + 5x^3 + 10x^2 - 20x + 8 = 0$
8. $6x^5 + x^4 - 14x^3 + 4x^2 + 5x - 2 = 0$
9. $x^5 + 4x^4 - 6x^3 - 31x^2 - 34x - 24 = 0$
10. $x^5 - 4x^4 - 10x^3 + 26x^2 - 11x + 30 = 0$
11. $6x^5 + 11x^4 + 5x^3 + 5x^2 - x - 6 = 0$
12. $x^5 + 6x^4 - 9x^3 - 21x^2 - 10x - 24 = 0$
13. $6x^4 - 11x^3 - x^2 - 4 = 0$
14. $4x^4 - 11x^2 + 9x - 2 = 0$
15. $2x^3 + 12x^2 + 13x + 15 = 0$
16. $2x^4 - 4x^3 + 3x^2 - 5x - 2 = 0$
17. $6x^5 + 11x^4 - x^3 + 5x - 6 = 0$
18. $x^5 - 5x^4 + 2x^3 - 25x^2 + 21x + 270 = 0$
19. $x^6 + 3x^5 + 4x^4 + 3x^3 - 15x^2 - 16x + 20 = 0$
20. $2x^6 + x^5 - 9x^4 - 6x^3 - 5x^2 - 7x + 6 = 0$
21. $2x^3 - 9x^2 + 12x - 5 = 0$
22. $2x^3 - 12x^2 + 13x - 15 = 0$
23. $x^3 + x^2 - 8x - 12 = 0$
24. $x^3 - 7x^2 + 15x - 9 = 0$

25. $x^3 - 8x^2 + 17x - 10 = 0$
26. $4x^3 - 8x^2 - x + 2 = 0.$

Să se rezolve ecuațiile

27. $x^4 - 10x^3 + 35x^2 - 50x + 24 = 0$
28. $x^4 - 14x^3 + 36x^2 + 126x - 405 = 0$
29. $2x^4 - x^3 - 9x^2 + 4x + 4 = 0$
30. $x^4 - 8x^3 + 23x^2 - 28x + 12 = 0$
31. $x^4 - 7x^3 + 9x^2 + 7x - 10 = 0$
32. $2x^4 - 8x^3 - 11x^2 + 11x - 30 = 0$
33. $x^4 - 11x^3 + 41x^2 - 61x + 30 = 0.$

Să se găsească rădăcinile raționale ale ecuațiilor

34. $x^5 + 8x^4 + 5x^3 - 50x^2 - 36x + 72 = 0$
35. $x^6 - 2x^5 - 14x^4 + 19x^3 + 28x^2 - 44x + 48 = 0$
36. $6x^4 - 43x^3 + 107x^2 - 108x + 36 = 0$
37. $21x^4 - 41x^3 + 45x^2 - 24x + 4 = 0$
38. $16x^5 - 76x^4 + 44x^3 + 139x^2 - 42x - 45 = 0.$
39. Să se determine valorile lui x pentru care avem

$$3x^5 + 2x^4 - 4x^3 + 4x^2 - 7x + 2 > 0.$$

40. Să se găsească baza unui sistem de numerație în care numărul 824 din sistemul zecimal se scrie 3 452.

41. Să se rezolve ecuația $4x^4 - 28x^3 + 45x^2 - 6x - 18 = 0.$

42. Să se rezolve ecuația $15x^5 - 19x^4 + 6x^3 + 15x^2 - 19x + 6 = 0.$

43. Să se rezolve ecuația $12x^5 + 40x^4 + 13x^3 - 11x - 6 = 0.$

44. Să se rezolve ecuația $15x^4 + 16x^3 - 46x^2 - 5x + 6 = 0.$

45. Să se rezolve ecuația $8x^6 - 38x^5 + 57x^4 - 60x^3 + 52x^2 - 22x + 3 = 0.$

46. Să se rezolve ecuația $8\left(\frac{2}{5}\right)^{x^3 - 3x^2 - 4x + 9} = 125.$

47. Să se găsească două numere a căror diferență este 4, iar produsul multiplicat cu suma lor să dea 1 386.

48. Să se rezolve ecuația $2x^5-7x^4+2x^3+10x^2-4x-3=0$ știind că admite rădăcina $1+\sqrt{2}$.

49. Se consideră volumul cuprins între două sfere concentrice. Care trebuie să fie raportul razelor, pentru ca acest volum să fie egal cu $\frac{7}{3}$ din volumul unui cilindru avînd un cerc cu raza mare ca bază și raza mică drept înălțime?

50. Să se afle raza unui con circular drept, înscris într-o sferă de rază R, astfel ca volumul conului să fie egal cu $\frac{81}{500}$ din volumul sferei.

51. Suma pătratelor primelor n numere întregi este 385. Să se afle n.

52. Dimensiunile unui paralelipiped dreptunghic formează o progresie aritmetică cu rația 5.

Să se afle aceste dimensiuni, știind că volumul paralelipipedului este $V = 1\,428$ cm^3.

53. Un bazin avînd o capacitate de 360 hl se poate umple în 2 ore prin 4 robinete; pentru a umple singur bazinul, cel de-al doilea robinet ar curge timp de 1 oră și 12 minute, cel de-al treilea — 3 ore, iar cel de-al patrulea — 6 ore mai mult decît cel dintîi.

Care este debitul pe oră al fiecărui robinet?

54. Într-un triunghi oarecare se dau laturile $a = 26$, $b = 28$ și raza cercului înscris $r = 8$.

Se cere latura a treia.

55. Să se împartă un triunghi printr-o paralelă la una din laturi în două părți, astfel că dacă triunghiul se învîrtește în jurul acelei laturi, volumul generat de trapezul format să fie jumătate din volumul generat de triunghi.

56. Să se arate că expresia $E = \sqrt[3]{20+14\sqrt{2}} + \sqrt[3]{20-14\sqrt{2}}$ este rațională și să se găsească valoarea ei.

EXERCIȚII RECAPITULATIVE

1. Să se stabilească relația

$$1 + C_2^2 + C_3^2 + C_4^2 + C_3^3 + C_4^3 = 2^4.$$

2. Să se determine m întreg și pozitiv, astfel ca să avem egalitatea

$$2 \cdot A_m^7 \cdot A_m^4 = A_m^6 \cdot A_m^5.$$

3. Să se rezolve ecuația

$$A_m^6 - 24\, m\, C_m^4 = 11\, A_m^4.$$

4. Cei douăzeci de elevi ai unei clase hotărăsc să formeze o echipă de fotbal. Șapte dintre elevi preferă să fie portari, ceilalți admițînd să aibă orice rol în formație. În cîte moduri se poate forma echipa de 11 jucători?

5. În cîte moduri se pot așeza cele 32 de piese ale unui joc de șah pe cele 64 de pătrate ale tablei de joc?

6. Pe un teren de tenis se află patru băieți și trei fete, care se hotărăsc să joace perechi, cîte un băiat și o fată, urmînd ca pe rînd unul din băieți să rămînă pentru cules mingile. În cîte moduri se pot grupa perechile pentru joc?

7. După joc, cei șapte tineri din exercițiul precedent se așază pe o bancă, la extremități așezîndu-se cîte un băiat, ceilalți fiind așezați astfel ca fiecare fată să se găsească între doi băieți. Cîte așezări distincte se pot forma?

8. Cîte puncte de intersecție rezultă din întretăierea a n drepte în același plan, dintre care p trec prin același punct și q sînt paralele?

9. În cîte moduri se pot așeza, de aceeași parte a unei mese drepte, 12 persoane, în ipotezele următoare:

a) la masă încap deodată toate persoanele;

b) la masă nu încap deodată decît 6 persoane.

10. În cîte feluri se poate descompune produsul *abcde*, într-un produs de 2 factori? Să se generalizeze.

11. Se dau n puncte în plan. Se construiesc dreptunghiuri pe ale căror laturi se găsesc cîte 5 puncte date, astfel că pe fiecare latură este cel puțin un punct.

Să se arate că numărul total al dreptunghiurilor ce se pot construi astfel este $N = (n-4)\ C_n^2 C_{n-2}^2$.

12. Să se rezolve ecuațiile

$$a)\ \frac{A_{x+1}^{n+1} \cdot P_{x-n}}{P_{x-1}} = 90; \quad b)\ \frac{P_{x+2}}{A_x^n \cdot P_{x-n}} = 132.$$

13. Să se arate ce formă trebuie să aibă numărul întreg y, pentru ca ecuația $C_x^5 = yC_x^3$ să fie posibilă.

Să se rezolve apoi ecuația.

14. Se dă ecuația $P_n\, x^2 - A_m^n x + 30\, C_m^n = 0$, care admite rădăcina dublă $x_1 = x_2 = 10$. Să se determine n și m.

15. Să se demonstreze că avem relația

$$(C_{m-1}^n)^3 + (C_{m-1}^{n-1})^3 = \frac{m^2 - 3mn + 3n^2}{m^2}\,(C_m^n)^3.$$

16. Plecînd de la identitatea $C_m^n = \frac{m}{m-n}\, C_{m-1}^n$, să se găsească din nou formula combinărilor.

17. Să se rezolve sistemul

$$\begin{cases} xC_{n-2}^{m-1} + \dfrac{n-1}{m-1}\,y = \dfrac{m}{n-1} \\ xC_{n-2}^{m-2} - \dfrac{n-1}{m}\,y = \dfrac{m-1}{n-1}. \end{cases}$$

18. Să se rezolve ecuația $11C_x^{22} = 100\ C_{x-2}^{21}$.

19. Să se rezolve ecuația $n\,(m-n)\,C_m^x = m\,(m-1)\,C_{m-2}^{x-1}$.

20. Care este numărul maxim de puncte de intersecție a dreptelor care unesc două cîte două n puncte situate în același plan, trei puncte oarecare nefiind coliniare?

21. Să se rezolve ecuația $C_6^x = 3\ C_5^{x-1}$.

22. Să se stabilească formula

$$1 + C_n^1 + C_{n+1}^2 + C_{n+2}^3 + C_{n+3}^4 + \dots + C_{n+k-1}^k = C_{n+k}^k.$$

23. Să se stabilească formula

$$1 + \frac{n}{1} + \frac{n(n+1)}{1\cdot 2} + \frac{n(n+1)(n+2)}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} +$$
$$+ \dots + \frac{n(n+1)\dots(n+k-1)}{1\cdot 2\cdot 3\dots k} = \frac{(n+1)(n+2)\dots(n+k)}{1\cdot 2\dots\cdot k}.$$

24. Să se calculeze suma

$$S = C_2^2\, C_{n-2}^2 + C_3^2\, C_{n-3}^2 + C_4^2 C_{n-4}^2 + \dots + C_{n-2}^2\, C_2^2.$$

25. Se consideră permutările primelor m cifre semnificative. Se cere suma numerelor astfel formate în sistemul zecimal.

26. Într-o horă (deschisă) sînt 6 fete și 4 flăcăi. În cîte feluri se pot așeza cei 10 jucători, știind că 2 fete sînt totdeauna între 2 flăcăi?

27. Să se determine n, știind că

$$\frac{1}{P_n} - \frac{1}{P_{n+1}} = \frac{n^3}{P_{n+2}}.$$

28. Se consideră produsul

$$P = (x+a)^{10} \cdot \left(x + \frac{1}{a}\right)^{10}.$$

Să se scrie toți termenii produsului independenți de a.

29. Un termen al dezvoltării $(x+3)^n$ are coeficientul 110 565 și coeficientul binomial 1 365. Să se afle n și rangul termenului.

30. Să se determine x astfel ca al 5-lea termen al dezvoltării lui $(x+2)^9$ să fie egal cu al 4-lea termen al dezvoltării lui $(x+2)^{10}$.

31. Pentru ce valoare a lui n, coeficienții termenilor al 2-lea, al 3-lea și al 4-lea ai dezvoltării lui $(1+x)^n$ formează o progresie aritmetică?

32. Să se determine m, n, p așa fel încît în dezvoltarea lui $\left(x^m + \frac{1}{x^p}\right)^n$, termenii de rangul 12 și 24 să aibă pe x respectiv la puterile 1 și 5 și să avem și un termen liber.

33. Să se găsească 3 coeficienți binomiali consecutivi formînd o progresie aritmetică.

34. Să se găsească coeficientul lui x^{14} din dezvoltarea:

$$(x^4 - 3x + 1)^8.$$

35. Să se demonstreze că coeficientul lui x^k în dezvoltarea expresiei
$P(x) = [(k-2)x^2 + nx - k]\,(x+1)^n$ este egal cu $n \cdot C_n^{k-2}$.

36. Să se demonstreze formulele

1) $C_{2n}^1 + C_{2n}^3 + \dots + C_{2n}^{n-1} = 2^{2n-2}$, dacă n e par;

2) $1 + C_{2n}^2 + C_{2n}^4 + \dots + C_{2n}^{n-1} = 2^{2n-2}$, dacă n e impar.

37. Să se demonstreze identitățile

$$a)\ 1 + \frac{1}{2} C_n^1 + \frac{1}{3} C_n^2 + \dots + \frac{1}{n+1} C_n^n = \frac{2^{n+1} - 1}{n+1};$$

$$b)\ k + \frac{k^2 \cdot C_n^1}{2} + \frac{k^3 C_n^2}{3} + \frac{k^4 \cdot C_n^3}{4} + \dots + \frac{k^{n+1} \cdot C_n^n}{n+1} = \frac{(k+1)^{n+1} - 1}{n+1}.$$

38. Să se demonstreze formula

$$C_{n+p}^k = C_n^k + C_n^{k-1} C_p^1 + C_n^{k-2} \cdot C_p^2 + \dots + C_n^{k-i} C_p^i + \dots + C_p^k.$$

39. Să se arate că avem egalitățile

$$a)\ C_n^0 C_m^k + C_n^1 C_m^{k-1} + \dots + C_n^k C_m^0 = C_{m+n}^k;$$

$$b)\ C_n^0 C_n^k + C_n^1 C_n^{k+1} + \dots + C_n^{n-k} C_n^n = \frac{2n!}{(n-k)!(n+k)!}.$$

40. Să se demonstreze următoarele identități

$$a)\ (C_n^0)^2 + (C_n^1)^2 + (C_n^2)^2 + \dots + (C_n^n)^2 = C_{2n}^n.$$

$$b)\ (C_{2n}^0)^2 - (C_{2n}^1)^2 + (C_{2n}^2)^2 - \dots + (C_{2n}^{2n})^2 = (-1)^n C_{2n}^n,$$

$$c)\ (C_{2n+1}^0)^2 - (C_{2n+1}^1)^2 + (C_{2n+1}^2)^2 - \dots - (C_{2n+1}^{2n+1})^2 = 0,$$

$$d)\ (C_n^1)^2 + 2(C_n^2)^2 + \dots + n(C_n^n)^2 = \frac{(2n-1)!}{(n-1)!\,(n+1)!}.$$

41. 1° Să se demonstreze că:

$(1 + a_1)\ (1 + a_2)\ (1 + a_3)\dots(1 + a_n) > 1 + a_1 + a_2 + \dots + a_n$ dacă $a_i > 0$.

2° *Inegalitatea lui Bernoulli*

Dacă $a > -1$, să se arate că avem

$$(1 + a)^n > 1 + an$$

pentru orice număr natural n.

42. Să se demonstreze

$$(n + 1)(n + 2)(n + 3)\dots(n + n) = 2^n \cdot 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \dots (2n - 1).$$

43. Dîndu-se $u_{n+1} = 3u_n - 2u_{n-1}$ și $u_0 = 2$, $u_1 = 3$,

să se demonstreze că $\boxed{u_n = 2^n + 1}$

44. N fiind un număr de n cifre, cîte cifre ar putea avea N^N?

45. Să se demonstreze că dacă

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 \text{ se divide prin}$$

$1+2+3+\dots+n$, cîtul este neapărat un număr impar.

46. Pentru ce valori ale lui n cîtul de la exercițiul precedent este un pătrat perfect?

47. Să se demonstreze că suma

$8n^2 - 7n - 1$ se divide prin 25 numai dacă unul din numerele $n-1$ sau $8n + 1$ se divide prin 25.

48. Să se verifice relația

$$1^3 + 3^3 + 5^3 + \dots + \left[\sqrt{\sqrt{8n+1} + 1} - 1\right]^3 = n.$$

49. Dacă A este un număr divizibil cu 19, iar B divizibil cu 13, să se arate cînd expresia $(A^n)^4 - (B^n)^2$ este divizibilă cu 17.

50. Pentru ce valori ale lui n, suma

$$S = n^6 - n^4 - n^2 + 1 \text{ se divide prin } 45?$$

51. Să se determine n astfel ca expresia

$$n^{12} - n^8 + n^4 - 1 \text{ să se dividă prin } 96.$$

52. Dacă $n > 1$, produsul $n(n + 3)$ nu poate fi pătrat perfect.

53. n fiind un număr întreg, să se arate că expresia

$$E = n(n^2 - 1)(n^2 - 2)(n^2 - 4) \text{ se divide cu } 840.$$

54. Să se arate că expresia $n^2(n + 1)^2(2n^2 + 2n - 1)$ este divizibilă cu 12, oricare ar fi n întreg.

55. Expresia $10^{n+1} - 9n - 10$ este divizibilă cu 81.

56. Să se determine m și n astfel ca polinomul

$$x^4 - 2x^3 + mx + n \text{ să fie divizibil cu } x^2 - 3x + 2.$$

57. Să se determine a și b astfel ca polinomul

$$(x^2 + 3x - 1)^2 + ax \text{ să fie divizibil prin } x^2 + x + b.$$

58. Să se calculeze cîtul și restul împărțirii polinomului

$$6x^4 - 7x^3 + ax^2 + 3x + 2 \text{ prin } x^2 - x + m.$$

Să se determine a și m așa încît împărțirea să se facă exact și să se descompună în acest caz polinomul în factori.

59. Să se arate că polinomul

$(x^2+ax+a)^2-(a-1)^2x$ se împarte exact prin x^2+x+1.

Să se afle cîtul fără a se face împărțirea.

60. Să se arate că polinomul

$P(x)=x^4-10x^3+35x^2-50x+24$ este divizibil cu $x-1$, cu $x-2$, cu $x-3$ și să se calculeze cîtul prin $(x-1)(x-2)\cdot(x-3)$.

61. Să se determine a și b astfel încît polinoamele

$P(x)=x^3+ax^2+bx+6$; $Q(x)=x^3+bx^2+ax+8$

să admită pe $x-2$ divizor comun, apoi să se descompună în factori polinomul $P(x)-Q(x)$.

62. Să se demonstreze că polinomul

$x^{3a}+x^{3b+1}+x^{3c+2}$ (a, b, c fiind numere întregi și pozitive) e divizibil prin x^2+x+1.

63. Să se determine polinomul

$$x^5+ax^4+Ax^3+Bx^2+Cx+D$$

astfel ca să fie divizibil cu (x^2-1) și cu x^2-4.

64. Să se determine a, b, c astfel ca polinomul

$x^4+3x^3+ax^2+bx+c$ să fie divizibil prin $(x^2+1)(x+2)$.

65. Să se arate că expresia

$E=1-a^{n+1}(1+a^m-a^{n+m+1})$ se divide cu $(1-a)^2$ și să se afle cîtul.

66. Polinomul $nx^{n+2}-(n+1)x^{n+1}+x$ se împarte cu $x-1$; să se determine cîtul.

67. Polinomul $x^{n+1}-(n+1)x+n$ este divizibil prin $(x-1)^2$; să se afle cîtul.

68. Să se dovedească că polinomul $(x-1)^{3n}+x^{3n}-2x+1$ este divizibil cu $x(x-1)\left(x-\frac{1}{2}\right)$.

69. Se dă polinomul

$$F(x)=(n-1)x^{n+1}-(n+1)x^n+(n+1)x-n+1.$$

Să se arate că acest polinom se împarte cu $(x-1)^3$ și să se afle cîtul.

70. Să se determine coeficienții A, B, C astfel ca polinomul

$P(x)=(x+1)^5+A(x+1)^3+Bx+C$ să se dividă cu $(x-1)^3$. Să se afle cîtul.

71. Să se arate că polinomul

$P(x)=(x+1)^6-6x(x+1)^4+32x^3$ se divide cu $(x-1)^4$ și să se afle cîtul.

72. Să se afle *c.m.m.d.c.* al polinoamelor

$$P(x)=7x^4-16x^3+18x^2+31x-10$$

$$Q(x)=2x^3-13x^2+31x-35.$$

Să se rezolve ecuațiile $P(x)=0$ și $Q(x)=0$.

73. Să se rezolve ecuația $\frac{6x-iy}{5+2i}=\frac{15}{8x+3iy}$; x și y numere reale.

74. Să se găsească valoarea următoarelor polinoame

a) $x^5-8x^{14}+5x^4-4x^2-10$ pentru $x=i$

b) $5x^2-4\sqrt{2}xy-y^2$ pentru $x=i\sqrt{8}$: $y=i$.

75. Să se calculeze

$A=\frac{(1+i)^n}{(1-i)^{n-6}}$, unde n este un număr întreg pozitiv.

76. Să se rezolve sistemul de ecuații

$$(2+3i)x+(3-2i)y=1+8i$$
$$(3-2i)x-(3i+6)y=8-5i.$$

77. Să se calculeze modulul următoarelor numere complexe

a) $4-3i$, *b)* $\frac{5+12i}{8-6i}$, *c)* $x+\left(\frac{x}{2}-1\right)i$,

d) $(ac-bd)+(ad+bc)i$, *e)* $\left(\frac{1}{2}-\frac{i}{3}\right)(3+2i)$.

78. Să se verifice identitatea

$$\{[(i^2+i)^2+i]^2+i\}^2=-2i.$$

79. Să se verifice identitatea

$$\{[[(i^2 + 1)^2 + i]^2 + i]^2 + i\}^2 = -1.$$

80. Să se arate că

$$\frac{\dfrac{1 + x}{1 + i\sqrt{x(2 + x)}} - \dfrac{i\sqrt{x}}{\sqrt{2 + x}}}{\dfrac{1 + x}{1 + i\sqrt{x(2 + x)}} + \dfrac{i\sqrt{x}}{\sqrt{2 + x}}} = 1 + x - i\sqrt{x(2 + x)}.$$

81. Să se arate că

$$\left(\sqrt{2 + \sqrt{3}} + i\sqrt{2 - \sqrt{3}}\right)^3 = \frac{8}{\sqrt{2}}(1 + i).$$

82. Să se arate că

$$\left(\sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{3}}} + i\sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{3}}}\right)^4 = 8(\sqrt{3} + i).$$

83. Să se verifice egalitatea

$$\left(-\frac{1 + i}{\sqrt[5]{4}}\right)^5 = 1 + i.$$

84. Să se demonstreze identitatea

$$\frac{(1 - x^2 + xi\sqrt{3})\cdot(1 - x^2 - xi\sqrt{3})}{1 - x^6} = \frac{1}{1 - x^2}.$$

85. Să se demonstreze identitatea

$$[(2a - b - c) + i(b - c)\sqrt{3}]^3 = [(2b - c - a) + i(c - a)\sqrt{3}]^3.$$

86. Să se pună sub formă trigonometrică

$$A = 1 + \cos\alpha - i\sin\alpha.$$

87. Să se pună sub formă trigonometrică

a) $1 + \cos\alpha + i\sin\alpha \qquad 0 \leqslant \alpha \leqslant \frac{\pi}{2}$,

b) $1 + i\,\mathrm{tg}\,\alpha \qquad 0 \leqslant \alpha \leqslant \frac{\pi}{2}$,

c) $1 + \sin\alpha + i\cos\alpha \qquad 0 \leqslant \alpha \leqslant \frac{\pi}{2}$,

d) $\dfrac{1 - i\,\mathrm{tg}\,\alpha}{1 + i\,\mathrm{tg}\,\alpha} \qquad 0 \leqslant \alpha \leqslant \frac{\pi}{2}$.

