1941

LECȚIUNI

DE

TRIGONOMETRIE PLANĂ

PENTRU CLASA VI.

DE

N. ABRAMESCU
PROFESOR LA UNIVERSITATEA DIN CLUJ

Carte aprobată de Ministerul Instrucțiunei cu ordinul No. 503 din 27 Iunie 1930.

EDITURA LIBRĂRIEI SOCEC & Co., S. A. BUCUREȘTI

Taxa timbrului didactic de 5% pentru acest manual s'a plătit direct Casei Corpului Didactic conf. deciziunii No. 2459/924

1930. EDIȚIA I-a — Tipărită în 5000 exemplare

LECȚIUNI
DE
TRIGONOMETRIE PLANĂ

PENTRU CLASA VI.

N. ABRAMESCU
PROFESOR LA UNIVERSITATEA DIN CLUJ

Carte aprobată de Ministerul Instrucțiunei cu ordinul No. 503 din 27 Iunie 1930.

EDITURA LIBRĂRIEI SOCEC & Co., S. A. BUCUREȘTI

Taxa timbrului didactic de 5% pentru acest manual s'a plătit direct Casei Corpului Didactic conf. deciziunii No. 2489/924

1930. EDIȚIA I-a — Tipărită în 5000 exemplare

PREFAȚĂ.

Această nouă ediție a Trigonometriei diferă de precedenta prin aranjarea materiei, urmărind ca să fie cât mai accesibilă începătorilor. În acest scop, am expus mai întâi părțile elementare, însoțite de numeroase exemple, lăsând apoi pentru cei înaintați dezvoltările, pe care le-am indicat chiar în text și le-am expus unele cu litere mici.

Lucrarea pare prea-dezvoltată pentru Licee, dar ceea ce mărește formatul sunt, nu numai numeroasele aplicații și exerciții, dar mai ales indicațiile date la fiecare din ele.

Voiu fi recunoscător acelora care îmi vor indica erorile de calcul și îmi vor trimite judicioasele lor observații. Mulțumesc D-lui D. Constantinescu-Buzău pentru corectarea probelor și Casei Socec & C-ie, București, pentru grija și sacrificiile făcute ca această lucrare să iasă cât mai bine.

N. ABRAMESCU
Profesor la Universitatea din Cluj

REFERAT ASUPRA TRIGONOMETRIEI.

Manualului de Trigonometrie, revăzut de D-l N. Abramescu, un distins autor de cărți didactice, nu i se poate reproșa nimic; poate doar că e mult mai bogat decât prevede programa analitică. Dar tocmai acest surplus de materie, care e risipit în tot corpul manualului, parte ca text parte ca aplicațiuni variate și parte ca indicațiuni la exerciții și exemple numeroase și foarte variate, face valoarea lui deosebită. Prin acest surplus, manualul devine o carte prețioasă și de mare interes pentru cei ce îndrăgesc matematica.

Expunerea, în tot cursul manualului, este, dealtfel ca în toate manualele didactice ale D-lui N. Abramescu, limpede și cristalizată în formule ce cuprind cuvinte puține.

Autorul dă o fericită interpretare și concretizare a noțiunei de funcție trigonometrică prin linia trigonometrică. Explică și analizează toate felurile de table construite și cari se găsesc în tablele de logaritmi ale lui Dupuis. Așa bunăoară explică și arată întrebuințarea tablelor „Lignes trigonométriques naturelles", „Longueur des arcs de cercle pour le rayon 1", „Tables des logarithmes des lignes trigonométriques", etc.

Manualul întrunind calități didactice eminente, propun să fie aprobat potrivit art. 11. al. 1.

Referent
N. I. NICULESCU
Profesor București.

TABLA DE MATERII.

LECŢIUNI DE TRIGONOMETRIE PLANĂ.

INTRODUCERE. ISTORIC.

Trigonometria are ca scop calculul elementelor necunoscute ale triunghiurilor cu ajutorul unui număr suficient de elemente cunoscute. Şi în Geometria plană se studiază rezolvarea triunghiurilor plane, dar aceasta se face cu ajutorul construcţiilor şi măsurărilor, a căror preciziune depinde de perfecţia instrumentelor şi de abilitatea calculatorului. Operaţiunile geometriei se referă numai la laturi sau numai la unghiuri şi nici odată nu intervin unghiurile odată cu laturile. Trigonometria însă stabileşte relaţiuni între laturi şi unghiuri şi cu ajutorul acestora se determină elementele necunoscute ale triunghiurilor cu preciziunea calcului.

Pentru aceasta, Trigonometria se foloseşte de rezultatele *Goniometriei,* care defineşte *funcţiunile goniometrice* (de unghiuri), stabileşte relaţiunile dintre ele, precum şi metodele de calculare a valorilor lor. Aceste funcţiuni depinzând de unghiuri, exprimate printr'un arc de cerc sau prin echivalentul lui în grade, se numesc *circulare,* iar trigonometria care le aplică, se numeşte *trigonometrie circulară*, spre deosebire de alte trigonometrii, ca cea *iperbolică,* etc.

Trigonometria se împarte în *trigonometrie plană* şi *trigonometrie sferică*. Trigonometria plană, de care ne ocupăm, cuprinde goniometria unghiurilor şi rezolvarea triunghiurilor plane, precum şi numeroase aplicaţiuni.

Este imposibil de a fixa într'un mod precis origina Trigonometriei; se poate numai afirma că datează din timpuri foarte vechi. Preoţii vechiului Egipt au fost depozitarii cunoştinţelor umane, pe care legile instituţiunei lor îi obligau să le studieze şi să le culeagă. Vechile matematici ne-au fost transmise prin lucrările Grecilor, pe care preoţii egipteni îi iniţiase. Este probabil că Egiptenii cunoşteau principiile atât de simple ale Trigonometriei, cu care puteau rezolva probleme aşa de naturale cum sunt, cunoaşterea lărgimei unui râu fără a putea fi măsurată direct, distanţa vârfurilor a doi munţi separaţi de o prăpastie, etc.

Se ştie sigur, însă, că principiile Trigonometriei erau bine cunoscute de Greci, care le aplicau la măsurarea distanţelor pământeşti şi la multe probleme din Astronomie. Numeroasele calcule necesare atâtor lucrări pe care le-a executat marele astronom *Hiparch* (din Niceea, Bithynia) făcură să nască (130 a. Chr.) între mâinile sale Trigonometria.

Cunoştinţele operilor lui Hiparch ne-au fost transmise de *Ptolemeu* (125 d. Cr.), cel mai mare astronom al antichităţei, în a cărui mare lucrare, *Sintaxa matematică* (numită de Arabi şi *Almagestul)*, se găseşte primul tratat de Trigonometrie plană şi sferică, care ne este cunoscut.

In secolul XV nu se cunoştea altă ediţie a lui Ptolemeu decât traducerea lăsată de Arabi, dar care era defectoasă din cauza nepriceperei celor ce o făcuse. *Purbach* (născut în Bavaria în 1421) restabili adevăratul sens şi textul lui Ptolemeu. El introduse sinusul în Trigonometrie pentru a înlocui coardele şi făcu prima tablă trigonometrică. Unii autori afirmă că introducerea sinusului se datoreşte lui *Mohamed-Ben-Geber*, prinţ din Siria, numit şi *Albategnius* (877—929).

Tratatul triunghiurilor, care este o trigonometrie complectă a lui *Regiomontanus* (1436—1575), diferă puţin de trigonometria de azi.

Table trigonometrice au fost calculate, cu 11 zecimale, de *Joachim Reticus* (1514—1575) şi *Barthelemi Pitiscus*, a cărui lucrare (făcută în 1610). cu 16 zecimale, poate servi pentru verificarea tablelor de azi.

După invenţia logaritmilor de către *Neper* (1550—1617), logaritmii fură aplicaţi la calcule trigonometrice; primele table au fost alcătuite în 1625, iar *Henrion*, în 1626, a editat la Paris primele table cu 7 zecimale.

Cu progresul matematicilor, principiile Trigonometriei elementare nu mai fură considerate de cât cazuri speciale ale unei Ştiinţe mult mai generale şi mai întinse. Funcţiunile circulare deveniră obiectul unui studiu mai înalt, care este din domeniul *Analizei matematice*.

NOŢIUNI INTRODUCTIVE.
ARCE. UNGHIURI.

1. **Arce. Unghiuri.** Să considerăm, în cercul cu centru O şi raza r (Fig. 1), unghiul la centru, a. Între acest unghi şi arcul corespunzător AB, vom stabili o relaţie importantă în baza următoarei proprietăţi.

Într'un cerc raportul a două arce oarecare este egal cu raportul unghiurilor la centru corespunzătoare. În adevăr, să considerăm arcele AB şi CD, cărora le corespund unghiurile la centru $AOB=a$, $COD=b$ (Fig. 1). Fie CE măsura comună a arcelor AB şi CE, care se cuprinde în AB de m ori şi în CD de n ori. Avem

$$(1)\qquad \frac{\text{arc AB}}{\text{arc CD}}=\frac{m\,.\,\text{CE}}{n\,.\,\text{CE}}=\frac{m}{n}.$$

Însemnând cu α unghiul la centru corespunzător arcului CE, avem

$$(2)\qquad \frac{\sphericalangle AOB}{\sphericalangle COD}=\frac{m\,.\,\alpha}{n\,.\,\alpha}=\frac{m}{n}.$$

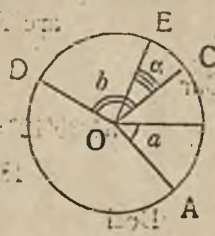

Fig. 1.

Comparând egalităţile (1) şi (2), rezultă

$$(3)\qquad \frac{\text{arc AB}}{\text{arc CD}}=\frac{\sphericalangle AOB}{\sphericalangle COD},$$

adică raportul a două arce este egal cu raportul unghiurilor la centru corespunzătoare.

Considerând ca unitate de arc, acel arc care corespunde unui unghiu la centru egal cu unitatea, rezultă, din formula (3), că *măsura unui arc este egală cu măsura unghiului la centru corespunzător.*

2. **Măsura lungimei arcului când unghiul este exprimat în grade.** Să luăm ca unitate a unghiului, unghiul la centru, căruia îi corespunde arcul pe cerc egal cu a 360-a parte din lungimea cercului; acesta se zice unghi de un grad; gradul se împarte în 60 minute şi minuta în 60 secunde şi se

notează respectiv cu următoarele semne ^{0}, $'$, $''$, puse deasupra numerilor. De ex., $30^0\ 45'\ 26''$ se citeşte 30 grade, 45 minute, 26 secunde. În aceste condiţii, însemnând cu n^0 şi 360^0, numărul de grade ce corespunde arcului AB şi lungimei cercului de rază r, pe care este luat acest arc, avem, din formula (3),

$$\frac{\text{măs arc AB}}{2\pi r}=\frac{n^0}{360^0},$$

de unde

$$\text{(4)}\qquad \text{măs arc AB}=\frac{\pi r n^0}{180^0},\quad n^0=\frac{\text{măs arc AB}}{r}\times\frac{180^0}{\pi}.$$

Cu aceste formule se poate calcula lungimea unui arc de pe un cerc de raza r, când se cunoaşte unghiul la centru corespunzător (măsurat în grade) şi invers, fiind cunoscut arcul, se poate calcula unghiul la centru.

Exemplu. Să se afle lungimea arcului corespunzător unghiului la centru de $54^0\ 30'\ 12''$, raza cercului fiind de 6 dm. Avem, din formula (4),

$$\text{arc AB}=\frac{\pi r n^0}{180^0}=\frac{3{,}14\times 6\times 54^0\ 30'\ 12''}{180^0}.$$

Dar

$$54^0 30' 12''=[(54\times 60+30)\times 60+12]''=196212'',$$

$$180^0=(180\times 60\times 60)=648000''.$$

Deci

$$\text{arc AB}=\frac{3{,}14\times 6\times 196212}{648000}=\frac{3{,}14\times 32{,}702}{18}=5{,}704 \text{ dm.}$$

3. **Măsura lungimei arcului când unghiul este exprimat în radiani.** *Radian* este unghiul la centru căruia îi corespunde un arc egal cu raza cercului. Să înlocuim în formula (3) arcul CD cu raza r a cercului; atunci unghiul său da centru, COD, este egal cu 1 radian. Primul membru al acestei formule devine

$$\frac{\text{arc AB}}{r},$$

iar membrul al doilea fiind raportul dintre un unghi AOB şi unitatea de măsură COD = radianul, este măsura n a unghiului AOB exprimată în radiani. Avem, deci, egalând ambii membrii,

(5) $\quad$ $\text{măs}\ \sphericalangle AOB = \dfrac{\text{arc AB}}{r}, \quad n = \dfrac{\text{arc AB}}{r},$

sau

(6) $\quad$ $\text{arc AB} = r \times \sphericalangle AOB, \ \text{arc AB} = r \times n.$

Cu formula (5) se calculează valoarea n a unghiului AOB, în radiani, când se cunoaşte lungimea AB a arcului corespunzător unghiului la centru AOB în cercul cu raza r; cu relaţia (6) se calculează lungimea arcului AB, corespunzător unghiului la centru AOB, exprimat în radiani.

Astfel, numărul n de radiani corespunzător unui arc AB, aste $\dfrac{\text{arc AB}}{r}$, şi se obţine împărţind lungimea arcului AB cu raza r a cercului. Ştiind că unui arc de pe cercul cu raza r îi corespund n radiani, lungimea arcului AB este egală cu $n \times r$, adică cu produsul numărului n de radiani cu raza r a cercului.

4. **Relaţia dintre numărul de grade şi numărul de radiani corespunzătoare aceluiaşi unghi la centru.** Să însemnăm cu n^0 şi n numerile care exprimă câte grade şi câţi radiani corespund unghiului la centru OAB. Din formula (4), deducem

$$\frac{\text{arc AB}}{r} = \frac{\pi n^0}{180^0},$$

pe care comparând-o cu (5), obţinem

(7) $$n = \frac{\pi n^0}{180^0}, \quad n^0 = \frac{180^0 n}{\pi},$$

relaţiuni care permit să calculăm valoarea n a unghiului în radiani când se cunoaşte valoarea n^0 a aceluiaşi unghi în grade şi invers.

Făcând în a doua din formulele (7) pe $n = 1$, avem

$$n^0 = \frac{180^0}{\pi} = \frac{180^0}{3,1416},$$

relaţie care dă numărul de grade ce corespund unui unghi la centru egal cu un radian. Operaţia o facem în modul următor

$$\begin{array}{r|l} 1800000 & 31416 \\ \hline 229200 & 57^0 \\ \hline 9288 & \end{array} \qquad \begin{array}{l} 9288 \times 60 = 557280 \\ \begin{array}{r|l} 557280 & 31416 \\ \hline 243120 & 17' \\ \hline 23208 & \end{array} \end{array}$$

$$\frac{23208 \times 60}{31416} = 44'' \text{ aproape.}$$

Deci unui radian îi corespund $57^0 17' 44''$.

Numărul de grade care corespund unui unghi de 2 radiani este

$$(57^0 14' 44'') \times 2 = 114^0 34' 88'' = 114^0 35' 28''.$$

De asemenea, arcul care corespunde unui unghi egal cu $\frac{1}{2}$ radian, este $(57^0 17' 44'') : 2$, şi se calculează astfel

$57^0 : 2 = 28^0$	$1^0 \times 60 = 60'$	$1' \times 60 = 60''$
$\overline{17}$	$60' + 17' = 77'$	$60'' + 44'' = 104''$
$\overline{\ 1}$	$77' : 2 = 38'$	$104 : 2 = 52''$
	$\overline{17}$	
	$\overline{\ 1}$	

Deci, unui arc egal cu $\frac{1}{2}$ radian, îi corespund $28^0 38' 52''$.

Considerând arcul de 360^0, adică lungimea cercului, pentru a găsi câţi radiani corespund acestui arc, ne servim de formula (5), adică împărţim lungimea cercului $2\pi r$ (unde $\pi = 3{,}1416$) cu aceea a razei r, şi avem

$$\frac{2\pi r}{r} = 2\pi = 2 \times 3{,}1416 = 6{,}2832 \text{ radiani.}$$

Deci, lungimei arcului de 360^0 corespund 2π radiani.

»	»	180^0	»	π	»
»	»	90^0	»	$\frac{1}{2}\pi$	»
»	»	45^0	»	$\frac{1}{4}\pi$	»
»	»	1^0.	»	$\frac{\pi}{180}$,	»

unde π se înlocueşte cu 3,1416.

Urmează deci că unghiurile, arcele, se pot exprima sau în grade, sau în radiani. Astfel, când se dă $a + b = 90^0$, atunci a şi b sunt exprimaţi în grade; iar, când se dă $a + b = \pi$, a şi b sunt exprimaţi în radiani, π reprezentând numărul de radiani corespunzător la 180^0.

Deci, fiind dat un unghi a, unghiul complimentar al său, adică unghiul care împreună cu a fac 90^0, este în grade $90^0 - a$, sau în radiani $\frac{\pi}{2} - a$. În rezumat, când e vorba de unghiuri, în formule, π reprezintă 180^0.

Exemplu. Să se afle unghiul la centru corespunzător arcului de 6,396 dm, raza cercului fiind de 8 dm.

Unghiul în radiani îl obținem din (5), iar în grade din (4).

Avem deci, în radiani,

$$n = \frac{\text{arcAB}}{r} = \frac{6,396}{8} = 0,7995 \text{ radiani},$$

iar în grade,

$$n^0 = \frac{\text{arcAB}}{r} \times \frac{180^0}{\pi} = 0,7995 \times 57^0 17' 44'' = 45^0 48' 28''.$$

Acest ultim număr se mai putea deduce și din a doua din formulele (7).

EXERCIȚII.

1. Raza cercului fiind 1 cm, să se afle lungimile arcelor care corespund unghiurilor la centru de 1^0; $1'$; $1''$.

R. $\frac{\pi}{180^0} = 0,0174$; $\frac{\pi}{180 \times 60} = 0,00029$; $\frac{\pi}{180 \times 60 \times 60} = 0,000005$.

2. Să se afle lungimile arcelor ce corespund, unghiului la centru de 35^0, raza cercului fiind 5 cm.; unghiului de $50^0 15'$, raza fiind 4,5 dm; unghiului de $3^0 9' 12''$, raza fiind de 9 m.

R. 3,05 cm; 3,94 dm; 0,495 m.

3. Aria unui cerc fiind 123,45 cm^2., să se afle arcul corespunzător unghiului la centru de $15^0 20'$.

R. Se efectuiază câtul cu două zecimale dintre 123,45 și 3,14; se extrage rădăcina pătrată din acest cât și se află raza cercului. Arcul este 1,65 m.

4. Unghiul format de tangentele în două puncte ale cercului cu raza 720 m este de 135^0; să se afle lungimea arcului dintre cele două puncte.

R. Ducând razele punctelor de contact, se formează un patrulater, care are unghiul din centrul O egal cu suplimentul lui 135^0. Se caută arcul ce corespunde acestui unghi la centru. Se găsește 565,4 m.

5. Să se afle, în radiani și în grade, unghiul ce corespunde arcului de 9,6 dm în cercul cu raza 20,5 dm. Se va lua $\pi = 3,1416$.

R. 0,46829 rad.; $26^0 49' 54''$.

6. Suma lungimilor a două cercuri este 89,46 m; suma arcelor care corespund la două unghiuri la centru egale în cele două cercuri este 12,35 m. Să se afle unghiul de la centru.

R. Însemnând cu r și r' razele celor două cercuri și n^0 mărimea unghiului la centru, avem

$$2\pi r + 2\pi r' = 89,46, \quad \frac{\pi r n^0}{180^0} + \frac{\pi r' n^0}{180^0} = 12,35.$$

Se înlocuește $(r+r')$ din ecuația a doua cu valoarea sa din prima; se obține $n^0 = 49^0 41' 54''$; 0,8674 rad. ($\pi = 3,1416$).

7. Lungimile a două cercuri sunt respectiv 66,5 cm și 30,15 cm. Raportul a două unghiuri la centru în aceste cercuri este $^3/_4$, iar suma

arcelor corespunzătoare este 19,51 cm. Să se afle unghiurile la centru.

R. Se calculează întâi razele cercurilor şi se înlocuesc în ecuaţia ce dă suma arcelor şi se obţine o ecuaţie între numerile de grade n şi n'. Se rezolvă această ecuaţie şi $n : n' = 3 : 4$ şi se găseşte $87^\circ 46'$; $65^\circ 49' 30''$.

8. Care este mai mare, unghiul de 144° sau cel de 2,5 rad.

R. Cel dintâi; 2,5 rad.$=143^\circ 14' 22''$.

9. Câte grade are unghiul de 0,1 rad.

R. $5^\circ 43' 47''$.

10. Unul din unghiurile ascuţite ale unui triunghi dreptunghic este de 1,15 rad. Să se calculeze câţi radiani are celalt unghi ascuţit.

R. În 90° sunt $\frac{90^\circ}{57^\circ 17' 44''}$ rad. $= \frac{90}{\frac{180}{3,1416}} = 1,57$ rad. Celalt unghi are (1,57—1,15) rad.$= 0,42$ rad.

11. Două unghiuri ale unui triunghi oarecare au $\frac{1}{2}$ rad. şi $\frac{2}{7}$ rad.; să se determine unghiul al treilea.

R. În 180° sunt $\frac{180^\circ}{57^\circ 17' 44''}$ rad. $= \frac{180}{\frac{180}{3,1416}}$ rad.$=3,1416$ rad. Celalt unghi este $\left(3.1416 - \frac{1}{2} - \frac{2}{7}\right)$ rad.$= 2,356$ rad., 2356×1 rad.$=2,356 \frac{180}{3,1416} = 135^\circ$.

12. În cercul cu raza 2,5 cm. un arc corespunde unui unghi de centru de 1,5 rad. Să se afle unghiul la centru ce corespunde aceluiaş arc în cercul cu raza 1 cm.

R. arc$AB = n \times r$, arc $AB = n' \times r'$; $1,5 \times 2,5 = n' \times 1$. 3,75 rad. $214^\circ 51' 52''$.

LINII TRIGONOMETRICE IN PRIMUL CADRAN.

LINIILE TRIGONOMETRICE ALE UNGHIURILOR ASCUŢITE.

5. **Funcţiuni goniometrice.** Să considerăm unghiul XOY $=a$ (Fig. 2) şi din două puncte oarecare B şi B′ ale laturei OY să ducem perpendicularele BA şi B′A′ pe latura OX.

În triunghiul OA′B′, dreapta AB fiind paralelă cu latura A′B′, se ştie că triunghiurile OAB şi OA′B′ sunt asemenea. Deci laturile sunt proporţionale, adică

$$\frac{OA}{OA'}=\frac{OB}{OB'}=\frac{AB}{A'B'}.$$

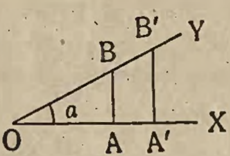

Fig. 2.

Egalând raportul al treilea cu al doilea. apoi raportul întâi cu al doilea, în fine raportul al treilea cu întâiul, avem

$$\frac{AB}{A'B'}=\frac{OB}{OB'},\ \frac{OA}{OA'}=\frac{OB}{OB'},\ \frac{AB}{A'B'}=\frac{OA}{OA'}.$$

Schimbând în aceste proporţii locul termenilor mijlocii, obţinem

$$\frac{AB}{OB}=\frac{A'B'}{OB'},\ \frac{OA}{OB}=\frac{OA'}{OB'},\ \frac{AB}{OA}=\frac{A'B'}{OA'}.$$

Deci, oricum am lua punctele B şi B′ pe latura OY, rapoartele

$$\frac{AB}{OB},\ \frac{OA}{OB},\ \frac{AB}{OA}$$

au aceeaşi valoare şi pentru punctul B şi pentru B′, deci păstrează o valoare constantă.