88. Să se simplifice $\dfrac{\cos d + i\sin d}{\cos d - i\sin d}$.

89. Să se calculeze

$$\frac{(1 + i\sqrt{3})(\cos\alpha + i\sin\alpha)}{2(1 + i)(\cos\alpha - i\sin\alpha)}.$$

90. Să se demonstreze că

$$a)\ (1 + i)^n = 2^{\frac{n}{2}}\left(\cos\frac{n\pi}{4} + i\sin\frac{n\pi}{4}\right),$$

unde n este un număr natural;

$$b)\ (\sqrt{3} - i)^n = 2^n\left(\cos\frac{n\pi}{6} - i\sin\frac{n\pi}{6}\right),$$

unde n e un număr natural.

91. Să se demonstreze că dacă $x + \dfrac{1}{x} = 2\cos\alpha$, atunci

$$x^n + \frac{1}{x^n} = 2\cos n\alpha \text{ și } x^n - \frac{1}{x^n} = \pm 2i\sin n\alpha.$$

92. Să se rezolve ecuația binomă

$$(3 - 4i)x^3 + 25 = 0.$$

93. Să se rezolve ecuația $x^5 = 1 + i$.

94. Să se rezolve ecuația $x^3 - 2x^2 - x + 2 = 0$, știind că suma a două rădăcini este egală cu zero.

95. Să se rezolve ecuația $12x^3 - 20x^2 - ax + 13 = 0$, știind că suma a două rădăcini este egală cu 2.

96. Se dă ecuația $x^3 - 19x^2 + 96x + m = 0$. Să se determine m așa fel ca o rădăcină să fie întreitul alteia.

97. Să se rezolve ecuația $x^3 - 4x^2 - 4x + 16 = 0$, știind că produsul a două rădăcini este egal cu rădăcina a treia luată cu semn schimbat.

98. Să se rezolve ecuația $x^3 - 2x^2 - 11x + a = 0$, știind că între rădăcini există relația: $x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0$.

99. Să se rezolve ecuația $x^3 + 4x^2 + 3x + 2 + \sqrt{2} = 0$, știind că o rădăcină este media armonică a celorlalte două.

100. Fiind dată ecuația

$$x^3 - (4 + 2a)\,x^2 + (8 + 9a)\,x - 12a = 0,$$

să se determine a, știind că între rădăcini avem relația $x_3 = x_1 + x_2$, și să se rezolve ecuația.

101. Să se determine λ, și să se rezolve ecuația $x^3 - 3x + \lambda = 0$, știind că rădăcinile ei satisfac relația

$$nx_1 + (n+1)\,x_2 + (n+2)\,x_3 = 0.$$

102. Să se determine a și să se rezolve ecuația

$$x^3 + ax^2 + 11x + a = 0,$$

știind că între rădăcinile ei există relația

$$x_1 + x_3 = x_2^2.$$

103. Să se determine λ astfel ca rădăcinile ecuației $8x^3 - 6x^2 + (\lambda^2 - 4)\,x + \lambda = 0$ să satisfacă relația

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} = 3.$$

104. Fie x_1, x_2, x_3 rădăcinile ecuației $x^3 + x - 2 = 0$. Să se arate că $x_1^5 + x_2^5 + x_3^5 + 10 = 0$.

105. Să se rezolve ecuația $x^3 + px^2 + qx + r = 0$, știind că pătratul unei rădăcini este egal cu suma pătratelor celorlalte două rădăcini, și să se afle relația de condiție.

106. Se consideră ecuația $f(x) = x^3 - 7x\cos^2 q + 6\cos 2q = 0$.

Să se determine q astfel ca una din rădăcinile ecuației să fie îndoitul alteia; în acest caz să se rezolve ecuația $f(x) = 0$.

107. Se dă ecuația $x^3 - 3x^2 - x + a = 0$; să se rezolve, știind că rădăcinile sînt în progresie aritmetică.

108. Să se determine m, astfel ca rădăcinile ecuației $x^3 - 9x^2 + mx - 24 = 0$ să fie în progresie aritmetică și să se rezolve ecuația în acest caz.

109. Să se determine λ și să se rezolve ecuația $x^3 - 19x^2 + \lambda x - 216 = 0$, știind că rădăcinile ei sînt în progresie geometrică.

110. Să se rezolve ecuația $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$, știind că are rădăcinile în progresie geometrică. Se cere relația de condiție.

Caz particular

$$a = -(\sqrt{2} + 3); \qquad b = \sqrt{2}\,(\sqrt{2} + 3).$$

111. Să se rezolve ecuația și să se determine valoarea lui c, știind că ecuația $8x^3 - 42x^2 + 63x + c = 0$ are rădăcinile în progresie geometrică.

112. Între ce limite trebuie cuprins raportul $\frac{b}{a}$, pentru ca ecuația reciprocă $ax^3 + bx^2 + bx + a = 0$ să aibă toate rădăcinile reale?

113. Să se determine m așa ca ecuația $x^4 - 8x^3 + 11x^2 + 10x + m = 0$ să aibă două rădăcini inverse.

114. Să se rezolve ecuația $4x^4 + 8x^3 - 79x^2 - 83x + 60 = 0$, știind că între rădăcini avem relația $x_1 + x_2 = x_3 + x_4$.

115. Să se rezolve ecuația $2x^4 - 30x^3 + 146x^2 - 258x + 140 = 0$, știind că diferența a două rădăcini este 1.

116. Să se rezolve ecuația $x^4 + 3x^3 - 7x^2 - 27x + a = 0$, știind că are două rădăcini egale în valoare absolută și de semne contrare.

117. Să se rezolve ecuația $2x^4 - 11x^3 + mx^2 + 44x - 20 = 0$ și să se determine m, știind că are două rădăcini egale în valoare absolută, dar de semne contrare.

118. Să se determine a și să se rezolve ecuația $x^4 - 10x^3 + 35x^2 - 50x + a = 0$, știind că rădăcinile sînt în progresie aritmetică.

119. Există ecuații reciproce de gradul IV care să aibă rădăcinile în progresie aritmetică?

120. Să se rezolve ecuația $x^4 + px^3 + 47x^2 - 72x + q = 0$, știind că primele trei rădăcini sînt în progresie aritmetică, iar a patra este egală cu suma primelor trei.

121. Care este forma generală a ecuației reciproce de gradul IV, avînd rădăcinile în progresie geometrică?

122. Se dă ecuația reciprocă de gradul IV

$$x^4 - (m + 1)x^3 + 2mx^2 - (m + 1)x + 1 = 0.$$

1) Să se rezolve; 2) să se determine valorile lui m, pentru ca toate rădăcinile să fie reale.

123. Care este condiția ca ecuația $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$, printr-o transformare $x = y + h$, să se poată pune sub forma unei ecuații binome.

124. Se dă ecuația $A_0x^4 + A_1x^3 + A_2x^2 + A_3x + A_4 = 0$. Să se scrie ecuația care să aibă rădăcinile de patru ori mai mari decît rădăcinile ecuației date.

125. Să se determine parametrul p astfel ca ecuația $x^4 - 3x^2 - px = 0$ să aibă o rădăcină dublă și apoi să se rezolve ecuația.

126. Să se rezolve ecuațiile
$x^3 - 2x^2 + x + a = 0$; $x^2 - 3x - a = 0$, știind că au o rădăcină comună.

127. Să se găsească rădăcinile comune ale ecuațiilor

$$P(x) = x^3 - 8x^2 + 17x - 10 = 0$$
$$Q(x) = x^4 - 8x^3 + 5x^2 + 9x + 10 = 0.$$

128. Să se rezolve ecuațiile

$$(x^2 + 2x + 2)^2 - x = 0; \quad (x^2 + 3x + 3)^2 - 4x = 0,$$

știind că admit două rădăcini comune.

129. Să se rezolve ecuațiile

1) $4x^3 - 21x^2 + 29x - 6 = 0$;
2) $x^3 - 3x^2 - x + 3 = 0$;
3) $2x^3 + x^2 - 5x + 2 = 0$;
4) $x^3 - 9x^2 + 23x - 15 = 0$;
5) $x^3 - 16x^2 + 43x + 60 = 0$;
6) $x^3 - 9x^2 + 26x - 24 = 0$;
7) $2x^3 - 5x^2 - x + 6 = 0$;
8) $x^3 + 5x^2 + 9x + 6 = 0$;
9) $2x^3 - 13x^2 + 17x + 12 = 0$;
10) $x^3 - 3x^2 - 13x + 15 = 0$.

130. Să se rezolve ecuația $x^3 + ax^2 + 5a^2x + 14a^3 = 0$.

131. Să se rezolve ecuația $x^4 - x^3 + x^2 + 2 = 0$, știind că admite rădăcina $1 + i$.

132. Să se determine coeficienții reali a și b, astfel ca ecuația $x^4 + ax^3 + bx^2 + 2x - 6 = 0$ să admită ca rădăcină pe $1 + i$. Să se rezolve ecuația obținută.

133. Să se rezolve ecuația $x^4 - 10x^3 + 26x^2 - 10x + 25 = 0$, știind că admite rădăcina $x = i$.

134. Să se rezolve $x^4 - 19x^2 + 28x - 10 = 0$, știind că are o rădăcină egală cu $2 - \sqrt{2}$.

135. Se dă ecuația $x^4 + ax^3 + 7x^2 + bx - 2 = 0$. Să se determine a și b și să se rezolve ecuația, știind că ea admite rădăcina $1 + \sqrt{2}$.

136. Să se rezolve ecuația $x^5 - 7x^4 + 12x^3 - 12x^2 + 11x - 5 = 0$, știind că admite o rădăcină egală cu i.

137. Să se rezolve ecuația $x^7 - x^5 + 3x^4 + 16x^3 - 16x + 48 = 0$, știind că admite rădăcina $x = \sqrt{2}\,(1 + i)$.

138. Să se rezolve ecuația

$$x^7 + x^6 + 8x^5 + 8x^4 - 11x^3 - 11x^2 - 18x - 18 = 0,$$

știind că are rădăcinile $x_1 = \sqrt{2}$ și $x_2 = 3i$.

139. Să se rezolve ecuația $2x^5 - 7x^4 + 2x^3 + 10x^2 - 4x - 3 = 0$, știind că admite rădăcina $1 + \sqrt{2}$.

140. Să se rezolve ecuațiile

1) $3x^4 - 10x^3 + 6x^2 - 10x + 3 = 0$;
2) $x^4 - 10x^3 + 35x^2 - 50x + 24 = 0$;
3) $3x^4 - 24x^3 + 66x^2 - 72x + 27 = 0$;
4) $x^4 - 8x^3 + 23x^2 - 28x + 12 = 0$;
5) $x^4 - x^3 - 9x^2 - 10x - 8 = 0$;
6) $x^4 - 6x^3 + 4x^2 + 3x + 10 = 0$;
7) $x^4 + 3x^3 - 15x^2 - 19x + 30 = 0$;
8) $x^4 - 12x^3 + 49x^2 - 78x + 40 = 0$;
9) $x^4 - 9x^3 + 19x^2 - 9x + 18 = 0$;
10) $x^4 - 5x^3 + 7x^2 - 5x + 6 = 0$.

141. Să se rezolve ecuația $210x^4 - 247x^3 + 101x^2 - 17x + 1 = 0$, știind că are rădăcini simple fracționare.

142. Să se rezolve ecuațiile

1) $x^5 - 6x^4 + 12x^3 - 12x^2 + 11x - 6 = 0$;

2) $2x^5 - 7x^4 + 2x^3 + 10x^2 - 4x - 3 = 0$;

3) $6x^5 - 23x^4 + 28x^3 - 13x^2 + 2x = 0$;

4) $6x^5 - 47x^4 + 132x^3 - 159x^2 + 76x - 12 = 0$;

5) $x^5 + 6x^4 - 3x^3 - 18x^2 - 4x - 24 = 0$;

6) $3x^5 - 13x^4 - 20x^3 + 44x^2 + 33x - 15 = 0$;

7) $x^5 - 6x^4 - 5x^3 + 30x^2 + 4x - 24 = 0$;

8) $x^5 - 2x^4 - 10x^3 + 10x^2 - 11x + 12 = 0$;

9) $x^6 - 3x^5 - 19x^4 + 43x^3 + 18x^2 - 40x = 0$;

10) $3x^5 - 4x^4 - 10x^3 + 2x^2 + 7x + 2 = 0$.

143. Să se rezolve ecuația

$$x^8 - 10x^6 - 3x^5 + 30x^4 + 24x^3 - 16x^2 - 48x - 32 = 0.$$

RĂSPUNSURI ȘI INDICAȚII LA EXERCIȚIILE PROPUSE

Capitolul I

ANALIZA COMBINATORIE

1. $A_9 = 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 = 15\,120$.

2. $P_5 - P_4 = 5! - 4! = 120 - 24 = 96$.

3. $C_{80}^3 \cdot C_3^1 = \dfrac{80 \cdot 79 \cdot 78}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3} \cdot \dfrac{3}{1} = 246\,480$.

4. $C_5^2 \cdot C_5^3 = \dfrac{5 \cdot 4}{1 \cdot 2} \cdot \dfrac{5 \cdot 4 \cdot 3}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 100$.

5. *Indicație*. Primului inginer i se pot repartiza 3 sonde în $C_9^3 = \dfrac{9 \cdot 8 \cdot 7}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 84$ de moduri. Celui de-al doilea inginer, la fiecare repartizare a primului îi corespund $C_6^3 = \dfrac{6 \cdot 5 \cdot 4}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 20$ de moduri. Deci pînă acum avem $C_9^3 \cdot C_6^3 = 84 \cdot 20 = 1\,680$ de moduri. Celui de-al treilea inginer, la o repartizare a primilor doi îi corespunde $C_3^3 = 1$ mod. În total avem $C_9^3 \cdot C_6^3 \cdot C_3^3 = 1\,680$ de moduri de repartizare.

6. a) $C_{n+1}^{k+1} = \dfrac{(n+1)n(n-1)\ldots(n-k+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots (k+1)}$;

b) $C_{n-k}^{k+1} = \dfrac{(n-k)(n-k-1)(n-k-2)\ldots(n-2k)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots (k+1)}$.

7. a) $\dfrac{A_n^5 + A_n^4}{A_n^3} = \dfrac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)+n(n-1)(n-2)(n-3)}{n(n-1)(n-2)} = (n-3)^2$;

$$b)\ \frac{A_{n+k}^{k+2}+A_{n+k}^{k+1}}{A_{n+k}^{k}}=$$

$$=\frac{(n+k)(n+k-1)\dots(n+1)n(n-1)+(n+k)(n+k-1)\dots(n+1)n}{(n+k)(n+k-1)\dots(n+1)}=n^2$$

9. $$a)\ \frac{P_{2n+1}}{A_{2n-1}^{k-1}\cdot P_{n-k}}=$$

$$=\frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot\dots(2n+1)}{(2n-1)(2n-2)\dots(2n-k+1)\cdot 1\cdot 2\cdot 3\dots(2n-k)}=\frac{(2n+1)!}{(2n-1)!}=$$

$$=2n(2n+1);$$

$$b)\ \frac{A_{n-1}^{k-1}\cdot P_{n-k}}{10P_{n-1}}=\frac{(n-1)(n-2)\dots(n-k+1)\cdot 1\cdot 2\cdot 3\dots(n-k)}{10\cdot 1\cdot 2\cdot 3\cdot\dots(n-1)}=$$

$$=\frac{(n-1)!}{10(n-1)!}=\frac{1}{10}.$$

10. $P_4=4!=24$. **11.** $P_{10}=10!=3\,628\,800$. **12.** $P_6=6!=720$.

13. $C_{12}^{2}=\frac{12\cdot 11}{1\cdot 2}=66$. **14.** $A_{30}^{2}=30\cdot 29=870$.

15. $C_{12}^{5}=\frac{12\cdot 11\cdot 10\cdot 9\cdot 8}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}=792$ de brigăzi.

16. $C_{15}^{3}=\frac{15\cdot 14\cdot 13}{1\cdot 2\cdot 3}=455$.

17. $C_5^3\cdot C_8^5$. **18.** $C_{12}^3\cdot C_9^4\cdot C_5^5$ sau $C_{12}^4\cdot C_8^3\cdot C_5^5$ sau $C_{12}^3\cdot C_9^5\cdot C_4^4$ sau $C_{12}^5\cdot C_7^3\cdot C_4^4$ sau $C_{12}^4\cdot C_8^5\cdot C_3^3$ sau $C_{12}^5\cdot C_7^4\cdot C_3^3$.

Sub oricare formă, rezultatul va fi același; exprimat în factoriale ne dă $\frac{12!}{3!\,4!\,5!}$.

19. *Indicație*. Se pot scoate 2, 3, 4, 5 sau 6 cartoane galbene. Dacă se scot 2 galbene, restul de 4 vor fi albe, și aceasta se poate face în $C_6^2\cdot C_{10}^4$ feluri.
La 3 galbene vom avea 3 albe în $C_6^3\cdot C_{10}^3$ feluri.
La 4 galbene vom avea 2 albe în $C_6^4\cdot C_{10}^2$ feluri.
La 5 galbene vom avea 1 alb în $C_6^5\cdot C_{10}^1$ feluri.
Iar 6 galbene se pot scoate într-un singur fel.

În total vom avea suma

$$C_6^2\cdot C_{10}^4+C_6^3\cdot C_{10}^3+C_6^4\cdot C_{10}^2+C_6^5\cdot C_{10}^1+1=3\,286 \text{ feluri.}$$

21. $$P_5-P_4=5!-4!=120-24=96;$$
$$P_5-P_3=5!-3!=120-6=114;$$
$$P_5-P_2=5!-2!=120-2=118.$$

22. $C_9^4=\frac{9\cdot 8\cdot 7\cdot 6}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}=126$; $C_8^4=\frac{8\cdot 7\cdot 6\cdot 5}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}=70$.

23. $A_{11}^5=11\cdot 10\cdot 9\cdot 8\cdot 7=55\,440$; $A_{10}^5=10\cdot 9\cdot 8\cdot 7\cdot 6=30\,240$.

24. C_{n-p}^{k-p}. **25.** $(k-p+1)(k-p)\dots k\,A_{n-p}^{k-p}$. **26.** $12!$; A_{12}^4; C_{12}^4.

27. *a)* A_{n-1}^{k-1}; *b)* $k\,A_{n+1}^{k-1}$; *c)* $2!\,A_{n-2}^{k-2}$; *d)* $k(k-1)\,A_{n-2}^{k-2}$; *e)* $p!\,A_{n-p}^{k-p}$;

f) $(k-p+1)(k-p+2)\dots kA_{n-p}^{k-p}$.

28. *R*. Vom presupune o persoană fixă și vom permuta celelalte persoane: găsim $P_{n-1}=(n-1)!$. **29.** *a)* 7; *b)* 9. **30.** *a)* 15; *b)* 8.

31. 27. **32.** *a)* 4; *b)* 17. **33.** $C_6^2=\frac{6\cdot 5}{1\cdot 2}=15$. **35.** *b)* 6; 3. **36.** $n=8$.

37. *Indicație*. Trebuie să avem $A_n^k=p\cdot A_n^{k-2}$ (1), care ne dă $n(n-1)(n-2)\dots(n-k+3)(n-k+2)(n-k+1)=p\cdot n(n-1)(n-2)\dots$ $\dots(n-k+3)$ și după simplificare ne rămîne

$$(n-k+2)(n-k+1)=p.$$
$$[n-(k-2)][n-(k-1)]-p=0$$
$$n^2-(2k-3)n+(k^2-3k+2-p)=0. \qquad (2)$$

Problema e posibilă numai în cazul cînd discriminantul ecuației (2) e pătrat perfect.

$$\Delta=b^2-4ac=(2k-3)^2-4(k^2-3k+2-p)=$$
$$=4k^2-12k+9-4k^2+12k-8+4p=4p+1 \qquad (3)$$

Deci trebuie ca $4p+1$ să fie un pătrat perfect. Întrucît $4p+1$ este fără soț, el trebuie să aibă forma $4p+1=(2M+1)^2$ (4) unde M este un întreg oarecare.
Găsim

$$4p+1=4M^2+4M+1;\ 4p=4M(M+1);\ p=M(M+1) \qquad (5)$$

deci *problema e posibilă* dacă *numărul p e produsul a două numere întregi consecutive*.
În acest caz, rezolvînd ecuația (2) și ținînd seama de (4), avem

$$n=\frac{(2k-3)\pm\sqrt{4p+1}}{2}=\frac{(2k-3)\pm(2M+1)}{2},$$

care ne dă rădăcinile

$$n_1=k+M-1;\quad n_2=k-M-2,$$

dintre care numai *prima convine problemei*; într-adevăr, luînd pe n_2 am avea

$$A_{n_2}^{k-2}=A_{k-M-2}^{k-2},$$

cu indicele de jos mai mic decît cel de sus.
38. *Indicație*. Pentru *a)* plecăm tot de la *formula de descompunere a combinărilor:*

$$C_n^k=C_{n-1}^k+C_{n-1}^{k-1}$$

și descompunem fiecare combinare din dreapta tot în două combinări.

Pentru *b*) plecăm de la *a*) și-i aplicăm în partea dreaptă, fiecăreia din cele trei combinări, din nou aceeași formulă de descompunere.

39. *R*. Dacă cele *p* puncte ar fi puncte oarecare în spațiu — numărul planelor ar fi C_p^3. Cum însă *n* puncte sînt în același plan, deci prin *n* puncte trece un singur plan, din numărul planelor trebuie să scădem $C_n^3 - 1$, deci numărul total de plane cerute de problemă este: $C_p^3 - C_n^3 + 1$. **40.** *R*. n.

41. *R*. *a*) În cazul că subcomitetul conține două femei, atunci numărul subcomitetelor este dat de $C_7^3 \cdot C_4^2 = 210$ — căci este numărul perechilor formate de grupe distincte de trei bărbați cu grupe distincte de două femei. *b*) În cazul cînd comitetul conține cel puțin două femei, atunci numărul subcomitetului este dat de

$$C_7^3 C_4^2 + C_7^2 C_4^3 + C_7^1 C_4^4 = 301.$$

Binomul lui Newton

1. $(x^2 - a)^6 = x^{12} - 6ax^{10} + 15a^2x^8 - 20a^3x^6 + 15\,a^4x^4 - 6a^5x^2 + a^6$; $(a + \sqrt{b})^9 = (a^9 + 36a^7b + 126\,a^5b^2 + 84\,a^3b^3 + 9ab^4) + (9\,a^8 + 84\,a^6b + 126\,a^4b^2 + 36\,a^2b^3 + b^4)\sqrt{b}$

2. $(\sqrt{a} + \sqrt{b})^6 = a^3 + 6a^2\sqrt{a}\cdot\sqrt{b} + 15\,a^2b + 20\,a\sqrt{a}\cdot b\sqrt{b} + 15\,ab^2 + 6\sqrt{a}\cdot b^2\sqrt{b} + b^3 = (a^3 + 15\,a^2b + 15ab^2 + b^3) + (6a^2 + 20\,ab + 6\,b^2)\sqrt{ab}$; $(\sqrt{3x} + \sqrt{2y})^7 = (27\,x^3 + 378\,x^2y + 420\,xy^2 + 56y^3)\sqrt{3x} + (189x^3 + 630\,x^2y + 252\,xy^2 + 8y^3)\sqrt{2y}$.

3. $\left(\sqrt{\dfrac{a}{b}} + \sqrt{\dfrac{b}{a}}\right)^6 = \dfrac{(a+b)^6}{a^3b^3}$.

$$(2\sqrt[3]{x} - 4\sqrt{x})^4 = 16x\sqrt[3]{x} - 128\,x\sqrt{x} + 384\,x\sqrt[3]{x^2} - 512\,x\sqrt[3]{x}\cdot\sqrt{x} + 256x^2.$$

4.

$s_2 = 2\,(a^2 + b^2)$ $d_2 = 4\,ab$	$s_3 = 2\,(a^3 + 3ab^2) = 2a\,(a^2 + 3b^2)$ $d_3 = 2\,(3a^2\,b + b^3) = 2\,b\,(3a^2 + b^2)$

$$s_4 = 2\,(a^4 + 6a^2b^2 + b^4)$$
$$d_4 = 2\,(4a^3b + 4ab^3) = 8ab\,(a^2 + b^2).$$

În general avem

$$s_n = 2\left(a^n + C_n^2\,a^{n-2}\,b^2 + C_n^4\,a^{n-4}\,b^4 + \ldots\right)$$
$$d_n = 2\left(C_n^1\,a^{n-1}\,b + C_n^3\,a^{n-3}\,b^3 + C_n^5\,a^{n-5}\,b^5 + \ldots\right).$$

La s_n avem numai termeni care conțin pe *b* la o **putere** ***cu soț***, iar la d_n la o putere *fără soț*.

5. $99^7 = (100-1)^7 = (10^2 - 1)^7 = 10^{14} - 7\cdot10^{12} + 21\cdot10^{10} - 35\cdot10^8 + 35\cdot10^6 - 21\cdot10^4 + 7\cdot10^2 - 1 =$

$$= \left.\begin{array}{r} 100\ 000\ 000\ 000\ 000 \\ 210\ 000\ 000\ 000 \\ 35\ 000\ 000 \\ 700 \end{array}\right| - \left|\begin{array}{r} 7\ 000\ 000\ 000\ 000 \\ 3\ 500\ 000\ 000 \\ 2\ 0\ 000 \\ 1 \end{array}\right. =$$

$$\begin{array}{r} = 100\ 210\ 035\ 000\ 700\ - \\ 7\ 003\ 500\ 210\ 001 \\ \hline 93\ 206\ 534\ 790\ 699. \end{array}$$

$102^5 = (100 + 2)^5 = (10^2 + 2)^5 = 10^{10} + 5\cdot10^8\cdot2 + 10\cdot10^6\cdot4 + 10\cdot10^4\cdot8 + 5\cdot10^2\cdot16 + 32 = 10^{10} + 10^9 + 4\cdot10^7 + 8\cdot10^5 + 8\cdot10^3 + 32 = 11\ 040\ 808\ 032$.

6. *a*) $945\,a^4$; *b*) $1\,287\,a^{16}b^{15}$: *c*) $70\,a^2b^2$

7. *a*) $1\,716\,a^3\,b^2\sqrt{a}$ și $-1\,716\,a^3b^2\sqrt[3]{b}$;

b) $-C_{19}^9\,2^9\,a^3\sqrt[3]{a}\cdot x^{13}\sqrt{x}$ și $C_{19}^9\,2^{10}\,a^3\,x^{15}$;

c) $\dfrac{40}{9}$.

8. *a*) $36x^7\,y^2$; *b*) $1\,287\,a^7$; **9.** *a*) $286\,b^{-7}\,x^4$; *b*) $18\,564\,b^6x^{-1}$.

10. *a*) C_{17}^8; *b*) C_{15}^6. **11.** *R*. Termenul general are forma

$$T_{k+1} = C_{2n+1}^k\,x^{2n+1-k}\cdot\left(\frac{1}{x}\right)^k = C_{2n+1}^k\,\frac{x^{2n+1-k}}{x^k},$$

deci trebuie să avem $2n - 2k + 1 = 2r + 1$, de unde găsim

$$n - k = r \text{ și } k = n - r.$$

Coeficientul căutat este C_{2n+1}^{n-r}.

12. $k = 9$. **13.** Rangurile sînt 9, 10, 11 sau 14, 15, 16.

14. $35x^5$. **15.** $70x^3$. **16.** 4 și 7. **17.** $n = 4$; $T_3 = 6\sqrt[3]{x}$.

18. 2; 3; 5. **19.** $x = 1$. **20.** $x_1 = 2$. **21.** -11.

22. $-C_4^3 + 4\,C_8^2 + 3\,C_{12}^1 = 144$. **23.** $C_{16}^4 = 1\,820$. **24.** $C_{n+1}^{k+1}\,x^k$.

25. *Indicație*. Se vor egala coeficienții acelorași puteri ale lui *x* din dezvoltarea identității

$$(x + 1)^m\cdot(x + 1)^n = (x + 1)^{m+n}.$$

26. *Indicație*. Scriem identitatea sub forma

$$\sum_{k=0}^{n} C_n^k(x + a)^{n-k}\,b^k = \sum_{k=0}^{n} C_n^k(x + b)^{n-k}\,a^k.$$

Se observă că este de ajuns să aplicăm formula binomului lui Newton puterii $(x + a + b)^n$, o dată în raport cu $(x + a)$ și a doua oară în raport cu $(x + b)$, pentru a avea identitatea de mai sus.

27. *Indicație.* Vom lua $a_1 = C_n^k$, $a_2 = C_n^{k+1}$, $a_3 = C_n^{k+2}$, $a_4 = C_n^{k+3}$.

Identitatea de demonstrat se va pune sub forma

$$\frac{1}{1 + \frac{a_2}{a_1}} + \frac{1}{1 + \frac{a_4}{a_3}} = \frac{2}{1 + \frac{a_3}{a_2}}$$

și se vor înlocui rapoartele $\frac{a_2}{a_1}$, $\frac{a_4}{a_3}$ și $\frac{a_3}{a_2}$ cu valorile lor.

28. *a) Indicație.* Luăm expresia următoare sub formă de sumă

$$S = (1 + x)^n + (1 + x)^{n+1} + (1 + x)^{n+2} + \ldots + (1 + x)^{n+k} \qquad (1)$$

care se mai poate scrie

$$S = (1 + x)^n[1 + (1 + x) + (1 + x)^2 + \ldots + (1 + x)^k]$$

$$S = (1 + x)^n \cdot \frac{(1 + x)^{k+1} - 1}{x}$$

sau încă

$$S = \frac{1}{x}[(1 + x)^{n+k+1} - (1 + x)^n]. \qquad (2)$$

Scriind coeficientul lui x^{n+1} în cele două expresii ale lui S din (1) și (2), găsim identitatea propusă.

b) Indicație. Acum vom lua expresia următoare, tot sub forma unei sume

$$S' = x^n (1 + x)^n - x^{n-1} (1 + x)^n + x^{n-2} (1 + x)^n + \ldots + + (-1)^k x^{n-k} (1 + x)^n, \qquad (1')$$

care se mai poate scrie

$$S' = (1 + x)^n [x^n - x^{n-1} + x^{n-2} - \ldots + (-1)^k x^{n-k}]$$

$$S' = (1 + x)^{n-1} [x^n - x^{n-1} + x^{n-2} - \ldots + (-1)^k x^{n-k}](x + 1)$$

$$S' = (1 + x)^{n-1} [x^{n+1} + (-1)^k x^{n-k}]. \qquad (2')$$

Scriind acum coeficientul lui x^n în cele două expresii ale lui S' din (1′) și (2′), vom găsi identitatea propusă.

29. *a)* $10\ x^2$; *b)* 625; 7 000; 7 000; 120; 16.

30. *Indicație.* Trebuie să avem

$$T_9 < T_{10} > T_{11},$$

dar $T_9 = C_m^8\, 3^{m-8}\, m^8$; $T_{10} = C_m^9\, 3^{m-9}\, m^9$; $T_{11} = C_m^{10}\, 3^{m-10} m^{10}$;

avem deci inegalitatea dublă

$$C_m^8\, 3^{m-8}\, m^8 < C_m^9\, 3^{m-9}\, m^9 > C_m^{10}\, 3^{m-10} m^{10}.$$

Vom discuta cele două inecuații separat.

$$C_m^9\, 3^{m-9}\, m^9 > C_m^8\, 3^{m-8}\, m^8.$$

Făcînd toate calculele, obținem inecuația

$$m^2 - 8m - 27 > 0.$$

Ecuația $m^2 - 8m - 27 = 0$ are rădăcinile

$$m = 4 \pm \sqrt{16 + 27} = 4 \pm \sqrt{43},$$

adică:

$$m_1 = 4 - \sqrt{43}$$
$$m_2 = 4 + \sqrt{43}$$

A doua inecuație este

$$C_m^9\, 3^{m-9}\, m^9 > C_m^{10}\, 3^{m-10} m^{10},$$

de unde obținem $\quad m^2 - 9m - 30 < 0.$

Ecuația $m^2 - 9m - 30 = 0$ are rădăcinile

$$m = \frac{9 \pm \sqrt{81 + 120}}{2} = \frac{9 \pm \sqrt{201}}{2},$$

adică: $\quad m_3 = \frac{9 - \sqrt{201}}{2} \qquad m_4 = \frac{9 + \sqrt{201}}{2}.$

Pentru a putea face tabloul de discuție pentru ambele inecuații trebuie să calculăm mai întîi valorile aproximative ale celor patru rădăcini.

Întrucît $\quad \sqrt{43} \approx 6{,}56, \quad \sqrt{201} \approx 14{,}14$

avem

$$m_1 = 4 - \sqrt{43} \approx 4 - 6{,}56 = -2{,}56$$

$$m_2 = 4 + \sqrt{43} \approx 4 + 6{,}56 = 10{,}56$$

$$m_3 = \frac{9 - \sqrt{201}}{2} \approx \frac{9 - 14{,}14}{2} = \frac{-5{,}14}{2} = -2{,}57$$

$$m_4 = \frac{9 + \sqrt{201}}{2} \approx \frac{9 + 14{,}14}{2} = \frac{23{,}14}{2} = 11{,}57.$$

Deci ordinea mărimii rădăcinilor este

$$-2{,}57 < -2{,}56 < 10{,}56 < 11{,}57$$

sau $\quad m_3 < m_1 < m_2 < m_4$

sau încă $\quad \frac{9 - \sqrt{201}}{2} < 4 - \sqrt{43} < 4 + \sqrt{43} < \frac{9 + \sqrt{201}}{2}.$

Cele două inecuații sînt:

$$E_1 = m^2 - 8m - 27 > 0.$$
$$E_2 = m^2 - 9m - 30 < 0.$$

Expresiile egale cu 0 au rădăcinile

m_1 şi m_2, respectiv m_3 şi m_4.

Facem tabloul general de discuţie

m	$-\infty$	$\overset{m_3}{\dfrac{9-\sqrt{201}}{2}}$ $\approx -2{,}57$	$\overset{m_1}{4-\sqrt{43}}$ $\approx -2{,}56$	$\overset{m_2}{4+\sqrt{43}}$ $\approx 10{,}56$	$\overset{m_4}{\dfrac{9+\sqrt{201}}{2}}$ $\approx 11{,}57$	$+\infty$
E_1	$+ + + + + + 0 - - - - 0 \quad + + + +$					
E	$+ + 0 - - \quad - - - - - - - - - - \quad 0 + +$					

Intervalele în care avem în acelaşi timp $E_1 > 0$ şi $E_2 < 0$ sînt între m_3 şi m_1, pe urmă între m_2 şi m_4.

Cum m trebuie să fie număr *întreg şi pozitiv*, singura valoare acceptabilă este $m = 11$.

31. *Indicaţie.* Se va pune expresia sub forma

$$\left[1 + \left(x + \frac{2}{x}\right)\right]^6.$$

Se găseşte

$$1 + C_6^2 \cdot C_2^1 \cdot 2 + C_6^4 \cdot C_4^2 \cdot 2^2 + C_6^6 \cdot C_6^3 \cdot 2^3 = 1 + 60 + 360 + 160 = 581.$$

32. $E(a, b) = 7ab(a + b)(a^2 + ab + b^2)^2$. **33.** $E = 2$. **34.** $E = \dfrac{2n+7}{n+2}$.

35. $F = \dfrac{3n}{4(2n+1)}$. **36.** *Indicaţie.* Luăm identitatea $(x + 1)^{k+1} =$

$$= x^{k+1} + (k+1)\, x^k + \frac{(k+1)\,k}{1\cdot 2}\, x^{k-1} + \frac{(k+1)k(k-1)}{1\cdot 2\cdot 3}\, x^{k-2} + \ldots + (k+1)\, x + 1.$$

Dînd în această identitate lui x, rînd pe rînd valorile $1, 2, 3, \ldots, n$ şi adunînd toate relaţiile obţinute, căpătăm formula de mai sus.

37. *Indicaţie.* Dacă pe latura bazei stivei se află n cutii, atunci pe întreaga bază se află n^2 cutii. Pe rîndul imediat superior avem $(n-1)^2$ cutii, apoi $(n-2)^2$ etc.

Atunci în stiva întreagă avem

$$S_2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \text{ cutii de conserve.}$$

Aplicaţie numerică. În cele 6 stive vom avea

$$S = \frac{5\cdot 6\cdot 11}{6} + \frac{6\cdot 7\cdot 13}{6} + \frac{7\cdot 8\cdot 15}{6} + \frac{8\cdot 9\cdot 17}{6} + \frac{9\cdot 10\cdot 19}{6} + \frac{10\cdot 11\cdot 21}{6} = 55 + 91 + 140 + 204 + 285 + 385 = 1\,160 \text{ cutii.}$$

Metoda inducţiei matematice

7. $S_1 = 1\cdot 1! = 1$; $S_2 = 1\cdot 1! + 2\cdot 2! = 5$; $S_3 = 1\cdot 1! + 2\cdot 2! + 3\cdot 3! = 23$;
$S_4 = 1\cdot 1! + 2\cdot 2! + 3\cdot 3! + 4\cdot 4! = 119$.

Examinînd aceste rezultate, se observă că avem $S_1 = 2! - 1$; $S_2 = 3! - 1$; $S_3 = 4! - 1$; $S_4 = 5! - 1$.

Atunci putem să enunţăm ipoteza că

$$\boxed{S_n = (n+1)! - 1}$$

Etapa de verificare am făcut-o deja, rămîne deci să efectuăm etapa II.

Fie

$$S_k = 1\cdot 1! + 2\cdot 2! + \ldots + k\cdot k! = (k+1)! - 1.$$

Vom arăta că

$$S_{k+1} = 1\cdot 1! + 2\cdot 2! + \ldots + k\cdot k! + (k+1)\cdot(k+1)! = (k+2)! - 1.$$

În adevăr, avem

$$S_{k+1} = S_k + (k+1)\cdot(k+1)! = [(k+1)! - 1] + (k+1)\cdot(k+1)! = (k+1)!\,[1 + (k+1)] - 1 = (k+1)!\,(k+2) - 1 = (k+2)! - 1$$

10. *Indicaţie.* Să notăm membrul din stînga al inegalităţii cu S_n.

1° $S_2 = \dfrac{7}{12} = \dfrac{14}{24} > \dfrac{13}{24}$, prin urmare, pentru $n = 2$ inegalitatea este adevărată.

2° Fie $S_k > \dfrac{13}{24}$ pentru un anumit k.

Să demonstrăm că în acest caz şi $S_{k+1} > \dfrac{13}{24}$. Avem

$$S_k = \frac{1}{k+1} + \frac{1}{k+2} + \ldots + \frac{1}{2k},$$

$$S_{k+1} = \frac{1}{k+2} + \frac{1}{k+3} + \ldots + \frac{1}{2k} + \frac{1}{2k+1} + \frac{1}{2k+2}.$$

Comparînd pe S_k şi S_{k+1}, avem

$$S_{k+1} - S_k = \frac{1}{2k+1} + \frac{1}{2k+2} - \frac{1}{k+1} = \frac{1}{2k+1} + \frac{1}{2(k+1)} - \frac{1}{k+1} =$$
$$= \frac{2(k+1) + 2k + 1 - 4k - 2}{2(k+1)(2k+1)} = \frac{1}{2(k+1)(2k+1)}.$$

Pentru orice număr natural k, membrul din dreapta al ultimei egalităţi, adică $\frac{1}{2(k+1)(2k+1)}$ este pozitiv.

Deci $S_{k+1} > S_k$.

Însă $S_k > \frac{13}{24}$ deci şi $S_{k+1} > \frac{13}{24}$.

11. Etapa I. $(a+b)^1 = a^1 + C_1^1 a^0 b = a + b$;

$(a+b)^2 = a^2 + C_2^1 ab + C_2^2 b^2 = a^2 + 2ab + b^2$.

Etapa II. Va trebui să arătăm că pentru $(a+b)^{n+1}$ vom avea

$$\boxed{\begin{aligned}(a+b)^{n+1} &= a^{n+1} + C_{n+1}^1 a^n b + C_{n+1}^2 a^{n-1} b^2 + C_{n+1}^3 a^{n-2} b^3 + \ldots + \\ &+ C_{n+1}^{k-1} a^{n-k+2} b^{k-1} + C_{n+1}^k a^{n-k+1} b^k + C_{n+1}^{k+1} a^{n-k} b^{k+1} + \ldots + \\ &+ C_{n+1}^n ab^n + C_{n+1}^{n+1} b^{n+1}.\end{aligned}}$$

Dar $(a+b)^{n+1} = (a+b)^n (a+b)$, deci vom înmulţi pe $(a+b)^n$ cu $(a+b)$ şi vom găsi

$$\left(a^n + C_n^1 a^{n-1} b + C_n^2 a^{n-2} b^2 + C_n^3 a^{n-3} b^3 + \ldots + C_n^{k-1} a^{n-k+1} b^{k-1} + \right.$$
$$\left. + C_n^k a^{n-k} b^k + C_n^{k+1} a^{n-k-1} b^{k+1} + \ldots + C_n^{n-1} ab^{n-1} + C_n^n b^n\right)(a+b)$$

$$\boxed{\begin{aligned}(a+b)^{n+1} &= a^{n+1} + C_n^1 a^n b + C_n^2 a^{n-1} b^2 + C_n^3 a^{n-2} b^3 + \ldots + \\ &+ C_n^{k-1} a^{n-k+2} b^{k-1} + C_n^k a^{n-k+1} b^k + C_n^{k+1} a^{n-k} b^{k+1} + \ldots + \\ &+ C_n^{n-1} a^2 b^{n-1} + C_n^n ab^n + a^n b + C_n^1 a^{n-1} b^2 + C_n^2 a^{n-2} b^3 + \\ &+ \ldots + C^{k-1} a^{n-k+1} b^k + C_n^k a^{n-k} b^{k+1} + \ldots + C_n^{n-1} ab^n + C_n^n b^{n+1}\end{aligned}}$$

Adunînd şi grupînd termenii asemenea, avem

$$(a+b)^{n+1} = a^{n+1} + \left(C_n^1 + 1\right) a^n b + \left(C_n^2 + C_n^1\right) a^{n-1} b^2 + \left(C_n^3 + \right.$$
$$\left. + C_n^2\right) a^{n-k} b^3 + \ldots + \left(C_n^k + C_n^{k-1}\right) a^{n-k+1} b^k + \left(C_n^{k+1} + \right.$$
$$\left. + C_n^k\right) a^{n-k} b^{k+1} + \ldots + \left(C_n^n + C_n^{n-1}\right) ab^n + C_n^n b^{n+1}.$$

Dar, în baza formulei de descompunere a combinărilor, putem scrie

$$C_n^1 + 1 = C_n^1 + C_n^0 = C_{n+1}^1 \text{ căci: } C_{n+1}^k = C_n^k + C_n^{k-1}$$
$$C_n^2 + C_n^1 = C_{n+1}^2$$
$$C_n^3 + C_n^2 = C_{n+1}^3$$
$$C_n^k + C_n^{k-1} = C_{n+1}^k$$
$$C_n^{k+1} + C_n^k = C_{n+1}^{k+1}$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$C_n^n + C_n^{n-1} = C_{n+1}^n \qquad \text{şi avem: } C_n^n = C_{n+1}^{n+1},$$

deci

$$(a+b)^{n+1} = a^{n+1} + C_{n+1}^1 a^n b + C_{n+1}^2 a^{n-1} b^2 + C_{n+1}^3 a^{n-2} b^3 + \ldots +$$
$$+ C_{n+1}^k a^{n-k+1} b^k + C_{n+1}^{k+1} a^{n-k} b^{k+1} + \ldots + C_{n+1}^n ab^n + C_{n+1}^{n+1} b^{n+1}.$$

Deci am demonstrat că *formula binomului lui Newton* pentru $(a+b)^n$ este valabilă pentru orice n.

12. Etapa I. Pentru $n = 1$ avem $a_1^2 \cdot b_1^2 - (a_1 b_1)^2 = 0$, deci relaţia este verificată.

Etapa II. Va trebui să arătăm că dacă relaţia este verificată pentru n, ea este verificată şi pentru $n + 1$.

$$E(n+1) = \left(a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2 + a_{n+1}^2\right)\left(b_1^2 + b_2^2 + \ldots + b_n^2 + b_{n+1}^2\right) -$$
$$- (a_1 b_1 + a_2 b_2 + \ldots + a_n b_n + a_{n+1} b_{n+1})^2 \geqslant 0.$$

Dar putem scrie

$$E(n+1) = \left(a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2\right)\left(b_1^2 + b_2^2 + \ldots + b_n^2\right) + a_{n+1}^2 \left(b_1^2 +\right.$$
$$\left. + b_2^2 + \ldots + b_n^2\right) + b_{n+1}^2\left(a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2\right) + a_{n+1}^2\, b_{n+1}^2 - \left(a_1 b_1 +\right.$$
$$\left. + a_2 b_2 + \ldots + a_n b_n\right)^2 - 2a_{n+1} b_{n+1}\left(a_1 b_1 + a_2 b_2 + \ldots + a_n b_n\right) - a_{n+1}^2 b_{n+1}^2.$$
$$E(n+1) = \left[\left(a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2\right)\left(b_1^2 + b_2^2 + \ldots + b_n^2\right) - \left(a_1 b_1 +\right.\right.$$
$$\left.\left. + a_2 b_2 + \ldots + a_n b_n\right)^2\right] + \left[a_{n+1}^2\left(b_1^2 + b_2^2 + \ldots + b_n^2\right) + b_{n+1}^2\left(a_1^2 +\right.\right.$$
$$\left.\left. + a_2^2 + \ldots + a_n^2\right) - 2a_{n+1}\, b_{n+1}\left(a_1 b_1 + a_2 b_2 + \ldots + a_n b_n\right)\right].$$

Observăm însă că expresia din prima paranteză mare este tocmai $E(n)$, iar cea din a doua paranteză mare se poate scrie ca o sumă de pătrate, aşa că avem

$$E(n+1) = E(n) + \left[\left(a_1 b_{n+1} - a_{n+1} b_1\right)^2 + \left(a_2 b_{n+1} - a_{n+1} b_2\right)^2 +\right.$$
$$\left. + \ldots + \left(a_n b_{n+1} - a_{n+1} b_n\right)^2\right].$$

Întrucît despre $E(n)$ s-a presupus că este $\geqslant 0$, iar expresia din paranteza mare fiind o sumă de pătrate este tot pozitivă, rezultă că vom avea cu atît mai mult și

$$E(n+1) \geqslant 0,$$

deci am demonstrat că inegalitatea lui Buneakovski este adevărată pentru orice număr n întreg și pozitiv.