Prin urmare, fiind dat unghiul a=XOY, ducând dintr'un punct oarecare B al unei laturi perpendiculara BA pe cealaltă latură a unghiului, rapoartele

$$\frac{AB}{OB},\ \frac{OA}{OB},\ \frac{AB}{OA},\ \frac{OA}{AB},\ \frac{OB}{OA},\ \frac{OB}{AB}$$

sunt constante, oricare ar fi poziţia punctului B pe latura unghiului dat.

Aceste rapoarte caracterizează mărimea unghiului a, care nu depinde de lungimea laturilor sale, astfel că, dacă unghiul a este dat, se pot calcula aceste rapoarte şi invers, fiind dat unul din aceste şase rapoarte, se poate, cu ajutorul unei construcţii geometrice de triunghi dreptunghic, să aflăm mărimea unghiului.

Dacă latura OX este fixă, iar latura OY se învârteşte în jurul lui O, adică dacă unghiul a variază, atunci rapoartele considerate vor lua alte valori, vor varia cu unghiul a, sunt deci funcţiuni de unghiul a. De aceea aceste şase rapoarte se numesc *funcţiuni de unghi,* sau *funcţiuni goniometrice.*

Ele se numesc respectiv $\frac{AB}{OB}$ *sinus a,* $\frac{OA}{OB}$ *cosinus a,* $\frac{AB}{OA}$ *tangentă a,* $\frac{OA}{AB}$ *cotangentă a,* $\frac{OB}{OA}$ *secantă a,* $\frac{OB}{AB}$ *cosecantă a* şi se scriu

$$\frac{AB}{OB} = \sin a, \quad \frac{OA}{OB} = \cos a, \quad \frac{AB}{OA} = \operatorname{tg} a,$$

$$\frac{OA}{AB} = \operatorname{cotg} a, \quad \frac{OB}{OA} = \sec a, \quad \frac{OB}{AB} = \operatorname{cosec} a.$$

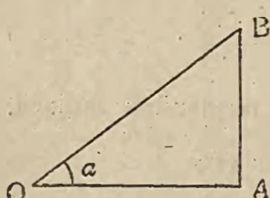

Fig. 3.

Observând că aceste şase rapoarte stau în legătură cu triunghiul dreptunghic format OAB (Fig. 3), ale cărui catete şi ipotenuză sunt OA, AB, OB, putem zice că: *sin a este raportul catetei opuse către ipotenuză; cos a raportul catetei adiacente către ipotenuză; tg a raportul catetei opuse către cateta adiacentă; cotg a raportul catetei adiacente către cateta opusă; sec a raportul ipotenuzei către cateta adiacentă; cosec a raportul ipotenuzei către cateta opusă.*

Exemple. 1⁰ *Să se calculeze unghiul a, ştiind că sin a* $= \frac{3}{5}$. Pentru aceasta, luăm o lungime AB egală cu 3 (după o anumită scară de reducere); în A ridicăm o perpendiculară pe AB, iar din B ca centru şi cu o rază egală cu 5, descriem un cerc ce tae această perpendiculară în O. Unghiul căutat este AOB.

2⁰. *Să se calculeze unghiul a, pentru care cos a* $= \frac{4}{5}$. Aceasta revine la construirea unui triunghi dreptunghiu, căruia i-se cunoaşte o catetă şi ipotenuza. Luăm o dreaptă $OA = 4$; în A ridicăm o perpendiculară; fie B punctul de intersecție al acestei perpendiculare cu cercul descris din O ca centru cu raza 5. Unghiul căutat este AOB.

3°. *Să se calculeze unghiul a, pentru care* $tg\, a = \frac{3}{4}$. Problema revine la construirea unui triunghi dreptunghic, căruia i-se cunosc catetele. Luăm pe laturile unui unghi drept lungimile $AO=4$, $AB=3$, iar unghiul căutat este AOB.

Observare. Prin procedeul de mai sus, aflăm valoarea unghiului, în mod grafic. Valoarea sa în grade, prin calcul, o vom afla mai departe.

6. **Linii trigonometrice.** Rapoartele prin care am definit funcțiunile goniometrice au o reprezentare grafică simplă, dacă alegem potrivit punctul B (Fig. 3) de pe latura unghiului a de unde ducem perpendiculara AB pe cealaltă latură.

În adevăr, dacă luăm distanța $OB = 1$, atunci rapoartele, care definesc, de ex., funcțiunile sinus a și cosinus a, devin (Fig. 3)

$$\sin a = \frac{AB}{OB} = \frac{AB}{1} = AB, \qquad \cos a = \frac{OA}{OB} = OA.$$

Vedem, deci, că, luând ca unitate de măsură OB, atunci sinusul unghiului a este reprezentat de gerpendiculara AB, iar $\cos a$ de segmentul OA.

Aceste segmente care reprezintă funcțiunile goniometrice se zic *linii trigonometrice.* Dar; ca să avem această reprezentare grafică simplă, a fost nevoe de a lua $OB = 1$, adică de a considera că unghiul dat a este unghi la centru în cercul cu centrul O în vârful unghiului, și cu raza $OB = 1$ (egală cu unitatea de măsură). Acest cerc cu raza egală cu unitatea se zice *cerc trigonometric.*

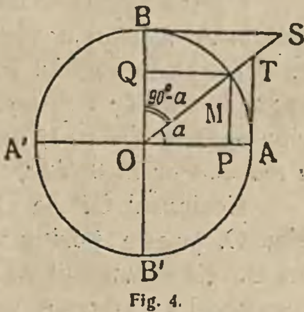

Fig. 4.

Să considerăm cercul cu centrul O (Fig. 4) și cu raza $OA = 1$ și fie AA′ și BB′ doi diametri perpendiculari. Să luăm în sensul direct (invers ca acele unui ceasornic), un unghi la centru $AOM = a$, care este măsurat în grade de arcul AM, A fiind origina și M extremitatea arcului.

Diametrii AA′ și BB′ împart cercul în patru cadrane; AOB este primul cadran, BOA′ al doilea, A′OB′ al treilea și B′OA al patrulea, fiecare cadran având câte 90°, căci tot cercul are 360°. Vom presupune că orice unghi AOM are origina în A de unde socotim arcele corespunzătoare AM. Astfel, un unghi cu extremitatea M în primul cadran, cum este cazul figurei 4, este cuprins între 0° şi 90° (este ascuţit); un unghi cu extremitatea în cadranul al doilea are cel mult 180° şi este cuprins între 90° şi 180°; un unghi cu extremitatea în cadranul al treilea, adică M între A′ şi B′, este cuprins între 180° şi 270°; şi în fine, un unghi din cadranul al patrulea, cu extremitatea M între B′ şi A, este cuprins între 270° şi 360°.

Vom considera mai întâi unghiuri AOM ascuţite, cu extremitatea M în primul cadran. Fie (Fig. 4) P şi Q proecţiile punctului M pe diametri OA şi OB. Fie de asemenea, T şi S intersecţiile razei OM cu tangentele în A şi B la cercul O.

7. **Sinus. Cosinus.** Din definiţia funcţiunilor goniometrice, ştim că (Fig. 4)

$$\sin a = \frac{PM}{OM}, \qquad \cos a = \frac{OP}{OM}.$$

Cum am luat raza $OM = 1$, urmează

$$\sin a = PM, \qquad \cos a = OP,$$

astfel că (în cercul trigonometric, raza egală cu unitatea) *sinusul unui unghi (arc) este perpendiculara lăsată din o extremitate a arcului pe diametrul ce trece prin cealaltă extremitate; cosinusul unui arc este distanţa de la centrul cercului la piciorul sinusului,* sau, *proecţia* OP *a razei* OM *pe deametrul de origină* OA.

Cum (Fig. 4) $PM = OQ$, urmează că $\sin a = OQ$, adică sinusul se măsoară pe diametrul B′B, de la origina O, şi este pozitiv când Q cade între O şi B şi negativ între O şi B′.

Când unghiul $AOM = a$ este egal cu zero, punctul M este în A, sinusul unghiului a, adică segmentul PM, este egal cu zero. Dacă unghiul creşte, segmentul PM creşte, iar când unghiul este de 90°, punctul M vine în B, segmentul PM devine egal cu $OB = 1$, deci $\sin 90° = 1$. Aşa dar, *când unghiul a variază de la* 0° *la* 90°, *$\sin a$ creşte de la* 0 *la* 1.

Cosinusul OP se măsoară pe diametrul A′A, de la origina O, şi este pozitiv la dreapta lui O şi negativ la stânga lui O. Când unghiul AOM este egal cu zero, cosinusul, adică segmentul OP devine egal cu $OA = 1$. Dacă unghiul creşte, segmentul OP se micşorează, deci $\cos a$ descreşte, iar când unghiul a este de 90^0, OP devine egal cu 0, deci $\cos 90^0 = 0$. Aşa dar, *când unghiul a creşte de la 0^0 la 90^0, cos a descreşte de la 1 la 0.*

8. **Tangenta.** Conform definiţiunei, avem (Fig. 4)

$$\operatorname{tg} a = \frac{PM}{OP}.$$

Dar PM şi AT fiind paralele, triunghiurile OPM şi OAT sunt asemenea şi deci

$$\frac{PM}{OP} = \frac{AT}{OA} = \frac{AT}{1} = AT, \qquad \operatorname{tg} a = AT.$$

AT este linia trigonometrică a funcţiunei tangentă, astfel că *tangenta este segmentul din tangenta geometrică dusă în origina* A *a arcului la cercul trigonometric, şi cuprins între această origină şi punctul de intersecţie al tangentei cu raza* OM *ce trece prin cealaltă extremitate a arcului.*

Tangenta trigonometrică se măsoară pe tangenta geometrică AT, de la origina A. Tangentele arcelor din primul cadran sunt măsurate de la A către T şi sunt pozitive.

Când unghiul AOM este egal cu zero, M vine în A, atunci segmentul AT este nul, tangenta este egală cu zero, $\operatorname{tg} 0^0 = 0$. Dacă unghiul creşte, segmentul AT se măreşte, iar când unghiul a se apropie de 90^0, adică diferă de 90^0 cu o cantitate infinit de mică şi pozitivă ε, raza OM devine paralelă cu tangenta în A la cerc, punctul lor T de intersecţie este la infinit, şi deci segmentul AT devine foarte mare, infinit de mare, şi se notează cu ∞. Deci $\operatorname{tg}(90^0 - \varepsilon)$ tinde către infinit şi se scrie

$$\operatorname{tg}(90^0 - \varepsilon) \to \infty.$$

Aşa dar, arcul a variind de la 0^0 la 90^0, $\operatorname{tg} a$ creşte de la 0 la ∞.

9. **Cotangenta.** Prin definiţie, avem (Fig. 4)

$$\cot a = \frac{OP}{PM}.$$

Dar $OP = QM$, $PM = OQ$. Deci

$$\operatorname{cotg} a = \frac{QM}{OQ}.$$

Din triunghiurile asemenea OMQ, OSB, deducem

$$\frac{QM}{OQ} = \frac{BS}{OB} = \frac{BS}{1} = BS,$$

deci $\cot g a = BS$. Segmentul BS este linia trigonometrică a funcțiunei cotangentă și deci *cotangenta este segmentul din tangenta geometrică dusă prin extremitatea răzei perpendiculară pe raza ce trece prin origina arcului și cuprins între punctul de contact și raza prelungită dusă prin extremitatea arcului considerat.*

Cotangentele se socotesc pe tangenta la cerc în punctul B, de la origina B, și sunt pozitive la dreapta lui B, adică, pentru arcele din primul cadran.

Când unghiul $AOM = a$ (Fig. 4) este foarte mic, raza OM este aproape paralelă cu tangenta BS, punctul lor S de intersecție este aruncat la infinit, segmentul BS devine infinit de mare. Dacă unghiul crește, segmentul BS se micșorează, iar când unghiul $a = 90^0$, BS devine egală cu zero, $\cot g\, 90^0 = 0$. Așa dar, unghiul variind de la 0^0 la 90^0, $\cot g a$ descrește de la ∞ (infinit) la 0.

10. Secanta(1). Știm (Fig. 4) că

$$\sec a = \frac{OM}{OP}.$$

Triunghiurile OPM, OAT fiind asemenea, avem

$$\frac{OM}{OP} = \frac{OT}{OA} = \frac{OT}{1} = OT, \quad \sec a = OT.$$

Linia trigonometrică a secantei este OT. Deci, *secanta este segmentul* OT, *măsurat din centrul cercului, până la punctul de intersecție* T *al tangentei la cerc în origina* A *a arcului, cu prelungirea răzei dusă prin extremitatea arcului.*

Secantele se socotesc pe razele OT ce unesc centrul O cu extremitatea M a arcului și sunt pozitive dacă punctele M și T sunt de aceeași parte a centrului O, adică, dacă pentru o întâlni tangenta în A trebue să prelungim raza în acelaș sens cu extremitatea M a arcului. Pentru arcele din cadranul întâi, $\sec a$ este pozitivă.

Când unghiul $a = 0^0$, OT devine egal cu $OA = 1$, deci $\sec 0^0 = 1$; dacă a crește, segmentul OT adică $\sec a$ crește, iar când $a = 90^0$ raza OM devine paralelă cu tangenta în A, OT devine foarte mare, deci $\sec 90^0 = \infty$. Așa dar, când a variază de la 0^0 la 90^0, $\sec a$ crește de la 1 la ∞.

11. Cosecanta(1). Prin definiție, avem (Fig. 4)

$$\operatorname{cosec} a = \frac{OM}{PM}.$$

Dar $PM = OQ$. Deci

$$\operatorname{cosec} a = \frac{OM}{OQ}.$$

(1) Nu face parte din programul clasei VI.

Triunghiurile OMQ și OSB fiind asemenea, avem

$$\frac{OM}{OQ}=\frac{OS}{OB}=\frac{OS}{1}=OS,\ \text{cosec}a=OS.$$

OS este linia trigonometrică a cosecantei. Deci, *cosecanta este segmentul OS, măsurat din centrul cercului până la punctul de intersecție S al tangentei la cerc prin extremitatea razei perpendiculară pe raza ce trece prin origina arcului, cu prelungirea razei dusă prin extremitatea arcului.*

Cosecantele se socotesc pe razele OS ce unesc centrul O cu extremitatea M a arcului și sunt pozitive dacă, pentru a întâlni tangenta în B la cerc, trebue să prelungim raza în acelaș sens cu extremitatea arcului. Pentru arcele din cadranul întâi, cosecantele sunt pozitive.

Când unghiul $a=0^0$, raza OM este paralelă cu tangenta BS, segmentul OS este foarte mare, cosec $0^0=\infty$. Dacă unghiul crește, segmentul OS descrește, și când $a=90^0$, OS devine egal cu $OB=1$, deci cosec $90^0=1$. Așa dar, când unghiul a variază de la 0^0 la 90^0, cosecanta descrește de la ∞ la 1.

12. Relațiuni între liniile trigonometrice ale aceluiași unghi. Fiind dat un unghi $a=AOB$ (Fig. 5), am văzut că rapoartele care definesc funcțiunile goniometrice nu depind de unitatea de lungime aleasă, așa că putem presupune că această unitate este OB, adică $OB=1$. Să ducem BA perpendiculară pe cealaltă latură a unghiului.

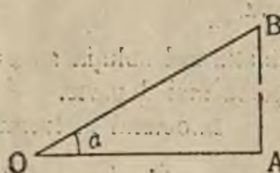

Fig. 5.

Considerând rapoartele care definesc funcțiunile goniometrice, vom stabili relațiuni între funcțiunile aceluiași unghi, adică relațiuni între liniile trigonometrice ale aceluiași unghi.

1⁰. Avem (Fig. 5)

$$\sin a=\frac{AB}{OB}=\frac{AB}{1}=AB,\ \cos a=\frac{OA}{OB}=OA,$$

$$\text{tg}a=\frac{AB}{OA}=\frac{\sin a}{\cos a},\ \text{cotg}a=\frac{OA}{AB}=\frac{\cos a}{\sin a}.$$

$$\text{cotg}a\times\text{tg}a=\frac{\cos a}{\sin a}\cdot\frac{\sin a}{\cos a}=1,\ \text{cotg}a=\frac{1}{\text{tg}a}.$$

Deci

$$\text{(I)}\qquad \text{tg}a=\frac{\sin a}{\cos a},\ \text{cotg}a=\frac{\cos a}{\sin a},\ \text{cotg}a=\frac{1}{\text{tg}a}.$$

De asemenea

$$\sec a=\frac{OB}{OA}=\frac{1}{\cos a},\ \text{cosec}a=\frac{OB}{AB}=\frac{1}{\sin a}.$$

Deci

(II) $$\sec a = \frac{1}{\cos a}, \quad \operatorname{cosec} a = \frac{1}{\sin a}.$$

2°. Din triunghiul dreptunghic OAB (Fig. 5), avem

$$\overline{OA}^2 + \overline{AB}^2 = \overline{OB}^2,$$

de unde

(III) $$\cos^2 a + \sin^2 a = 1,$$

care este una din relaţiile fundamentale ale Trigonometrii.

13. **Exprimarea liniilor trigonometrice cu una din ele.** Cu ajutorul relaţiunile stabilite, putem găsi şi altele între liniile trigonometrice ale aceluiaşi unghi.

1°. *Fiind cunoscut sin a să se afle celelalte linii trigonometrice.* Din formula (III), deducem

(IV) $$\cos^2 a = 1 - \sin^2 a,$$

sau $$\cos a = \sqrt{1 - \sin^2 a},$$

înlăturând soluţia $\cos a = -\sqrt{1-\sin^2 a}$, pe care o vom interpreta mai departe.

Inlocuind în formulele (I), deducem

$$\operatorname{tg} a = \frac{\sin a}{\cos a} = \frac{\sin a}{\sqrt{1-\sin^2 a}}, \quad \operatorname{cotg} a = \frac{\cos a}{\sin a} = \frac{\sqrt{1-\sin^2 a}}{\sin a}.$$

Exemplu. $\sin a = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Avem

$$\cos a = \sqrt{1-\sin^2 a} = \sqrt{1 - \frac{3}{4}} = \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}, \quad \operatorname{tg} a = \frac{\sin a}{\cos a} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} = \sqrt{3}.$$

$$\operatorname{cotg} a = \frac{\cos a}{\sin a} = \frac{1}{\sqrt{3}}, \quad \sec a = \frac{1}{\cos a} = 2, \quad \operatorname{cosec} a = \frac{1}{\sin a} = \frac{2}{\sqrt{3}}.$$

2°. *Se cunoaşte cos a şi se cere să se calculeze celelalte linii trigonometrice.* Din (III), avem

(V) $$\sin^2 a = 1 - \cos^2 a, \quad \sin a = \sqrt{1 - \cos^2 a}.$$

Din (I), deducem

$$\operatorname{tg} a = \frac{\sin a}{\cos a} = \frac{\sqrt{1-\cos^2 a}}{\cos a}, \quad \operatorname{cotg} a = \frac{1}{\operatorname{tg} a} = \frac{\cos a}{\sqrt{1-\cos^2 a}}.$$

Exemplu. $\cos a = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Avem

$$\sin a = \sqrt{1-\cos^2 a} = \sqrt{1-\frac{2}{4}} = \sqrt{\frac{2}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$\operatorname{tg} a = \frac{\cos a}{\sin a} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = 1, \quad \operatorname{cotg} a = \frac{\operatorname{tg} a}{1} = 1,$$

$$\sec a = \frac{1}{\cos a} = \frac{2}{\sqrt{2}}, \quad \operatorname{cosec} a = \frac{1}{\sin a} = \frac{2}{\sqrt{2}}.$$

3°. *Se dă $\operatorname{tg} a$ şi se cere să se calculeze celelalte linii trigonometrice.* Din relaţia $\sin^2 a + \cos^2 a = 1$, împărţind cu $\cos^2 a$, deducem

$$\operatorname{tg}^2 a + 1 = \frac{1}{\cos^2 a},$$

de unde

(VI) $$\cos^2 a = \frac{1}{1+\operatorname{tg}^2 a}, \quad \cos a = \frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 a}},$$

înlăturând soluţia

$$\cos a = \frac{-1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 a}}.$$

Din

$$\sin a = \frac{\sin a}{\cos a} \cos a,$$

deducem

$$\sin a = \operatorname{tg} a \frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 a}},$$

(VII) $$\sin a = \frac{\operatorname{tg} a}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 a}}.$$

Exemplu. $\operatorname{tg} a = \frac{1}{\sqrt{3}}$. Avem

$$\sin a = \frac{\operatorname{tg} a}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 a}} = \frac{\frac{1}{\sqrt{3}}}{\sqrt{1+\frac{1}{3}}} = \frac{\frac{1}{\sqrt{3}}}{\sqrt{\frac{4}{3}}} = \frac{\frac{1}{\sqrt{3}}}{\frac{\sqrt{4}}{\sqrt{3}}} = \frac{1}{\sqrt{4}} = \frac{1}{2},$$

$$\cos a = \frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 a}} = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{3}}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{4}{3}}} = \frac{1}{\frac{\sqrt{4}}{\sqrt{3}}} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Odată cunoscute sin$a$, cos$a$, tg$a$, celelalte funcţiuni sunt inversele acestora.

14. Relaţiuni între liniile trigonometrice ale unghiurilor complimentare. Să considerăm (Fig. 6) unghiul AOM$=a$. Atunci unghiul BOM $=90^0-a$ este complimentul lui a şi putem presupune că arcul corespunzător BM are origina în B şi extremitatea M.

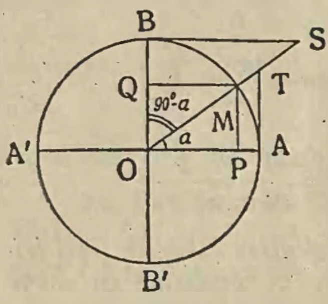

Fig. 6.

Ducând liniile trigonometrice ale acestor unghiuri, avem

$$\text{(VIII)}\begin{cases} \sin(90^0-a)=QM=OP=\cos a, \\ \cos(90^0-a)=OQ=PM=\sin a, \\ \operatorname{tg}(90^0-a)=BS=\operatorname{cotg} a, \\ \operatorname{cotg}(90^0-a)=AT=\operatorname{tg} a, \end{cases}$$

$$\sec(90^0-a)=OS=\operatorname{cosec} a, \quad \operatorname{cosec}(90^0-a)=OT=\sec a.$$

Aşa dar, cunoscând liniile trigonometrice ale unghiurilor mai mici ca 45^0, putem găsi imediat pe acelea ale unghiurilor cuprinse între 45^0 şi 90^0. De ex.,

$$\cos 82^0 25' 47'' = \sin(90^0 - 82^0 25' 47'') = \sin 7^0 34' 13''.$$

15. Calculul câtorva linii trigonometrice. Să considerăm unghiul a (Fig. 7), căruia îi corespunde sinusul MP. Prelungind dreapta PM până tae cercul trigonometric în M', se vede că sinusul MP este jumătatea coardei MM' căreia îi corespunde unghiul la centru egal cu $2a$.

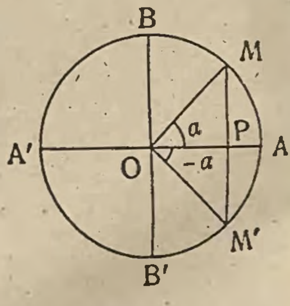

Fig. 7.

Deci, în cercul trigonometric, *sinusul unui unghi este egal cu jumătatea coardei care corespunde unui unghi îndoit.*

În baza acestei proprietăţi, se pot calcula sinusurile unghiurilor mai mici ca 90^0, dacă se cunosc lungimile laturilor poligoanelor regulate înscrise într'un cerc.

În adevăr, pentru unghiul de 30^0, unghiul îndoit are 60^0, căruia îi corespunde coarda ce reprezintă latura exagonului, căci $60^0=\frac{360^0}{6}\cdot$ Cum latura exagonului regulat înscris în cercul de raza R este egală cu raza, urmează că în cercul trigonometric, latura exagonului regulat înscris este egală cu 1. Sinusul fiind jumătatea coardei ce corespunde unghiului îndoit, urmează că $\sin 30^0 = \frac{1}{2}$.

Pentru 45^0, coarda care corespunde arcului îndoit, de 90^0, este egală cu latura pătratului înscris, căci $90^0 = \frac{360^0}{4}$. Dar latura pătratului este $R\sqrt{2}$, iar în cazul $R = 1$, este $\sqrt{2}$. Deci $\sin 45^0 = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Când $a = 60^0$, unghiul îndoit, de 120^0, îi corespunde latura triunghiului echilateral, căci $120^0 = \frac{360^0}{3}$. Dar această latură fiind egală cu $R\sqrt{3}$, în cazul cercului trigonometric este $\sqrt{3}$. Deci $\sin 60^0 = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Pentru tg 45^0, se poate observa ca $\text{tg}\, 45^0 = \frac{\sin 45^0}{\cos 45^0} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = 1$.

Aceasta se mai poate vedea din cercul trigonometric, direct, observând (Fig. 6) că dacă $a = 45^0$, triunghiul dreptunghic AOT având unghiul $AOT = 45^0$, urmează că și unghiul $OTA = 45^0$. Triunghiul este isoscel, deci $AT = OA = 1$ și prin urmare $\text{tg}\, 45^0 = AT = 1$.

EXERCIŢII.

1. Se dă $\sin a = \frac{3}{5}$, să se afle celelalte linii trigonometrice.

R. $\cos a = \frac{4}{5}$, $\text{tg} a = \frac{3}{4}$; celelalte sunt inversele acestora.

2. Se dă $\cos a = \frac{1}{2}$; să se afle celelalte linii trigonometrice.

R. $\sin a = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\text{tg}\, a = \sqrt{3}$.

3. Se dă $\text{tg} a = 1$, să se calculeze celelalte linii trigonometrice.

R. $\sin a = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\cos a = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

4. Se dă $\sec a = \frac{2}{\sqrt{2}}$, să se afle celelalte linii trigonometrice.

R. Avem $\cos a = \frac{1}{\sec a} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, și astfel ajungem la o problemă tratată.

5. Se dă $\text{cotg}\, a = \frac{4}{3}$, să se află celelalte linii trigonometrice.

R. $\operatorname{tg} a = \frac{1}{\operatorname{cotg} a} = \frac{3}{4}$ și ajungem la o problemă cunoscută.

6. Să se stabilească relațiunea (identitatea)

$$\sec^2 a - \operatorname{tg}^2 a = 1.$$

R. $\frac{1}{\cos^2 a} - \frac{\sin^2 a}{\cos^2 a} = 1.$

7. Să se stabilească identitatea

$$\sec^2 a + \operatorname{cosec}^2 a = \sec^2 a \operatorname{cosec}^2 a.$$

R. Se înlocuesc în membrul întâi $\sec a$ și $\operatorname{cosec} a$; se fac calculele și se găsește $\frac{1}{\cos^2 a \sin^2 a}$. Se operează la fel cu membrul al doilea și se arată că rezultatele sunt identice.

8. Să se stabilească relația

$$\sin^2 a + \sin^2 a \operatorname{tg}^2 a = \operatorname{tg}^2 a.$$

R. Se calculează valoarea membrului întâi înlocuind pe $\operatorname{tg} a$ și se obține

$$\sin^2 a + \frac{\sin^4 a}{\cos^2 a} = \frac{\sin^2 a(\cos^2 a + \sin^2 a)}{\cos^2 a}.$$

Se arată că este egal cu valoarea membrului al doilea.

9. Să se stabilească identitatea

$$\operatorname{tg}^2 a - \sin^2 a = \sin^4 a \sec^2 a.$$

R. Membrul întâi devine, după înlocuirea lui $\operatorname{tg} a$,

$$\frac{\sin^2 a\,(1 - \cos^2 a)}{\cos^2 a}.$$

10. Să se afle liniile trigonometrice ale unghiurilor $51^\circ 17' 45''$, $67^\circ 40'$ cu ajutorul acelora ale unghiurilor mai mici ca 45°.

R. Complimentele unghiurilor date sunt respectiv

$$89^\circ 59' 60'' - 51^\circ 17' 45'' = 38^\circ 42' 15'',\quad 89^\circ 60' - 67^\circ 40' = 22^\circ 20'.$$

11. Să se afle unghiul ascuțit care verifică ecuația $\sin 2a = \cos a$.

R. $\sin 2a = \sin(90 - a)$, $2a = 90 - a$; $a = 30^\circ$.

12. Să se afle unghiul ascuțit care satisface ecuația

$$\operatorname{tg}(a + 15^\circ) = \operatorname{cotg}(a + 5^\circ).$$

R. $\operatorname{tg}(a + 15^\circ) = \operatorname{tg}(90 - a - 5^\circ)$; $a = 35^\circ$.

TABLE TRIGONOMETRICE.

16. Table de linii trigonometrice. Liniile trigonometrice se exprimă în cea mai mare parte cu fracțiuni zecimale, iar aproximația este cu atât mai mare cu cât luăm mai multe zecimale. De obicei se consideră numai cinci zecimale, iar valorile acestor numere goniometrice sunt date în table, numite *table trigonometrice.* In tablele lui *Dupuis,* se numesc *„Lignes trigonométriques naturelles“* și sunt la pag. 149.

În table se calculează de obicei liniile trigonometrice ale unghiurilor până la 45°, căci ale celor de la 45° la 90° sunt date imediat de liniile trigonometrice ale unghiurilor complimentare.

Tablele sunt astfel întocmite, încât la stânga, de sus în jos, sunt trecute gradele, de la 0° la 45°, iar de jos în sus, la dreapta, se află gradele de la 45° până la 90°. Liniile trigonometrice ale unghiurilor complimentare se pot calcula direct cu aceleaşi table; în adevăr, valorile, scrise în acelaş rând cu gradele, corespund, pentru gradele scrise în stânga, pe rând, liniilor sin, tang, cotg, cos, scrise deasupra, iar pentru gradele din dreapta corespund liniilor cos, cotg, tang şi sin, scrise dedesubt. De ex., în tablele lui Dupuis, la pag. 150, numărul 0,375 corespunde lui sin22' şi lui cos68°, unghiul 22° fiind scris în stânga, iar unghiul 68° fiind scris în dreapta.

In unele table, cum sunt acele a lui Callet, liniile trigonimetrice sunt calculate din 10 în 10 minute, cu şapte zecimale. In altele, sunt calculate din 15 în 15 minute, iar în cele a lui Dupuis, din 30 în 30 minute, cu trei zecimale.

In practică intervin următoarele două probleme. I. *Să se afle linia trigonometrică a unui unghi dat.*

1°. *Dacă unghiul este în table,* linia trigonometrică o aflăm direct din table. De ex.

$$\sin 20^\circ 30' = 0{,}350, \quad \cos 29^\circ = 0{,}875,$$
$$\operatorname{tg} 65^\circ 30' = 2{,}194, \quad \operatorname{cotg} 62^\circ = 0{,}532.$$

2°. *Dacă unghiul nu este în table,* cum ar fi 28° 14′ 20″, *şi am voi a-i calcula sinusul,* procedăm astfel. In tablele lui Dupuis, la pag. 150, avem la coloana sin

la 28°	corespunde	0,469
„ 28° 14′ 20″		
„ 28° 30′	„	0,477

Dacă unghiul creşte cu 30′ numărul creşte cu 8

„ „ „ „ 14′20″ „ „ „ $\dfrac{14'20'' \times 8}{30'} =$

$$= \frac{(14 \times 60 + 20) \times 8}{30 \times 60} = 3, \text{ aproximativ.}$$

Deci, $\sin 28^\circ 14' 20'' = 0{,}469 + 0{,}003 = 1{,}472$.

La fel procedăm pentru tangentă.

3°. *Să calculăm acum cos* 60° 18′ 10″. Avem la pag. 150, tablele lui Dupuis,

la 66° corespunde 0,407—
„ 66° 18′ 10″
„ 66° 30′ „ 0,399

Dacă unghiul creşte cu 30′ numărul descreşte cu 8

„ „ „ „ 18′10″ „ „ „ $\frac{18'10''\times 8}{30'} = 4$,

aproximativ. Deci, cos 66° 18′ 10″ = 0,407—0,004 = 0,403.

XXIV. Lignes trigonométriques naturelles.

°	′	Sin.	D	Tang.	D	Cotg.	D	Cos.	D	′	°
15	0	0,259	8	0,268	9	3,732	126	0,966	2	0	75
	30	267	9	277	10	606	119	964	3	30	
16	0	276	8	287	9	487	111	961	2	0	74
	30	284	8	296	10	376	105	959	3	30	
17	0	292	9	306	9	271	99	956	2	0	73
	30	301		315		172		954		30	
		—	8	—	10	—	94	—	3		
18	0	309	8	325	10	3,078	89	951	3	0	72
	30	317	9	335	9	2,989	85	948	2	30	
19	0	326	8	344	10	904	80	946	3	0	71
	30	334	8	354	10	824	77	943	3	30	
20	0	342	8	364	10	747	72	940	3	0	70
	30	350		374		675		937		30	
		—	8	—	10	—	70	—	3		
21	0	358	9	384	10	605	66	934	4	0	69
	30	367	8	394	10	539	64	930	3	30	
22	0	375	8	404	10	475	61	927	3	0	68
	30	383	8	414	10	414	58	924	3	30	
23	0	391	8	424	11	356	56	921	4	0	67
	30	399		435		300		917		30	
		—	8	—	10	—	54	—	3		
24	0	407	8	445	11	246	52	914	4	0	66
	30	415	8	456	10	194	49	910	4	30	
25	0	423	8	466	11	145	48	906	3	0	65
	30	431	7	477	11	097	47	903	4	30	
26	0	438	8	488	11	050	44	899	4	0	64
	30	446		499		2,006		895		30	
		—	8	—	11	—	43	—	4		
27	0	454	8	510	11	1,963	42	891	4	0	63
	30	462	7	521	11	921	40	887	4	30	
28	0	469	8	532	11	881	39	883	4	0	62
	30	477	8	543	11	842	38	879	4	30	
29	0	485	7	554	12	804	37	875	5	0	61
	30	492		566		767		870		30	
		—	8	—	11	—	35	—	4		
30	0	0,500		0,577		1,732		0,866		0	60
°	′	Cos.		Cotg.		Tang.		Sin.		′	°

La fel procedăm pentru cotangentă.

II. *Să se afle unghiul corespunzător unei linii trigonometrice date.*

1°. Pentru sinus procedăm în modul următor. Se observă, că sin 45° = 0,707. Deci, dacă *se dă sinusul şi se cere unghiul,* vedem dacă valoarea dată pentru sinus e mai mică sau mai mare ca 0,707. Dacă este mai mică, unghiul va avea mai puţin ca 45°, îl căutăm pe stânga paginei, corespunzător numărului din coloana deasupra căreia este scris sin; dacă e mai mare ca 0,707, atunci unghiul e mai mare ca 45° îl căutăm pe dreapta paginei tablelor, corespunzător numărului din coloana dedesubtul căreia este scris sin.

De ex., *să se afle unghiul a, ştiind că* $\sin a = 0{,}919$, Acest număr fiind mai mare ca 0,707, unghiul e mai mare ca 45°, îl căutăm pe dreapta, corespunzător unui număr din coloana dedesubtul căreia este scris sin. Fiindcă nu este în table, îl cuprindem între două numere din table, din coloana respectivă. Avem

la 0,917	corespunde	66° 30′	0,919—
„ 0,919			
„ 0,921	„	67°	0,917
Dacă numărul creşte cu 4 unghiul creşte cu		30′	0,002
„ „ „ „ 2 „ „ „		$\frac{30' \times 2}{4} = 15'$.	

Unghiul căutat este $66^\circ 30' + 15' = 66^\circ 45'$.

2°. Pentru cosinus procedăm invers ca la sinus. De ex., *care este unghiul pentru care* $\cos a = 0{,}871$. Deoarece numărul este mai mare ca 0,707, unghiul este mai mic decât 45°; îl căutăm pe stânga paginei la coloana care are deasupra scris cos, raţionând astfel

la 0,875	corespunde	29°	0,875—
„ 0,871			
„ 0,870	„	29°30′	0,871
Dacă numărul scade cu 5 unghiul creşte		cu 30′	0,004
„ „ „ 4 „ „ „		$\frac{30' \times 4}{5} = 24'$.	

Unghiul căutat este $29^\circ + 24' = 29^\circ 24'$.

3°. *Când se dă tangenta, procedăm astfel.* De oarece $\operatorname{tg} 45^\circ = 1$, rezultă că dacă $\operatorname{tg} a$ dată este mai mică decât 1, unghiul e mai mic decât 45°, îl căutăm pe stânga paginei, corespunzător numărului din coloana ce are deasupra scris tg; dacă e mai mare ca 1, unghiul e mai mare ca 45°, îl căutăm pe dreapta paginei, corespunzător numărului din coloana ce are scris dedesubt tg. Pentru cotg procedăm invers.

De ex., *să se afle unghiul a pentru care* $\operatorname{tg} a = 0{,}310$. Îl căutăm pe stânga paginei, căci 0,310 e mai mic decât 1. Avem

la 0,306	corespunde	17°	0,310—
„ 0,310			
„ 0,315	„	17° 30′	0,306
Dacă numărul crește cu 9 unghiul crește cu		30′	0,004
„ „ „ „ 4 „ „ „			

$$\frac{4\times 30'}{9}=\frac{120'}{9}=\frac{40'}{3}=\frac{40\times 60''}{3}=800''$$

$$\begin{array}{r|l} 800'' & 60 \\ \hline 200 & 13 \\ 20 & \end{array} \qquad 800''=13'20''.$$

Deci unghiul este 17° 13′ 20″.

4°. *Să se afle unghiul a, știind că* $\operatorname{cotg} a=0{,}470$. Fiind mai mic decât 1, unghiul e mai mare ca 45°, îl găsim pe dreapta paginei, raționând astfel

la 0,477	corespunde	64° 30′	0,477—
„ 0,470			
„ 0,466	„	65°	0,470
Dacă numărul scade cu 11 unghiul crește cu		30′	0,007
„ „ „ „ 7 „ „			

$$\frac{30\times 60''\times 7}{11}=\frac{12600''}{11},$$

$$\begin{array}{r|l} 12600'' & 11 \\ \hline 16 & 1145'' \\ 50 & \\ 60 & \\ 5 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 1145'' & 60' \\ \hline 545 & 19'' \\ 5 & \end{array} \qquad \frac{12600''}{11}=19'5'',\ \text{aprox.}$$

Unghiul căutat este 64° 30′ + 19′ 5″ = 64° 49′ 5″.

17. Table de logaritmii liniilor trigonometrice. Aceste table cuprind logaritmii liniilor trigonometrice. Știm din Algebră că rolul logaritmului este de a reduce gradul operațiunilor, înlocuind înmulțirea cu o adunare, împărțirea cu o scădere, etc. și deci de a face posibilă o mai mare economie a timpului; tablele de logaritmii liniilor trigonometrice mai au avantajul de a fi astfel întocmite, încât nu trebue să căutăm separat linia trigonometrică în tablele corespunzătoare (cum am văzut mai sus) și apoi separat logaritmul acesteia în tablele de logaritmii numerilor algebrice, ci ele ne dau imediat logaritmul căutat fără să cunoaștem linia trigonometrică.

Tablele logaritmilor sunt la fel aranjate cu cele ale liniilor trigonometrice.

In practică intervin următoarele probleme.

I. *Să se afle logaritmul linii trigonometrice care corespunde unui unghi dat.* Tablele de logaritmii liniilor trigonometrice cuprind pe lângă mantisă şi caracteristica logaritmului.

32	
1	0,53
2	1,07
3	1,60
4	2,13
5	2,67
6	3,20
7	3,73
8	4,27
9	4,80

31	
1	0,52
2	1,03
3	1,55
4	2,07
5	2,58
6	3,10
7	3,62
8	4,13
9	4,65

25	
1	0,42
2	0,83
3	1,25
4	1,67
5	2,08
6	2,50
7	2,92
8	3,33
9	3,75

24	
1	0,4
2	0,8
3	1,2
4	1,6
5	2,0
6	2,4
7	2,8
8	3,2
9	3,6

27°

′	Sin.	D	Tang.	D	Cotg.	Cos.	D	′
0	$\bar{1}$,6 5705	24	$\bar{1}$,7 0717	31	0,2 9283	$\bar{1}$,9 4988	6	60
1	5729	25	0748	31	9252	4982	7	59
2	5754	25	0779	31	9221	4975	6	58
3	5779	25	0810	31	9190	4969	7	57
4	5804	24	0841	32	9159	4962	6	56
5	5828	25	0873	31	9127	4956	7	55
6	5853	25	0904	31	9096	4949	6	54
7	5878	24	0935	31	9065	4943	7	53
8	5902	25	0966	31	9034	4936	6	52
9	5927	25	0997	31	9003	4930	7	51
10	5952	24	1028	31	8972	4923	6	50
11	5976	25	1059	31	8941	4917	6	49
12	6001	24	1090	31	8910	4911	7	48
13	6025	25	1121	32	8879	4904	6	47
14	6050	25	1153	31	8847	4898	7	46
15	6075	24	1184	31	8816	4891	6	45
16	6099	25	1215	31	8785	4885	7	44
17	6124	24	1246	31	8754	4878	7	43
18	6148	25	1277	31	8723	4871	6	42
19	6173	24	1308	31	8692	4865	7	41
20	6197	24	1339	31	8661	4858	6	40
21	6221	25	1370	31	8630	4852	7	39
22	6246	24	1401	30	8599	4845	6	38
23	6270	25	1431	31	8569	4839	7	37
24	6295	24	1462	31	8538	4832	6	36
25	6319	24	1493	31	8507	4826	7	35
26	6343	25	1524	31	8476	4819	6	34
27	6368	24	1555	31	8445	4813	7	33
28	6392	24	1586	31	8414	4806	7	32
29	6416	25	1617	31	8383	4799	6	31
30	$\bar{1}$,6 6441		$\bar{1}$,7 1648		0,2 8352	$\bar{1}$,9 4793		30
′	Cos.		Cotg.		Tang.	Sin.		′

62°

O mare parte din liniile trigonometrice fiind mai mici ca 1, intervin şi caracteristice negative, care sunt indicate cu o liniuţă pusă deasupra caracteristicei.

1°. De ex., *să se calculeze logsin* 27° 20′ 10″. În tablele lui Dupuis, pag. 92, avem

27°20' . . . . $\overline{1},66197$
26°20'10"
27°21' . . . . $\overline{1},66221$

Dacă unghiul crește cu 1' = 60" mantisa crește cu 0,00024
Deci dacă crește cu 60" „ 24
„ „ „ 10" $\frac{24\times10}{60}=4.$

Așa dar

$$\log \sin 27^\circ 20' 10'' = \overline{1},66197 + 0,00004 = \overline{1},66201.$$

La fel procedăm pentru tangentă.

2°. *Să se calculeze log cos* 62° 40' 20". Căutăm de jos în sus minutele pe dreapta, la coloana care are dedesubt scris *cos*. Avem

62° 40' . . . . $\overline{1},66197$
62° 40' 20"
62° 41' . . . . $\overline{1},66173$

Dacă unghiul crește cu 1' = 60" mantisa scade cu 0,00024
„ „ „ „ 60" „ 24
„ „ „ „ 20" „ $\frac{24\times20}{60}=8.$

Deci $\log\cos 62^\circ 40' 20'' = \overline{1},66197 - 0,00008 = \overline{1},66189.$

La fel procedăm pentru cotangentă.

II. *Să se calculeze unghiul căruia i se cunoaște logaritmul uneia din liniile sale trigonometrice.*

1°. *Să se calculeze a știind că* $\log \sin a = \overline{1},66280$. In tablele lui Dupuis, la pag. 127, vedem că $\log \sin 44^\circ 60' = \log \sin 45^\circ = \overline{1},84949$ și că mantisele unghiurilor mai mici cu 45° sunt mai mici ca 84949, iar ale unghiurilor mai mari ca 45° sunt mai mari ca 84949.

Deci, dacă mantisa dată este mai mică decât 84949, unghiul e mai mic ca 45°, gradele sunt deasupra paginei 92, minutele sunt pe stânga. Cuprindem mantisa dată între două mantise din tablele de la coloana ce are scris deasupra sin și avem

$\overline{1},66270$ . . . . . . 27° 23' 66280—
$\overline{1},66280$
$\overline{1},66295$ . . . . . . 27° 24' 66270

Dacă mantisa crește cu 0,00025 unghiul crește cu 1' = 60" 10

Dacă mantisa crește cu 25 unghiul crește cu 60″

„ „ „ „ 10 „ „ „ $\frac{60'' \times 10}{25} = 24''$.

Deci $a = 27^0\, 23'\, 24''$.

2⁰. Pentru cosinus procedem invers ca la sinus. De ex., *să se calculeze a, știind că* $\log\cos a = \bar{1},66178$. Mantisa dată fiind mai mică decât 84949, unghiul este mai mare ca 45^0; gradele sunt dedesubtul paginei, minutele pe dreapta. Cautând mantisa dată între două mantise din coloana ce are dedesubt scris cos, avem

$\bar{1},66197$	. . . .	$62^0\,40'$	66197—
$\bar{1},66178$			
$\bar{1},66173$	. . . .	$62^0\,41'$	66178

Dacă mantisa scade cu 0,00024 unghiul crește cu $1' = 60''$. 19

Mantisa scade cu 24 unghiul crește cu 60″

„ „ „ 19 „ „ „ $\frac{60'' \times 19}{24} = 47''$, aprox.

Unghiul a este egal cu $62^0\,40'\,47''$.

3. *Să se calculeze a, știind că* $\log tg a = \bar{1},71350$. De oarece $tg 45^0 = 1$, $\log tg 45^0 = 0$ și deci caracteristica logaritmului tangentei unui unghi mai mic decât 45^0 este negativă, iar a unghiurilor mai mari ca 45^0 este pozitivă.

Deci, dacă este negativă caracteristica, unghiul este mai mic decât 45^0, gradele sunt deasupra paginei, minutele pe stânga și cuprindem mantisa între două mantise din coloana ce are deasupra scris tang. In cazul nostru, caracteristica este negativă, unghiul e mai mic decât 45^0. Avem

$\bar{1},71339$	. . . .	$27^0\,20'$	71350—
$\bar{1},71350$			
$\bar{1},71370$	. . . .	$27^0\,21'$	71339

Dacă mantisa crește cu 0,00031 unghiul crește cu $1' = 60''$ 11

Mantisa crește cu 31 unghiul crește cu 60″

„ „ „ 11 „ „ „ $\frac{60'' \times 11}{31} = 21''$, aprox.

Deci $a = 27^0\,20'\,21''$.