Capitolul II

DIVIZIBILITATEA NUMERELOR

5. *Indicație.* Notînd cifra zecilor cu z și cifra unităților cu u, putem scrie

$$N = 100\,a + (10\,z + u) = m\,4 + (10\,z + u);$$

însă

$$10z + u = (8z + 2z) + u = 8z + (2z + u) = m\,4 + (2z + u),$$

deci trebuie ca $2z+u$ să fie divizibil cu 4.

6. *Indicație.* Se va proceda în mod analog ca în problema precedentă.

7. *Indicație.* Un număr care nu e divizibil cu 3 poate fi de forma $N = m3 \pm 1$.

Ridicînd la pătrat, avem

$$N^2 = (m3 \pm 1)^2 = M3 + 1.$$

8. *Indicație.* Se va observa că un număr nedivizibil cu 5 poate avea una din formele

$$m5 \pm 1 \text{ sau } m5 \pm 2.$$

9. *Indicație.* Un număr nedivizibil cu 7 poate avea una din formele

$$m7 \pm 1;\ m7 \pm 2;\ m7 \pm 3.$$

10. *Indicație.* După problema 8 avem

$$a^2 = m5 \pm 1, \text{ de unde } a^4 = m5 + 1.$$

Atunci, dacă A și B sînt două numere nedivizibile prin 5, avem

$$\left.\begin{matrix} A^4 = m5 + 1 \\ B^4 = m5 + 1 \end{matrix}\right\} \text{ deci } A^4 - B^4 = m5.$$

11. *Indicație.* După problema 9, avem

$$a^3 = m7 \pm 1 \text{ de unde } a^6 = m7 + 1.$$

Atunci, considerînd două numere A și B nedivizibile prin 7, avem

$$\left.\begin{matrix} A^6 = m7 + 1 \\ B^6 = m7 + 1 \end{matrix}\right\} \text{ deci } A^6 - B^6 = m7.$$

12. *Indicație.* Se înlocuiește pe rînd n cu $M3$, $M3 + 1$, $M3 - 1$ și se arată că totdeauna din $E = n\,(2n^2 + 1)$, unul din factori, n sau $2n^2 + 1$ devine $M3$.

13. *Indicație.* Punem $n = 2n' + 1$, $k = 2k' + 1$. Expresia devine $E = 4\,[n'\,(n' + 1) + k'(k' + 1)]$; expresia din paranteza pătrată fiind $M2$, avem $E = M8$.

14. *Indicație.* Numărul n fiind cu soț, putem pune $n = 2k$ și atunci avem

$$E_1 = n\,(n^2 + 4) = 2k\,(4k^2 + 4) = 8k\,(k^2 + 1) = \text{multiplu de } 8;$$
$$E_2 = n\,(n^2 - 4) = 2k\,(4k^2 - 4) = 8k\,(k^2 - 1) = \text{multiplu de } 8;$$
$$E_3 = n\,(n^2 + 20) = 2k\,(4k^2 + 20) = 8k\,(k^2 + 5) = \text{multiplu de } 8;$$
$$E_4 = n\,(n^2 - 20) = 2k\,(4k^2 - 20) = 8k\,(k^2 - 5) = \text{multiplu de } 8.$$

15. *Indicație.* Observăm că $512 = 2^9$, iar expresia considerată se poate scrie succesiv:

$$E = n^8\,(n^4-1) - (n^4-1) = (n^8 - 1)\,(n^4-1) = (n^4+1)\,(n^4-1)^2 =$$
$$= (n^4 + 1)\,(n^2 + 1)^2\,(n^2 - 1)^2$$

sau, în sfîrșit

$$E = (n^4 + 1)\,(n^2 + 1)\,(n^2 + 1)\,(n + 1)\,(n + 1)\,(n - 1)\,(n-1).$$

Numărul n fiind prin ipoteză fără soț, n^4 și n^2 sînt la fel fără soț, deci cei șapte factori scriși mai sus sînt toți cu soț.

Pe lîngă aceasta, unul din factorii $n+1$ sau $n-1$ este divizibil cu $4 = 2^2$, și întrucît acești doi factori figurează fiecare de două ori, avem, în definitiv

$$E = \text{multiplu de } 2^9 = \text{multiplu de } 512.$$

Divizibilitatea polinoamelor

8. $2x^5 - 3x^4 - 4x^3 + x^2 - 3x + 1$; $R = -6$. **9.** $3x^7 + 4x^6 + 13x^5 + 6x^4 - 4x^3 - x^2 + 3$. $R = -4$. **10.** *Indicație.* Se va împărți polinomul prin $(x-1)$, cîtul tot prin $(x-1)$ și rezultatul din nou prin $(x-1)$. *R.* $x^4 - x^2 + 1$. **11.** $x - 3$. **12.** *Indicație.* $\dfrac{P(x)}{x-1} = nx^n - x^{n-1} - x^{n-2} - \ldots - x - 1$

$$\frac{P(x)}{(x-1)^2} = nx^{n-1} + (n-1)\,x^{n-2} + (n-2)\,x^{n-3} + \ldots + 2x + 1.$$

13. *Indicație.* $\dfrac{P(x)}{x-1} = n^2\,x^{n+1} - (n^2 + 2n - 1)\,x^n + 2\,x^{n-1} + 2x^{n-2} + \ldots + 2x + 1.$

$$\frac{P(x)}{(x-1)^2} = n^2x^n - (2n-1)\,x^{n-1} - (2n-3)\,x^{n-2} -$$
$$- (2n-5)\,x^{n-3} - \ldots - 3x - 1 \text{ etc.}$$

14. $m = 9$; $n = 13$; $p = 12$; $\frac{P(x)}{Q(x)} = x + 3$.

15. $a = -2$; $b = 3$.

16. *Indicație.* Aplicînd de două ori schema lui Horner se găsește

$$A = 2n;\ B = -2(n+1).$$

Atunci avem

$$P(x) \equiv 2nx^{n+1} - 2(n+1)x^n + 2 = 2[nx^{n+1} - (n+1)x^n + 1]$$

și împărțind de două ori cu $(x-1)$, găsim

$$\frac{P(x)}{x-1} \equiv 2[nx^n - (x^{n-1} + x^{n-2} + \ldots + x + 1)]$$

$$\frac{P(x)}{(x-1)^2} \equiv 2[nx^{n-1} + (n-1)x^{n-2} + (n-2)x^{n-3} + \ldots + 3x^2 + 2x + 1].$$

17. *R.* $a = 3$; $b = 0$; $c = -3$.

18. *Indicație.* Fie:

$$f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \ldots + a_{n-1}x + a_n. \qquad (1)$$

Putem scrie

$$f(x) = a_n + a_{n-2}x^2 + a_{n-4}x^4 + \ldots + x(a_{n-1} + a_{n-3}x^2 + a_{n-5}x^4 + \ldots) \qquad (1')$$

adică:

$$f(x) = P(x^2) + x \cdot Q(x^2), \qquad (2)$$

unde $P(x^2)$ și $Q(x^2)$ sînt polinoame întregi în raport cu x^2.
Notăm $x^2 = t$ și împărțim $P(t)$ și $Q(t)$ prin $t + 1$; se va găsi

$$P(t) = (t+1) \cdot P_1(t) + P(-1) \qquad (3)$$
$$Q(t) = (t+1) \cdot Q_1(t) + Q(-1), \qquad (3')$$

unde $P_1(t)$ și $Q_1(t)$ înseamnă niște polinoame întregi în raport cu t.
Înlocuind din nou $t = x^2$, avem

$$P(x^2) = (x^2+1) \cdot P_1(x^2) + P(-1) \qquad (4)$$
$$Q(x^2) = (x^2+1) \cdot Q_1(x^2) + Q(-1) \qquad (4')$$

sau înlocuind în relația (2)

$$f(x) = [(x^2+1) \cdot P_1(x^2) + P(-1)] + x[(x^2+1) \cdot Q_1(x^2) + Q(-1)] \qquad (5)$$
$$f(x) = (x^2+1) \cdot [P_1(x^2) + x \cdot Q_1(x^2)] + [P(-1) + x \cdot Q(-1)]. \qquad (6)$$

Din relația (6) se vede că restul are forma

$$\boxed{R = P(-1) + x \cdot Q(-1)}. \qquad (7)$$

Deci restul împărțirii lui $f(x)$ prin x^2+1 se obține înlocuind pe x^2 prin -1 în cele două polinoame:

$$P(x^2) = a_n + a_{n-2}x^2 + a_{n-4}x^4 + \ldots \qquad (8)$$
$$Q(x^2) = a_{n-1} + a_{n-3}x^2 + a_{n-5}x^4 + \ldots \qquad (8')$$

ceea ce revine la a înlocui în $f(x)$:

pe x^{4k} cu $+1$; x^{4k+2} cu -1; x^{4k+1} cu x; x^{4k+3} cu $-x$.

De exemplu, restul împărțirii polinomului

$$a_0x^4 + a_1x^3 + a_2x^2 + a_3x + a_4 \quad \text{prin} \quad x^2 + 1$$

este

$$\boxed{a_0 - a_2 + a_4 + x(-a_1 + a_3)}.$$

19. 3. **20.** $A = 3$; $B = -4$.

Capitolul III

CEL MAI MARE DIVIZOR COMUN AL NUMERELOR

4. De două ori mai mic. **8.** 504. **10.** Peste 19 800 de zile. **11.** 360. **12.** 301 ouă. **13.** Avem

$a = b \cdot 1 + r_1$	Dar $(a; b) = r_2 = 5$
$b = r_1 \cdot 3 + r_2$	Găsim atunci
$r_1 = r_2 \cdot 2$	$r_1 = 10$; $b = 35$; $a = 45$.

14. $a = 6\,336$, $b = 522$. **15.** *Indicație.* Fie n și $n+1$ cele două numere. Orice divizor comun al acestor numere divide și diferența lor: $(n+1) - n$, adică pe 1. Deci acest divizor nu poate fi decît 1; deci numerele sînt prime între ele. **16.** *Indicație.* Dacă numerele a și b sînt amîndouă fără soț, suma și diferența lor sînt cu soț, și, admițînd divizorul 2, nu sînt numere prime între ele. Deci pentru ca suma și diferența să fie prime între ele, trebuie ca din cele două numere unul să fie cu soț și unul fără soț, de exemplu 5 și 12.

17. *Indicație.* Dacă $a + b$ și ab ar avea un factor comun prim, acela, divizînd produsul ab, trebuie să dividă și unul din factori, de exemplu pe a; acel factor comun, divizînd suma $a + b$ și pe a, adică pe unul din termeni, trebuie să dividă și pe al doilea, adică pe b; rezultă atunci că a și b nu sînt prime între ele, ceea ce e contrar ipotezei. Rămîne atunci că $a + b$ și ab sînt prime între ele.
Se demonstrează în mod analog că $a - b$ și ab sînt de asemenea prime între ele.

18. *Indicație.* Cele trei numere, fiind consecutive, cel puțin unul din ele este cu soț, și, la fel, unul din ele este divizibil cu 3; deci produsul este divizibil prin 2·3, adică prin 6. **19.** Vezi problema 18.

20. *Indicație.* Fie $E = n(n + 1)(2n + 1)$, $n(n + 1)$ e totdeauna divizibil cu 2; numărul n, împărțit la 3, poate da resturile 0,1 sau 2, adică n poate fi $M3$, $M3 + 1$ sau $M3 + 2$.

Vom avea

dacă $n = M3$, rezultă că E fiind și $M2$ și $M3$, este $M6$;
dacă $n = M3 + 1$, atunci $2n + 1 = M3$ și $E = M6$;
dacă $n = M3 + 2$, atunci $n + 1 = M3$ și $E = M6$.

21. *Indicație.* Fie produsul $E = n(n + 1)(n + 2)$, unde n este un număr natural oarecare mai mare decît 1.

Deoarece $24 = 8 \cdot 3$, iar 8 și 3 sînt numere prime între ele, condiția *necesară* și *suficientă* ca un număr să fie divizibil cu 24 este ca el să fie divizibil atît cu 8, cît și cu 3. Deci, deoarece produsul a trei numere consecutive este oricînd divizibil cu 3, produsul E va fi divizibil cu 24 atunci și numai atunci cînd este divizibil cu 8.

Vom deosebi acum două cazuri, după cum n este *par* sau *impar*.

Cazul I: n este par, adică $n = 2k$, în acest caz putem scrie

$$n(n + 2) = 2k(2k + 2) = 4k(k + 1) \vdots 8 \text{ deci și } E \vdots 8.$$

Cazul II: n este impar, în acest caz și $n + 2$ va fi impar, deci va trebui să avem $n + 1 = 8K$ sau $n = 8K - 1$.

In concluzie:

$E = n(n + 1)(n + 2)$ e divizibil cu 24 cînd
$n = 2k$ (număr par) exemple: 4,5,6; 8,9,10

sau:

$n = 8k - 1$; exemple: 7,8,9; 15,16,17 etc.

22. *Indicație.* 1° Față de divizorul 6, numerele naturale pot fi reprezentate prin expresiile

$$6n,\ 6n + 1,\ 6n + 2,\ 6n + 3,\ 6n + 4,\ 6n + 5,$$

unde n este un număr întreg oarecare sau zero.

Dintre acestea, cele de forma $6n$, $6n + 2$, $6n + 3$, $6n + 4$ nu pot fi prime, căci au ca divizor sau pe 2 sau pe 3; deci numerele prime vor fi cuprinse în formele $6n + 1$ și $6n + 5$ care se mai poate scrie $6n + 6 - 1$, adică $6n' - 1$. Deci orice număr prim e de forma $6n \pm 1$.

2° Reciproca nu mai e adevărată, pentru că expresia de forma $6n \pm 1$ cuprinde nu numai numerele prime absolute, ci toate numerele prime cu 2 și 3 și care pot fi divizibile prin 5, 7, 11... etc., de exemplu: 25, 35, 49, 55, 65, 77, 85, 91, 95 etc.

23. *Indicație.* Un număr fără soț este de forma $4n \pm 1$; deci avem

$$N^2 = (4n \pm 1)^2 = 16n^2 \pm 8n + 1 = 8(2n^2 \pm n) + 1 = M8 + 1 \text{ și}$$
$$N^2 - 1 = (M8 + 1) - 1, \text{ deci este } M8.$$

24. *Indicație.* Am văzut, într-o problemă precedentă, că orice număr prim, afară de 2 și 3, e de forma $6n \pm 1$, așa că avem

$$N^2 = (6n \pm 1)^2 = 36n^2 \pm 12n + 1 = 12n(3n \pm 1) + 1,$$
$$N^2 - 1 = 12n(3n \pm 1).$$

Însă din cei doi factori n și $3n \pm 1$, unul e cu soț, deci avem $N^2 - 1 = M24$.

25. *Indicație.* Putem scrie

$$a^2 + b^2 = (a + b)(a + b) - 2ab.$$

În baza acestei egalități, orice divizor care divide pe $a^2 + b^2$ și pe $(a + b)$ trebuie să dividă și pe $2ab$.

Întrucît a și b, prin ipoteză, sînt prime între ele, în baza unei probleme precedente, *suma lor* $a + b$ *și produsul lor* ab *sînt prime* între ele, deci numai 2 ar putea fi singurul divizor al lui $2ab$, comun pentru $a^2 + b^2$ și $a + b$.

În concluzie, dacă a și b sînt prime între ele, sumele $a^2 + b^2$ și $a + b$ sînt sau prime între ele, sau admit ca divizor comun pe 2.

De exemplu, dacă $a = 8$, $b = 5$; $a^2 + b^2 = 89$ și $a + b = 13$ sînt prime între ele;

$a = 9$, $b = 5$; $a^2 + b^2 = 106$, $a + b = 14$ au ca divizor pe 2.

Cel mai mare divizor comun al polinoamelor

1. $x + 1$. **2.** $x^3 - x + 1$. **3.** 1. **4.** $x^2 + x + 1$. **5.** $(x - 1)^2(x + 2)$. **6.** $(x + 1)^2(x^2 + 1)$. **7.** $(x - 1)^3$. **8.** *Indicație.* Conform enunțului, avem $f(a) = A$ și $f(b) = B$. Restul împărțirii lui $f(x)$ prin produsul $(x - a)(x - b)$ este un polinom de gradul I, de forma $px + q$, și putem scrie identitatea împărțirii cu rest

$$f(x) \equiv (x - a)(x - b) \cdot Q(x) + px + q. \tag{1}$$

În această identitate, înlocuim succesiv pe x prin a și prin b; obținem

$$A = pa + q \tag{2}$$
$$B = pb + q. \tag{3}$$

Pentru a afla pe p și q, rezolvăm sistemul format de ecuațiile (2) și (3).

Se găsește

$$p = \frac{A - B}{a - b}, \quad q = \frac{Ba - Ab}{a - b}, \tag{4}$$

iar restul căutat va avea forma

$$R = px + q = \frac{A - B}{a - b}x + \frac{Ba - Ab}{a - b} =$$
$$= \frac{Ax - Ab}{a - b} + \frac{Ba - Bx}{a - b} = A\frac{x - b}{a - b} + B\frac{x - a}{b - a}.$$

9. Restul $= px + q = 115\,x - 225$.

10. *Indicație*. Restu e un polinom de gradul II, de forma $mx^2 + nx + p$, coeficienții m, n și p fiind dați de sistemul de ecuații

$$A = ma^2 + na + p$$
$$B = mb^2 + nb + p$$
$$C = mc^2 + nc + p.$$

Rezolvînd sistemul, restul se va putea pune sub forma următoare

$$A\frac{(x-b)(x-c)}{(a-b)(a-c)} + B\frac{(x-c)(x-a)}{(b-c)(b-a)} + C\frac{(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)}.$$

14. *Indicație*. $P(1) = 0$, $P(2) = 0$, deci e divizibil prin $(x-1)$ și $(x-2)$ și deci prin produsul $(x-1)(x-2)$.

$$\frac{P(x)}{x-2} = (x-2)^{2n-1} + \frac{(x-1)^n - 1}{(x-1)-1} = (x-2)^{2n-1} + (x-1)^{n-1} +$$
$$+ (x-1)^{n-2} + \dots + (x-1) + 1, \text{ apoi}$$

$$\frac{P(x)}{(x-2)(x-1)} = \frac{(x-2)^{2n-1}+1}{(x-2)+1} + (x-1)^{n-2} + (x-1)^{n-3} + \dots + 1,$$

adică în fine:

$$\frac{P(x)}{(x-2)(x-1)} =$$
$$= [(x-2)^{2n-2} - (x-2)^{2n-3} + (x-2)^{2n-4} - \dots - (x-2) + 1] +$$
$$+ [(x-1)^{n-2} + (x-1)^{n-3} + (x-1)^{n-4} + \dots + (x-1) + 1].$$

15. *Indicație*. $f(0) = 0$; $f(-1) = 0$; $f\left(-\frac{1}{2}\right) = 0$, deci polinomul se împarte separat prin x, $x+1$, $x+\frac{1}{2}$ sau $2x+1$, deci și prin produsul $x(x+1)(2x+1)$.

Să calculăm cîtul

$$\frac{f(x)}{x} = \frac{(x+1)^{2n} - 1}{(x+1)-1} - x^{2n-1} - 2 = (x+1)^{2n-1} + (x+1)^{2n-2} +$$
$$+ \dots + (x+1) + 1 - x^{2n-1} - 2$$

$$\frac{f(x)}{x(x+1)} = (x+1)^{2n-2} + (x+1)^{2n-3} + \dots +$$
$$+ (x+1) + 1 - \frac{x^{2n-1}+1}{x+1} = (x+1)^{2n-2} + (x+1)^{2n-3} + \dots +$$
$$+ (x+1) + 1 - [x^{2n-2} - x^{2n-3} + \dots - x + 1].$$

Împărțind în fine cu $2x + 1 = (x+1) + x$, avem

$$\frac{f(x)}{x(x+1)(2x+1)} = \frac{(x+1)^{2n-2} - x^{2n-2}}{(x+1)+x} + \frac{(x+1)^{2n-3} + x^{2n-3}}{(x+1)+x} +$$
$$+ \frac{(x+1)^{2n-4} - x^{2n-4}}{(x+1)+x} + \dots + \frac{(x+1)^3 + x^3}{(x+1)+x} + \frac{(x+1)^2 - x^2}{(x+1)+x} +$$
$$+ \frac{(x+1)+x}{(x+1)+x} \text{ etc.}$$

16. *Indicație*. Dacă înlocuim pe a prin $-b$, rezultatul este zero și deci polinomul este divizibil prin $a+b$. În mod analog, polinomul fiind simetric în raport cu a, b, c, este divizibil și prin $b+c$ și prin $c+a$, deci polinomul este divizibil prin produsul $(a+b)(b+c)(c+a)$.
Pentru $n = 3$, avem

$$(a+b+c)^3 - a^3 - b^3 - c^3 = 3\,(b+c)(c+a)(a+b).$$

Pentru $n = 5$, avem

$$(a+b+c)^5 - a^5 - b^5 - c^5 =$$
$$= 5\,(b+c)(c+a)(a+b)(a^2 + b^2 + c^2 + bc + ca + ab).$$

18. *Indicație*. Vom folosi teorema lui Bézout, metoda coeficienților nedeterminați și proprietățile polinoamelor omogene și simetrice.

22. *Indicație*. Înlocuim pe x cu $-(y+z)$ și obținem

$$E = (-y - z + y)(y+z)(z - y - z) - (y+z)\,yz =$$
$$= (-z)(y+z)(-y) - yz\,(y+z) = yz\,(y+z) - yz\,(y+z) = 0.$$

Dacă notăm $x + y + z = s$, expresia se poate scrie

$$E = (s-z)(s-x)(s-y) + xyz = s^3 - (x+y+z)\,s^2 +$$
$$+ (xy + yz + zx)s - xyz + xyz = s^3 - s^3 + (xy + yz + zx)s =$$
$$= (xy + yz + zx)(x + y + z).$$

Deci cîtul este $xy + yz + zx$.

Capitolul IV

NUMERE COMPLEXE

1. 1) $a = b = 1$, 2) $a = 4$, $b = 3$; $a = -3$, $b = -4$;

3) $a = 3$, $b = -2$; 4) $a = \frac{1 \pm \sqrt{65}}{2}$, $b = 4$.

2. $x = 2$, $y = 3$, 2) $x = \frac{1}{a}$, $y = 0$.

3. $11i$; $2\,(1 - \sqrt{2})$; $4 + 3\sqrt{3} + i\,(3\sqrt{2} - 2\sqrt{6})$.

4. $10(4i - 1)$. **5.** $10(4i - 1)$. **10.** $2(5 + \sqrt{106})$; $\dfrac{bi(6a^2 - 2b^2)}{a^2 + b^2}$.