4⁰. *Să se calculeze a, știind că* $\log cotg a = 0,28950$. La cotangentă procedăm invers ca la tangentă. Dacă caracteristica este pozitivă, unghiul este mai mic decât 45°, dacă este negativă, unghiul este mai mare decât 45°. Cuprindem mantisa între două mantise din coloana ce are deasupra scris cotg. Avem

0,28972	. . . .	$27^0\,10'$	28972 —
0,28950			
0.28941	. . . .	$27^0\,11'$	28950

Dacă mantisa scade cu 0,00031 unghiul creşte cu $1' = 60''$ 22

Mantisa scade cu 31 unghiul creşte cu $60''$

„ „ „ 22 „ „ „ $\frac{60''\times 22}{31} = 42''$, aprox.

Deci $\qquad a = 27^0\,10'\,42''$.

18. **Apicaţii.** I. *Să se afle lungimea unui arc ce corespunde unui unghi dat şi invers. Să se afle lungimea arcului de* $39^0\,14'\,20''$. In *Tablele lui Dupuis,* la pag. 130, sunt date lungimile arcelor de cerc, când raza este egală cu unitatea *(Longueur des arcs de cercle)* şi avem numărul corespunzător

39^0	. . . . . .	0,680678
$14'$	. . . . . .	0,004072
$20''$	. . . . . .	0,000097
$39^0\,14'\,20''$	. . . . . .	0,684847

Astfel că lungimea arcului de $39^0\,14'\,20''$ este 0,684847 radiani.

Dacă R este raza cercului pe care este considerat arcul, lungimea arcului este produsul $0{,}684847\times R$.

Invers, *să se afle arcul ce corespunde la* 0,843295 *radiani.* Căutăm la coloanele grade o valoare imediat mai mică decât 0,843295;

0,843295 —
0,837758 corespunde 48°.
0,005537

La coloanele minute, căutăm o valoare imediat mai mică decât 0,005537;

0,005537 —
0,005527 corespunde 19'.
0,000010

La coloanele secunde căutăm un număr mai mic decât 0,000010 şi este chiar în table, căruia îi corespunde 2''.

Deci arcul nostru are $48^0\,19'\,2''$.

II. *Să se rezolve ecuaţia*

$$y = 3{,}2 \sin\left(0{,}2648\,x + \frac{\pi}{6}\right).$$

în raport cu y, când $x = 1$ *şi în raport cu x, când* $y = 1{,}971$.

1°. Pentru $x = 1$, avem

$$y = 3{,}2 \sin\left(0{,}2648 + \frac{\pi}{6}\right) = 3{,}2 \sin\,(0{,}2648 + 30^0).$$

Să vedem câte grade îi corespunde lui 0,2648 rad.; avem

$$
\begin{array}{lr}
0{,}264800\ - & \\
\underline{0{,}261799} \ \ldots\ldots\ldots & 15^\circ \\
0{,}003001\ - & \\
\underline{0{,}002909} \ \ldots\ldots\ldots & 10' \\
0{,}000092 \ \ldots\ldots\ldots & 19'';
\end{array}
$$

deci lui 0,2648 îi corespunde 15° 10′ 19″.

Avem

$$y = 3{,}2 \sin(15^\circ 10' 19'' + 30^\circ) = 3{,}2 \sin 45^\circ 10' 19''.$$

XI. Longueur des arcs de cercle
pour le rayon 1.

	Degrés.	Minutes.	Secondes.		Degrés.	Minutes.	Secondes.
0	0,000 000	0,000 000	0,000 000	30	0,523 599	0,008 727	0,000 145
1	0,017 453	00 291	00 005	31	0,541 052	09 018	00 150
2	0,034 907	00 582	00 010	32	0,558 505	09 308	00 155
3	0,052 360	00 873	00 015	33	0,575 959	09 599	00 160
4	0,069 813	01 164	00 019	34	0,593 412	09 890	00 165
5	0.087 266	01 454	00 024	35	0.610 865	10 181	00 170
6	0,104 720	01 745	00 029	36	0,628 319	10 472	00 175
7	0,122 173	02 036	00 034	37	0,645 772	10 763	00 179
8	0,139 626	02 327	00 039	38	0,663 225	11 054	00 184
9	0,157 080	02 618	00 044	39	0,680 678	11 345	00 189
10	0,174 533	02 909	00 048	40	0,698 132	11 636	00 194
11	0.191 986	03 200	00 053	41	0,715 585	11 926	00 199
12	0,209 440	03 491	00 058	42	0,733 038	12 217	00 204
13	0,226 893	03 782	00 063	43	0,750 492	12 508	00 208
14	0,244 346	04 072	00 068	44	0,767 945	12 799	00 213
15	0,261 799	04 363	00 073	45	0,785 398	13 090	00 218
16	0,279 253	04 654	00 078	46	0.802 851	13 381	00 223
17	0.296 706	04 945	00 082	47	0,820 305	13 672	00 228
18	0.314 159	05 236	00 087	48	0,837 758	13 963	00 233
19	0,331 613	05 527	00 092	49	0,855 211	14 254	00 238
20	0,349 066	05 818	00 097	50	0,872 665	14 544	00 242
21	0,366 519	06 109	00 102	51	0,890 118	14 835	00 247
22	0,383 972	06 400	00 107	52	0,907 571	15 126	00 252
23	0,401 426	06 690	00 112	53	0 925 025	15 417	00 257
24	0,418 879	06 981	00 116	54	0,942 478	15 708	00 262
25	0,436 332	07 272	00 121	55	0,959 931	15 999	00 267
26	0,453 786	07 563	00 126	56	0,977 384	16 290	00 271
27	0,471 239	07 854	00 131	57	0,994 838	16 581	00 276
28	0,488 692	08 145	00 136	58	1,012 291	16 872	00 281
29	0,506 145	08 436	00 141	59	1,029 744	17 162	00 286

La pag. 151. Tablele lui Dupuis, Lignes trigonometriques naturelles, avem

$$
\begin{array}{lr}
45^\circ \ \ldots\ldots & 0{,}707 \\
45^\circ 10' 19'' & \\
\underline{45^\circ 30' \ \ldots\ldots} & \underline{0{,}713} \\
30' \ \ldots\ldots & 6
\end{array}
$$

$$10' 19'' \, . \, . \quad \frac{6 \times 10' \, 19''}{30'} = \frac{6 \times (10 \times 60 + 19)}{30 \times 60} = 2, \text{ aprox.};$$

deci $\quad \sin 45^0 \, 10' \, 19'' = 0,707 + 0,002 = 0,709.$

Aşa dar $\quad y = 3,2 \times 0,709 = 2,2688.$

2°. Pentru $y = 1,971$, avem ecuaţia

$$1,971 = 3,2 \sin \left(0,2648 \, x + \frac{\pi}{6}\right),$$

$$\sin \left(0,2648 \, x + \frac{\pi}{6}\right) = \frac{1,971}{3,2} = 0,615 \text{ aprox.}$$

In Tablele lui Dupuis, la pag. 151, avem

0,609	. . . . . .	37° 30′	0,615—
0.615			
0,616	. . . . . .	38°	0,609
0,007	. . . . . .	30′	0,006
7	. . . . . .	30′	
6	. . . . . .	$\frac{30' \times 6}{7}$	

$\frac{180'}{5} \Big| \frac{7}{25'}$; $5' = 5 \times 60'' = 300''$; $300'' \Big| \frac{7}{43''}$

Deci. lui 0,615 îi corespunde $37^0 \, 30' + 25' \, 43'' = 37^0 \, 55' \, 43''$.

Avem, vorbind numai de unghiuri ascuţite,

$$0,2648 \, x + 30^0 = 37^0 \, 55' \, 43''$$

De unde $\quad 0,2648 \, x = 37^0 \, 55' \, 43'' - 30^0 = 7^0 \, 55' \, 43''.$

Să vedem ce lungime corespunde lui $7^0 \, 55' \, 43''$. Avem la pag. 130

7°	. . . . .	0,122173
55′	. . . .	0,015999
43″	. . . .	0,000208
7° 55′ 43″	. . . .	0,138380

Deci, $\quad 0,2648 \, x = 0,138380,$

de unde $\quad x = \frac{0,138380}{0,2648} = 0,522$, aprox.

Să găsim gradele se corespund lui 0,522. La pag. 130, avem

0,522000—		
0,506145	. . . .	29°
0,015855—		
0,015708	. . . .	54′
0,000147	. . . .	30″.

Deci $\quad x = 29^0 \, 54' 30''.$

EXERCIŢII.

1. Să se calculeze sin 25° 12′, cos 25° 12′.

R. Se va căuta în Tablele lui Dupuis, Lignes trigonométriques naturelles; 0,426; 0,904.

2. Să se calculeze tg 54° 35′ şi cotg 54° 35′.

R. 1,406; 0,711.

3. Să se calculeze valoarea expresiunii

$$\sin a \cos b - \sin b \cos a,$$

când $a = 65^0$, $b = 20^0$. Să se compare cu $\sin 45^0$.

R. 0,707.

4. Să se afle cu ajutorul tablelor de logaritmi liniile trigonometrice

$$\sin 30^0\,17'\,35'', \qquad \operatorname{tg} 63^0\,7'\,28'',$$
$$\cos 84^0\,42'\,53'', \qquad \operatorname{cotg} 21^0\,5'\,43''.$$

R. Punem $y = \sin 30^0\,17'\,35''$. Se calculează $\log y = \log \sin 30^0\,17'\,35''$, care este egal cu $\overline{1},70279$ și pe urmă numărul y al cărui logaritm este $\overline{1},70279$.

Avem

$$\begin{array}{ll} \log \sin 30^0\,17' \ \ldots\ldots & \overline{1},70267 \\ \log \sin 30^0\,17'\,35'' & \\ \log \sin 30^0\,18' \ \ldots\ldots & \overline{1},70288 \\ \hline \qquad 1' = 60'' \ \ldots & 21 \\ \qquad 35'' \ \ldots & \dfrac{21 \times 35}{60} = 12, \text{ aprox.} \end{array}$$

$$\log \sin 30^0\,17'\,35'' = \overline{1},70267 + 0,00012 = \overline{1},70279.$$

Să găsim numărul y al cărui logaritm este $\overline{1},70279$. La pag. 15, Tablele lui Dupuis, avem

$$\begin{array}{lll} 70278 \ \ldots\ldots & 5044 & 70279- \\ 70279 & & \\ 70286 \ \ldots\ldots & 5045 & 70278 \\ \hline 8 \ \ldots\ldots & 1 & 1 \\ 1 \ \ldots\ldots & \dfrac{1}{8} = 0,12. & \end{array}$$

La mantisa 70279 corespunde deci numărul 5044,12. Caracteristica fiind $\overline{1}$, rezultă că numărul y are 0 la partea întreagă, deci

$$y = 0,504412.$$

La fel cu celelalte: se găsește $\cos 84^0\,42'\,53'' = 0,092115$; $\operatorname{tg} 63^0\,7'\,28'' = 1,97318$; $\operatorname{cotg} 21^0\,5'\,43'' = 2,592$.

5. Să se afle unghiurile corespunzătoare următorilor logaritmi

$\log \sin a = \overline{1},77569$; $\log\cos a = \overline{1},71494$; $\log \operatorname{tg} a = \overline{1},32107$; $\log \operatorname{cotg} a = \overline{1},97500$.

R. $36^0\,37'\,38''$; $58^0\,45'\,11''$; $11^0\,49'\,46''$; $46^0\,38'\,53''$.

6. Să se găsească unghiurile ascuțite care verifică ecuațiile

$$\sin a = \frac{3}{5}; \quad \cos a = 0,7; \quad \operatorname{tg} a = 3; \quad \operatorname{cotg} a = \frac{2}{3}.$$

R. Pentru $\sin a = \frac{3}{5}$, avem $\log \sin a = \log 3 - \log 5 = 0,47712 - 0,69897$,

$$\log \sin a = 0,47712 + 1 - 1 - 0,69897 = 0,47712 + 1 + (1 - 0,69897),$$
$$\log \sin a = 0,47712 + \overline{1} + 0,30103 = 0,47712 + \overline{1},30103 = \overline{1},77815\,;$$
$$a = 36^0\,52'\,10'.$$

După cum se vede, am înlocuit pe $-\log 5 = -0,69897$ cu $\overline{1},30103$, adică am înlocuit un logaritm ce a avut semnul $-$ înainte cu un număr egal ce are înaintea sa semnul $+$. Aceasta se zice că am înlocuit pe

— $\log b$ cu $\operatorname{colog} b$, şi caracteristica cea nouă se obţine adăugând o unitate la caracteristica logaritmului şi apoi schimbând semnul rezultatului, iar mantisa cea nouă se obţine scăzând ultima cifră însemnătoare a mantisei din 10 şi celelalte din 9.

Pentru celelalte, avem $45^0\,34'\,23''$; $71^0\,33'\,54''$; $56^0\,18'\,34''$.

7. Să se afle unghiurile ascuţite care verifică ecuaţiile trigonometrice

$1^0)$ $\operatorname{tg} a = 5 \sin a$: $2^0)$ $2 \operatorname{tg} a + 2 \operatorname{cotg} a = 5$.

R. $1^0)$ $\frac{\sin a}{\cos a} = 5 \sin a$, $\sin a\,(1-5\cos a) = 0$; $\sin a = 0$, $\cos a = \frac{1}{5}$; din $\sin a = 0$, rezultă $a = 0$; din $\cos a = \frac{1}{5}$, rezultă $a = 78^0\,27'\,47''$.

$2^0)$ $\operatorname{tg} a + \frac{1}{\operatorname{tg} a} = \frac{5}{2}$; $2 \operatorname{tg}^2 a - 5 \operatorname{tg} a + 2 = 0$; $\operatorname{tg} a = \frac{5 \pm \sqrt{25-16}}{4} = 2$ sau $\frac{1}{2}$; $a = 63^0\,26'\,5''$, sau $26^0\,33'\,54''$.

RELAŢIUNI ÎNTRE ELEMENTELE UNUI TRIUNGHI DREPTUNGHIC.

REZOLVAREA TRIUNGHIURILOR DREPTUNGHICE.

16. **Calculul elementelor triunghiului dreptunghic.** Elementele triunghiului dreptunghic sunt două unghiuri ascuţite, a căror sumă este 90^0, două catete şi ipotenuza, care sunt legate cu teorema lui Pitagora. În baza acestor relaţiuni, este de ajuns să cunoaştem un unghi ca să-l aflăm pe celalt şi două laturi ca s-o aflăm pe a treia. Cu ajutorul funcţiunilor goniometrice numărul elementelor necesare pentru rezolvarea triunghiurilor dreptunghice se reduce la două.

Cazurile de rezolvarea sunt următoarele.

17. **Cazul I. Se cunosc ipotenuza şi un unghi ascuţit ale unui triunghi dreptunghic; să se afle celelalte elemente.** Să notăm cu *a, b, c* ipotenuza şi catetele opuse unghiurilor A, B, C ale triunghiului dreptunghic ABC (Fig. 8). Conform definiţii funcţiunilor goniometrice, avem

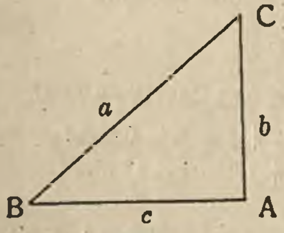

Fig. 8

$$\sin ABC = \frac{AC}{BC} = \frac{b}{a},$$

$$\cos ABC = \frac{AB}{BC} = \frac{c}{a},$$

de unde urmează

$$b = a \sin ABC,\quad c = a \cos ABC,$$

sau, cu notaţiile de mai sus,

(IX) $$b = a \sin B,\quad c = a \cos B.$$

Deci, *o catetă a triunghiului dreptunghic este egală cu produsul ipotenuzei cu sinusul unghiului opus sau cosinusul unghiului alăturat.*

Prin urmare, fiind date a şi B, celelalte elemente sunt date de

$$b = a\sin B,\quad c = a\cos B,\quad C = 90^0 - B.$$

Dacă se cunoaşte a şi C, avem

$$b = a\cos C,\quad c = a\sin C,\quad B = 99^0 - C.$$

Exemplu. $a = 578{,}25$ m, $B = 38^0 51' 23''$. Avem

$$C = 90^0 - 38^0 51' 23'' = 51^0 8' 37'',$$
$$b = a\sin B,\quad c = a\cos B.$$

Deci

$$\log b = \log a + \log\sin B,$$
$$\log c = \log a + \log\cos B.$$

$\log a =$	5782	76208 +
2,76212		4
	5782,5	76212
	5783	76215
	1	7
	0,5	$7 \times 0{,}5 = 3{,}5$ aproape 4.
$\log\sin B =$	$38^0 51$	$\overline{1},79746$ +
$\overline{1},79752$		6
	$38^0 51' 23''$ . .	$\overline{1},79752$
	$38^0 52'$ . . .	$\overline{1},79762$
	$60''$	16
	$23''$	$\frac{16 \times 23}{60} = 6$, aproape.
$\log\cos B =$	$38^0 51'$	$\overline{1},89142$ —
$\overline{1},89138$		4
	$38^0 51' 23''$ . .	$\overline{1},89138$
	$38^0 52$	$\overline{1},89132$
	$60''$	10
	$23''$	$\frac{10 \times 23}{60} = 4$, aprox.

Deci

$$\log b = 2{,}76212 + \overline{1},79752 = 2{,}55964,$$
$$\log c = 2{,}76212 + \overline{1},89138 = 2{,}65350.$$

N. Abramescu, Lecţiuni de Trigonometrie. Ediţia III, 5000 ex. 3

$b=$	55955 3627
362,775	55964 3627,75
	55967 3628
	12 1
	9 . . . . $\frac{9}{12}=0,75$;

De asemenea, $c=450,3$.

18. **Cazul II. Se dau ipotenuza a şi o catetă b.** Elementele necunoscute sunt c, B, C. Avem

$$b=a\sin B,$$

de unde

$$\sin B=\frac{b}{a},$$

are dă valoarea lui B. Unghiul $C=90^{0}-B$.

Pentru c, ne servim de formula

$$c=a\sin C.$$

Exemplu. $a=5678,7$ m, $b=3456,4$ m. Avem

$$\sin B=\frac{b}{a},\quad \log\sin B=\log b-\log a.$$

$$c=a\sin C,\quad \log c=\log a+\log\sin C.$$

$\log a=$	5678 . . . . . . 75420 +
3,75425	5
	5878,7 75425
	5679 75427
	1 7
	0,7 . . . . $7\times0,7=4.9$, aproape 5.
$\log b=$	3456 . . . . . . 53857 +
3,53872	5
	3456,4 53862
	3457 53870
	1 13
	0,4 . . . . $13\times0,4=5$, aproape.

Avem

$$\log\sin B=\log b-\log a=3,53862-3,75425=\log b+\operatorname{colog}a,$$
$$\log\sin B=3,53862+\operatorname{colog}a.$$

Cologaritmul lui a, colog$a$, se obţine adăugând 1 la caracteristica 3 a lui log a, care face 4, şi schimbând semnul avem -4, care se serie $\bar{4}$, arătând prin aceasta că numai 4 este negativ. Mantisa cea nouă se obține scăzând ultima cifră însemnătoare 5 a mantisei 75425 din 10 și celelalte din 9 și cologaritmul este $\bar{4},24575$. Aşa vom proceda ori de câte ori avem de scăzut un logaritm. Deci

$$\log \sin B = 3{,}53862 + \bar{4}{,}24575 = \bar{1}{,}78437.$$

$$\begin{array}{r|l}
B = & \bar{1},78428 \;\ldots\; 37^0 29' \\
37^0 29' 32'' & \bar{1},78437 \;\ldots \\
 & \bar{1},78445 \;\ldots\; 37^0 30' \\ \hline
 & 17 \;\ldots\; 60'' \\
 & 9 \;\ldots\; \dfrac{60 \times 9}{17} = 32'', \text{ aproape}
\end{array}$$

$$C = 90^0 - 37^0 29' 32'' = 52^0 30' 28''.$$

$$\begin{array}{r|l}
\log \sin C = & 52^0 30' \;\ldots\; \bar{1},89947 + \\
\bar{1},89951 & \qquad\qquad 4 \\ \hline
 & 52^0 30' 28'' \;\ldots\; \bar{1},89951 \\
 & 52^0 31' \;\ldots\; 1,89956 \\ \hline
 & 60'' \;\ldots\; 9 \\
 & 28'' \;\ldots\; \dfrac{9 \times 28}{60} = 4, \text{ aproape.}
\end{array}$$

Avem

$$\log c = \log a + \log \sin C = 3{,}75425 + \bar{1}{,}89951 = 3{,}65376.$$

$$\begin{array}{r|l}
c = & 65369 \;\ldots\; 4505 + \\
4505,7 & \qquad\qquad 0,7 \\ \hline
 & 65376 \;\ldots\; 4505,7 \\
 & 65379 \;\ldots\; 4506 \\ \hline
 & 10 \;\ldots\; 1 \\
 & 7 \;\ldots\; \dfrac{7}{10} = 0,7.
\end{array}$$

19. **Cazul III. Se dau cateta b și unghiul** B. Elementele necunoscute sunt C, c, a. Avem $C = 90^0 - B$, $b = a \sin B$, $c = a \sin C$.

De unde

$$a = \frac{b}{\sin B}, \quad c = a \sin C,$$

care sunt formulele ce ne dau elementele a și apoi c.

Aplicând logaritmii, avem

$$\log a = \log b - \log \sin B,$$
$$\log c = \log a + \log \sin C.$$

Exemplu. $b = 573{,}42$, $B = 37^\circ 29' 12''$.

$\log b =$	5734	75846
2,75847	5734,2	
	5735	75853
	1	7
	0,2	$7 \times 0{,}2 = 1{,}4$, aproape 1.

$\log \sin B =$	$37^\circ 29'$	$\overline{1},78428$
$\overline{1},78431$		3
	$37^\circ 29' 12''$	$\overline{1},75431$
	$32^\circ 30'$	$\overline{1},78445$
	$60''$	17
	$12''$	$\frac{17 \times 12}{60} = 3$,aproape.

Deci

$$\log a = \log b - \log \sin B = 2{,}75848 - \overline{1},78431.$$

Aplicând cologaritmul, avem

$$\log a = 2{,}75847 + 0{,}21569 = 2{,}97416.$$

$a =$	97414	9422
942,24		0,4
	97416	9422,4
	97419	9423
	5	1
	2	$\frac{2}{5} = 0{,}4$,

$$C = 90^\circ - B = 90^\circ - 37^\circ 29' 12'' = 52^\circ 30' 48''.$$

$\log \sin C =$	$52^\circ 30'$	$\overline{1},89947$
$\overline{1},89954$		7
	$52^\circ 30' 48''$	$\overline{1},89954$
	$52^\circ 31'$	$\overline{1},89956$
	$60''$	9
	$48''$	$\frac{9 \times 48}{60} = 7$,aproape.

$$\log c = \log a + \log \sin C = 2{,}97416 + \overline{1},89954 = 2{,}87370,$$

$c =$	87367	7476
747,65		0,5
	87370	7476,5
	87373	7477
	6	1
	3	3 $\frac{3}{6} = 0{,}5$.

20. **Cazul IV. Se dau catetele b şi c.** Elementele necunoscute sunt B, C. Avem, conform definiţii (Fig. 8),

$$\operatorname{tg} B = \frac{AC}{BA} = \frac{b}{c}, \quad \operatorname{cotg} B = \frac{BA}{AC} = \frac{c}{b};$$

deci

(X) $$b = c \operatorname{tg} B, \quad c = b \operatorname{cotg} B,$$

adică, *o catetă este egală cu cealaltă catetă înmulţită cu tangenta unghiului opus,* sau, *o catetă este egală cu cealaltă catetă înmulţită cu cotangenta unghiului alăturat.*

Exemplu. $b = 52{,}345$ m, $c = 28{,}843$ m. Avem

$$\operatorname{tg} B = \frac{b}{c}, \quad \log \operatorname{tg} B = \log b - \log c.$$

$\log b =$	5234	71883 +
1,71888		5
	5234,5 . . .	71888
	5235	71892
	1	9
	0,5 . . .	$9 \times 0{,}5 = 4{,}5$; aproape 5.
$\log c =$	2884	46000 +
1,46005		5
	2884,3 . . .	46005
	2885 . . .	46015
	1	15
	0,3	$15 \times 0{,}3 = 4{,}5$; aproape 5.

$$\log \operatorname{tg} B = \log b - \log c = 1{,}71888 - 1{,}46005,$$

Aplicând cologaritmul, avem

$$\log \operatorname{tg} B = 1{,}71888 + \bar{2}{,}53995 = 0{,}25883,$$

$B =$	25863	$61^\circ 8'$
$61^\circ 8' 40''$	25883	$61^\circ 8' 40'$
	25893	$61^\circ 9'$
	30	$60''$
	20	$\frac{60'' \times 20}{30} = 40''$

$$C = 90^\circ - 61^\circ 8' 40'' = 28^\circ 51' 20''.$$

EXERCIŢII.

1. Să se afle înălţimea unui deal, cunoscând lungimea 236,502 m a şoselei drepte care merge în vârful lui şi care este înclinată pe planul orizontal cu $38^\circ 15' 10''$.

R. 146,43 m.

2. O linie de cale ferată lungă de 1532 m merge drept până la înălţimea de 84 m; să se calculeze înclinarea linii ferate pe planul orizontal. Să se afle rampa acestei linii ferate, adică cu cât se ridică la un metru de drum orizontal.

R. Se cunoaşte ipotenuza BC şi AC a unui triunghi dreptunghic. Inclinarea e dată de unghiul $B = 3^\circ 8' 35''$. Petru a afla rampa, observăm că dacă la un drum orizontal lung cât AB se ridică cu 84 m, la un drum lung de 1 m., se va ridica cu $\frac{84}{AB} = \frac{AC}{AB} = \operatorname{tg} B$; rampa este valoarea lui $\operatorname{tg} B = 0{,}054$. La 100 metri se urcă cu 5,4 m.

3. Un turn înalt de 32 m aruncă o umbră de 50 m. Să se afle înclinarea razelor solare pe pământ.

R. Trebue calculat unghiul opus catetei de 32 m, unui triunghi dreptunghic ale cărui catete sunt 32 m şi 50 m. Se află $32^\circ 37' 8''$.

4. Un turn de 40 m înălţime este aşezat vertical pe vârful unui deal. Dintr'un punct al planului orizontal se vede turnul sub $2^\circ 34' 17''$, iar vârful dealului se vede deasupra planului orizontal sub unghiul de $17^\circ 21' 14''$. Să se afle înălţimea dealului.

R. Insemnând cu x înălţimea dealului, s'au format două triunghiuri dreptunghice cu aceeaşi catetă orizontală, unul având cealaltă catetă de x m şi celălalt triunghi cateta de $(x+40)$ m; unghiurile opuse acestor catete sunt respectiv $17^\circ 21' 14''$ şi $17^\circ 21' 14'' + 2^\circ 34' 17''$. Egalând valorile catetei comună din cele două triunghiuri, se obţine ecuaţia

$$x \operatorname{cotg} 17^\circ 21' 14 = (x+40) \operatorname{cotg} 19^\circ 54' 31''.$$

Se află $x = 250$ m. aprox.

PROBLEME CARE SE REDUC LA REZOLVAREA TRIUNGHIURILOR DREPTUNGHICE.

21. **Triunghiul isoscel.** Considerând înălţimea BD a unui triunghi isoscel ABC $(AB = BC)$ (Fig. 9), triunghiul este împărţit în două triunghiuri dreptunghice ABD, BDC egale.

Pentru rezolvarea unui triunghi isoscel este deajuns să se cunoască două elemente, o latură și un unghi și în fine baza și o latură.

A D C
Fig. 22.

Se observă că dacă se cunoaște un unghi al triunghiului isoscel, se cunosc și celelalte unghiuri și deci este indiferent care unghi este dat odată cu baza sau latura. Unghiul de la vârful triunghiul isoscel poate fi și obtus; aceasta nu modifică operațiile, fiindcă în calcule trebue considerată jumatatea acestui unghi, adică tot un unghi ascuțit.

I. *Se cunosc o latură* $BC = d$ *și unghiul opus bazei*, $ABC = \beta$. Se cere să se calculeze baza triunghiului isoscel și unghiul de la bază.

Din triunghiul dreptunghic BDC, avem valoarea unghiului dela bază

$$DCB = 90^\circ - DBC = 90^\circ - \frac{1}{2}\beta.$$

Baza AC este îndoitul catetei DC, adică

$$AB = 2DC = 2BC\sin DBC = 2d\sin\frac{\beta}{2}.$$

Exemplu. $d = BC = 34{,}7$ m, unghiul $ABC = 64^\circ 24'$. Avem

$$DCB = 90^\circ - \frac{1}{2}64^\circ 24' = 90^\circ - 32^\circ 12' = 57^\circ 48',$$

$$AC = 2.34{,}7 \sin 32^\circ 12'.$$

Aplicând logaritmii, avem

$$\log(AC) = \log 2 + \log 34{,}7 + \log\sin 32^\circ 12',$$
$$\log(AC) = 0{,}30103 + 1{,}54033 + \bar{1}{,}72663 = 1{,}56799,$$
$$AC = 36{,}98 \text{ m}.$$

2°. *Se cunosc baza egală cu l și unghiul alăturat egal cu a.* Să calculăm unghiul opus bazei și latura. Din fig. 9 se vede că unghiul opus, bazei este dat de

$$\measuredangle ABC = 2.\ \measuredangle DBC = 2(90^\circ - a).$$

Din triunghiul DBC, avem

$$DC = BC\cos DCB,$$

$$\frac{l}{2} = BC\cos a, \quad l = 2BC\cos a,$$

$$BC = \frac{l}{2\cos\alpha}.$$

Exemplu. $l = 62{,}8$m, $\alpha = 35^\circ 10' 36''$. Avem

$$\measuredangle ABC = 2(90^\circ - 35^\circ 10' 36'') = 2.54^\circ 49' 24'',$$
$$ABC = 2(54^\circ + 49' + 24'') = 108^\circ + 98' + 48'' = 109^\circ 38' 48''.$$

$$BC = \frac{l}{2\cos a} = \frac{62{,}8}{2\cos 35^\circ 10' 36''}.$$

Aplicând logaritmii, avem

$$\log BC = \log 62{,}8 - \log 2 - \log\cos 35^\circ 10' 36''.$$
$$\log BC = 1{,}79796 - 0{,}30103 - \bar{1}{,}91243.$$

Se aplică cologaritmi la logaritmi ce au — înainte și avem

$$\log BC = 1{,}79796 + \bar{1}{,}69897 + 0{,}08757,$$
$$\log BC = 1{,}58450,$$
$$BC = 38{,}415 \text{ m}.$$

3°. *Se cunosc baza egală cu l și o latură d.* Să se afle unghiurile. Din triunghiul DBC (Fig. 9) avem

$$\sin DBC = \frac{DC}{BC}, \quad \sin DBC = \frac{\frac{l}{2}}{d} = \frac{l}{2d},$$

$$\sin\left(\frac{1}{2} ABC\right) = \frac{l}{2d},$$

Odată calculat unghiul DBC, avem unghiul de la bază

$$\sphericalangle DCB = 90^\circ - \sphericalangle DBC.$$

Exemplu. $l = 29,23$ m. $d = 69,43$ m. Inlocuind în formula aflată, avem

$$\sin\left(\frac{1}{2} ABC\right) = \frac{l}{2d} = \frac{29,23}{2.69,43}.$$

Deci

$$\log \sin\left(\frac{1}{2} ABC\right) = \log 29,23 - \log 2 - \log 63,43,$$

$$\log \sin\left(\frac{1}{2} ABC\right) = 1,46583 - 0,30103 - 1,84155,$$

$$\log \sin\left(\frac{1}{2} ABC\right) = 1,46583 + \overline{1},69897 + \overline{2},15845 = \overline{1},32325,$$

$$\frac{1}{2} \sphericalangle ABC = 12^\circ 9' 6'', \quad \sphericalangle ABC = 2 \times 12^\circ 9' 6'' = 24^\circ 18' 12'',$$

$$\sphericalangle DCB = 90^\circ - 12^\circ 9' 6'' = 77^\circ 50' 54''.$$

22. **Dreptunghiul.** Să considerăm un dreptunghi ABCD (Fig. 10), cu laturile $AB = a$, $BC = b$ și diagonala d. Diagonala AC îl împarte în triunghiurile egale ABC, DAC, iar unghiurile de la vârfurile A și C sunt împărțite în unghiurile α și β, care sunt complimentare. Pentru rezolvarea dreptunghiului, avem nevoie numai de două elemente din unul sau celalt triunghiu dreptunghic.

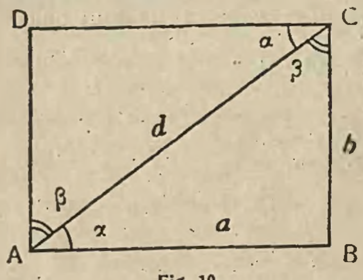

Fig. 10.

Probleme care intervin se rezolvă cu ajutorul relațiilor

$$a = d \cos\alpha, \quad b = d \sin\alpha,$$

$$d^2 = a^2 + b^2, \quad \operatorname{tg}\alpha = \frac{b}{a}.$$

Exemplu. Să se afle laturile dreptunghiului, când se cunosc diagonala $d = 42$ m și unghiul $\alpha = 68^\circ 36' 15''$. Din triunghiul ABC, avem

$$a = d \cos\alpha = 42 \cos 68^\circ 36' 15'',$$
$$b = d \sin\alpha = 42 \sin 68^\circ 36' 15''.$$

Aplicând logaritmii, avem

$$\log a = \log 42 + \log \cos 6\,^\circ 36' 15'' = 1,62325 + \overline{1},56207 = 1,18532,$$
$$a = 15\,322 \text{ m}.$$

In mod analog, găsim $b = 39,105$ m.

23. **Poligoanele regulate înscrise și circumscrise** ([1]). Poligoanele re-

([1]) Nu face parte din program.

gulate înscrise și circumscrise cercului cu raza r, se descompun în triunghiurii soscele cu vârfurile în centrul cercului și cu bazele coarde și tangente la cerc. Pentru determinarea poligoanelor regulate, e de ajuns să cunoaștem, pe lângă raza cercului, numărul laturilor.

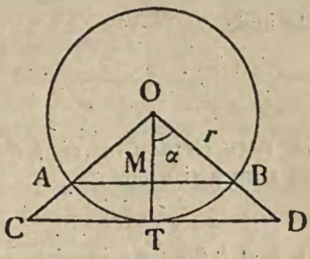

Fig. 11.

1°. Fie $AB = a$ o latură a *poligonului regulat de n laturi înscris* în cercul cu centru O și raza r (Fig. 11). Unghiul de la centru este $\frac{360^\circ}{n}$ și fiindcă înălțimea OM este bisectoarea acestui unghi, rezultă că $\alpha = \frac{180^\circ}{n}$.

Din triunghiul dreptunghic MOB, avem

$$MB = OB \sin\alpha, \quad \frac{a}{2} = r \sin\frac{180^\circ}{n}, \quad a = 2r \sin\frac{180^\circ}{n}.$$

Cu această formulă calculăm latura poligonului regulat de n laturi înscris în cercul de rază r.

Exemplu. $r = 40$ cm.; să se afle latura octogonului regulat. Avem

$$a = 2r\sin\frac{180^\circ}{n} = 2.40 \sin\frac{180^\circ}{8} = 2.40.\sin 22^\circ 30'.$$

Aplicând logaritmii, avem

$$\log a = \log 80 + \log\sin 22^\circ 30' = \bar{1},90309 + \bar{1},58284,$$
$$\log a = 1,48593\,; \quad a = 30,615 \text{ cm}.$$

2°. *Poligon circumscris.* Fie $CD = b$ latura poligonului regulat de n laturi circumscris cercului cu raza r. T fiind punctul de contact cu cercul (Fig. 11), T este mijlocul lui CD, unghiul TOD este egal cu

$$\alpha = \frac{180^\circ}{n}.$$

Din triunghiul dreptunghic TOD, avem

$$TD = OT\,\mathrm{tg}\,TOD, \quad \frac{b}{2} = r\,\mathrm{tg}\,\alpha, \quad \frac{b}{2} = r\,\mathrm{tg}\frac{180^\circ}{n},$$

de unde

$$b = 2r\,\mathrm{tg}\frac{180^\circ}{n}.$$

Cu această formulă se calculează latura poligonului regulat de n laturi circumscris cercului cu raza r.

Exemplu. Pentru latura octogonului circumscris cercului de rază 40 cm., avem

$$b = 2.40\,\mathrm{tg}22^\circ30' = 80\,\mathrm{tg}22^\circ30',$$
$$\log b = \log 80 + \log\mathrm{tg}22^\circ30' = 1,90309 + \bar{1},61722 = 1,52031,$$
$$b = 33,137 \text{ cm}.$$

24. **Raza cercului înscris și circumscris unui poligon regulat**[1]. Să ne propunem acum să rezolvăm problema inversă celei precedente și anume să calculăm raza r a cercului circumscris sau înscris unui poligon regulat dat, căruia i se cunoaște latura.

(1) Nu face parte din program.

Pentru *raza cercului circumscris*, avem relația stabilită

$$a = 2r\sin\frac{180^0}{n},$$

de unde

$$r = \frac{a}{2\sin\frac{180^0}{n}},$$

iar *raza cercului înscris* ρ o deducem din cealaltă formulă, unde înlocuim pe r cu ρ și avem

$$b = 2\rho\,\mathrm{tg}\frac{180^0}{n},$$

de und b fiind latura poligonului, avem

$$\rho = \frac{b}{2\,\mathrm{tg}\frac{180^0}{n}}.$$

Exemplu. Se dă latura unui pentagon regulat egală cu 2 cm. Să se afle razele cercului circumscris și înscris. Avem respectiv

$$r = \frac{2}{2\sin\frac{180^0}{5}} = \frac{1}{\sin 36^0}, \quad \rho = \frac{2}{2\,\mathrm{tg}\frac{180^0}{5}} = \frac{1}{\mathrm{tg}36^0} = \mathrm{cotg}36^0.$$

Aplicând logaritmii, avem

$$\log r = \log 1 - \log\sin 36^0 = -\overline{1},76922 = 0,23078,$$
$$r = 1,7\ \mathrm{cm};$$
$$\log\rho = \log\mathrm{cotg}36^0 = 0,13874, \quad \rho = 1,376\ \mathrm{cm}.$$

EXERCIȚII.

1. O ghiulea e văzută sub un unghi de 31^0 și are raza de 1,5 m. Să se afle distanța de la ochiul observatorului la centrul ghiulelei.

R. Ducând raza vizuală OA, tangentă în A la ghiulea, notând cu C centrul ghiulelei, se va calcula CO din triunghiul dreptunghic OAC, în care unghiul O este $\frac{1}{2}31^0$; $CO = \frac{1,5}{\sin 15^0 30'} = 5$ m, aproape.

2. In dreptunghiul ABCD, se cunoaște unghiul diagonalelor AC, BD egal cu 35^0 și lungimea unei diagonale, 12,564 m. Să se calculeze laturile dreptunghiului.

R. O fiind centrul dreptunghiului, avem $\sphericalangle AOD = \sphericalangle OBA + \sphericalangle OAB$ (ca fiind exterior triunghiului AOB), $\sphericalangle AOD = \sphericalangle 2ABD$; $\sphericalangle ABD = 17^0 30'$. $AD = BD\sin 17^0 30'$, $AB = BD\cos 17^0 30'$; $AD = 3,778$ m; $AB = 11,98$ m.

3. In rombul ABCD se cunosc unghiul $BAD = 50^0$ și diagonala $AC = 18$ m. Să se calculeze latura rombului și cealaltă diagonală.

R. O fiind centrul rombului (intersecția diagonalelor), se rezolvă triunghiul dreptunghic AOB, în care $\sphericalangle BAO = 25^0$, $AO = 9$ m. Se găsește $AB = 9,93$, $BO = 4,196$.

4. Se consideră un trapez ABCD (AB paralelă cu CD), în care se cunosc latura $BC = 80,4$ m., cea mai mică din laturile paralele $DC = 36,8$ m.,

iar unghiurile alăturate bazei celei mari sunt $\sphericalangle DAB=45^0$, $\sphericalangle ABC=48^0 36'$. Să se calculeze celelalte laturi ale trapezului.

R. Se duce CE perpendiculară pe AB; $CE=CB \sin 48^0 36'$, $EB=CB \cos 48^0 36'$. Se duce DF perpendiculară pe AB; din triunghiul dreptunghic ADF, se calculează AF, AD; $AB=AF+FE+EB$ $(FE=DC)$. Se obține $AB=150{,}28$, $AD=85{,}29$; înălțimea $DF=60{,}31$.

5. Se consideră tr pezul isoșcel ABCD (AB paralelă cu CD, $AD=BC$) în care se cunosc latura paralelă cea mică $CD=10$ m, latura neparalelă $BC=4{,}5$ m. și unghiul alăturat bazei mari, $\sphericalangle ABC=48^0$. Să se afle baza mare a trapezului și celalt unghi DCB.

R. Se duce CE perpendiculară pe AB; se calculează EB din triunghiul EBC. $AB=2.EB+DC=16{,}02$ m. Avem $\sphericalangle A+\sphericalangle B+\sphericalangle C+\sphericalangle D=360^0$, $\sphericalangle 2B+\sphericalangle 2C=360^0$, $\sphericalangle B+\sphericalangle C=180^0$, $C=180-B=132^0$.

6. O coardă subîntinde un arc de 80^0 și e depărtată de centru de 20 m. Să se afle lungimea coardei și raza cercului.

R. O fiind centrul și C mijlocul coardei AB, se consideră triunghiul AOC; $AB=2{,}20 \operatorname{tg} 40^0=33{,}56$; raza este 26, aproape.

7. Să se afle coarda ce corespunde unghiului la centru de $28^0 34'$ în cercul cu raza 8,56 m.

R. 4,22 m.

8. Să se afle unghiul la centru corespunzător coardei de 6,8 m., raza cercului fiind 5 m.

R. $85^0 41' 17''$.

9. Raza cercului înscris într'un octogon regulat fiind 26 m., să se afle raza cercului circumscris.

R. 28,13 m.

CALCULUL ARIILOR.

25. **Aria triunghiului dreptunghic.** In triunghiul dreptunghic baza și înălțimea fiind cele două catete b și c, expresiunea arii A este dată de

$$A=\frac{1}{2}bc.$$

Exemple. 1⁰. Când se cunosc catetele $b=32{,}5$ m., $c=41{,}85$ m., aria este

$$A=\frac{1}{2}32{,}5\times 41{,}85.$$

Aplicând logaritmii, avem

$$\log A=\log 32{,}5+\log 41{,}85-\log 2,$$

$$\log A=1{,}51188+1{,}62170-0{,}30103,$$

$$\log A=1{,}51188+1{,}62170+\bar{1}{,}69897=2{,}83255,$$

$$A=680 \text{ m}^2.$$

2⁰. Dacă se cunosc ipotenuza $a=117{,}8$ m și cateta $b=48$ m, întâi se calculează cateta c cu formula

$$c^2=a^2-b^2,$$

de unde $c=\sqrt{a^2-b^2}$. Aria triunghiului dreptunghic este

$$A = \frac{1}{2} bc = \frac{1}{2} b\sqrt{a^2 - b^2},$$

$$A = \frac{1}{2} b \sqrt{(a+b)(a-b)}.$$

Aplicând logaritmii, avem

$$\log A = \log b + \frac{\log(a+b) + \log(a-b)}{2} - \log 2.$$

In cazul nostru,

$$a + b = 165{,}8, \quad a - b = 69{,}8.$$

Avem

$$\log(a+b) = 2{,}21958, \ \log(a-b) = 1{,}84386,$$

$$\log A = 1{,}68124 + \frac{2{,}21958 + 1{,}84386}{2} - 0{,}30103.$$

$$\log A = 1{,}68124 + \frac{4{,}06344}{2} + \bar{1}{,}69897, \ \log A = 3{,}41193,$$

$$A = 2581 \text{ m}^2, \text{ aprox.}$$

3°. Dacă se cunosc ipotenuza $a = 578{,}25$ m, $B = 38^\circ 51' 23''$, avem

$$b = a \sin B, \ c = a \cos B,$$

deci

$$A = \frac{1}{2} bc = \frac{1}{2} a^2 \sin B \cos B.$$

Și aplicând logaritmii, avem

$$\log A = 2 \log a + \log \sin B + \log \cos B - \log 2.$$

Avem, în cazul nostru,

$$2 \log a = 5{,}52424, \ \log \sin B = \bar{1}{,}79752, \ \log \cos B = \bar{1}{,}89138.$$

Deci

$$\log A = 5{,}52424, + \bar{1}{,}79752 + \bar{1}{,}89138 - 0{,}30103,$$

$$\log A = 5{,}52424, + \bar{1}{,}79752 + \bar{1}{,}89138 - \bar{1}{,}69897,$$

$$\log A = 4{,}91211,$$

$$A = 81678 \text{ m}^2.$$

26. **Aria triunghiului isocel.** 1°. Considerând triunghiul isoscel ABC (AB = BC), să presupunem că se cunosc o latură $BC = d$ și unghiul opus bazei, $\beta = ABC$. BD fiind înălțimea vârfului B, avem pentru expresiunea arii

$$A = \frac{1}{2} AC.BD.$$

Dar

$$AC = 2\, DC = 2\, BC \sin\frac{1}{2}\beta, \ BD = BC \cos\frac{1}{2}\beta,$$

$$AC = 2d \sin\frac{1}{2}\beta, \ BD = d \cos\frac{1}{2}\beta;$$

deci

$$A = \frac{1}{2}\, 2d \sin\frac{1}{2}\beta . d \cos\frac{1}{2}\beta,$$

$$A = d^2 \sin\frac{1}{2}\beta \cos\frac{1}{2}\beta.$$

Aplicând logaritmii, avem

$$\log A = 2\log d + \log \sin \frac{1}{2}\beta + \log \cos \frac{1}{2}\beta.$$

2°. Se cunosc baza $AC = l$ și unghiul alăturat $\sphericalangle DCB = \alpha$. Aria e dată de

$$A = \frac{1}{2} AC.BD.$$

Dar

$$BD = DC \operatorname{tg} \sphericalangle DCA = DC \operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{2} l \operatorname{tg}\alpha.$$

Deci aria este egală cu

$$A = \frac{1}{2} l.\ \frac{1}{2} l \operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{4} l^2 \operatorname{tg}\alpha.$$

Aplicând logaritmii, avem

$$\log A = 2\log l + \log \operatorname{tg}\alpha - \log 4.$$

3°. Se cunosc baza $AC = l$ și o latură $BC = d$. Avem

$$A = \frac{1}{2} AC.BD.$$

Dar

$$\overline{BD}^2 = \overline{BC}^2 - \overline{DC}^2 = \overline{BC}^2 - \left(\frac{1}{2} AC\right)^2,$$

$$\overline{BD}^2 = \overline{BC}^2 - \frac{1}{4}\overline{AC}^2.$$

Extrăgând rădăcina pătrată, avem

$$BD = \sqrt{\overline{BC}^2 - \frac{1}{4}\overline{AC}^2} = \sqrt{d^2 - \frac{1}{4} l^2},$$

$$BD = \sqrt{\left(d + \frac{1}{2} l\right)\left(d - \frac{1}{2} l\right)}.$$

Inlocuind în expresiunea arii, se obține

$$A = \frac{1}{2} l \sqrt{\left(d + \frac{1}{2} l\right)\left(d - \frac{1}{2} l\right)}.$$

Aplicând logaritmii, avem

$$\log A = \log l + \frac{\log\left(d + \frac{1}{2} l\right) + \log\left(d - \frac{1}{2} l\right)}{2} - \log 2.$$

Exemplu. $l = 648{,}72$ m, $d = 376{,}8$ m. Avem

$$\log l = \log 648{,}72 = 2{,}81205$$

$$\log\left(d + \frac{1}{2} l\right) = \log 701{,}16 = 2{,}84582,$$

$$\log\left(d - \frac{1}{2} l\right) = \log 52{,}44 = 1{,}71966.$$

$$\log A = 2{,}81205 + \frac{2{,}84582 + 1{,}71966}{2} - 0{,}30103,$$

$$\log A = 2{,}81205 + 1{,}42291 + 0{,}85983 + \overline{1}{,}69897 = 4{,}79376,$$

$$A = 62195 \text{ m}^2.$$

27. Aria poligoanelor regulate înscrise şi circumscrise la un cerc[1]. Calculul arii poligoanelor regulate se reduce la acela al arii triunghiului isoscel.