11. 16. **12.** *a)* 1; *b)* $\dfrac{-1}{4}(1 + i\sqrt{3})$. **13.** *a)* $-\dfrac{+i\sqrt{3}}{2}$;

b) $\dfrac{4 - 5i\sqrt{2}}{11}$; *c)* i; *d)* $\dfrac{a^2 - b}{a^2 + b} + \dfrac{2a\sqrt{b}}{a^2 + b}i$; *e)* $-i$.

14. *a)* $\cos 2\alpha + i \sin 2\alpha$; *b)* $\dfrac{44 - 5i}{318}$.

15. $-\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2}i$. **16.** $\dfrac{-14}{50} + \dfrac{52}{50}i$. **17.** $\dfrac{-10}{17} + \dfrac{40i}{17}$.

18. *a)* $\pm\left[\sqrt{\dfrac{3 + \sqrt{13}}{2}} - \sqrt{\dfrac{-3 + \sqrt{13}}{2}}\right]$; *b)* $\pm(2 + i)$.

19. *a)* $\pm(3 + 2i)$; *b)* $\pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}(3 + i)$. **20.** *a)* $\pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}(1 + i)$;

b) $\pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}(\sqrt{3} + i)$. **21.** $\pm(3 - 2i)$.

Exerciții (p. 160)

1. 1) $\cos\dfrac{\pi}{2} + i \sin\dfrac{\pi}{2}$ **2.** 1) 1.

2) $\cos\dfrac{3\pi}{2} + i \sin\dfrac{3\pi}{2}$ 2) $\sqrt{10 + 2\sqrt{5}} + i(\sqrt{5} - 1)$

3) $\cos\dfrac{2\pi}{3} + i \sin\dfrac{2\pi}{3}$ 3) $\dfrac{1}{4}\left[(\sqrt{5} + 1) + i\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}\right]$

4) $2\left(\cos\dfrac{\pi}{6} + i \sin\dfrac{\pi}{6}\right)$ 4) $\sqrt{3} + i$.

5) $3\left(\cos\dfrac{\pi}{6} + i \sin\dfrac{\pi}{6}\right)$.

Exerciții (p. 175)

1. i. **2.** $\dfrac{1}{2}(\sqrt{3} + i)$. **3.** $2\sqrt{2}(1 + i)$. **4.** $16(1 + i\sqrt{3})$.

5. $-\dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. **6.** *Indicație.* Punînd $x^2 = z$, avem $iz^2 + (2 - i)z - 1 - i = 0$. Rezolvînd ecuația, obținem $z' = \dfrac{i - 1}{i} = 1 + i$; $z'' = \dfrac{-1}{i}$; înlocuind, vom avea

$$x_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}(1 + i), \quad x_2 = -\frac{\sqrt{2}}{2}(1 + i),$$

$$x_3 = \sqrt{\frac{1 + \sqrt{2}}{2}} + i\sqrt{\frac{\sqrt{2} - 1}{2}}, \quad x_4 = -\sqrt{\frac{1 + \sqrt{2}}{2}} - \sqrt{\frac{\sqrt{2} - 1}{2}}.$$

7. $2^3[\cos(-\pi) + i \sin(-\pi)]$. **8.** $2\left(\cos\dfrac{\pi}{9} + i \sin\dfrac{\pi}{9}\right)$.

9. $x^3 = 2\left[\cos\left(2k\pi + \dfrac{5\pi}{6}\right) + i \sin\left(2k\pi + \dfrac{5\pi}{6}\right)\right]$.

10. $x = 2\left(\cos\dfrac{2k\pi}{4} + i \sin\dfrac{2k\pi}{4}\right)$, $k = 0, 1, 2, 3$.

11. Rădăcinile de ordinul n ale unității se obțin rezolvînd ecuația binomă $x^n = 1$ și sînt date de $x_k = \cos\dfrac{2k\pi}{n} + i \sin\dfrac{2k\pi}{n}$ $(k = 0, 1, 2, \ldots, n - 1)$.

12. $3 + 2i$ și $4 - i$. **13.** $\pm(1 + 2i)$, $\pm i$. **16.** $\sin\alpha + \cos\alpha = \cos(90^\circ - \alpha) + i \sin(90^\circ - \alpha)$. **17.** $A = -\dfrac{1}{16}$. **18.** $B = -1$.

19. $x = \dfrac{4}{n(n + 1)}k\pi$. **20.** $32[(\sqrt{3} - 1) - (\sqrt{3} + 1)]$.

21. *Indicație.* Folosim expresia $(1 + i)^n$, pe care o vom dezvolta algebric și trigonometric.

$$(1 + i)^n = 1 + C_n^1 i - C_n^2 - C_n^3 i + C_n^4 + \ldots$$

și $(1 + i)^n = \left[\sqrt{2}\left(\cos\dfrac{\pi}{4} + i \sin\dfrac{\pi}{4}\right)\right]^n = 2^{\frac{n}{2}}\left(\cos\dfrac{n\pi}{4} + i \sin\dfrac{n\pi}{4}\right)$.

Egalînd aceste două dezvoltări și scriind că părțile reale sînt egale și părțile imaginare de asemenea, avem

$$S_1 = 1 - C_n^2 + C_n^4 - C_n^6 + \ldots = 2^{\frac{n}{2}} \cos\frac{n\pi}{4}$$

$$S_2 = C_n^1 - C_n^3 + C_n^5 - C_n^7 + \ldots = 2^{\frac{n}{2}} \sin\frac{n\pi}{4}.$$

22. *Indicație.* Din exercițiul precedent se poate scrie, după notația noastră

$$S_0 - S_2 = 2^{\frac{n}{2}} \cos \frac{n\pi}{4}; \quad S_1 - S_3 = 2^{\frac{n}{2}} \sin \frac{n\pi}{4}.$$

Din dezvoltarea lui

$(a + b)^n = a^n + C_n^1 a^{n-1} b + C_n^2 a^{n-2} b^2 + \ldots + C_n^n b^n$, în care facem $a = 1$ și $b = 1$, putem scrie

$$S_0 + S_1 + S_2 + S_3 = 2^n,$$

iar dacă $a = 1$ și $b = -1$, găsim că

$S_1 + S_3 = S_0 + S_2 = 2^{n-1}$, dar din relațiile

$$\begin{cases} S_0 + S_2 = 2^{n-1} \\ S_0 - S_2 = 2^{\frac{n}{2}} \cos \frac{n\pi}{4} \end{cases} \quad \text{și} \quad \begin{cases} S_1 + S_3 = 2^{n-1} \\ S_1 - S_3 = 2^{\frac{n}{2}} \sin \frac{n\pi}{4} \end{cases}$$

putem să demonstrăm relațiile date.

23. *Indicație.* Folosim identitatea evidentă

$$(z - z_1)(z_2 - z_3) + (z - z_2)(z_3 - z_1) + (z - z_3)(z_1 - z_2) = 0. \quad (1)$$

Triunghiul ABC fiind echilateral și z_1, z_2, z_3 fiind afixele vîrfurilor A, B, C, avem

$$|z_1 - z_2| = |z_2 - z_3| = |z_3 - z_1|. \quad (2)$$

Vom avea atunci, spre exemplu

$$|z - z_1| \cdot |z_2 - z_3| \leqslant |z - z_2| \cdot |z_3 - z_1| + |z - z_3| \cdot |z_1 - z_2| \quad (3)$$

și ținînd cont de relația (2) obținem inegalitatea

$$|z - z_1| \leqslant |z - z_2| + |z - z_3| \quad (4)$$

sau

$$\overline{PA} \leqslant \overline{PB} + \overline{PC}. \quad (5)$$

În mod analog putem obține

$$\overline{PB} \leqslant \overline{PC} + \overline{PA} \quad (6)$$

$$\overline{PC} \leqslant \overline{PA} + \overline{PB} \quad (7)$$

deci segmentele $\overline{PA}$, $\overline{PB}$, $\overline{PC}$, satisfăcînd inegalitățile fundamentale ale laturilor unui triunghi, pot forma un triunghi.

24. *Indicație.* Aplicînd formula lui Moivre, avem

$(\cos \alpha + i \sin \alpha)^3 = \cos^3 \alpha - 3 \cos \alpha \sin^2 \alpha +$
$+ i (3 \cos^2 \alpha \sin \alpha - \sin^3 \alpha)$; găsim $\sin 3\alpha = -4 \sin^3 \alpha + 3 \sin \alpha$.

Înlocuind aici pe α cu $\frac{\omega}{3}$, avem ecuația care dă pe $\sin \frac{\omega}{3} = x$, dacă $\sin \omega = a$, $4x^3 - 3x + a = 0$.

Pentru $\sin \frac{\omega}{4} = y$, găsim în mod analog

$$16y^2 (1 - y^2)(1 - 2y^2)^2 - a^2 = 0,$$

iar pentru $\sin \frac{\omega}{5} = z$, găsim

$$16z^5 - 20z^3 + 5z - a = 0.$$

25. În mod analog se vor găsi ecuațiile, dacă $\cos \omega = b$

pentru $\cos \frac{\omega}{3} = x$, $\quad 4x^3 - 3x - b = 0;$

pentru $\cos \frac{\omega}{4} = y$, $\quad 8y^4 - 8y^2 + 1 - b = 0;$

pentru $\cos \frac{\omega}{5} = z$, $\quad 16z^5 - 20z^3 + 5z - b = 0.$

26. *Indicație.* Efectuînd înmulțirea, avem

$$(a + bi)(x + yi) = (ax - by) + i(bx + ay).$$

Se știe că la înmulțirea a două numere complexe, *argumentul produsului = suma argumentelor*, deci

$$\arg (a + bi)(x + yi) = \arg (a + bi) + \arg (x + yi).$$

Dar $\arg (a + bi) = \operatorname{arc\,tg} \frac{b}{a}$

$$\arg (x + yi) = \operatorname{arc\,tg} \frac{y}{x}$$

$$\arg (a + bi)(x + yi) = \operatorname{arc\,tg} \frac{bx + ay}{ax - by};$$

deci, înlocuind, avem

$$\operatorname{arc\,tg} \frac{b}{a} + \operatorname{arc\,tg} \frac{y}{x} = \operatorname{arc\,tg} \frac{ay + bx}{ax - by},$$

adică chiar relația de demonstrat.

27. *Indicaţie.* Al treilea vîrf va fi $z = x + iy$. Scriem că laturile sînt egale, dacă modulele vor fi egale

$$|z - z_0| = |z - z_1| = |z_1 - z_0|$$

ceea ce se mai poate scrie, avînd

$$z_0 = 1;\ z_1 = 2 + i;\ z = x + iy,\ \text{astfel}$$
$$|x - 1 + iy| = |(x-2) + i(y-1)| = |1 + i|.$$

Ştim că $|a + bi| = \sqrt{a^2 + b^2}$, deci avem

$$(x-1)^2 + y^2 = (x-2)^2 + (y-1)^2 = 2.$$

Problema va avea două soluţii

$$z' = \frac{3+\sqrt{3}}{2} + i\frac{1-\sqrt{3}}{2}$$

$$z'' = \frac{3-\sqrt{3}}{2} + i\frac{1+\sqrt{3}}{2}.$$

28. *Indicaţie.* Pentru ca să stea corpul în echilibru, volumul apei dezlocuite de con trebuie să se raporte la volumul conului ca 1 la 0,5.

a) În primul caz, volumul apei dezlocuite este acel al unui con de înălţime x asemenea cu conul de înălţime $h = 1$m; volumele acestor două conuri asemenea se raportă ca şi cuburile înălţimilor

adică $$\frac{x^3}{h^3} = \frac{0,5}{1},\ x^3 = \frac{1}{2}.$$

Problema se reduce la rezolvarea acestei ecuaţii binome şi, natural, la aflarea rădăcinii reale.

b) În cazul al doilea, ecuaţia problemei va fi

$$\left(\frac{h-x}{h}\right)^3 = 0,5$$

şi în acest caz vom lua rădăcina reală.

Capitolul V

RELAŢII ÎNTRE RĂDĂCINI ŞI COEFICIENŢI

1. *R*: $x_1 = 3$, $x_2 = 5$, $x_3 = 8$. **2.** *R*: $x_1 = 2$, $x_2 = 3$, $x_3 = 6$.

3. *Indicaţie.* Vom nota cele trei rădăcini x_1, x_2, x_3 prin

$$u - v,\ u,\ u + v,$$

deci v este raţia progresiei.

Scriind relaţiile între rădăcini şi coeficienţi, avem

$$S_1 = x_1 + x_2 + x_3 = 9 \quad (1)$$

$$S_2 = x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = 23 \quad (2)$$
$$S_3 = x_1x_2x_3 = 15. \quad (3)$$

Înlocuind pe x_1, x_2, x_3 cu valorile lor, găsim

$3u = 9,$ (4)

$3u^2 - v^2 = 23,$ (5)

$u(u^2 - v^2) = 15.$ (6)

Din (4) avem imediat $u = 3$, pe urmă din (5) găsim $v = \pm 2$.

Pentru rădăcinile ecuaţiei găsim $\boxed{x_1 = 1;\ x_2 = 3;\ x_3 = 5}$.

4. $a = 315$; $x_1 = 5$; $x_2 = 7$; $x_3 = 9$. **5.** *Indicaţie.* Însemnăm, cum am arătat, cu $u - v$, u, $u + v$ cele trei rădăcini; cele trei relaţii între rădăcini şi coeficienţi ne dau

$3u = -\frac{b}{a}$ (1)

$3u^2 - v^2 = \frac{c}{a}$ (2)

$u(u^2 - v^2) = -\frac{d}{a}$ (3)

Din relaţiile (1) şi (2) obţinem succesiv

$$u = -\frac{b}{3a} \quad (4)$$

şi $$v^2 = \frac{b^2 - 3ac}{3a^2}. \quad (5)$$

Înlocuind în relaţia (3) găsim *relaţia de condiţie*

$$(2b^2 - 9ac)\,b + 27a^2d = 0. \quad (6)$$

6. *Indicaţie.* Notăm rădăcinile cu u, uq, uq^2; produsul lor ne dă $u^3q^3 = -c$, de unde $uq = -\sqrt[3]{c}$ este una din rădăcini, x_2.

Înlocuind în ecuaţie pe x cu $-\sqrt[3]{c}$, se află condiţia

$$a^3c - b^3 = 0.$$

În cazul ecuaţiei numerice, se găsesc rădăcinile $3, \frac{3}{2}, \frac{3}{4}$.

7. *Indicaţie.* Condiţia din problema scrisă astfel $x_2^2 = x_1x_3$ echivalează cu faptul că rădăcinile sînt în *progresie geometrică.*

8. *Indicaţie.* Condiţia din problemă, scrisă sub forma $x_2 = \frac{x_1 + x_3}{2}$, echivalează cu faptul că rădăcinile sînt în *progresie aritmetică.*

Se găseşte $a = 1$; $x_{1,2} = 1 \pm i\sqrt{3}$; $x_3 = 1$

$a = -2$; $x_{1,2} = -2 \pm \sqrt{6}$; $x_3 = -2$.

10. *Indicaţie.* Scriem relaţiile între rădăcini, grupate astfel

$$(x_1 + x_2) + x_3 = -\frac{b}{a} \quad (1) \qquad x_1x_2x_3 = -\frac{d}{a} \quad (3)$$

$$(x_1 + x_2)x_3 + x_1x_2 = \frac{c}{a} \quad (2) \qquad x_1 + x_2 = s. \quad (4)$$

Din (1) avem imediat $x_3 = -\frac{b}{a} - s.$ (5)

Eliminînd apoi între (2) şi (3) pe $x_1 x_2$, se găseşte

$$\boxed{s\left(\frac{b}{a} + s\right)^2 + \frac{c}{a}\left(\frac{b}{a} + s\right) - \frac{d}{a} = 0} \quad (6)$$

care este relaţia de condiţie.

În cazul ecuaţiei numerice, se găseşte $x_3 = -\frac{1}{2}$; $x_1 + x_2 = 1$; $x_1x_2 = -3$.

11. *Indicaţie.* Relaţiile le grupăm astfel

$$x_1 + x_2 + x_3 = \frac{7}{3} \quad (1)$$

$$(x_1 + x_2)x_3 + x_1x_2 = 0 \quad (2)$$

$$x_1x_2x_3 = -\frac{q}{3} \quad (3)$$

$$x_1 - x_2 = 1. \quad (4)$$

Rezolvăm ecuaţiile (1) şi (4) în raport cu x_1 şi x_2, şi punînd $x_3 = t$, (5)

înlocuim în ecuaţia (2); se găseşte $27t^2 - 42t - 40 = 0$. (6)

Rezolvînd ecuaţia (6), aflăm pe t, respectiv pe x_3, pe urm x_1, x_2 şi q.

Se găseşte $\boxed{x_1 = 2,\ x_2 = 1,\ x_3 = -\frac{2}{3},\ q = 4}$

şi $\boxed{x_1 = \frac{5}{9},\ x_2 = -\frac{4}{9},\ x_3 = \frac{20}{9},\ q = \frac{400}{243}}$.

12. *Indicaţie.* Scriem cele trei relaţii cunoscute, plus relaţia suplimentară

$$x_1 + x_2 + x_3 = -\frac{b}{a} \quad (1)$$

$$x_1(x_2 + x_3) + x_2x_3 = \frac{c}{a} \quad (2)$$

$$x_1x_2x_3 = -\frac{d}{a} \quad (3)$$

$$x_1 = x_2 + x_3. \quad (4)$$

Din (1) şi (4) avem $x_1 = -\frac{b}{2a}$ (5) şi $x_2 + x_3 = -\frac{b}{2a}$. (5')

Înlocuind acestea în (2) şi (3), găsim

$$x_2x_3 = \frac{c}{a} - \frac{b^2}{4a^2} \quad (6) \quad \text{şi} \quad x_2x_3 = \frac{2d}{b}. \quad (6')$$

Egalînd aceste valori, găsim relaţia de condiţie

$$\boxed{b^3 - 4abc + 8a^2d = 0}.$$

Dacă această condiţie e îndeplinită, polinomul ax^3+bx^2+cx+d e divizibil cu $x - x_1 = x + \frac{b}{2a}$ şi avem identitatea $ax^3 + bx^2 + cx + d \equiv \left(x + \frac{b}{2a}\right)\left(ax^2 + \frac{b}{2}x + c - \frac{b^2}{4a}\right)$

şi ecuaţia e rezolvată.

În cazul ecuaţiilor numerice, avem

pentru $x^3 - 2x^2 - x + 2 = 0$, rădăcinile $\boxed{x_1 = 1;\ x_2 = 2;\ x_3 = -1}$

şi pentru $36x^3 - 12x^2 - 5x + 1 = 0$, rădăcinile $\boxed{x_1 = \frac{1}{6};\ x_2 = \frac{1}{2};\ x_3 = -\frac{1}{3}}$.

13. *Indicaţie.* Avem relaţiile

$$x_1 + x_2 + x_3 = 0 \quad (1)$$

$$x_1(x_2 + x_3) + x_2x_3 = p \quad (2)$$

$$x_1(x_2x_3) = -q \quad (3)$$

$$x_1 = x_2x_3. \quad (4)$$

Din (3) şi (4) avem $x_1 = \pm\sqrt{-q}$ (5) ; $x_2x_3 = \pm\sqrt{-q}$. (5')

Din (1) avem $x_2 + x_3 = \mp\sqrt{-q}$, (6)

iar din (2) scoatem $x_2x_3 = p - q$. (6')

Egalînd (5') cu (6') avem relaţia de condiţie

$$\boxed{(p-q)^2 + q = 0}.$$

Pentru ecuaţia numerică avem

$$x^3 - 6x - 4 \equiv (x+2)(x^2 - 2x - 2). \quad (8)$$

14. Găsim pentru λ două soluţii $\lambda_1 = 6$; $\lambda_2 = -6$.

Pentru $\lambda = 6$ avem rădăcinile 1; 2 şi -3, iar pentru $\lambda = -6$ avem rădăcinile -1; -2 şi $+3$.

15. *Indicaţie.* Avem relaţiile

$$x_1 + x_2 + x_3 = -\frac{8}{3} \quad (1)$$

$$x_1(x_2 + x_3) + x_2x_3 = \frac{13}{3} \quad (2)$$

$$x_1x_2x_3 = -2 \quad (3)$$

$$x_1 = \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3}. \quad (4)$$

Relaţia (4) se mai poate scrie $x_1x_2x_3 = x_2 + x_3$ (5)

sau, ţinînd cont de (3), $x_2 + x_3 = -2$. (6)

Ecuaţia (1) ne dă

$$x_1 = -\frac{8}{3} - (x_2 + x_3) = -\frac{8}{3} + 2; \quad x_1 = -\frac{2}{3}. \quad (7)$$

Ducînd această valoare în (3), găsim $x_2x_3 = 3$. (8)

Astfel că utilizînd numai ecuaţiile (1), (3) şi (4), am obţinut

$$x_1 = -\frac{2}{3} \ (7); \quad x_2 + x_3 = -2 \ (6); \quad x_2x_3 = 3. \quad (8)$$

Putem verifica, pentru aceste valori, că satisfac ecuaţia (2)

$$x_1(x_2 + x_3) + x_2x_3 = \left(-\frac{2}{3}\right)(-2) + 3 = \frac{4}{3} + 3 = \frac{13}{3}.$$

Ecuaţia propusă e deci rezolvată: una din rădăcini este

$$\boxed{x_1 = -\frac{2}{3}}$$

iar celelalte două x_2, x_3 sînt rădăcinile ecuaţiei $x^2 + 2x + 3 = 0$.

Avem $\boxed{x_{2,3} = -1 \pm i\sqrt{2}}$.

Găsim identitatea $3x^3 + 8x^2 + 13x + 6 \equiv (3x + 2)(x^2 + 2x + 3)$.

17. $x_1 = x_3 = \sqrt{-\frac{p}{3}}$; $x_2 = -2\sqrt{-\frac{p}{3}}$; relaţia de condiţie este $4p^3 + 27q^2 = 0$.

18. *Indicaţie.* Vom nota rădăcinile astfel

$$x_1 = u - 3v; \quad x_2 = u - v; \quad x_3 = u + v; \quad x_4 = u + 3v.$$

Vom scrie cele patru relaţii între rădăcini şi coeficienţi în modul următor

$$S_1 = (x_1 + x_4) + (x_2 + x_3) = 4 \quad (1)$$

$$S_2 = (x_1 + x_4)(x_2 + x_3) + x_1x_4 + x_2x_3 = -34 \quad (2)$$

$$S_3 = (x_1 + x_4)\, x_2x_3 + x_1x_4\,(x_2 + x_3) = -a \quad (3)$$

$$S_4 = (x_1x_4)(x_2x_3) = b. \quad (4)$$

Înlocuind pe u şi v, aceste relaţii devin

$$4u = 4 \quad (1')$$

$$2u \cdot 2u + u^2 - 9v^2 + u^2 - v^2 = -34 \quad (2')$$

$$2u(u^2 - v^2) + 2u(u^2 - 9v^2) = -a \quad (3')$$

$$(u^2 - v^2)(u^2 - 9v^2) = b. \quad (4')$$

Din (1') avem $u = 1$ (5), iar (2') se poate scrie $6u^2 - 10v^2 = -34$, de unde $10v^2 = 6u^2 + 34 = 6 + 34 = 40$, deci $v = \pm 2$. (6)

Din (3') avem

$$2(1 - 4) + 2(1 - 36) = -a \text{ de unde } a = 76. \quad (7)$$

Din (4') avem

$$(1 - 4)(1 - 36) = b \text{ de unde } b = 105. \quad (8)$$

Cele patru rădăcini vor fi -5, -1, 3 şi 7 sau 7, 3, -1 şi -5.

19. *Indicaţie.* Metoda I. Însemnăm cu α primul termen şi cu r raţia progresiei; rădăcinile sînt α, $\alpha + r$, $\alpha + 2r$, $\alpha + 3r$.

Prima relaţie între rădăcini şi coeficienţi ne dă

$$2\alpha + 3r = 5. \quad (1)$$

A doua relaţie ne va da

$$6\alpha^2 + 18\alpha r + 11r^2 = 35. \quad (2)$$

Rezolvînd sistemul format de ecuațiile (1) și (2) se găsește

$$\alpha_1 = 1;\ r_1 = 1 \text{ și } \alpha_2 = 4,\ r_2 = -1.$$

Cele patru rădăcini sînt

$$1, 2, 3, 4 \text{ sau } 4, 3, 2, 1, \text{ ceea ce e totuna.}$$

Metoda II. Se pot însemna cele patru rădăcini, pentru motive de simetrie, cum am mai arătat, cu

$$u - 3v,\ u - v,\ u + v,\ u + 3v.$$

20. $a = -15$ și rădăcinile $-1; 1; 3; 5$.

21. *Indicație*. Notăm rădăcinile cu $\frac{u}{q^3}$, $\frac{u}{q}$ uq, uq^3.

Produsul lor este $u^4 = \frac{8}{2} = 4$, deci $u^2 = 2$ sau $u = \sqrt{2}$.

Celelalte relații ne dau

$$\left(q^3 + \frac{1}{q^3}\right) + \left(q + \frac{1}{q}\right) = \frac{15}{2\sqrt{2}},\quad \left(q^3 + \frac{1}{q^3}\right)\left(q + \frac{1}{q}\right) = \frac{27}{4}.$$

$q + \frac{1}{q}$ este dat de ecuația $z^2 - \frac{15}{2\sqrt{2}} z + \frac{27}{4} = 0$, de unde vom găsi $q + \frac{1}{q} = \frac{3}{\sqrt{2}}$, care ne dă $q_1 = \sqrt{2}$ și $q_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

Rădăcinile sînt $\boxed{\frac{1}{2}, 1, 2, 4}$.

22. *Indicație*. Metoda I. Vom folosi metoda coeficienților nedeterminați.

Scriem identitatea

$$x^4 + 12x - 5 \equiv (x^2 - 2x + \lambda)(x^2 + \alpha x + \beta). \tag{1}$$

Identificînd, se găsește $\alpha = 2$, $\beta = -1$, $\lambda = 5$.

Relația (1) se scrie atunci

$$x^4 + 12x - 5 \equiv (x^2 - 2x + 5)(x^2 + 2x - 1). \tag{2}$$

Cele patru rădăcini vor fi date de cele două trinoame de gradul II.

Metoda a II-a. Scriem relațiile între rădăcini și coeficienți sub forma următoare

$$(x_1 + x_2) + (x_3 + x_4) = 0 \tag{1}$$
$$(x_1 + x_2)(x_3 + x_4) + x_1x_2 + x_3x_4 = 0 \tag{2}$$
$$(x_1 + x_2)x_3x_4 + x_1x_2(x_3 + x_4) = -12 \tag{3}$$
$$(x_1x_2)(x_3x_4) = -5 \tag{4}$$
$$x_1 + x_2 = 2. \tag{5}$$

Din (1) scoatem $x_3 + x_4 = -2$. (6)

Pe urmă din (2) și (3) aflăm $x_1x_2 = 5$ (7) și $x_3x_4 = -1$. (8)

Cele patru rădăcini vor fi date de ecuațiile

$$x^2 - 2x + 5 = 0 \text{ și } x^2 + 2x - 1 = 0.$$

23. Avem $x_1 + x_2 = 0$ și $x_3 + x_4 = -1$.

Se găsește $x_1x_2 = 1$ și $x_3x_4 = -3$.

Ecuația se scrie $(x^2 + 1)(x^2 + x - 3) = 0$.

25. *Indicație*. Metoda I. Folosind relațiile între rădăcini și coeficienți, găsim

1) $p = 6$ cu ecuațiile $x^2 + 2 = 0$ și $x^2 + 2x - \frac{4}{3} = 0$, care dau rădăcinile $\pm i\sqrt{2}$ și $\frac{-3 \pm \sqrt{21}}{3}$.

2) $p = -9$ cu ecuațiile $x^2 - 3x + 2 = 0$ și $x^2 - \frac{4}{3} = 0$.

Metoda a II-a. Aplicînd metoda coeficienților nedeterminați, scriem identitatea

$$3x^4 + px^3 + 2x^2 + 12x - 8 \equiv (3x^2 + \alpha x + \beta)(x^2 + \gamma x + 2).$$

Se găsește

1) $\beta = -4$; $\alpha = 0$; $\gamma = -3$; $p = -9$ și ecuațiile $3x^2 - 4 = 0$ și $x^2 - 3x + 2 = 0$.

2) $\beta = -4$; $\alpha = 6$; $\gamma = 0$; $p = 6$ cu ecuațiile $3x^2 + 6x - 4 = 0$ și $x^2 + 2 = 0$.

Se vede că rezultatele sînt aceleași, cu ambele metode.

26. Se poate lucra sau cu relațiile între rădăcini și coeficienți, sau cu metoda coeficienților nedeterminați.

Rădăcinile x_1, x_2, x_3, x_4 vor fi date de ecuațiile

$$x^2 + 3x + 5 = 0 \text{ și } x^2 + 3x - 1 = 0.$$

27. *Indicație*. Relația suplimentară este $x_1x_2 = x_3x_4$.

Din relațiile cunoscute, se găsește $x_1x_2 = x_3x_4 = \pm\sqrt{d}$ și relația de condiție $\boxed{a^2d - c^2 = 0}$.

Sumele $x_1 + x_2$ și $x_3 + x_4$ sînt rădăcinile ecuației

$$x^2 + ax + (b \mp 2\sqrt{d}) = 0.$$

Se mai poate folosi, mai ales în cazurile numerice, metoda coeficienților nedeterminați.

28. *Indicație.* Se poate lucra sau cu relațiile între rădăcini și coeficienți, în care se iau relațiile suplimentare

$$x_1 + x_2 = -1 \text{ și } x_3 x_4 = \frac{4}{7},$$

sau cu metoda coeficienților nedeterminați, în care s-ar scrie identitatea

$$x^4 + 2ax^3 + 3bx^2 - 2x - a \equiv (x^2 + x + a)\left(x^2 + \beta x + \frac{4}{7}\right).$$

29. *Indicație.* Metoda I. Se va scrie identitatea

$$x^5 - 55x + 21 \equiv (x^2 + \lambda x + 1)(x^3 + \alpha x^2 + \beta x + 21).$$

Identificînd, se va găsi

$$\lambda = -3;\ \alpha = 3;\ \beta = 8;\ x_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}.$$

Metoda a II-a. Polinomul $x^5 - 55x + 21$ trebuie să fie divizibil cu $x^2 + \lambda x + 1$, deci restul împărțirii, care este $(\lambda^4 - 3\lambda^2 - 54)x + (\lambda^3 - 2\lambda + 21)$, trebuie să fie identic nul.

Deci trebuie să avem

$$\left.\begin{aligned} \lambda^4 - 3\lambda^2 - 54 &= 0 \\ \lambda^3 - 2\lambda + 21 &= 0 \end{aligned}\right\}, \text{ care ne dă } \lambda = -3.$$

Cîtul diviziunii este $x^3 - \lambda x^2 + (\lambda^2 - 1)x - \lambda^3 + 2\lambda$.
Înlocuind pe λ cu -3, avem

$$x^5 - 55x + 21 \equiv (x^2 - 3x + 1)(x^3 + 3x^2 + 8x + 21).$$

30. *Indicație.* Notăm cele cinci rădăcini astfel

$$x_1 = u - 2v;\ x_2 = u - v;\ x_3 = u;\ x_4 = u + v;\ x_5 = u + 2v.$$

Se găsește $u = 0$; $s = 0$; $q = 0$; $4p^2 - 25r = 0$.

31. Înlocuim în ecuație pe x cu x_1, x_2 și x_3 și adunăm cele trei relații; obținem

$$S_3 + pS_2 + qS_1 + 3r = 0,$$

o relație de recurență pentru aflarea lui S_3 în funcție de S_1 și S_2.
O relație identică avem și pentru aflarea lui S_4.

$$S_4 + pS_3 + qS_2 + 3rS_1 = 0.$$

Găsim treptat

$$S_2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = p^2 - 2q$$

$$S_3 = x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 = -p^3 + 3pq - 3r$$

$$S_4 = p^4 - 4p^2q + 6pr + 2q^2.$$

32. *Indicație.* Ecuația fiind

$$x^3 - x^2(r + 4R) + p^2x - Sp = 0, \tag{1}$$

unde r, R, p, S sînt elementele unui triunghi oarecare, conform relațiilor dintre rădăcini și coeficienți, avem

$$\Sigma x_1 = 4R + r, \tag{2}$$

$$\Sigma x_1 x_2 = p^2, \tag{3}$$

$$x_1 x_2 x_3 = Sp. \tag{4}$$

Însă

$$\Sigma x_1 x_2 = x_1 x_2 x_3 \cdot \sum \frac{1}{x_1}, \tag{5}$$

de unde

$$\sum \frac{1}{x_1} = \frac{\Sigma x_1 x_2}{x_1 x_2 x_3} = \frac{p^2}{Sp} = \frac{p}{S} = \frac{1}{r}; \tag{6}$$

Conform unor relații cunoscute

$$\Sigma r_a = 4R + r \tag{7}$$

$$\sum \frac{1}{r_a} = \frac{1}{r} \tag{8}$$

$$r_a r_b r_c = \frac{S^2}{r} = \frac{S^2}{\frac{S}{p}} = \frac{pS^2}{S} = p \cdot S. \tag{9}$$

Se vede atunci clar că rădăcinile ecuației sînt chiar r_a, r_b, r_c.

Rădăcini duble și triple

1. $a = 2$; $x_1 = x_2 = 1$; $x_3 = 2$.

2. $m = 3$; $x_1 = x_2 = 1$; $x_3 = -2$.

$m = \frac{3}{4}$; $x_1 = 1$; $x_2 = x_3 = -\frac{1}{2}$.

4. *Indicație.* În relațiile între rădăcini și coeficienți se face $x_1 = x_2 = x_3 = u$, $x_4 = v$.

Se găsește $x_1 = x_2 = x_3 = 0$; $b = c = 0$; $a = \frac{1}{4}$.

5. *Indicație.* Notăm cu a rădăcina triplă, cu b rădăcina dublă. Sau din relațiile între rădăcini și coeficienți, sau dezvoltînd identitatea $x^5 + px^3 - qx^2 + rx - s \equiv (x-a)^3(x-b)^2$, găsim relațiile

$$3a + 2b = 0 \qquad (1)$$

$$3a^2 + 6ab + b^2 = p \qquad (2)$$

$$a^3 + 6a^2b + 3ab^2 = q \qquad (3)$$

$$2a^3b + 3a^2b^2 = r \qquad (4)$$

$$a^3b^2 = s. \qquad (5)$$

Din (1) scoatem $b = -\frac{3a}{2}$ (6); introducînd în (2) avem

$$4p + 15a^2 = 0 \text{ de unde } a = \pm\sqrt{-\frac{4p}{15}} \qquad (7)$$

și atunci, ținînd cont de (6), avem $b = \mp\sqrt{-\frac{3p}{5}}$. (8)

Introducem valorile lui a și b din (7) și (8) în relațiile (3), (4) și (5) și vom obține relațiile de condiție căutate

$$\boxed{\begin{array}{lr} 135q^2 + 4p^3 = 0 & (9) \\ 15r - 4p^2 = 0 & (10) \\ 9\,375s^2 + 64p^5 = 0 & (11) \end{array}}\,.$$

Dacă presupunem $p = \frac{3}{2}q$, relațiile (9), (10) și (11) devin

$$\boxed{p_1 = -15;\ q_1 = -10;\ r_1 = 60;\ s_1 = \pm 72}$$

și

$$\boxed{p_2 = q_2 = r_2 = s_2 = 0}\,.$$

Luînd prima serie de valori, avem ecuația

$$x^5 - 15x^3 + 10x^2 + 60x - 72 = 0.$$

Rădăcini comune

1. Cel mai mare divizor comun este $x^2 - 3x + 2$. Rădăcinile comune sînt 1 și 2.
2. Cel mai mare divizor comun este $x^3 - 6x^2 + 12x - 8$, care, egalat cu zero, dă rădăcinile comune.

Observăm însă că

$$x^3 - 6x^2 + 12x - 8 = (x-2)^3,$$

așa că cele două ecuații au o rădăcină comună triplă.

3. Cel mai mare divizor comun este $x^3 - 2x^2 - 4x + 8$ care, egalat cu zero, ne dă rădăcinile comune.
Putem însă scrie

$$x^3 - 2x^2 - 4x + 8 = x^2(x-2) - 4(x-2) = (x^2-4)(x-2) = (x-2)^2(x+2).$$

Se vede că avem rădăcinile comune $x_1 = x_2 = 2$; $x_3 = -2$.

4. Cel mai mare divizor comun este $x^4 - 2x^2 + 1$, care, egalat cu zero, ne dă rădăcinile comune.
Se observă însă că $x^4 - 2x^2 + 1 = (x^2-1)^2 = (x-1)^2(x+1)^2$, deci rădăcinile comune sînt $x_1 = x_2 = 1$; $x_3 = x_4 = -1$.

5. Însemnăm cu $x^2 + px + q$ divizorul comun de gradul al doilea, cu $x^2 + \alpha x + \beta$ și $x^2 + \alpha' x + \beta'$ cîturile polinoamelor $P(x)$ și $Q(x)$ cu divizorul comun.
Avem identitățile

$$x^4 - 2x^3 + 3x^2 + 2x + a \equiv (x^2 + px + q)(x^2 + \alpha x + \beta) \text{ și}$$

$$x^4 - 3x^3 + 4x^2 + 3x + b \equiv (x^2 + px + q)(x^2 + \alpha' x + \beta').$$

Identificînd, obținem valorile coeficienților $a, b, p, q, \alpha, \beta, \alpha'$ și β'.

6. Rădăcinile sînt $x_1 = 1$; $x_2 = -1$; $x_3 = \frac{1}{2}$.

7. $x_1 = 2$; $x_2 = 3$; $x_3 = 1 + \sqrt{2}$; $x_4 = 1 - \sqrt{2}$.

8. $x_1 = \frac{2}{3}$; $x_2 = \frac{3}{2}$; $x_3 = 2$.

Rădăcini de forma $a + \sqrt{b}$ și $A + iB$

1. *Indicație.* Vom arăta că $f(x)$ are rădăcinile ecuației

$$x^2 + x + 1 = 0, \text{ care sînt } \alpha \text{ și } \alpha^2,\ \alpha = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}.$$

Între acestea, avem relațiile

$$1 + \alpha + \alpha^2 = 0,\ \alpha^3 = 1.$$

Deci $1 + x = 1 + \alpha = -\alpha^2$; înlocuind în $f(x)$, avem

$$(-\alpha^2)^{6k+1} - (-\alpha^2)^{6k+2} - 1 = -\alpha^{12k+2} - \alpha^{12k+4} - 1 =$$
$$= -\alpha^2 - \alpha - 1 = 0.$$

Deci α este o rădăcină a ecuației $f(x) = 0$, conjugata ei α^2 va fi de asemenea o rădăcină a lui $f(x) = 0$, urmează deci că polinomul $f(x)$ se divide cu $x^2 + x + 1$.

2. $a = 0$; $b = 3$; ecuația se poate scrie

$$2x^4 - 3x^3 - 2x + 3 = (2x - 3)(x^3 - 1) \text{ etc.}$$

3. Avem $x^4 - 3x^3 - x^2 + 9x - 18 = (x^2 - 2x + 3)(x^2 - x - 6)$.

4. Avem $\alpha = 16$; $\beta = -48$; ecuația se poate scrie

$$x^4 - x^3 - 13x^2 + 16x - 48 = (x^2 - x + 3)(x^2 - 16).$$

5. Ecuația se poate scrie

$$x^5 - 14x^4 + 69x^3 - 140x^2 + 74x + 60 \equiv (x^2 - 6x + 10)(x^2 - 2x - 1)(x - 6)$$

și are rădăcinile

$$x_{1,2} = 3 \pm i;\ x_{3,4} = 1 \pm \sqrt{2};\ x_5 = 6.$$

6. *Indicație*. Ecuația va admite și rădăcinile

$$\sqrt{2} - i,\ -\sqrt{2} + i,\ -\sqrt{2} - i.$$

7. Ecuația se poate scrie

$$x^6 - 2x^5 - x^4 + 4x^3 + 23x^2 - 50x + 25 = (x^4 - 2x^2 + 25)(x^2 - 2x + 1)$$

și are rădăcinile

$$x_{1-4} = \pm\sqrt{3} \pm i\sqrt{2};\ x_5 = x_6 = 1.$$

8. Ecuația se poate scrie

$$x^4 - 3x^3 - 11x^2 + 25x + 12 \equiv (x^2 - 2x - 1)(x^2 - x - 12)$$

și are rădăcinile

$$x_{1,2} = 1 \pm \sqrt{2};\ x_3 = 4;\ x_4 = -3.$$

9. Se deduce $p = -1$; $q = \pm 1$; $\alpha = 2$; $\beta = 1$.

10. Ecuația se poate scrie

$$x^6 + 3x^5 - 12x^4 - 30x^3 + 21x^2 + 3x - 2 \equiv (x^4 - 10x^2 + 1)(x^2 + 3x - 2)$$

și are rădăcinile $x_{1-4} = \pm\sqrt{2} \pm \sqrt{3}$; $x_{5,6} = \dfrac{-3 \pm \sqrt{17}}{2}$.

11. Ecuația se poate scrie

$$x^6 + x^5 + 3x^4 + 2x^3 + 3x^2 + x + 1 \equiv (x^2 + 1)^2 (x^2 + x + 1).$$

12. *a)* $P(x) = (x^2 - 2x + 2)(3x^2 + x - 1)$;

b) $P(x) = 3(x^2 - 2x + 2)\left(x + \dfrac{1}{6} - \dfrac{\sqrt{13}}{6}\right)\left(x + \dfrac{1}{6} + \dfrac{\sqrt{13}}{6}\right)$;

c) $P(x) = 3(x - 1 - i)(x - 1 + i)\left(x + \dfrac{1}{6} - \dfrac{\sqrt{13}}{6}\right)\left(x + \dfrac{1}{6} + \dfrac{\sqrt{13}}{6}\right)$.

2. $-3; 2; i; -i$. **3.** $-\dfrac{2}{5}$; $\dfrac{1}{4}$; $i; -i$. **4.** $-\dfrac{3}{5}$; $\dfrac{1}{5}$; $-2 \pm i$.
5. $-\dfrac{1}{5}$; $\dfrac{3}{2}$; $i; -i$. **6.** $-\dfrac{1}{3}$; $\dfrac{1}{2}$; $i; -i$. **7.** $x_{1,2,3} = 2$; $x_{4,5} =$
$= \dfrac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$. **8.** $-\dfrac{2}{3}$; $\dfrac{1}{2}$; 1; $\dfrac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$. **9.** -4; -2; 3;
$\dfrac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2}$. **10.** $-3; 2; 5; \pm i$. **11.** $-1; -\dfrac{3}{2}$; $\dfrac{2}{3}$; $\pm i$. **12** -4;
$-2; 3; +i$. **13.** $x_1 = 2$; $x_2 = -\dfrac{2}{3}$. **14.** $x_1 = x_2 = \dfrac{1}{2}$; $x_3 = 1$;
$x_4 = -2$. **15.** $x_1 = -5$. **16.** $x_1 = 2$. **17.** $x_1 = -\dfrac{3}{2}$; $x_2 = \dfrac{2}{3}$.
18. $-2; 5; 3$. **19.** $1; 1; -2; -2$. **20.** $-2; \dfrac{1}{2}$. **21.** $1; 1; \dfrac{5}{2}$. **22.** 5;
$2x^2 - 2x + 3 = 0$. **23.** -2; $-2; 3$. **24.** $1; 3; 3$. **25.** $(1; 2; 5)$.
26. $2; -\dfrac{1}{2}$; $\dfrac{1}{2}$. **27.** $1; 2; 3; 4$. **28.** $-3; 3; 5; 9$. **29.** $-2; 1$;
$2; -\dfrac{1}{2}$. **30.** $1; 2; 2; 3$. **31.** $-1; 1; 2; 5$. **32.** $-2; 5; \dfrac{1 \pm i\sqrt{5}}{2}$.
33. $1; 2; 3; 5$. **34.** $-6; -3; -2; 1; 2$. **35.** $-3; -2; 2; 4$.
36. $2; 3; \dfrac{2}{3}$; $\dfrac{3}{2}$. **37.** $\dfrac{2}{7}$; $\dfrac{2}{3}$. **38.** $-1; 3; -\dfrac{1}{2}$; $\dfrac{3}{4}$; $\dfrac{5}{2}$. **39.** *In-*
dicație. Se descompune în $(x+2)\left(x - \dfrac{1}{3}\right)(x - 1)(x^2 + 1) > 0$.
40. $x = 6$. **41.** $-\dfrac{1}{2}$; $\dfrac{3}{2}$; $3 \pm \sqrt{3}$. **42.** $-1; \dfrac{3}{5}$; $\dfrac{2}{3}$; $\dfrac{1 \pm i\sqrt{3}}{2}$.
43. -3; $-\dfrac{1}{2}$; $\dfrac{2}{3}$. **44.** $\dfrac{1}{3}$; $-\dfrac{2}{5}$. **45.** $1; 3; \dfrac{1}{2}$; $\dfrac{1}{4}$. **46.** *Indi-*
cație. Avem $\dfrac{8}{125} = \left(\dfrac{2}{5}\right)^3$; $\left(\dfrac{2}{5}\right)^3 \left(\dfrac{2}{5}\right)^{x^3 - 3x^2 - 4x + 9} = 1$; $x^3 - 3x^2 -$
$- 4x + 12 = 0$ cu rădăcinile $3; 2; -2$. **47.** *Indicație*. x fiind unul
din numere, ecuația problemei este $x^3 + 6x^2 + 8x - 693 = 0$; ră-
dăcinile sînt $+7$ și două rădăcini imaginare. **48.** $1 \pm \sqrt{2}$; 1;
$-1; \dfrac{3}{2}$.

49. *Indicație.* Fie R raza sferei mari, r raza sferei mici. Ecuația problemei este

$$\frac{4\pi R^3}{3} - \frac{4\pi r^3}{3} = \frac{7}{3}\pi R^2 r, \tag{1}$$

care se mai poate scrie, după ce simplificăm cu $\frac{\pi}{3}$ și împărțim cu r^3:

$$4\left(\frac{R}{r}\right)^3 - 4 = 7\left(\frac{R}{r}\right)^2 \tag{2}$$

$$4\left(\frac{R}{r}\right)^3 - 7\left(\frac{R}{r}\right)^2 - 4 = 0. \tag{3}$$

Punînd $\frac{R}{r} = x$, avem ecuația $4x^3 - 7x^2 - 4 = 0.$ (4)

Această ecuație admite o singură rădăcină reală $x = 2$, celelalte două rădăcini sînt date de ecuația $4x^2 + x + 2 = 0$ și sînt complexe.