In cazul *poligoanelor regulate circumscrise* (Fig. 12). Inălţimile triunghiurilor COD sunt egale cu raza cercului. Considerând deci un poligon regulat circumscris de n laturi unind centrul cu vârfurile poligonului, poligonul se împarte în n triunghiuri egale cu triunghiul COD. Dar mărimea laturei CD am văzut (No. 23) că este egală cu

$$CD = 2r\operatorname{tg}\frac{180^0}{n}.$$

Deci

$$\text{aria } COD = \frac{1}{2} CD.OF = \frac{1}{2}.2r\operatorname{tg}\frac{180^0}{n}.r,$$

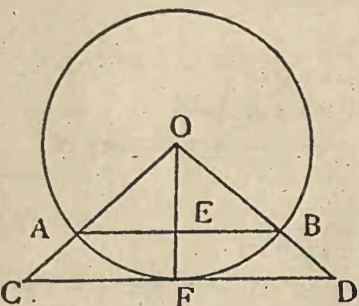

Fig. 12.

$$\text{aria } COD = r^2\operatorname{tg}\frac{180^0}{n}.$$

Aria poligonului este

$$A = n.r^2\operatorname{tg}\frac{180^0}{n}.$$

In cazul *poligoanelor regulate înscrise*, poligonul se împarte în n- triunghiuri egale cu AOB. Latura AB este egală (No. 23) cu

$$AB = 2r\sin\frac{180^0}{n},$$

iar înălţimea OE o deducem din triunghiul OEB (Fig. 12),

$$OE = OB\cos EOB = r\cos\frac{180^0}{n}.$$

$$\text{Aria } AOB = \frac{1}{2} AB.OE = \frac{1}{2}.\ 2r\sin\frac{180^0}{n}.r\cos\frac{180^0}{n}.$$

$$\text{Aria } AOB = r^2\sin\frac{180^0}{n}\cos\frac{180^0}{n}.$$

Deci aria poligonului regulat de n laturi înscris în cercul cu raza r este

$$A = n.r^2\sin\frac{180^0}{n}\cos\frac{180^0}{n}.$$

EXERCIŢII.

1. Raportul catetelor AC şi AB ale unui triunghi dreptunghic ABC este $\frac{1}{\sqrt{3}}$, şi lungimea perpendicularei AD din vârful unghiului drept este 24,17 m. Să se afle aria triunghiului.

R. Notând cu $\alpha = \sphericalangle ABC$, avem $\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{\sqrt{3}}$, $\alpha = 30^0$. Aria este

$$\frac{1}{2}AB.AC = \frac{1}{2}\overline{AB}^2\frac{AC}{AB} = \frac{1}{2}\frac{\overline{AB}^2}{\sqrt{3}} = \frac{1}{2\sqrt{3}} = \frac{\overline{AD}^2}{\sin^2\alpha};\ 674{,}571.$$

---

[1] Nu face parte din program.

2 Aria unui triunghi isoscel ABC (AB=BC) este 108 dm² și unghiul ABC dela vârf este 36° 52′10″. Să se afle elementele necunoscute ale triunghiului.

R. BD fiind înălțimea, avem pentru arie

$$DC.\ DB=108,\ BC\sin\left(\frac{1}{2}36^\circ52'10''\right).\ BC\cos\left(\frac{1}{2}36^\circ52'10''\right)=108,$$

$$\overline{BC}^2\sin\left(\frac{1}{2}36^\circ52'10''\right)\cos\left(\frac{1}{2}36^\circ52'10''\right)=108,$$

$$\overline{BC}^2=\frac{108}{\sin\left(\frac{1}{2}36^\circ52'10''\right)\cos\left(\frac{1}{2}36^\circ52'10''\right)},$$

$$2\log BC=\log 108-\log\sin\left(\frac{1}{2}36^\circ52'10''\right)-\log\cos\left(\frac{1}{2}36^\circ52'10''\right),$$

$$\log BC=\frac{1}{2}\left(2,03342-\overline{1},49999-\overline{1},97713\right)=\frac{1}{2}\left(2,03342+0,50001+0,02287\right)$$

$$\log BC=1,27815,\ BC=18,974.$$

$$\log AC=\log 2+\log BC+\log\sin 18^\circ26'5''=1,07917;\ AC=12,\text{ aproape.}$$

3. Aria unui decagon regulat este 10 m². Să se afle razele cercului înscris și circumscris la acest decagon.

R. a fiind latura decagonului, r și ϱ razele cercurilor circumscris și înscris, avem

$$10=nr^2\operatorname{tg}\frac{180^\circ}{10},\ r^2=\frac{10}{10\operatorname{tg}18^\circ}=\operatorname{cotg}18^\circ,\ 2\log r=\log\operatorname{cotg}18^\circ=0,48822;\ r=1,7.$$

$$10=n\varrho^2\sin 18^\circ\cos 18^\circ,\ \varrho^2=\frac{1}{\sin 18^\circ\cos 18^\circ};\ 2\log\varrho=-\log\sin 18^\circ-\log\cos 18^\circ=0,53181;\ \varrho=1,845.$$

4. Latura pentagonului fiind 45 cm., să se afle cu cât e mai mare aria lui decât aria cercului înscris.

R. 472,418 cm².

LINII TRIGONOMETRICE IN CADRANUL INTÂI ŞI AL DOILEA CADRAN.

LINIILE TRIGONOMETRICE ALE UNGHIURILOR ASCUŢITE ŞI OBTUSE.

28. Am definit în partea întâi liniile trigonometrice, presupunând că unghiul este ascuţit. Cu aceste noţiuni am putut rezolva problema triunghiului dreptunghic şi alte probleme care se reduc la aceasta. În triunghiul oarecare intervin însă şi unghiuri obtuse. Pentru a putea rezolva cu metodele trigonometriei, trebue să definim liniile trigonometrice şi pentru unghiuri obtuse.

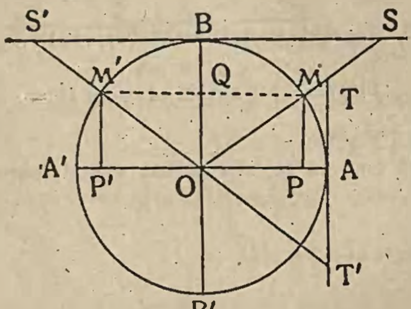

Fig 13.

Vom considera mai întâi *unghiuri pozitive*, adică acelea cum este AOM' (Fig. 13), care sunt obţinute făcând să se învârtească dreapta OA în senzul pozitiv *pentru a se aşterne peste* OM'. Să considerăm în cercul trigonometric (Fig 13) un unghiu obtus a=AOM', cuprins între 90^0 şi 180^0, adică extremitatea M', a arcului corespunzător să fi in cadranul al doilea.

Să-i construim liniile trigonometrice ca şi pentru cazul unui unghi mai mic de cât 90^0.

29. **Sinus. Cosinus.** Din extremitatea M' a arcului să ducem perpendiculara M'P' pe diametrul AA' ce trece prin origina arcului. Avem P'M' = sin$a$, OP' = cos$a$. Ducând paralela M'Q cu AA', se vede că OQ = P'M' = sin$a$.

Deci, sinusurile unghiurilor obtuse, adică sinusurile arcelor cu extremitatea în cadranul al doilea, se măsoară pe diametrul B'B, de la O către B, adică sunt pozitive. Deci, *sinusurile în cadranul al doilea sunt pozitive.*

Cosinusurile OP' se măsoară pe diametrul AA', de la O către A′, în direcţie negativă contrară celei pozitive OA, deci *cosinusurile în cadranul al doilea sunt negative.*

Când arcul creşte de la 90^0 la 180^0, sinusul descreşte de la valoarea $OB = 1$ până la zero, iar cosinusul OP′ descreşte de la zero la -1, deci $\cos 180^0 = -1$.

30. **Tangenta. Cotangenta.** Să ducem raza OM′ prin extremitatea arcului şi s'o prelungim până tae tangentele duse în A şi B la cercul trigonometric. Conform definiţii, avem

$$AT' = \operatorname{tg} a, \quad BS' = \operatorname{cotg} a.$$

Tangentele arcelor din cadranul al doilea sunt măsurate de la A către T′, în direcţie contrară celei pozitive, deci sunt negative. De asemenea, cotangentele fiind măsurate de la B către S′, sunt negative.

Deci, *tangentele şi cotangele în cadranul a doilea sunt negative.*

Când unghiul a este mai mare ca 90^0 cu o cantitate foarte mică ε pozitivă, atunci tangenta sa este foarte mare dar este negativă, deci $\operatorname{tg}(90^0 + \varepsilon) \to -\infty$, când $\lim \varepsilon = 0$. Când unghiul creşte de la 90^0 la 180^0, segmentele AT′ se micşorează în lungime şi când $a = 180^0$, AT′ devine egal cu zero, deci $\operatorname{tg} 180^0 = 0$. Aşa dar, când unghiul a variază de la 90^0 la 180^0, $\operatorname{tg} a$ *creşte de la* $-\infty$ *la* 0. Mai mult, trebue observat, că $\operatorname{tg}(90^0 - \varepsilon) \to \infty$, iar $\operatorname{tg}(90^0 + \varepsilon) \to -\infty$.

Când unghiul a variază de la 90^0 la 180^0, segmentele BS′ cresc în lungime dar sunt negative, deci *cotangenta descreşte de la* 0 *la* $-\infty$, adică $\operatorname{cotg} 90^0 = 0$, $\operatorname{cotg}(180^0 - \varepsilon) = -\infty$, când $\lim \varepsilon = 0$.

31. **Secanta. Cosecanta**(1). Avem (Fig. 13) $\sec a = OT'$, iar $\operatorname{cosec} a = OS'$. În cadranul al doilea, *secanta este negativă,* căci pentru a întâlni tangenta la cerc în A, prelungim raza OM′ în direcţie contrară cu extremitatea arcului. *Cosecanta este pozitivă,* căci prelungim raza în aceeaşi direcţie cu extremitatea M′ a arcului.

Când unghiul a variază de la 90^0 la 180^0 *secanta* OT′ se micşorează în lungime, dar este negativă, deci creşte, şi anume $\sec(90^0 + \varepsilon) \to -\infty$, $\sec 180^0 = -1$, aşa dar *creşte de la* $-\infty$ *la* -1.

Cosecanta creşte de la 1 *la* ∞ şi anume $\operatorname{cosec} 90^0 = 1$, $\operatorname{cosec}(180^0 - \varepsilon) \to \infty$, când $\lim \varepsilon = 0$.

32. **Liniile trigonometrice ale unghiurilor suplimentare.** Să considerăm în cercul trigonometric (Fig. 13) unghiul AOM =

---

(1) Nu face parte din program.

b. Paralela dusă prin M la diametrul AA' determină arcele egale AM = A'M'. Avem

$$\text{arc}AM = b,\ \text{arc}AM' = 180^0 - A'M' = 180^0 - AM = 180^0 - b,$$

deci unghiurile AOM şi AOM' sunt suplimentare.

Să construim liniile trigonometrice ale acestor unghiuri. Triunghiurile dreptunghice OPM şi OP'M' având ipotenuzele OM = OM' ca raze, şi catetele MP = M'P' ca paralele cuprinse între paralele, sunt egale. Deci OP = OP' şi unghiurile AOM = A'OM'.

De asemenea, în triunghiurile OAT şi OAT' avem cateta OA comună; unghiurile AOT = A'OM' = AOT'. Deci, triunghiurile sunt egale, de unde urmează AT = AT', OT = OT'.

În fine, triunghiurile dreptunghice OBS şi OBS' sunt egale, căci au cateta OB comună şi unghiurile SOB = S'OB'. Deci BS = BS', OS = OS'.

De aci urmează

$$\text{(XI)}\quad \begin{aligned} &\sin(180^0 - b) = M'P' = MP = \sin b,\\ &\cos(180^0 - b) = OP' = -OP = -\cos b,\\ &\operatorname{tg}(180^0 - b) = AT' = -AT = -\operatorname{tg} b,\\ &\operatorname{cotg}(180^0 - b) = BS' = -BS = -\operatorname{cotg} b,\\ &\sec(180^0 - b) = OT' = -OT = -\sec b,\\ &\operatorname{cosec}(180^0 - b) = OS' = OS = \operatorname{cosec} b. \end{aligned}$$

Deci, *liniile trigonometrice a două arce suplimentare sunt egale şi de semne contrare, afară de sinus şi cosecantă care au şi acelaş semn.*

De ex., $\sin 120^0 = \sin 60^0 = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\cos 150^0 = -\cos 30^0 = -\frac{\sqrt{3}}{2}$,

$$\operatorname{tg} 135^0 = -\operatorname{tg} 45^0 = -1,\quad \operatorname{cotg} 150^0 = -\operatorname{cotg} 30^0 = -\sqrt{3},$$
$$\sec 105^0 = -\sec 75^0.$$

33. **Relaţiuni între liniile trigonometrice din cadranul al doilea.** Să considerăm liniile trigonometrice ale unghiului AOM' = a (Fig. 13) din cadranul al doilea.

1⁰. Din triunghiul dreptunghic OM'P', avem

$$\overline{M'P'}^2 + \overline{OP'}^2 = \overline{OM'}^2,\quad \sin^2 a + \cos^2 a = 1.$$

2⁰. Dreptele M'P' şi AT' fiind paralele, triunghiurile OM'P' şi OAT' sunt asemenea. Deci

$$\frac{M'P'}{AT'} = \frac{OP'}{OA},\quad \frac{\sin a}{\operatorname{tg} a} = \frac{\cos a}{1},$$

$$tg\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}.$$

Însă în cadranul al doilea, sinα este pozitiv, cosα negativ, deci raportul din membrul al doilea este negativ. Dar şi tgα este negativ în cadranul al doilea şi deci egalitatea stabilită este adevărată şi în ce priveşte semnul.

3°. Triunghiurile dreptunghice OM'P' şi S'BO au unghiurile ascuţite P'OM'= OS'B ca alterne interne, deci sunt asemenea.

De unde

$$\frac{M'P'}{OB} = \frac{OP'}{BS'}, \quad \frac{\sin\alpha}{1} = \frac{\cos\alpha}{\cot g\alpha}, \quad \cot g\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha},$$

această egalitate fiind adevărată şi ince priveşte semnul, căci în cadranul al doilea raportul din membru al doilea este negativ, dar şi cotgα este negativă.

Deci, relaţiunile fundamentale între liniile trigonometrice sunt aceleaşi în cadranul al doilea ca şi pentru arcele din cadranul întâi.

34. Liniile trigonometrice ale unghiurilor negative. Să considerăm în cercul trigonometric (Fig. 14) unghiul AOM=α şi din entremitatea M a arcului corespunzător să lăsăm perpendiculara MPM' pe diametrul AA', până tae cercul în M'. Punctul M' este simetricul lui M faţă de diametrul AA', iar arcele AM= AM' şi deci şi unghiurile AOM= M'OA. Dar unghiul AOM' este socotit în sens contrar de cât unghiul AOM, deci valoarea sa este $-\alpha$, este deci un unghi negativ.

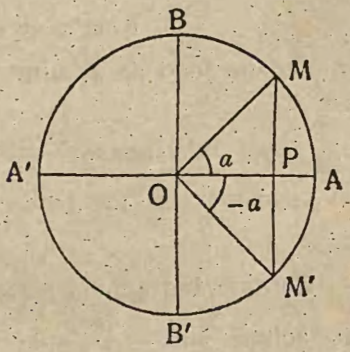

Fig. 14.

Să considerăm liniile trigonometrice ale unghiului AOM' după însăşi definiţia lor. Avem

$$\sin(-\alpha) = \sin AOM' = \frac{PM'}{OM'} = \frac{PM'}{1} = PM'.$$

Dar PM' este socotit în direcţie contrară cu PM; deci PM'= —PM şi prin urmare

$$\sin(-\alpha) = PM' = -PM = -\sin\alpha.$$

De asemenea,

$$\cos(-a) = OP = \cos a,\ \operatorname{tg}(-a) = \frac{PM'}{OP} = \frac{-PM}{OP} = \frac{-\sin a}{\cos a} = -\operatorname{tg} a,$$

$$\operatorname{cotg}(-a) = \frac{OP}{PM'} = \frac{OP}{-PM} = \frac{\cos a}{-\sin a} = -\operatorname{cotg} a,$$

$$\text{(XII)} \qquad \sec(-a) = \frac{OM'}{PO} = \frac{1}{\cos a} = \sec a,$$

$$\operatorname{cosec}(-a) = \frac{OM'}{PM'} = \frac{1}{-\sin a} = -\operatorname{cosec} a.$$

Deci, *liniile trigonometrice a două unghiuri egale și de semne contrarii sunt egale și de semne contrarii, afară de cos și sec care au și acelaș semn.*

35. **Aplicații.** I. *Să se găsească arcele x cuprinse între* 0^0 *și* 180^0, *care verifică ecuația trigonometrică*

$$5 \cos^2 x + 8 \sin x - 8 = 0,$$

și să se afle apoi valoarea celorlalte linii trigonometrice.

Înlocuind pe $\cos^2 x$ cu $1-\sin^2 x$, ecuația devine

$$5(1-\sin^2 x) + 8 \sin x - 8 = 0,$$

de unde

$$5 - 5 \sin^2 x + 8 \sin x - 8 = 0,$$

sau

$$5 \sin^2 x - 8 \sin x + 3 = 0.$$

Ecuația fiind de gradul al doilea în $\sin x$, rezolvând-o, avem

$$\sin x = \frac{4 \pm \sqrt{16-15}}{5} = \frac{4 \pm 1}{5},$$

$$\sin x = \frac{4+1}{5} = 1,\ \sin x = \frac{4-1}{5} = \frac{3}{5}.$$

Considerând soluția $\sin x = 1$, rezultă $x = 90^0$. Pentru a doua soluție $\sin x = \frac{3}{5}$, aplicăm logaritmii, și avem

$$\log \sin x = \log \frac{3}{5} = \log 3 - \log 5 = 0{,}47712 - 0{,}69897,$$

$$\log \sin x = 0{,}47712 + \overline{1}{,}30103 = \overline{1}{,}77815,$$

de unde

$$x = 36^0\ 52'\ 10''.$$

Dar, pentru că x este dat prin $\sin x = \frac{3}{5}$, urmează ca și arcul suplimentar lui $36^0\,52'\,10''$ verifică această ecuaţie, căci două arce suplimentare au acelaş sinus. Deci, ecuaţia mai este verificată şi de arcul

$$180^0 - 36^0 52' 10'' = 179^0 59' 60'' - 36^0 52' 10'' = 143^0 7' 70''.$$

Soluţiile în $\sin x$ ale ecuaţii date au fost $\sin x = 1\,(x = 90)$ şi $\sin x = \frac{3}{5}$. Pentru $\sin x = 1$, celelalte linii trigonometrice sunt $\cos x = 0$, $\operatorname{tg} x = \infty$, $\operatorname{cotg} x = 0$.

Pentru $\sin x = \frac{3}{5}$, avem

$$\cos^2 x = 1 - \sin^2 x,\quad \cos x = \pm\sqrt{1-\sin^2 x},$$

$$\cos x = \pm\sqrt{1-\left(\frac{3}{5}\right)^2} = \pm\sqrt{1-\frac{9}{25}} = \pm\sqrt{\frac{16}{25}} = \pm\frac{4}{5}.$$

Am obţinut două valori, una $\cos x = \frac{4}{5}$, pentru $x = 36^0 52'$ $10''$, iar cealaltă $\cos x = -\frac{4}{5}$, pentru arcul $143^0 7' 50''$ suplimentar celui dintâi, ceea ce trebuia, căci cosinusurile a două arce suplimentare sunt egale şi de semne contrarii.

Celelalte linii trigonometrice sunt

$$\operatorname{cotg} x = \frac{\cos x}{\sin x},\quad \operatorname{tg} x = \frac{\frac{3}{5}}{\frac{4}{5}} = \frac{4}{3},\quad \operatorname{cotg} x = \frac{\frac{3}{5}}{-\frac{4}{5}} = -\frac{3}{4},$$

valoarea $\frac{3}{4}$ corespunzând arcului din cadranul întâi, iar $-\frac{3}{4}$ celui din cadranul al doilea, suplimentului său. De asemenea,

$$\operatorname{cotg} x = \frac{\cos x}{\sin x},\quad \operatorname{cotg} x = \frac{\frac{4}{5}}{\frac{3}{5}} = \frac{4}{3},\quad \operatorname{cotg} x = \frac{-\frac{4}{5}}{\frac{3}{5}} = -\frac{4}{3},$$

$\frac{4}{3}$ şi $-\frac{4}{3}$ corespunzând respectiv arcelor din cadranul întâi şi suplimentului său.

II. *Să se găsească arcele x cuprinse între 0^0 şi 180^0, care verifică ecuaţia trigonometrică*

$$2\sin^2 x - 5\cos x - 4 = 0.$$

Să se calculeze apoi celelalte linii trigonometrice.

Înlocuind pe $\sin^2 x$ cu $1-\cos^2 x$, ecuaţia devine

$$2(1-\cos^2 x)-5\cos x-4=0,$$

de unde

$$2\cos^2 x+5\cos x+2=0.$$

Ecuaţia fiind de gradul al doilea în $\cos x$, rezolvând-o, avem

$$\cos x=\frac{-5\pm\sqrt{25-4.4}}{4}=\frac{-5\pm\sqrt{9}}{4}=\frac{-5\pm3}{4}.$$

Avem deci două cazuri de considerat

$$\cos x=\frac{-5+3}{4}=\frac{-1}{2}, \quad \cos x=\frac{-5-3}{4}=-2.$$

Cosinusul unui unghi fiind cuprins între -1 şi $+1$, nu se poate să avem $\cos x=-2$. Rămâne numai de considerat

$$\cos x=-\frac{1}{2}.$$

Dar, cosinusul fiind negativ, arcul x este în cadranul al doilea. Să calculăm deci $\cos y=\frac{1}{2}$ şi atunci x este suplimentul lui y, $x=180^0-y$. Însă pentru arcul y din cadranul întâi, avem

$$\sin^2 y=1-\cos^2 y, \quad \sin y=\sqrt{1-\cos^2 y}=\sqrt{1-\left(\frac{1}{2}\right)^2}=\sqrt{1-\frac{1}{4}}$$
$$=\frac{\sqrt{3}}{2},$$ adică $y=60^0$. Deci $x=180^0-y=120^0$.