Deci raportul razelor trebuie să fie $\frac{R}{r} = 2.$

50. Notînd cu R raza sferei și cu x distanța socotită pe axa conului, de la centrul cercului de bază pînă la punctul unde axa mai înțeapă sfera, raza cercului de rază r și înălțimea i a conului sînt date de

$$r^2 = x(2R - x);\ i = 2R - x.$$

Conform ecuației problemei avem

$$\frac{\pi}{3} r^2 i = \frac{81}{500} \cdot \frac{4\pi R^3}{3}.$$

Simplificăm cu $\frac{\pi}{3}$ și înlocuim pe r^2 și i cu expresiile lor

$$x(2R - x)(2R - x) = \frac{4 \cdot 81 R^3}{500}.$$

Făcînd toate calculele, găsim ecuația

$$125x^3 - 500Rx^2 + 500R^2x - 81R^3 = 0,$$

care are o rădăcină $x = \frac{R}{5}$.

51. Folosim formula $S_2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

Punînd $n = x$, avem

$$\frac{x(x+1)(2x+1)}{6} = 385.$$

Făcînd toate calculele găsim

$2x^3 + 3x^2 + x - 2\,310 = 0$ cu o rădăcină $x = 10$.

52. Se găsește ecuația $x^3 - 25x - 1\,428 = 0$.

Dimensiunile paralelipipedului sînt 7, 12, 17.

53. x reprezentînd timpul în ore necesar primului robinet ca să umple singur bazinul, într-o oră s-ar umple

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{x + \frac{6}{5}} + \frac{1}{x+3} + \frac{1}{x+6} \text{ din bazin.}$$

Ecuația problemei este

$$2\left(\frac{1}{x} + \frac{5}{5x+6} + \frac{1}{x+3} + \frac{1}{x+6}\right) = 1.$$

Se găsește $x = 6$.

54. Ecuația problemei este

$$x^3 - 54x^2 + 252x + 14\,040 = 0;\ x = 30$$

55. ABC triunghiul, h înălțimea vîrfului A, $B'C'$ paralela dusă la distanța x de BC, D și E proiecțiile punctelor B', C' pe BC.

Avem $\quad 2x^2(BD + EC + 3DE) = h^2 \cdot BC$

sau $\quad 2x^2(BC + 2DE) = h^2 \cdot BC.$

Dar din asemănarea triunghiurilor $AB'C'$, ABC scoatem

$$DE = BC \cdot \frac{h - x}{h}.$$

Ecuația problemei este $4x^3 - 6hx^2 + h^3 = 0$.

Rădăcinile sînt $x = \frac{h}{2}$, $x = \frac{h(1 \pm \sqrt{3})}{2}$

56. Notăm cu u expresia dată și o ridicăm la cub; găsim

$$u^3 - 6u - 40 = 0.$$

Rădăcina întreagă este $u = 4$, așa că avem

$$\sqrt[3]{20 + 14\sqrt{2}} + \sqrt[3]{20 - 14\sqrt{2}} = 4.$$

Exerciții recapitulative

2. $m = 8$. **3.** $m = 9$. **4.** 2 002. **5.** C_{64}^{32}. **6.** 36.

7. *Indicație.* La o așezare a băieților corespund 3! așezări ale fetelor. Băieții se pot așeza în 4! moduri diferite. Deci în total avem $3!\,4! = 144$ de așezări distincte.

8. *Indicație.* n drepte dau C_n^2 puncte de intersecție, p drepte fiind concurente, se pierd $C_p^2 - 1$ puncte, iar q drepte fiind paralele, se pierd C_q^2 puncte.

Numărul de puncte rămas este

$$N = C_n^2 - C_p^2 - C_q^2 + 1.$$

9. *a)* $12!$ *b)* A_{12}^6.

10. *Indicație.* Putem avea întîi descompunerea de forma $(a)\cdot(bcde)$, adică un factor este format dintr-o singură literă, al doilea din celelalte 4 litere, numărul lor este C_5^1; putem avea pe urmă descompunerea de forma $(ab)\ (cde)$, adică (2 litere)$\cdot$(3 litere), numărul acestora este C_5^2.

În total avem $C_5^1 + C_5^2 = \frac{5}{1} + \frac{5\cdot 4}{1\cdot 2} = 5 + 10 = 15$ descompuneri.

În cazul general, cînd avem n litere

$$a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n,$$

vom deosebi două cazuri, după cum n este *par* sau *impar*. În cazul cînd n este par, avem $C_n^1 + C_n^2 + \ldots + C_n^{\frac{n}{2}}$ descompuneri posibile, iar în cazul cînd n este impar, avem $C_n^1 + \ldots + C_n^{\frac{n-1}{2}}$ descompuneri posibile.

13. $y = \frac{(x-3)(x-4)}{20}$. **14.** $n = 3$, $m = 6$.

15. *Indicație.* Plecăm de la identitatea

$x^3 + y^3 = (x+y)^3 - 3xy(x+y)$, facem pe $x = C_{m-1}^n$ și $y = C_{m-1}^{n-1}$ și ținînd seama de relația

$$C_{m-1}^n + C_{m-1}^{n-1} = C_m^n \text{ avem}$$

$$(C_{m-1}^n)^3 + (C_{m-1}^{n-1})^3 = (C_m^n)^3 - 3C_{m-1}^n C_{m-1}^{n-1} C_m^n =$$

$$= (C_m^n)^3 - 3\frac{n(m-n)}{m^2}(C_m^n)^3 = \frac{m^2 - 3mn + 3n^2}{m^2}(C_m^n)^3.$$

17. $x = \frac{2m!\,(n-m)!}{n!}$, $y = \frac{m(m-1)[n-2(n-m)]}{n(n-1)^2}$.

18. $x_1 = 25$, $x_2 = 176$. **19.** $x_1 = n$, $x_2 = m - n$. **20.** $\frac{1}{2}C_n^2$.

21. $x = 2$. **22.** *Indicație.* Ne vom servi de *formula de descompunere a combinărilor*

$$C_n^k = C_{n-1}^k + C_{n-1}^{k-1},$$

pe care o vom scrie astfel

$$C_{n-1}^k + C_{n-1}^{k-1} = C_n^k,$$

sub care formă se vede că *putem însuma două combinări care au indicele de jos același, iar indicii de sus diferă cu 1 și suma ne dă o combinare cu indicele de jos majorat cu 1, iar indicele de sus egal cu cel mai mare dintre indicii de sus, din partea stîngă.*

Atunci, însumînd treptat cîte doi termeni din formula de demonstrat, avem

$$1 + C_n^1 = C_n^0 + C_n^1 = C_{n+1}^1$$

$$C_{n+1}^1 + C_{n+1}^2 = C_{n+2}^2$$

$$C_{n+2}^2 + C_{n+2}^3 = C_{n+3}^3$$

$$C_{n+3}^3 + C_{n+3}^4 = C_{n+4}^4$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$C_{n+k-1}^{k-1} + C_{n+k-1}^k = C_{n+k}^k.$$

Adunînd egalitățile membru cu membru și reducînd termenii asemenea, ajungem la formula din enunț.

23. *Indicație.* Luăm formula stabilită în problema precedentă

$$1 + C_n^1 + C_{n+1}^2 + C_{n+2}^3 + C_{n+3}^4 + \ldots + C_{n+k-1}^k = C_{n+k}^k$$

și exprimăm fiecare combinare prin formula (III_1) cu ajutorul aranjamentelor și permutărilor; găsim

$$1 + \frac{n}{1} + \frac{(n+1)n}{1\cdot 2} + \frac{(n+2)(n+1)n}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{(n+3)(n+2)(n+1)n}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} +$$

$$+ \ldots + \frac{(n+k-1)\ldots(n+1)\,n}{1\cdot 2\cdot \ldots\cdot k} = \frac{(n+k)(n+k-1)\ldots(n+1)}{1\cdot 2\cdot \ldots\cdot k}.$$

Dacă la numărătorul fiecărei fracții schimbăm ordinea factorilor, găsim chiar formula de stabilit.

24. *Indicație.* Plecăm de la identitatea

$$C_p^p + C_{p+1}^p + C_{p+2}^p + \dots + C_q^p = C_{q+1}^{p+1}$$

și scriem $S = C_2^2(C_{n-3}^1 + C_{n-4}^1 + \dots + C_1^1) + C_3^2(C_{n-4}^1 + \dots + C_1^1) + \dots + C_{n-2}^2 C_1^1 = C_1^1(C_2^2 + C_3^2 + \dots + C_{n-2}^2) + C_2^1(C_2^2 + \dots + C_{n-3}^2) + \dots + C_{n-3}^1 C_2^2 = C_1^1 C_{n-1}^3 + C_2^1 C_{n-2}^3 + \dots + C_{n-3}^1 C_3^3 = (C_{n-1}^3 + C_{n-2}^3 + \dots + C_3^3) + (C_{n-2}^3 + \dots + C_3^3) + \dots + C_3^3 =$

$$= C_n^4 + C_{n-1}^4 + \dots + C_4^4 = C_{n+1}^5 \; ; \; S = C_{n+1}^5.$$

25. $S = (1 + 2 + 3 + \dots + m)(m-1)!(1 + 10 + 10^2 + \dots + 10^{m-1}) = (m+1)!\,\frac{10^{m-1}}{18}.$

26. $4! \cdot 6!$. **27.** $n = 2$. **28.** $(x^{10})^2 + (C_{10}^1 x^9)^2 + (C_{10}^2 x^8)^2 + \dots + (C_{10}^1 x)^2 + 1.$

29. *Indicație.* $C_n^p \cdot 3^p = 110\,565$; $C_n^p = 1\,365$; $3^p = 81$; $p = 4$.

Din $C_n^4 = 1\,365$, avem

$n(n-1)(n-2)(n-3) = (n^2 - 3n)(n^2 - 3n + 2) = 32\,760$ notînd pe $n^2 - 3n = y$, aflăm $y = 180$ sau $y = -182$, valoarea întreagă pentru n este 15. **30.** $x^2 = \frac{21}{10}$. **31.** $n = 7$. **32.** *Indicație.* Din dezvoltare, avem $nm - (m+p)i = 0$; $nm - 11(m+p) = 1$; $nm - 23(m+p) = 5$; scăzînd pe prima din celelalte două și împărțind rezultatele obținem $\frac{i-11}{i-23} = \frac{1}{5}$, $i = 8$, apoi $m + p = \frac{-1}{3}$, $n = \frac{-8}{3m}$; n trebuie să fie întreg și pozitiv, deci $m = \frac{-1}{3a}$, a fiind întreg, deci $n = 8a$.

33. Pentru ca trei coeficienți binomiali consecutivi

$$C_n^{k-1},\ C_n^k \text{ și } C_n^{k+1}$$

să formeze o *progresie aritmetică*, trebuie să avem

$$2C_n^k = C_n^{k-1} + C_n^{k+1},$$

$$\frac{2n!}{k!\,(n-k)!} = \frac{n!}{(k-1)!\,(n-k+1)!} + \frac{n!}{(k+1)!\,(n-k-1)!},$$

$$\frac{2}{k!\,(n-k)!} = \frac{1}{(k-1)!\,(n-k+1)!} + \frac{1}{(k+1)!\,(n-k-1)!}.$$

Efectuînd toate calculele, obținem ecuația

$$k^2 - nk + \frac{n^2 - n - 2}{4} = 0.$$

Rezolvînd ecuația în raport cu k, avem

$$k = \frac{n \pm \sqrt{n^2 - (n^2 - n - 2)}}{2} = \frac{n \pm \sqrt{n+2}}{2}.$$

Expresia $n + 2$ trebuie să fie *un pătrat perfect.*
Vom deosebi două cazuri, după cum n este cu soț sau fără soț.

Dacă n este cu soț, trebuie să avem

$$n + 2 = (2p)^2 = 4p^2, \text{ de unde } n = 4p^2 - 2,$$

atunci avem $\quad k = \frac{4p^2 - 2 \pm 2p}{2}$; $k = 2p^2 - 1 \pm p$.

Dacă n este fără soț, trebuie să avem

$$n + 2 = (2p+1)^2 = 4p^2 + 4p + 1, \text{ de unde } n = 4p^2 + 4p - 1;$$

atunci avem

$$k = \frac{4p^2 + 4p - 1 \pm (2p+1)}{2};\ k_1 = 2p^2 + 3p;\ k_2 = 2p^2 + p - 1.$$

34. *Indicație.* Expresia se scrie $[x^4 - (3x - 1)]^8$, deci este de forma $(a - b)^8$, unde $a = x^4$ și $b = 3x - 1$.

Termenii în care a are un exponent $\geqslant 4$ nu pot conține pe x^{14}; atunci analizăm

$$-C_8^5 a^3 b^5 + C_8^6 a^2 b^6 - C_8^7 a b^7 + C_8^8 b^8.$$

Ultimii doi termeni au pe x la o putere $\leqslant 11$, deci ne rămîn termenii

$-C_8^5 x^{12}(3x - 1)^5 + C_8^6 x^8 (3x - 1)^6$, adică

$-C_8^5 x^{12}(3^5 x^5 - C_5^1 3^4 x^4 + C_5^2 3^3 x^3 + \dots) +$

$+ C_8^2 x^8 (3^6 x^6 - C_6^1 3^5 x^5 + \dots)$, coeficientul lui x^{14} este

$C_8^5 C_5^3 3^2 + C_8^2 \cdot 3^6 = 5\,040 + 20\,412 = 25\,452.$

36. *Indicație.* Ne folosim de formula $C_{2n}^k = C_{2n}^{2n-k}$.

37. *Indicație.* Se va lua dezvoltarea

$$(1 + x)^{n+1} = 1 + C_{n+1}^1 x + C_{n+1}^2 x^2 + C_{n+1}^3 x^3 + \dots + C_{n+1}^{n+1} x^{n+1},$$

care se poate scrie

$$\frac{(1+x)^{n+1}-1}{n+1} = C_n^0 x + \frac{C_n^1}{2}x^2 + \frac{C_n^2}{3}x^3 + \frac{C_n^3}{4}x^4 + \ldots + \frac{C_n^n}{n+1}x^{n+1}.$$

Pentru $x = 1$, avem prima identitate.
Pentru $x = k$, a doua.

38. *Indicație*. Luăm identitatea

$$(1+x)^{n+p} = (1+x)^n \cdot (1+x)^p.$$

Vom calcula coeficienții lui x^k în cele două părți ale acestei identități și vom scrie că acești coeficienți sînt egali.

Avem

$$(1+x)^{n+p} = 1 + C_{n+p}^1 x + C_{n+p}^2 x^2 + \ldots + C_{n+p}^k x^k + \ldots +$$

$$+ C_{n+p}^{n+p} x^{n+p};\ \text{coeficientul lui } x^k \text{ este } C_{n+p}^k.$$

$$(1+x)^n = 1 + C_n^1 x + C_n^2 x^2 + C_n^3 x^3 + \ldots + C_n^{k-i} x^{k-i} + \ldots +$$

$$+ C_n^{k-2} x^{k-2} + C_n^{k-1} x^{k-1} + C_n^k x^k + C_n^{k+1} x^{k+1} + \ldots +$$

$$+ C_n^{n-1} x^{n-1} + C_n^n x^n.$$

$$(1+x)^p = 1 + C_p^1 x + C_p^2 x^2 + C_p^3 x^3 + \ldots + C_p^{k-i} x^{k-i} + \ldots +$$

$$+ C_p^{k-2} x^{k-2} + C_p^{k-1} x^{k-1} + C_p^k x^k + C_p^{k+1} x^{k+1} + \ldots +$$

$$+ C_p^{p-1} x^{p-1} + C_p^p x^p.$$

Dacă înmulțim pe $(1+x)^n$ cu $(1+x)^p$, termenul x^k se obține din înmulțirea termenilor următori:

$C_n^k x^k$ cu 1 care dă coeficientul C_n^k

$C_n^{k-1} x^{k-1}$ cu $C_p^1 x$ care dă coeficientul $C_n^{k-1} C_p^1$

$C_n^{k-2} x^{k-2}$ cu $C_p^2 x^2$ care dă coeficientul $C_n^{k-2} C_p^2$

....

1 cu $C_p^k x^k$ care dă coeficientul C_p^k.

Suma acestor coeficienți ne dă

$$C_n^k + C_n^{k-1} C_p^1 + C_n^{k-2} C_p^2 + \ldots + C_n^{k-1} C_p^1 + \ldots + C_p^k.$$

Egalînd cei doi coeficienți, am demonstrat formula.

43. *Indicație*. Luînd $u_0 = 2$; $u_1 = 3$ și $u_{n+1} = 3u_n - 2u_{n-1}$; $u_n = 2^n + 1$ pentru $n = 2,3$ și 4, avem

$$u_2 = 3u_1 - 2u_0 = 3 \cdot 3 - 2 \cdot 2 = 9 - 4 = 5$$
$$u_2 = 2^2 + 1 = 4 + 1 = 5$$

$$u_3 = 3u_2 - 2u_1 = 3 \cdot 5 - 2 \cdot 3 = 15 - 6 = 9$$
$$u_3 = 2^3 + 1 = 8 + 1 = 9$$

$$u_4 = 3u_3 - 2u_2 = 3 \cdot 9 - 2 \cdot 5 = 27 - 10 = 17$$
$$u_4 = 2^4 + 1 = 16 + 1 = 17.$$

Presupunem că $u_n = 2^n + 1$, vom arăta că $u_{n+1} = 2^{n+1} + 1$
$u_{n+1} = 3u_n - 2u_{n-1} = 3(2^n + 1) - 2(2^{n-1} + 1) = 3 \cdot 2^n + 3 -$

$$-2^n - 2 = 2 \cdot 2^n + 1 = \boxed{2^{n+1} + 1}.$$

44. *Indicație*. Avem $10^{n-} \leqslant N < 10^n$, deci

$$10^{(n-1)N} \leqslant N^N < 10^{nN}.$$

Prin urmare, N^N ar putea avea un număr de cifre cuprins între $(n-1)N$ și nN.

45. *Indicație*. $S_2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

$$S_1 = 1 + 2 + 3 + \ldots + n = n\frac{(n+1)}{2}.$$

$Q = \dfrac{S_2}{S_1} = \dfrac{2n+1}{3}$; $2n + 1$ se divide prin 3 cînd $n = 3p + 1$.

Deci $Q = \dfrac{6p+3}{3} = 2p + 1$.

46. *Indicație*. Din exercițiul precedent rezultă că

$x^2 = 2p + 1$; $p = \dfrac{x^2 - 1}{2}$ și $n = 3p + 1 = 3 \cdot \dfrac{x^2-1}{2} + 1 = \dfrac{3x^2 - 1}{2}$;

pentru ca n să fie întreg, trebuie ca $x = 2y + 1$, deci $n = \dfrac{3(2y+1)^2 - 1}{2} = 6y^2 + 6y + 1$ și $Q = (2y+1)^2$, y fiind întreg.

47. *Indicație.* Expresia se scrie $(n - 1)(8n + 1)$. Trebuie să arătăm că, dacă unul din factori se divide prin 5, celălalt nu se mai poate divide.

1° $n - 1 = 5p$, $8n + 1 = 40p + 9 \neq$ mult. 5.

2° $8n + 1$ se divide cu 5, trebuie ca $3n + 1 = 5m$

$n = \frac{5m - 1}{3} = \frac{3m + 2m - 1}{3}$; ca n să fie întreg, trebuie ca

$$2m - 1 = 3p;\ m = \frac{3p + 1}{2} = \frac{2p + p + 1}{2};$$

$$p + 1 = 2t; \quad p = 2t - 1.$$

$m = 3t - 1$, $n = 5t - 2$; $n - 1 = 5t - 3$, și deci nu se divide prin 5.

48. *Indicație.* Punem $n = a^2(2a^2 - 1)$ și avem

$$1^3 + 3^3 + 5^3 + \ldots + (2a - 1)^3 = a^2(2a^2 - 1);\ \text{dar}$$

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + (2a - 1)^3 = \frac{(2a - 1)^2 (2a)^2}{4},$$

$$2^3 + 4^3 + \ldots + (2a - 2)^3 = \frac{2^3 (a - 1)^2 a^2}{4}.$$

Dacă scădem relațiile, obținem relația dată.

49. *Indicație.* $A = 19\ a$, $B = 13\ b$.

$$A^{4n} - B^{2n} = (19a)^{4n} - (13b)^{2n} = 19^{4n} \cdot a^{4n} - 13^{2n} \cdot b^{2n} =$$
$$= (17 + 2)^{4n} a^{4n} - (17 - 4)^{2n} b^{2n} = M17 + 2^{4n} a^{4n} - 4^{2n} b^{2n} =$$
$$= M17 + 16^n a^{4n} - 16^n b^{2n} = M17 + 16^n (a^{4n} - b^{2n}).$$

Expresia este divizibilă cu 17, cînd $a^{4n} - b^{2n}$ este divizibilă cu 17.

50. *Indicație.* $S = (n^2 + 1)(n^2 - 1)^2$, iar $45 = 3^2 \cdot 5$.

Față de divizorii 3 și 5, n poate avea următoarele forme

$$n_1 = 3m;\quad n_2 = 3m \pm 1;$$
$$n_3 = 5m;\quad n_4 = 5m \pm 1;\quad n_5 = 5m \pm 2.$$

Pentru $n = n_1$, sau $n = n_3$, S nu se divide prin 3 sau prin 5.

Pentru $n = n_2$, factorul $(n^2 - 1)^2$ se divide totdeauna prin 9, deci S se divide prin 9 cînd $n \neq 3m$.

La fel $(n^2 - 1)$ se divide prin 5 cînd $n = n_4$, iar $(n^2 + 1)$ se divide prin 5 cînd $n = n_5$. Deci S se divide totdeauna prin 5, cînd $n \neq 5m$.

Rezultă că S se divide prin 45, pentru toate valorile lui n prime cu 3 și 5.

51. $N = (n^8 + 1)(n^2 + 1)(n + 1)(n - 1)$ și $96 = 2^5 \cdot 3$. Dacă n este par, toți factorii lui N sînt neperechi. Va trebui ca n să fie impar; în acest caz, primii factori se divid cu 2, unul din ultimii doi se divide cu 2 și celălalt cu 2^2.

În ceea ce privește divizibilitatea cu 3, se vede că dacă $n = 3p$, nici unul din factorii lui N nu se divide cu 3. Dacă însă $n = 3p \pm 1$ atunci N se divide cu 3. Deci, pentru ca N să se dividă cu 96, trebuie ca $n = 3p \pm 1$ și p să fie par, adică $n = 6p' \pm 1$.

52. *Indicație.* 1) Dacă n este prim cu $n + 3$ în acest caz atît n cît și $n + 3$ trebuie să fie pătrate perfecte $n = x^2$; $n + 3 = y^2$.

$$y^2 - x^2 = (y + x)(y - x) = 3;$$

$y = 2$, $x = 1$ sau $y = 2$, $x = -1$, contrar ipotezei.

2) n și $n + 3$ au un divizor comun d; avem $n = 3d$; $n + 3 = 3(d + 1)$, $n(n + 3) = 9d(d + 1)$, care nu poate fi pătrat perfect.

53. *Indicație.* $840 = 2^3 \times 3 \times 5 \times 7$, deci va trebui să dovedim că E se divide cu fiecare din factorii 2^3, 3, 5, 7.

$E = (n - 2)(n - 1)n(n + 1)(n + 2)(n^2 - 2)$; primii cinci factori sînt numere întregi consecutive, deci E se divide cu 3, cu 4 și cu 5, deci și cu $3 \cdot 4 \cdot 5 = 60$.

Să dovedim că expresia se divide și prin 8 și prin 7. Printre cele 5 numere consecutive există cu siguranță un multiplu de 4 și mai există cu siguranță și un al doilea număr par, deci E se divide prin 8. Să demonstrăm că E se divide prin 7. Orice număr întreg poate avea față de 7 una din formele: mult. 7; mult. 7 ± 1; mult. 7 ± 2; mult. 7 ± 3.

Dacă $n =$ mult. 7 expresia se divide prin 7.
Dacă $n =$ mult. 7 ± 1, $n^2 - 1$ se divide prin 7.
Dacă $n =$ mult. 7 ± 2, $n^2 - 4$ se divide prin 7.
Dacă $n =$ mult. 7 ± 3, $n^2 - 2$ se divide prin 7, deci oricare ar fi n întreg, expresia E se divide prin 2^3, 3, 5, 7, deci se divide prin produsul lor, prin 840.

54. *Indicație.* Expresia se scrie sub forma $n^2(n + 1)^2[n(n + 2) + n^2 - 1] = n^3(n + 1)^2(n + 2) + (n - 1)n^2(n + 1)^3$.

Fiecare termen este multiplu de 3, fiind produs a trei numere consecutive, și multiplu de 4, fiind produsul pătratelor a două numere consecutive.

55. *Indicație*. Problema poate fi rezolvată și prin algebră, arătînd că polinomul:

$$x^{n+1} - n(x-1) - x \text{ este divizibil cu } (x-1)^2.$$

56. $m = -1, n = 2$. **57.** $a = 12, b = 1$. **58.** $m_1 = -1, m_2 = -2, a_1 = -7, a_2 = -12$. **59.** *Indicație*. Polinomul se scrie $E = [x^2 + x + 1 + (a-1)(x+1)]^2 - (a-1)^2 x = (x^2 + x + 1)^2 + 2(a-1) \cdot (x+1)(x^2 + x + 1) + (a-1)^2 (x^2 + x + 1) = (x^2 + x + 1) \cdot [x^2 + (2a-1)x + a^2]$. **60.** $x - 4$. $P(1) = 0, P(2) = 0, P(3) = 0$. **61.** $a = -2, b = -3, (x+1)(x-2)$. **62.** *Indicație*. Se înmulțesc deîmpărțitul și împărțitorul prin $x - 1$; rezultă că $x^{3a+1} + x^{3b+2} + x^{3c+3} - x^{3a} - x^{3b+1} - x^{3c+2}$ trebuie să se împartă cu $x^3 - 1$. Înlocuind în polinomul dat pe x^3 prin 1, devine egal cu zero. **63.** $x^5 + ax^4 - 5x^3 - 5ax^2 + 4x + 4a$. **64.** $a = 3, b = 3, c = 2$.

65. *Indicație*. $E = 1 - a^{n+1} - a^{n+m+1} + a^{2n+m+2} = (1 - a^{n+1})(1 - a^{n+m+1}) = (1-a)^2 \cdot (1 + a + a^2 + \dots + a^n)(1 + a + a^2 + \dots + a^{n+m})$. **66.** $nx^{n+1} - x^n - \dots - x^2 - x$. **67.** $x^{n-1} + 2x^{n-2} + 3x^{n-3} + \dots + (n-3)x^3 + (x-2)x^2 + (x-3)x + n$. **69.** $(n-1) \cdot x^{n-2} + 2(n-2)x^{n-3} + 3(n-3)x^{n-4} + \dots + (n-1)$. **70.** $x^2 + 8x + 11$. **71.** $x^2 + 4x + 1$. **72.** c.m.M.d.c. $= x^2 - 3x + 5$; rădăcini necomune $x = \frac{7}{2}$ și $x = -1$, $x = \frac{2}{7}$. **73.** $x = \pm 1$; $y = \pm 3$.

74. *a)* $7 + i$, *b)* -23. **75.** $8i\left(\cos\frac{n\pi}{2} + i\sin\frac{n\pi}{2}\right)$. **76.** $x = 1 + i$, $y = i$. **77.** *a)* 5; *b)* $\sqrt{\frac{2\,123}{25}}$; *c)* $\sqrt{\frac{5x^2 - 4x - 4}{2}}$; *d)* $\sqrt{(a^2 + b^2)(c^2 + d^2)}$; *e)* $\frac{13}{6}$. **86.** *Indicație*. A va fi de forma $r(\cos\theta + i\sin\theta)$, $r = 2\cos\frac{\alpha}{2}$, $\cos\theta = \cos\left(\frac{-\alpha}{2}\right)$ și $\sin\theta = \sin\left(\frac{-\alpha}{2}\right)$, deci $1 + \cos\alpha - i\sin\alpha =$

$$= 2\cos\frac{\alpha}{2}\left[\cos\left(\frac{-\alpha}{2}\right) + i\sin\left(\frac{-\alpha}{2}\right)\right].$$

87. *a)* $2\cos\frac{\alpha}{2} \cdot \left(\cos\frac{\alpha}{2} + i\sin\frac{\alpha}{2}\right)$,
b) $\sec\alpha(\cos\alpha + i\sin\alpha)$, c) $\cos 2\alpha - i\sin 2\alpha$.

88. $\cos 2\alpha + i\sin 2\alpha$. **89.** $\frac{\sqrt{2}}{2}[\cos(2\alpha + 15°) + i\sin(2\alpha + 15°)]$.

91. *Indicație*. $x + \frac{1}{x} = 2\cos\alpha$; de aici $x^2 - 2x\cos\alpha + 1 = 0$;

$x = \cos\alpha \pm i\sin\alpha = \cos(\pm\alpha) + i\sin(\pm\alpha)$.

Dacă $x = \cos\alpha + i\sin\alpha$, $x^n = \cos n\alpha + i\sin n\alpha$,	$x = \cos(-\alpha) + i\sin(-\alpha)$, $x^n = \cos(-n\alpha) + i\sin(-n\alpha) = \cos n\alpha - i\sin n\alpha$.
$\frac{1}{x^n} = \cos n\alpha - i\sin n\alpha$.	$\frac{1}{x^n} = \cos n\alpha + i\sin n\alpha$.

De aici $x^n + \frac{1}{x^n} = 2\cos n\alpha$ și $x^n - \frac{1}{x^n} = \pm 2i\sin n\alpha$.

92. $x^3 = \frac{-25}{3 - 4i}$, scriem numărătorul și numitorul sub formă trigonometrică. **93.** *Indicație*. Punem $x = -\frac{1+i}{\sqrt[5]{4}}u$ și găsim ecuația $u^5 - 1 = 0$, pe care o rezolvăm. **94.** $x_1 = -1, x_2 = 1, x_3 = 2$. **95.** $a = -31, x_1 = -\frac{1}{3}$, $x_{2,3} = \frac{2 \pm 3i}{2}$. **96.** $m = -144$; $x_1 = 3$, $x_2 = 4, x_3 = 12$. **97.** $x_1 = 2, x_2 = -2$; $x_3 = 4$. **98.** *Indicație*. Scriind relațiile între coeficienți și rădăcini, precum și relația dată avem

$x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0$; $x_1(x_2 + x_3) + x_2x_3 = -11$;

$x_1 + x_2 + x_3 = 2$; $x_1x_2x_3 = -a$, și rezolvînd avem:

$3x_3^2 + 8x_3 - 3 = 0$; $x_3' = \frac{1}{3}$; $x_3'' = -3$ și de aici $x_1' = \frac{13}{3}$

$x_2' = -\frac{8}{3}$; $x_3 = \frac{1}{3}$; $a = \frac{104}{27}$.

$x_1'' = 1$; $x_2'' = 4$; $x_3 = -3$; $a'' = 12$.

99. *Indicație*. Rădăcinile trebuie să satisfacă relația $\frac{2}{x_2} = \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_3}$. $x_2 = -(2 \pm \sqrt{2})$, $x_1x_3 = 1$, $x_1 + x_3 = -2 \pm \sqrt{2}$. **100.** $a = 4$, $x_1 = 2$, $x_2 = 4$, $x_3 = 6$. **101.** $\lambda = \pm 2$, $x_1 = \pm 1$, $x_2 = \mp 2$, $x_3 = \pm 1$. **102.** $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = 3$, $a = -6$. **103.** $\lambda = 1$, $\lambda = -4$. **104.** *Indicație*. Din relațiile între coeficienți și rădăcini $x_1 + x_2 + x_3 = 0$. $x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = 1$, putem scrie

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = (x_1 + x_2 + x_3)^2 - 2(x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3) = -2.$$

Dacă înlocuim în ecuația dată pe x pe rînd cu x_1, x_2, x_3 și le adunăm, obținem $x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 + x_1 + x_2 + x_3 - 6 = 0$, adică $x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 = 6$. Apoi dacă înmulțim ecuația dată cu x^2, avem $x^5 + x^3 - 2x^2 = 0$ și înlocuim în această ecuație pe x prin x_1, x_2, x_3 și adunăm, obținem

$$x_1^5 + x_2^5 + x_3^5 = -(x_1^3 + x_2^3 + x_3^3) + 2(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) = -10.$$

Problema se poate rezolva și altfel: aflînd rădăcinile ecuației date

$$x_1 = 1,\ x_{2,3} = \frac{-1 \pm i\sqrt{7}}{2}$$

și verificînd prin calcul relația.

105. *Indicație.* Relațiile între rădăcini și coeficienți

$$x_1 + x_2 + x_3 = -p,\ x_1x_2 + x_2x_3 + x_1x_3 = q,\ x_1x_2x_3 = -r,$$
$$x_1^2 = x_2^2 + x_3^2 \text{ sau } 2x_1^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$$

sau

$$2x_1^2 = (x_1 + x_2 + x_3)^2 - 2(x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3) = p^2 - 2q.$$

$x_1 = \pm\sqrt{\dfrac{p^2 - 2q}{2}}$. Din relațiile scrise se deduce $x_2 + x_3 =$

$$= -p \mp \sqrt{\frac{p^2 - 2q}{2}};\ x_2x_3 = \mp \frac{r}{\sqrt{\dfrac{p^2 - 2q}{2}}},$$

x_2 și x_3 se pot găsi din rezolvarea unei ecuații de gradul II.

Relația a doua se mai scrie $x_1(x_2 + x_3) + x_2x_3 = q$ și, înlocuind cu valorile lor, ajungem la relația de condiție

$$8r^2 + 8pr(p^2 - 2q) + p^2(p^4 - 2q)(p^2 - 4q) = 0.$$

106. *Indicație.* x_1, x_2, x_3 sînt rădăcinile ecuației și avem $x_3 = 2x_2$.

Scriem relațiile între coeficienți și rădăcini; avem

$$x_1 + x_2 + x_3 = 0,\ x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1 = -7\cos^2 q,$$
$$x_1x_2x_3 = -6\cos 2q,\ x_3 = 2x_2.$$

Să eliminăm pe x_1, x_2, x_3 între aceste patru relații, avem

$$x_1 + 3x_2 = 0;\ 3x_1x_2 + 2x_2^2 = -7\cos^2 q;\ 2x_1x_2^2 = -6\cos 2q,$$

sau: $x_1 + 3x_2 = 0,\ x_2(3x_1 + 2x_2) = -7\cos^2 q,\ x_1x_2^2 = -3\cos 2q.$

Din prima avem $x_1 = -3x_2$ și înlocuind, avem $x_2^2 = \cos^2 q,\ x_2^3 = \cos 2q$; eliminînd pe x_2, avem $\cos^6 q = \cos^2 2q$.

Această ecuație se descompune în următoarele:

$$\cos^3 q = \cos 2q \quad (1) \quad \text{și} \quad \cos^3 q = -\cos 2q \quad (2).$$

Ecuația (1) se scrie $\cos^3 q - 2\cos^2 q + 1 = 0$ și ecuația (2) se scrie $\cos^3 q + 2\cos^2 q - 1 = 0$.

Ecuațiile se mai pot scrie

$$(\cos q - 1)(\cos^2 q - \cos q - 1) = 0, \quad (1')$$

$$(\cos q + 1)(\cos^2 q + \cos q - 1) = 0. \quad (2')$$

Din (1′) avem $\cos q - 1 = 0,\ \cos^2 q - \cos q - 1 = 0$.

Din $\cos q = 1,\ q = 2k\pi$. Rădăcinile sînt

$$x_1 = -3,\ x_2 = 1,\ x_3 = 2.$$

Din ecuația $\cos^2 q - \cos q - 1 = 0$ avem $\cos q = \dfrac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$.

Acceptabilă este $\cos q = \dfrac{1 - \sqrt{5}}{2} = -0{,}618,\ q = k\cdot 360^\circ \pm 128^\circ 8' 34''$.

Rădăcinile sînt

$$x_1 = \frac{-3(1 - \sqrt{5})}{2},\ x_2 = \frac{1 - \sqrt{5}}{2},\ x_3 = 1 - \sqrt{5}.$$

Din ecuația (2′) avem $\cos q = -1,\ q = (2k + 1)\pi$ și rădăcinile sînt: $x_1 = -3,\ x_2 = 1,\ x_3 = 2$.

Din $\cos^2 q + \cos q - 1 = 0$; $\cos q = \dfrac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$; $\cos q = \dfrac{-1 + \sqrt{5}}{2} = 0{,}618,\ q = k\cdot 360^\circ \pm 52^\circ 51' 26''$ și rădăcinile sînt

$x_1 = -\dfrac{3(1 - \sqrt{5})}{2},\ x_2 = \dfrac{1 - \sqrt{5}}{2}$ și $x_3 = 1 - \sqrt{5}$, aceleași ca în cazul rădăcinilor date de ecuația (1′).

107. $x_1 = -1,\ x_2 = 1,\ x_3 = 3,\ a = 3$. **108.** $m = 26,\ x_1 = 2,\ x_2 = 3,\ x_3 = 4$. **109.** $x_1 = 4,\ x_2 = 6,\ x_3 = 9,\ \lambda = 114$. **110.** $b = a\sqrt[3]{c}$.

111. $c = -27$, $x_1 = 3$, $x_2 = \frac{3}{2}$, $x_3 = \frac{3}{4}$. **112.** *Indicație.* Împărțim cu a și punem $\frac{b}{a} = m$; avem

$x^3+mx^2+mx+1 = (x+1)[x^2+(m-1)x+1]$ deci: $(m-1)^2-4=0$, care dă $\frac{b}{a} = -1$ sau $\frac{b}{a} = 3$. **113.** $m_1 = -2, m_2 = -5, m_3 = 19$.

114. $x_1 = \frac{1}{2}$, $x_2 = \frac{-3}{2}$, $x_3 = 4$, $x_4 = -5$. **115.** $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = 5$, $x_4 = 7$. **116.** $x_1 = 3$, $x_2 = -3$, $x_3 = -1$, $x_4 = -2$, $a = -18$. **117.** $m = -3$, $x_1 = 2$, $x_2 = -2$, $x_3 = 5$, $x_4 = \frac{1}{2}$. **118.** $a = 24$, $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = 3$, $x_4 = 4$. **119.** *Indicație.* $x_1 = u - 3v$, $x_2 = u - v$, $x_3 = u + v$, $x_4 = u + 3v$.

$$x_1 = \frac{-3}{\sqrt{3}},\ x_2 = \frac{-1}{\sqrt{3}},\ x_3 = \frac{1}{\sqrt{3}},\ x_4 = \frac{3}{\sqrt{3}} \text{ și}$$

$$x_1 = \frac{-3i}{\sqrt{3}},\ x_2 = \frac{-i}{\sqrt{3}},\ x_3 = \frac{i}{\sqrt{3}},\ x_4 = \frac{3i}{\sqrt{3}};$$

iar ecuațiile sînt $3x^4 \pm 10x^2 + 3 = 0$.

120. $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = 3$, $x_4 = 6$.

121. *Indicație.* Rădăcinile fiind în progresie geometrică, putem scrie $x_1 = \frac{u}{a^3}$; $x_2 = \frac{u}{a}$; $x_3 = ua$; $x_4 = ua^3$. Pentru ca ecuația să fie reciprocă, rădăcinile trebuie să fie două cîte două inverse. Deci avem

$$\text{I}\ \begin{cases} x_1x_2 = \dfrac{u^2}{a^4} = 1 \\ x_3x_4 = u^2a^4 = 1 \end{cases} \quad \text{II}\ \begin{cases} x_1x_3 = \dfrac{u^2}{a^2} = 1 \\ x_2x_4 = u^2a^2 = 1 \end{cases} \quad \text{III}\ \begin{cases} x_1x_4 = u^2 = 1 \\ x_2x_3 = u^2 = 1. \end{cases}$$

Sistemele I și II duc la valori numerice pentru u și a^2 (rația), deci la ecuații particulare numerice.

Condiția III ne dă $u = \pm 1$, ecuațiile sînt

$$\left(x - \frac{1}{a^3}\right)\left(x - \frac{1}{a}\right)(x - a)(x - a^3) = 0$$

$$\left(x + \frac{1}{a^3}\right)\left(x + \frac{1}{a}\right)(x + a)(x + a^3) = 0.$$

122. Împărțim cu x^2 și punem $x + \frac{1}{x} = y$; obținem

$$y^2 - (m+1)y + 2(m-1) = 0,\ y_1 = 2,\ y_2 = m - 1$$

$$x_1 = x_2 = 1;\ x_{3,4} = \frac{m - 1 \pm \sqrt{m^2 - 2m - 3}}{2};$$

avem $m^2 - 2m - 3 \geqslant 0$ cînd $m \leqslant -1$ sau $m \geqslant 3$.

123. *Indicație.* $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$, calculăm pe

$$f(y+h) = y^3 + y^2(a + 3h) + y(b + 2ah + 3h^2) + h^3 + ah^2 + bh + c;$$

trebuie să avem $a + 3h = 0$, $b + 2ah + 3h^2 = 0$ și deci

$a^2 = 3b$; $b = \frac{a^2}{3}$; ecuația trebuie să fie de forma

$x^3 + ax^2 + \frac{a^2}{3}x + c = 0$, iar transformarea cerută este

$$x = y - \frac{a}{3}.$$

Se poate determina deci $h = -\frac{a}{3}$ astfel ca ecuația dată să se poată scrie sub formă binomă. **124.** Facem substituția $y = 4x$, adică $f\left(\frac{x}{4}\right) = 0$.

125. $p = -2$, $x_1 = \pm 2$, $x_2 = x_3 = \mp 1$. **126.** $a = 4$, $x = -1$.

127. $x = 2$. **128.** $x^2 + x + 1 = 0$. **129.** 1) $x_1 = 2, x_2 = 3, x_3 = \frac{1}{4}$. 2) $x_1 = -1, x_2 = 1, x_3 = 3$. 3) $x_1 = 1, x_2 = -2, x_3 = \frac{1}{2}$. 4) $x_1 = 1, x_2 = -3, x_3 = -5$. 5) $x_1 = -1, x_2 = -5, x_3 = -12$. 6) $x_1 = 2, x_2 = 3, x_3 = 4$. 7) $x_1 = -1, x_2 = 2, x_3 = \frac{3}{2}$. 8) $x_1 = -2$, $x_{1,3} = \frac{-3 \pm i\sqrt{3}}{2}$. 9) $x_1 = \frac{-1}{2}$, $x_2 = 3$, $x_3 = 4$. 10) $x_1 = 1$, $x_2 = -3$, $x_3 = 5$.

130. $x_1 = -2a$. **131.** *Indicație.* $(x-1-i)(x-1+i) = x^2 - 2x + 2$. Ecuația devine: $(x^2 - 2x + 2)(x^2 + x + 1) = 0$. **132.** $a = -4$, $b = 3$, $x_1 = 3$, $x_2 = -1$. **133.** $x_{3,4} = 5$. **134.** $x = 1$, $x_4 = -5$. **135.** $a = -5$, $b = -1$, $x_3 = 2$, $x_4 = 1$. **136.** $x_{1,2} = 1$, $x_3 = 5$. **137.** $x^3 - x + 3 = 0$. **138.** $x_5 = -1$, $x_{6,7} = \pm i$. **139.** $x_3 = 1$, $x_4 = -1$, $x_5 = \frac{3}{2}$. **140.** 1) $x_1 = 3, x_2 = \frac{1}{3}, x_{3,4} = \pm i$. 2) $x_1 = 1, x_2 = 2, x_3 = 3, x_4 = 4$. 3) $x_{1,2} = 1, x_{3,4} = 3$. 4) $x_1 = 1, x_2 = 2, x_3 = 3, x_4 = 2$. 5) $x_1 = 4, x_2 = -2, x_{3,4} = \frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2}$. 6) $x_1 = 2, x_2 = 5, x_{3,4} = \frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2}$. 7) $x_1 = 1, x_2 = -2, x_3 = 3, x_4 = -5$. 8) $x_1 = 1, x_2 = 2, x_3 = 4$. $x_4 = 5$. 9) $x_1 = 3, x_2 = 6, x_{3,4} = \pm i$. 10) $x_1 = 2, x_2 = 3, x_{3,4} = \pm i$. **141.** $x_1 = \frac{1}{2}$, $x_2 = \frac{1}{3}$, $x_3 = \frac{1}{5}$, $x_4 = \frac{1}{7}$. **142.** 1) $x_1 = 1, x_2 = 2, x_3 = 3, x_{4,5} = \pm i$. 2) $x_1 = 1, x_2 = -1, x_3 = \frac{3}{2}$, $x_{4,5} = 1 \pm \sqrt{2}$. 3) $x_1 = 0, x_2 = 1, x_3 = 2, x_4 = \frac{1}{2}, x_5 = \frac{1}{3}$. 4) $x_1 = 2$, $x_2 = 3, x_3 = 2, x_4 = \frac{1}{2}, x_5 = \frac{1}{3}$. 5) $x_1 = 2, x_2 = -2, x_3 = -6$, $x_{4,5} = \pm i$. 6) $x_1 = -1, x_2 = \frac{1}{3}$. 7) $x_1 = 1, x_2 = -1, x_3 = 2$, $x_4 = -2, x_5 = 6$. 8) $x_1 = 1, x_2 = 4, x_3 = -3, x_{4,5} = \pm i$. 9) $x_1 = 0$, $x_2 = 1, x_3 = -1, x_4 = 2, x_5 = 5, x_6 = -4$. 10) $x_1 = 1, x_2 = -1$, $x_3 = \frac{-2}{3}$, $x_{4,5} = 1 \pm \sqrt{2}$. **143.** $x_1 = -1$, $x_{2,3,4} = 2$, $x_{5,6} = -2$, $x_{7,8} = \frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2}$.

CUPRINS

Capitolul I

Analiza combinatorie și binomul lui Newton

Capitolul II

Divizibilitatea numerelor și a polinoamelor

Capitolul III

Cel mai mare divizor comun și cel mai mic multiplu comun ai numerelor și polinoamelor

Capitolul IV

Numere complexe

Capitolul V

Proprietăți ale polinoamelor și rezolvarea ecuațiilor