Celelalte linii trigonometrice sunt

$$\sin x=\sqrt{1-\cos^2 x}=\sqrt{1-\left(-\frac{1}{2}\right)^2}=\sqrt{1-\frac{1}{4}}=\frac{\sqrt{3}}{2},$$

şi am luat numai semnul $+$ înaintea radicalului, căci x fiind în cadranul al doilea sinusul este pozitiv. Apoi

$$\operatorname{tg} x=\frac{\sin x}{\cos x}=\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{-\frac{1}{2}}=-\sqrt{3}, \quad \operatorname{cotg} x=\frac{1}{\operatorname{tg} x}=-\frac{1}{\sqrt{3}}.$$

III. *Să se afle arcele x, mai mici decât 180^0, care verifică ecuaţia*

$$4\operatorname{tg} x-3\operatorname{cotg} x=1.$$

Să se afle apoi celelalte linii trigonometrice.

Înlocuind $\operatorname{cotg} x = \frac{\operatorname{tg} x}{1}$, ecuaţia devine

$$4 \operatorname{tg} x - \frac{3}{\operatorname{tg} x} - 1 = 0, \quad 4 \operatorname{tg}^2 x - \operatorname{tg} x - 3 = 0.$$

Ecuaţia obţinută fiind de gradul al doilea în $\operatorname{tg} x$, avem

$$\operatorname{tg} x = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4.4(-3)}}{8} = \frac{1 \pm \sqrt{49}}{8} = \frac{1 \pm 7}{8}.$$

Avem două cazuri de considerat

$$\operatorname{tg} x = \frac{1+7}{8} = 1, \quad \operatorname{tg} x = \frac{1-7}{8} = \frac{-3}{4}.$$

În cazul întâi, $\operatorname{tg} x = 1$, arcul $x = 45^0$. În cazul al doilea, $\operatorname{tg} x = -\frac{3}{4}$, urmează că arcul x este în cadranul al doilea. Să calculăm arcul y din cadranul întâi, pentru care $\operatorname{tg} y = \frac{3}{4}$, şi atunci $x = 180^0 - y$. Aplicând logaritmii, avem

$$\log \operatorname{tg} y = \log \frac{3}{4} = \log 3 - \log 4 = 0{,}47712 - 0{,}60206,$$

$$\log \operatorname{tg} y = 0{,}47712 + \bar{1}{,}39794 = 0{,}87506, \quad y = 36^0 52' 10''.$$

Deci $\qquad x = 180^0 - y = 143^0 7' 50''.$

Să aflăm celelalte linii trigonometrice, când $\operatorname{tg} x = 1$, şi $\operatorname{tg} x = -\frac{3}{4}$. În primul caz, $\operatorname{tg} x = 1$, se ştie că $x = 45^0$, $\sin x = \cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\operatorname{cotg} x = \frac{1}{\operatorname{tg} x} = 1$.

Când $\operatorname{tg} x = \frac{-3}{4}$, pentru a afla pe $\sin x$ şi $\cos x$, aplicăm formulele cunoscute (No. 13, 3^0)

$$\sin a = \frac{\operatorname{tg} a}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 a}}, \quad \cos a = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 a}}.$$

Dar, am văzut că la stabilirea acestor formule, prin extragerea rădăcinei pătrate, intervenea dublul semn, $\pm$, înaintea radicalului, ceea ce trebuia. În adevăr, arcul x pentru care $\operatorname{tg} x = -\frac{3}{4}$ fiind în cadranul al doilea, avem $\sin x > 0$, iar $\cos x < 0$, şi cum $\operatorname{tg} x < 0$, urmează că trebue să luăm

$$\sin x = \frac{\operatorname{tg} x}{-\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 x}}, \quad \cos x = \frac{1}{-\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 x}},$$

astfel ca raportul cu care este egal $\sin x$ să fie pozitiv, iar raportul ce dă pe $\cos x$ să fie negativ.

Înlocuind pe $\operatorname{tg} x = -\frac{3}{4}$, avem

$$\sin x = \frac{-\frac{3}{4}}{-\sqrt{1+\left(-\frac{3}{4}\right)^2}} = \frac{\frac{3}{4}}{\sqrt{1+\frac{9}{16}}} = \frac{\frac{3}{4}}{\sqrt{\frac{25}{16}}} = \frac{\frac{3}{4}}{\frac{5}{4}} = \frac{3}{5},$$

$$\cos x = \frac{1}{-\sqrt{1+\left(-\frac{3}{4}\right)^2}} = -\frac{1}{\sqrt{\frac{25}{16}}} = -\frac{1}{\frac{5}{4}} = -\frac{4}{5}.$$

EXERCIŢII.

1. Să se calculeze cu ajutorul logaritmilor

$$\sin 149^\circ 42' 25'',\ \cos 95^\circ 17' 7'',\ \operatorname{tg} 116^\circ 52' 32''.$$

R. $y = \sin 149^\circ 42' 25'' = \sin(180^\circ - 149^\circ 42' 25'') = \sin 30^\circ 17' 35''$,

$\log y = \log \sin 30^\circ 17' 35'' = \overline{1},70279$, $y = 0,504112$.

$\cos 95^\circ 17' 7'' = -\cos 84^\circ 42' 53''$, $z = \cos 84^\circ 42' 53'' = 0,092115$,

$\cos 95^\circ 17' 7'' = -0,092115$; $\operatorname{tg} 116^\circ 52' 32'' = -1,97318$.

2. Să se rezolve ecuaţia

$$4(1+\cos x) = 3\sin^2 x,$$

$x < 180^\circ$. Să se afle celelalte linii trigonometrice.

R. $3\cos^2 x + 4\cos x + 1 = 0$; $\cos x = -1$, $\cos x = -\frac{1}{3}$.

$\cos x = -1$, $x = 180^\circ$. $\operatorname{Cos} y = \frac{1}{3}$, $x = 180^\circ - y$;

$\log\cos y = -\log 3 = \overline{1},52288$, $y = 70^\circ 31' 43''$, $x = 109^\circ 28' 17''$.

Pentru $\cos x = -\frac{1}{3}$, $\sin x = \frac{2\sqrt{2}}{3}$, $\operatorname{tg} x = -2\sqrt{2}$.

3. Să se calculeze $x < 180^\circ$, pentru care avem $\operatorname{tg} x = -\frac{\sqrt{3}}{5}$.

R. $\operatorname{tg} y = \frac{\sqrt{3}}{5}$, $y = 19^\circ 6' 23''$, $x = 180^\circ - y$.

RELAŢIUNI FUNDAMENTALE ÎNTRE ELEMENTELE UNUI TRIUNGHI.

36. Un triunghi oarecare ABC are trei laturi care se notează cu $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$ şi trei unghiuri $\sphericalangle CAB = A$, $\sphericalangle ABC = B$, $\sphericalangle BCA = C$. Aceste trei unghiuri pot fi toate ascuţite, sau unul obtus şi două ascuţite. Suma unghiurilor este 180° astfel că dacă cunoaştem două dintre ele, pe al treilea îl aflăm scăzând suma lor din 180°.

În rezolvarea triunghiurilor oarecare avem deci de considerat trei laturi şi două unghiuri, şi pentru al putea rezolva, avem nevoe de trei elemente. Celelalte două elemente necunoscute le calculăm cu relaţiile ce există între laturile şi unghiurile triunghiului oarecare.

Nu pot exista mai mult de trei relaţii distincte între laturile a, b, c, şi unghiurile A, B, C, ale unui triunghi oarecare, căci, dacă ar fi, de ex., patru relaţiuni distincte între elementele a, b, c, A, B, C, eliminarea elementelor A, B, C, ar conduce la o relaţie între laturile a, b, c. Ar urma că, dacă se cunosc două laturi ale unui triunghiu, să se poată afla şi a treia; dar aceasta este absurd.

În cele ce urmează vom stabili relaţiunile fundamentale dintre elementele unui triunghiu oarecare.

37. **In orice triunghi laturile sunt proporţionale cu sinusurile unghiurilor opuse.** Să considerăm triunghiul ABC şi fie CD înălţimea din C. Avem două cazuri de considerat.

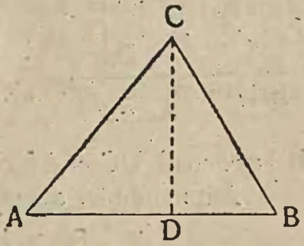

Fig. 15.

1⁰. Unghiurile A şi B ascuţite (Fig. 15). În acest caz punctul D este situat între A şi B. Din triunghiurile dreptunghice ADC şi CDB, avem respectiv $CD = AC \sin A$, $CD = CB \sin B$, pe care egalându-le, avem

$$AC \sin A = CB \sin B,$$

sau

$$b \sin A = a \sin B,$$

de unde

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B}$$

2⁰. Când A este obtus şi B ascuţit (Fig. 16), avem din triunghiurile ADC, CDB,

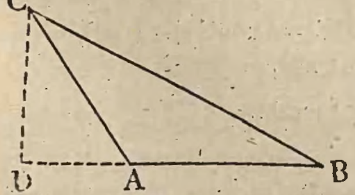

Fig. 16.

$$CD = AC \sin DAC =$$
$$b \sin(180^0 - A) = b \sin A,$$
$$CD = CB \sin B = a \sin B,$$

de unde, egalându-le, obţinem

$$b \sin A = a \sin B,$$

sau

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B}$$

Relaţia obţinută este deci adevărată în toate cazurile şi are loc între două laturi şi sinusurile unghiurilor opuse.

În mod analog, obținem

$$\frac{b}{\sin A}=\frac{c}{\sin C}, \qquad \frac{c}{\sin C}=\frac{a}{\sin A},$$

iar toate se pot scrie sub forme de rapoarte,

$$\text{(XIII)} \qquad \frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C},$$

care exprimă că într'un triunghi oarecare *laturile sunt proporționale cu sinusurile unghiurilor opuse.*

Aceste relațiuni se mai zic și *teorema sinusurilor.*

38. **Relația dintre trei laturi și două unghiuri.**

I. Vom stabili mai întâi *relația între cele trei laturi și două unghiuri* pentru ca apoi să găsim relațiunile căutate. Avem două cazuri de considerat.

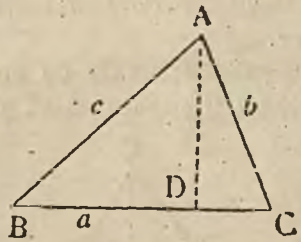

Fig. 17.

1⁰. Când unghiurile B și C sunt ambele ascuțite (Fig. 17). Fie AD înălțimea din vârful A al triunghiului ABC. Avem din triunghiurile dreptunghice ADB, ADC, $BD=AB\cos B$, $BD=c\cos B$, $DC=AC\cos C$, $DC=b\cos C$.

Adunându-le, avem

$$BD+DC=c\cos B+b\cos C,$$

sau

$$a=b\cos C+c\cos B.$$

2⁰. Când unghiul B este obtus și C ascuțit, avem (Fig. 18)

$$DC=AC\cos C=b\cos C,$$
$$DB=AB\cos DBA=$$
$$c\cos(180^0-ABC)=-c\cos B.$$

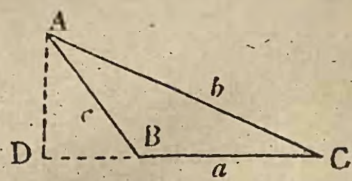

Fig 18.

Scăzându-le avem

$$DC-DB=b\cos C+c\cos B,\quad BC=b\cos C+c\cos B,$$
$$a=b\cos C+c\cos B.$$

Deci relațiunea stabilită este generală.

Așa dar am găsit relațiile

$$\text{(XIV)} \qquad \begin{aligned} a&=b\cos C+c\cos B,\\ b&=c\cos A+a\cos C.\\ c&=a\cos B+b\cos A, \end{aligned}$$

care se pot deduce una din alta prin premutări circulare (Fig. 19), înlocuind în prima, de ex., pe a, b, c cu b, c, a, pe A, B, C, cu B, C, A, etc., cum arată sensul săgeţilor.

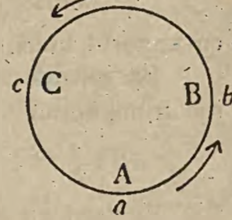

Fig. 19.

Aceste relaţii exprimă că *într'un triunghi o latură este egală cu suma celorlalte două, înmulţite fiecare respectiv cu cosinusul unghiului ce această latură face cu latura considerată.*

II. Din aceste relaţii se pot deduce altele în modul următor. Să le înmulţim, prima cu a, a doua cu b, a treia cu c; avem

$$a^2=ab\cos C+ac\cos B,$$
$$b^2=bc\cos A+ba\cos C,$$
$$c^2=ac\cos B+bc\cos A.$$

Să le adunăm acum pe primele două obţinute; avem

$$a^2+b^2=ab\cos C+ac\cos B+bc\cos A+ba\cos C,$$

sau

$$a^2+b^2=2ab\cos C+ac\cos B+bc\cos A.$$

Ţinând seamă de ultima din noile relaţii obţinute, avem

$$a^2+b^2=2ab\cos C+c^2,$$

de unde

(XV) $$c^2=a^2+b^2-2ab\cos C.$$

Aceasta este o relaţie dintre trei laturi a, b, c şi unghiul C, şi fiindcă conţine $\cos C$, se zice teorema cosinus.

Permutând circular pe a, b, c, A, B, C, mai obţinem relaţiile

(XVI) $$\begin{cases} a^2=b^2+c^2-2bc\cos A, \\ b^2=c^2+a^2-2ca\cos B, \end{cases}$$

care se exprimă zicând că *în orice triunghi pătratul unei laturi este egal cu suma pătratelor celorlalte două laturi, minus de două ori produsul acelor laturi prin cosinusul unghiului cuprins între ele.*

OPERAŢIUNI ASUPRA ARCELOR.

39. În aplicaţiile Trigonometrii intervin liniile trigonometrice ale sumei, diferenţei, multiplilor şi fracţiunilor de unghiuri. Suntem deci conduşi să stabilim acestea cu ajutorul liniilor trigonometrice ale arcelor date.

40. **Adunarea arcelor.** I. A şi B *fiind două unghiuri ale*

unui triunghi oarecare, să calculăm

$$\sin(A+B),\ \cos(A+B),\ \operatorname{tg}(A+B),\ \operatorname{cotg}(A+B)$$

cu ajutorul liniilor trigonometrice ale unghiurilor A şi B.

Să considerăm relaţiile cunoscute între laturile şi unghiurile triunghiului

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}.$$

Egalând cu k valoarea comună a acestor rapoarte, avem

$$\frac{a}{\sin A}=k,\quad a=k\sin A,\quad b=k\sin B,\quad c=k\sin C.$$

Înlocuind pe a, b, c cu valorile lor în relaţia

$$c=a\cos B+b\cos A,$$

avem

$$k\sin C=k\sin A\cos B+k\sin B\cos A,$$

şi simplificând cu k, obţinem

(1) $$\sin C=\sin A\cos B+\sin B\cos A.$$

Dar, din relaţia $A+B+C=180^0$, avem

$$C=180^0-(A+B),\quad \sin C=\sin(A+B).$$

Înlocuind în (1) pe $\sin C$ cu egalul său, obţinem

(2) $$\sin(A+B)=\sin A\cos B+\sin B\cos A,$$

care este prima relaţie căutată, ce dă valoarea lui $\sin(A+B)$ în funcţiune de sinusul şi cosinusul unghiurilor A şi B.

II. Am văzut cum am obţinut relaţia (1)

$$\sin C=\sin A\cos B+\sin B\cos A.$$

La fel puteam avea şi

$$\sin A=\sin B\cos C+\sin C\cos B,$$

care se poate scrie

$$\sin A-\cos B\sin C=\sin B\cos C.$$

Înlocuind aci pe $\sin C$ cu valoarea sa din (1), obţinem

$$\sin A-\cos B(\sin A\cos B+\sin B\cos A)=\sin B\cos C.$$

Dezvoltând, avem

$$\sin A-\sin A\cos^2B-\cos B\sin B\cos A=\sin B\cos C,$$
$$\sin A(1-\cos^2B)-\cos B\sin B\cos A=\sin B\cos C,$$
$$\sin A\sin^2B-\cos B\sin B\cos A=\sin B\cos C.$$

Unghiul B fiind cuprins între 0^0 şi 180^0, $\sin B\neq 0$, deci putem simplifica cu $\sin B$, şi avem

$$\sin A \sin B - \cos B \cos A = \cos C,$$

sau

$$\cos C = \sin A \sin B - \cos B \cos A.$$

Dar $C = 180^0 - (A+B)$, deci

$$\cos C = -\cos(A+B).$$

Înlocuind în pe cosC în relaţia de mai sus, avem

$$-\cos(A+B) = \sin A \sin B - \cos B \cos A,$$

şi schimbând semnele, obţinem

$$\cos(A+B) = \cos A \cos B - \sin A \sin B, \tag{3}$$

care este a doua relaţie căutată, ce dă valoarea lui $\cos(A+B)$ în funcţiune de sinusul şi cosinusul unghiurilor A şi B.

III. Pentru a obţine pe $\operatorname{tg}(A+B)$, să împărţim relaţiile (2) şi (3) şi avem

$$\operatorname{tg}(A+B) = \frac{\sin(A+B)}{\cos(A+B)} = \frac{\sin A \cos B + \cos A \sin B}{\cos A \cos B - \sin A \sin B}.$$

Împărţind ambii termeni ai fracţii cu cosAcosB, obţinem

$$\operatorname{tg}(A+B) = \frac{\frac{\sin A \cos B}{\cos A \cos B} + \frac{\cos A \sin B}{\cos A \cos B}}{\frac{\cos A \cos B}{\cos A \cos B} - \frac{\sin A \sin B}{\cos A \cos B}},$$

$$\operatorname{tg}(A+B) = \frac{\frac{\sin A}{\cos A} + \frac{\sin B}{\cos B}}{1 - \frac{\sin A}{\cos A} \frac{\sin B}{\cos B}},$$

$$\operatorname{tg}(A+B) = \frac{\operatorname{tg}A + \operatorname{tg}B}{1 - \operatorname{tg}A \operatorname{tg}B}. \tag{4}$$

IV. Pentru $\operatorname{cotg}(A+B)$, împărţim relaţia (3) cu (2), şi obţinem

$$\operatorname{cotg}(A+B) = \frac{\operatorname{cotg}A \operatorname{cotg}B - 1}{\operatorname{cotg}A + \operatorname{cotg}B}.$$

41. Demonstrarea geometrică a teoremei de adunare. Am obţinut liniile trigonometrice ale sumei a două unghiuri pe cale algebrică. În cele ce urmează vom da o demonstraţie geometrică a formulelor obţinute.

I. Fie (Fig. 20) $AB = a$, $BC = b$. Să ducem CI perpendiculară pe OB şi IL, BP, CQ perpendiculare pe A'A, iar IH perpendiculară pe CQ.

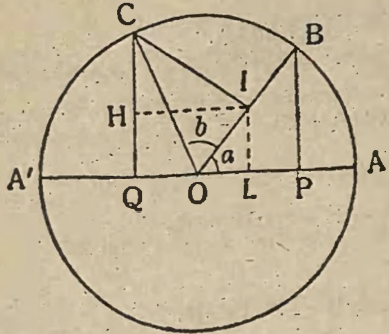

Fig. 20.

Se vede că

$$BP = \sin a, \quad OP = \cos a,$$
$$OI = \cos b, \quad CI = \sin b,$$
$$CQ = \sin(a+b),$$

Dar $\quad CQ = CH + HQ,$

$$CQ = CH + IL,$$

(5) $\quad \sin(a+b) = CH + IL.$

Triunghiurile CHI şi OBP sunt asemenea, căci au unghiurile egale (ca având laturile perpendiculare). Deci

$$\frac{CH}{OP} = \frac{CI}{OB}, \quad CH = \frac{OP.CI}{OB}, \quad CH = \cos a \sin b.$$

Apoi, triunghiurile OLI şi OBP având IL paralelă cu BP, sunt asemenea. De unde

$$\frac{IL}{BP} = \frac{OI}{OB}, \quad IL = \frac{BP.OI}{OB}, \quad IL = \sin a . \cos b.$$

Înlocuind în (5) pe CH şi IL ca valorile găsite, avem

(6) (XVII) $\quad \sin(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b.$

II. De asemenea, avem (Fig. 20)

$$QO = QL - OL, \quad QO = HI - OL.$$

Cum $\cos(a+b) = OQ$, urmează că QO care este de sens contrar cu OQ, va fi egală cu —OQ şi deci $QO = -\cos(a+b)$ şi înlocuind în relaţia ce dă pe QO, avem

(7) $\quad -\cos(a+b) = HI - OL.$

Din triunghiurile asemenea CHI şi OBL, obţinem

$$\frac{HI}{BP} = \frac{CI}{OB}, \quad HI = \frac{BP.CI}{OB}, \quad HI = \sin a \sin b.$$

În mod analog, din triunghiurile asemenea OLI şi OPB, avem

$$\frac{OL}{OP} = \frac{OI}{OB}, \quad OL = \frac{OP.OI}{OB}, \quad OL = \cos a \cos b.$$

Înlocuind în (7) pe HI şi OL cu valorile găsite mai sus, obţinem

$$-\cos(a+b) = \sin a \sin b - \cos a \cos b,$$

sau, schimbând semnele,

(8) (XVIII) $\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b.$

Am obţinut deci, pe cale geometrică valorile $\sin(a+b)$, $\cos(a+b)$ în funcţie de liniile trigonometrice ale arcelor a şi b. Formulele (6) şi (8) ne exprimă teorema de adunare pentru sinus şi cosinus.

42. **Scăderea arcelor.** Schimbând în formulele (6) şi (8) pe b în $-b$, avem

$$\sin(a-b) = \sin a \sin(-b) + \sin(-b)\cos a,$$
$$\cos(a-b) = \cos a \cos(-b) - \sin a \sin(-b).$$

Dar $\sin(-a) = -\sin a$, $\cos(-a) = \cos a$, $\sin(-b) = -\sin b$, $\cos(-b) = \cos b$. Deci relaţiile precedente devin

$$\text{(XIX)} \quad \begin{aligned} \sin(a-b) &= \sin a \cos b - \sin b \cos a, \\ \cos(a-b) &= \cos a \cos b + \sin a \sin b. \end{aligned}$$

Aceste relaţii ne dau sin şi cos diferenţei a două unghiuri a şi b cu ajutorul sin şi cos unghiurilor a şi b.

Pentru a găsi pe cea referitoare la tangentă, sau putem împărţi aceste relaţii, sau să înlocuim în

$$\text{(XX)} \qquad \operatorname{tg}(a+b) = \frac{\operatorname{tg}a + \operatorname{tg}b}{1 - \operatorname{tg}a \operatorname{tg}b}$$

pe b cu $-b$ şi avem

$$\operatorname{tg}(a-b) = \frac{\operatorname{tg}a + \operatorname{tg}(-b)}{1 - \operatorname{tg}a \operatorname{tg}b(-b)}, \quad \text{(XXI)} \quad \operatorname{tg}(a-b) = \frac{\operatorname{tg}a - \operatorname{tg}b}{1 + \operatorname{tg}a \operatorname{tg}b}.$$

În mod analog, obţinem

$$\operatorname{cotg}(a-b) = \frac{\operatorname{cotg}a \operatorname{cotg}b + 1}{\operatorname{cotg}b - \operatorname{cotg}a}.$$

43. **Aplicaţii.** I. Să se calculeze $\sin 75^0$, $\cos 15^0$, $\operatorname{tg} 75^0$. Avem $\sin 75^0 = \sin(45 + 30^0) = \sin 45^0 \cos 30^0 + \cos 45^0 \sin 30^0 =$

$$\frac{\sqrt{2}}{2}\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\frac{1}{2} = \frac{\sqrt{2}}{4}(\sqrt{3}+1),$$

$$\cos 15^0 = \cos(45^0 - 30^0) = \cos 45^0 \cos 30^0 + \sin 45^0 \sin 30^0 =$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2}\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\frac{1}{2} = \frac{\sqrt{2}}{4}(\sqrt{3}+1).$$

$$\operatorname{tg} 75^0 = \operatorname{tg}(45^0 + 30^0) = \frac{\operatorname{tg} 45^0 + \operatorname{tg} 30^0}{1 - \operatorname{tg} 45^0 \operatorname{tg} 30^0} = \frac{1 + \frac{1}{\sqrt{3}}}{1 - \frac{1}{\sqrt{3}}} =$$

$$\frac{\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}}}{\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}}}=\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1}=\frac{(\sqrt{3}+1)^2}{(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}+1)}=\frac{4+2\sqrt{3}}{3-1}=2+\sqrt{3}.$$

II (¹). În mod analog se calculează liniile trigonometrice ale unei sume de mai multe unghiuri. De ex.,

$$\sin(\alpha+\beta+\gamma)=\sin[(\alpha+\beta)+\gamma]=\sin(\alpha+\beta)\cos\gamma+\cos(\alpha+\beta)\sin\gamma,$$
$$\sin(a+\beta+\gamma)=(\sin\alpha\cos\beta+\sin\beta\cos\alpha)\cos\gamma+(\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta)\sin\gamma,$$
$$\sin(\alpha+\beta+\gamma)=\sin\alpha\cos\beta\cos\gamma+\sin\beta\cos\alpha\cos\gamma+\cos\alpha\cos\beta\sin\gamma-\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma.$$

Tot astfel

$$\mathrm{tg}(\alpha+\beta+\gamma)=\mathrm{tg}[(\alpha+\beta)+\gamma]=\frac{\mathrm{tg}(\alpha+\beta)+\mathrm{tg}\gamma}{1-\mathrm{tg}(\alpha+\beta)\,\mathrm{tg}\gamma},$$

$$\mathrm{tg}(\alpha+\beta+\gamma)=\frac{\frac{\mathrm{tg}\alpha+\mathrm{tg}\beta}{1-\mathrm{tg}\alpha\,\mathrm{tg}\beta}+\mathrm{tg}\gamma}{1-\frac{\mathrm{tg}\alpha+\mathrm{tg}\beta}{1-\mathrm{tg}\alpha\,\mathrm{tg}\beta}\mathrm{tg}\gamma}=\frac{\frac{\mathrm{tg}\alpha+\mathrm{tg}\beta+\mathrm{tg}\gamma(1-\mathrm{tg}\alpha\,\mathrm{tg}\beta)}{1-\mathrm{tg}\alpha\mathrm{tg}\beta}}{\frac{1-\mathrm{tg}\alpha\mathrm{tg}\beta-(\mathrm{tg}\alpha+\mathrm{tg}\beta)\mathrm{tg}\gamma}{1-\mathrm{tg}\alpha\mathrm{tg}\beta}};$$

simplificând cu $1-\mathrm{tg}\alpha\,\mathrm{tg}\beta$, avem

$$\mathrm{tg}(\alpha+\beta+\gamma)=\frac{\mathrm{tg}\alpha+\mathrm{tg}\beta+\mathrm{tg}\gamma-\mathrm{tg}\alpha\mathrm{tg}\beta\mathrm{tg}\gamma}{1-\mathrm{tg}\alpha\mathrm{tg}\beta-\mathrm{tg}\beta\mathrm{tg}\gamma-\mathrm{tg}\gamma\mathrm{tg}\alpha}.$$

44. Inmulțirea arcelor. În expresiunile liniilor trigonometrice a sumei a două unghiuri,

$$\sin(a+b)=\sin a\cos b+\sin b\cos a,$$
$$\cos(a+b)=\cos a\cos b-\sin a\sin b,$$
$$\mathrm{tg}(a+b=\frac{\mathrm{tg}a+\mathrm{tg}b}{1-\mathrm{tg}a\mathrm{tg}b},$$

să facem $b=a$. Avem

$$\text{(XXII)}\qquad \begin{aligned}\sin 2a&=2\sin a\cos a,\\ \cos 2a&=\cos^2 a-\sin^2 a,\\ \mathrm{tg}2a&=\frac{2\mathrm{tg}a}{1-\mathrm{tg}^2 a}.\end{aligned}$$

Mai putem exprima sub alte forme $\cos 2a$. În adevăr, avem

$$\cos 2a=\cos^2 a-\sin^2 a=(1-\sin^2 a)-\sin^2 a=1-2\sin^2 a,$$
$$\cos 2a=\cos^2 a-\sin^2 a=\cos^2 a-(1-\cos^2 a)=2\cos^2 a-1,$$

(¹) Nu face parte din program.

adică

(XXIII) $\cos 2a = 1 - 2\sin^2 a, \quad \cos 2a = 2\cos^2 a - 1.$

Cum am presupus $a + b < 180^0$, urmează că $2a < 180^0$, adică unghiul a este ascuţit.

Observare[1]. Dacă am voi să calculăm liniile trigonometrice ale unghiului $3a$, procedăm astfel

$$\sin 3a = \sin(2a + a) = \sin 2a \cos a + \cos 2a \sin a,$$
$$\sin 3a = (2\sin a \cos a)\cos a + (\cos^2 a - \sin^2 a)\sin a,$$
$$\sin 3a = 2\sin a \cos^2 a + \sin a \cos^2 a - \sin^3 a = 3\sin a \cos^2 a - \sin^3 a,$$
$$\sin 3a = 3\sin a(1 - \sin^2 a) - \sin^3 a = 3\sin a - 4\sin^3 a,$$
$$\sin 3a = 3\sin a - 4\sin^3 a.$$

De asemenea,

$$\cos 3a = \cos(2a + a) = \cos 2a \cos a - \sin 2a \sin a,$$
$$\cos 3a = (\cos^2 a - \sin^2 a)\cos a - (2\sin a \cos a)\sin a,$$
$$\cos 3a = \cos^3 a - 3\sin^2 a \cos a = \cos^3 a - 3(1 - \cos^2 a)\cos a,$$
$$\cos 3a = 4\cos^3 a - 3\cos a.$$

Tot astfel,

$$\operatorname{tg} 3a = \operatorname{tg}(2a + a) = \frac{\operatorname{tg} 2a + \operatorname{tg} a}{1 - \operatorname{tg} 2a \operatorname{tg} a} = \frac{\dfrac{2\operatorname{tg} a}{1 - \operatorname{tg}^2 a} + \operatorname{tg} a}{1 - \dfrac{2\operatorname{tg} a}{1 - \operatorname{tg}^2 a}\operatorname{tg} a},$$

$$\operatorname{tg} 3a = \frac{2\operatorname{tg} a + (1 - \operatorname{tg}^2 a)\operatorname{tg} a}{1 - \operatorname{tg}^2 a - 2\operatorname{tg} a \operatorname{tg} a} = \frac{3\operatorname{tg} a - \operatorname{tg}^3 a}{1 - 3\operatorname{tg}^2 a}.$$

45. **Împărţirea arcelor.** 1°. *Fiind cunoscut $\cos a$, să exprimăm cu ajutorul acesteia liniile trigonometrice ale unghiului pe jumătate $\frac{1}{2}a$.*

Avem formula fundamentală

(9) $$\cos^2 b + \sin^2 b = 1$$

şi pe cea arătată mai sus

(10) $$\cos^2 b - \sin^2 b = \cos 2b.$$

Adunând aceste două relaţii, se obţine

$$2\cos^2 b = 1 + \cos 2b.$$

Făcând în aceasta pe b egal cu $\frac{1}{2}a$, avem

$$2\cos^2 \frac{1}{2}a = 1 + \cos 2\frac{1}{2}a,$$

[1] Nu face parte din program.

N. Abramescu. — Lecţiuni de Trigonometrie, Ediţia III, 5000 ex. 5

(XXIV) $$2\cos^2\frac{1}{2}a = 1 + \cos a.$$

De unde

$$\cos^2\frac{1}{2}a = \frac{1 + \cos a}{2},$$

(XXV) $$\cos\frac{1}{2}a = \pm\sqrt{\frac{1 + \cos a}{2}},$$

Scăzând relațiile (9) și (10), avem

$$2\sin^2 b = 1 - \cos^2 b.$$

Făcând pe $b = \frac{1}{2}a$, obținem

(XXVI) $$2\sin^2\frac{1}{2}a = 1 - \cos a,$$

(XXVII) $$\sin\frac{1}{2}a = \sqrt{\frac{1 - \cos a}{2}}.$$

Împărțind formulele (XXVII) și (XXV), avem

$$\frac{\sin\frac{a}{2}}{\cos\frac{a}{2}} = \frac{\sqrt{\frac{1-\cos a}{2}}}{\pm\sqrt{\frac{1+\cos a}{2}}},$$

(XXVIII) $$\operatorname{tg}\frac{a}{2} = \pm\sqrt{\frac{1 - \cos a}{1 + \cos a}}.$$

EXERCIȚII.

1. Să se calculeze $\cos 75^\circ$, $\operatorname{tg} 105^\circ$ cu ajutorul liniilor trigonometrice ale arcelor 30°. 45°, 60°.

R. $75^\circ = 45^\circ + 30^\circ$. $105^\circ = 60^\circ + 45^\circ$; $\cos 75^\circ = \frac{\sqrt{2}}{4}\left(\sqrt{3} - 1\right)$,

$\operatorname{tg} 106^\circ = \frac{1+\sqrt{3}}{1-\sqrt{3}} = -2 - \sqrt{3}$.

2. Știind că $\cos a = \frac{1}{9}$ și că unghiul este cuprins între 90° și 180°, să se calculeze $\sin\frac{a}{2}$, $\cos\frac{a}{2}$, $\operatorname{tg}\frac{a}{2}$.

R. $\frac{a}{2}$ este cuprins între 45° și 90°; $\sin\frac{a}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos a}{2}} = \frac{2}{3}$,

$\cos\frac{a}{2} = \frac{\sqrt{5}}{3}$.

3. Să se verifice identitățile

$$\sin a = \sin(a-b)\cos b + \sin b \cos(a-b),$$
$$\cos a = \cos(a+b)\cos b + \sin(a+b)\sin b.$$

R. Sau se desvoltă membrii al doilea, sau se observă că $a=(a-b)+b$ și $a=(a+b)-b$ pentru a doua.

4. Să se verifice identitatea

$$\sin 2a = (1-\cos 2a)\operatorname{cotg} a.$$

R. $1-\cos 2a = 2\sin^2 a$.

Să se verifice identitatea

$$\cos 2a = \frac{1-\operatorname{tg}^2 a}{1+\operatorname{tg}^2 a}.$$

R. Se înlocuește $\operatorname{tg} a = \frac{\sin a}{\cos a}$.

6. Să se verifice identitatea

$$\sin(a+b)\sin(a-b) = \sin^2 a - \sin^2 b.$$

R. Se desvoltă $\sin(a+b).\sin(a-b)$ și se obține $\sin^2 a\cos^2 b - \sin^2 b\cos^2 a = \sin^2 a(1-\sin^2 b) - \sin^2 b(1-\sin^2 a)$.

7. $\cos a + \cos(120^\circ - a) + \cos(120^\circ + a) = 0$.

R. Însemnând cu E valoarea membrului întâi, avem desvoltând

$$E \equiv \cos a + 2\cos 120^\circ \cos a = \cos a - 2\cos 60^\circ \cos a = \cos a - 2.\frac{1}{2}\cos a = 0.$$

8. $\operatorname{tg}(45^\circ + a) - \operatorname{tg}(45^\circ - a) = 2\operatorname{tg}2a$.

R. Se dezvoltă, și avem

$$\frac{1+\operatorname{tg}a}{1-\operatorname{tg}a} - \frac{1-\operatorname{tg}a}{1+\operatorname{tg}a} = \frac{(1+\operatorname{tg}a)^2-(1-\operatorname{tg}a)^2}{(1+\operatorname{tg}a)(1-\operatorname{tg}a)} = 2\,\frac{2\operatorname{tg}2a}{1-\operatorname{tg}^2 a} = 2\operatorname{tg}2a.$$

9. $4\sin a\cos^3 a - 4\cos a\sin^3 a = \sin 4a$.

R. $4\sin a\cos a(\cos^2 a - \sin^2 a) = 2\sin 2a\cos 2a = \sin 4a$.

10. $\operatorname{tg}3a - \operatorname{tg}2a - \operatorname{tg}a = \operatorname{tg}3a\operatorname{tg}2a\operatorname{tg}a$.

R. $E \equiv (\operatorname{tg}3a - \operatorname{tg}a) - \operatorname{tg}2a = \frac{\sin 3a}{\cos 3a} - \frac{\sin a}{\cos a} - \operatorname{tg}2a =$

$$\frac{\sin(3a-a)}{\cos 3a\cos a} - \operatorname{tg}2a = \frac{\sin 2a}{\cos 3a\cos a} - \frac{\sin 2a}{\cos 2a} = \frac{\sin 2a(\cos 2a - \cos 3a\cos a)}{\cos a\cos 2a\cos 3a} =$$

$$\frac{\sin 2a[\cos(3a-a) - \cos 3a\cos a]}{\cos a\cos 2a\cos 3a} = \frac{\sin 2a(\cos 3a\cos a + \sin 3a\sin a - \cos 3a\cos a)}{\cos a\cos 2a\cos 3a} =$$

$$\operatorname{tg}a\operatorname{tg}2a\operatorname{tg}3a.$$

FORMULE CALCULABILE PRIN LOGARITMI.

Una din aplicațiunile interesante a teoremei de adunare a liniilor trigonometrice, este transformarea sumelor sau diferenţelor ce figurează în expresiunile trigonometrice, în produse şi câturi, care se pot calcula prin logaritmi. Dacă această operaţie e posibilă, formulele se zic calculabile prin logaritmi.

46. Transformarea sumei şi diferinţei liniilor trigonometrice în produse. I. În formulele

$$
\begin{aligned}
&\sin(a+b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a,\\
&\sin(a-b) = \sin a \cos b - \sin b \cos a,\\
(1)\qquad &\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b,\\
&\cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin b \sin b,
\end{aligned}
$$

să punem

$$a+b=p,\ a-b=q.$$

De unde, prin adunare şi scădere, avem

$$a=\frac{p+q}{2},\quad b=\frac{p-q}{2}.$$

Adunând şi scăzând primele două din relaţiile (1), avem

$$
(2)\qquad
\begin{aligned}
&\sin(a+b) + \sin(a-b) = 2\sin a \cos b,\\
&\sin(a+b) - \sin(a-b) = 2\sin b \cos a,
\end{aligned}
$$

Adunând şi scăzând ultimele două din relaţiile (1), obţinem

$$
(3)\qquad
\begin{aligned}
&\cos(a+b) + \cos(a-b) = 2\cos a \cos b,\\
&\cos(a+b) - \cos(a-b) = -2\sin a \sin b.
\end{aligned}
$$

Înlocuind în (2) şi (3) pe $(a+b)$, $(a-b)$, a şi b cu valorile lor cu ajutorul lui p şi q, obţinem

$$
(\mathrm{XXIX})\qquad
\begin{aligned}
&\sin p + \sin q = 2\sin\frac{p+q}{2}\cos\frac{p-q}{2},\\
&\sin p - \sin q = 2\cos\frac{p+q}{2}\sin\frac{p-q}{2},\\
&\cos p + \cos q = 2\cos\frac{p+q}{2}\cos\frac{p-q}{2},\\
&\cos p - \cos q = -2\sin\frac{p+q}{2}\sin\frac{p-q}{2}
\end{aligned}
$$

Aceste relaţiuni exprimă că: *suma sinusurilor a două arce este egală cu de două ori sinusul semisumei arcelor înmulţit prin cosinusul semidiferenţei lor. Diferenţa sinusurilor a două arce este egală cu de două ori sinusul semidiferenţei arcelor (dintre arcul întâi şi al doilea) înmulţit prin cosinusul semisumei. Suma cosinusurilor a două arce este egală cu* *de două ori cosinusul semi sumei arcelor înmulțit cu cosinusul semidiferenței. Diferența cosinusurilor a două arce este egală cu minus de două ori sinusul semi sumei arcelor înmulțit prin sinusul semidiferenței lor (dintre arcul întâi și al doilea).*

Aceste ultime patru relații ne permit a transforma o sumă de două slnusuri sau consinusuri într'un produs de factori.

II. Pentru tangentă, avem

$$\operatorname{tg}a+\operatorname{tg}b=\frac{\sin a}{\cos a}+\frac{\sin b}{\cos b}=\frac{\sin a\cos b+\sin b\cos a}{\cos a\cos b},$$

$$\operatorname{tg}a+\operatorname{tg}b=\frac{\sin(a+b)}{\cos a\cos b}.$$

La fel,

$$\operatorname{tg}a-\operatorname{tg}b=\frac{\sin(a-b)}{\cos a\cos b},$$

$$\operatorname{cotg}a+\operatorname{cot}b=\frac{\sin(a+b)}{\sin a\sin b},\quad \operatorname{cotg}a-\operatorname{cotg}b=\frac{\sin(a-b)}{\sin a\sin b},$$

II. Se pot indica o mulțime de exemple de astfel de transformări. Vom considera numai unele din cele mai importante

$$\frac{\sin a+\sin b}{\sin a-\sin b}=\frac{2\sin\frac{a+b}{2}\cos\frac{a-b}{2}}{2\cos\frac{a+b}{2}\sin\frac{a-b}{2}}=\operatorname{tg}\frac{a+b}{2}\operatorname{cotg}\frac{a-b}{2},$$

$$\frac{\sin a+\sin b}{\cos a+\cos b}=\frac{2\sin\frac{a+b}{2}\cos\frac{a-b}{2}}{2\cos\frac{a+b}{2}\cos\frac{a-b}{2}}=\operatorname{tg}\frac{a+b}{2},$$

$$\frac{\sin a-\sin b}{\cos a+\cos b}=\frac{2\cos\frac{a-b}{2}\sin\frac{a+b}{2}}{2\cos\frac{a+b}{2}\cos\frac{a-b}{2}}=\operatorname{tg}\frac{a-b}{2},$$

$$\frac{\cos a+\cos b}{\cos a-\cos b}=\frac{2\cos\frac{a+b}{2}\cos\frac{a-b}{2}}{-2\sin\frac{a+b}{2}\sin\frac{a-b}{2}}=-\operatorname{cotg}\frac{a+b}{2}\operatorname{cotg}\frac{a-b}{2},$$

$$\sin a+\cos b=\sin a+\sin(90^\circ-b)=$$

$$2\sin\frac{a+90^\circ-b}{2}\cos\frac{a-90^\circ+b}{2},$$

$$1+\sin a=\sin 90^\circ+\sin a=2\sin\frac{90^\circ+a}{2}\cos\frac{90^\circ-a}{2},$$

$$1-\sin a=\sin 90^\circ-\sin a=2\sin\frac{90^\circ-a}{2}\cos\frac{90^\circ+a}{2}.$$

$$1+\cos a=\cos 0^\circ+\cos a=2\cos\frac{0^\circ+a}{2}\cos\frac{0^\circ-a}{2}=$$

$$2\cos\frac{a}{2}\cos\frac{a}{2}=2\cos^2\frac{a}{2},$$

$$1-\cos a=\cos 0^\circ-\cos a=-2\sin\frac{0^\circ+a}{2}\sin\frac{0^\circ-a}{2}=$$

$$-2\sin\frac{a}{2}\sin\left(-\frac{a}{2}\right)=2\sin^2\frac{a}{2},$$

$$1+\operatorname{tg}a=\operatorname{tg}45^\circ+\operatorname{tg}a=\frac{\sin(45^\circ+a)}{\cos 45^\circ\cos a}=$$

$$\frac{\sin(45^\circ+a)}{\frac{\sqrt{2}}{2}\cos a}=\frac{2\sin(45^\circ+a)}{\sqrt{2}\cos a},$$

$$1-\operatorname{tg}a=\operatorname{tg}45^\circ-\operatorname{tg}a=\frac{\sin(45^\circ-a)}{\cos 45^\circ\cos a}=\frac{\sqrt{2}\sin(45^\circ-a)}{\cos a}.$$

47. **Funcţiuni circulare directe şi inverse.** Considerând unghiul a, $\sin a$, de ex., se zice o funcţiune circulară directă. Punând, în general, $y=\sin x$, y se zice o funcţiune circulară directă, iar x se zice arc $\sin y$ (arcul al cărui sinus este y) şi este o *funcţiune circulară inversă.*

Tot aşa, când avem $y=\operatorname{tg}x$, x se zice arc $\operatorname{tg}y$, sau arcul a cărui tangentă este y. Când avem $y=\cos x$, x se zice arc $\cos y$ şi x este o funcţiune circulară inversă de y.

48. **Aplicaţii.** I. *Să se verifice identitatea*

$$(\cos a+\cos b)^2+(\sin a+\sin b)^2=4\cos^2\frac{a-b}{2}.$$

Înlocuind sumele prin produse, avem

$$\left(2\cos\frac{a+b}{2}\cos\frac{a-b}{2}\right)^2+\left(2\sin\frac{a+b}{2}\cos\frac{a-b}{2}\right)^2=$$

$$4\cos^2\frac{a-b}{2}\left(\cos^2\frac{a+b}{2}+\sin^2\frac{a+b}{2}\right)=4\cos^2\frac{a-b}{2}.$$

II. Dacă $\alpha+\beta+\gamma=180^\circ$, să se arate că avem identitatea condiţională

$$\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma=4\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}.$$

$$E\equiv\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}+\sin\gamma,$$

$$E\equiv 2\sin\left(\frac{180^\circ-\gamma}{2}\right)\cos\frac{\alpha-\beta}{2}+2\sin\frac{\gamma}{2}\cos\frac{\gamma}{2}=$$

$$2\sin\left(90^0-\frac{\gamma}{2}\right)\cos\frac{\alpha-\beta}{2}+2\sin\frac{\gamma}{2}\cos\frac{\gamma}{2},$$

$$E\equiv 2\cos\frac{\gamma}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}+2\sin\frac{\gamma}{2}\cos\frac{\gamma}{2}=2\cos\frac{\gamma}{2}\left[\cos\frac{\alpha-\beta}{2}+\sin\frac{\gamma}{2}\right],$$

$$E\equiv 2\cos\frac{\gamma}{2}\left[\cos\frac{\alpha-\beta}{2}+\sin\frac{180-(\alpha+\beta)}{2}\right]=$$

$$2\cos\frac{\gamma}{2}\left[\cos\frac{\alpha-\beta}{2}+\sin\left(90^0-\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\right],$$

$$E\equiv 2\cos\frac{\gamma}{2}\left(\cos\frac{\alpha-\beta}{2}+\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\right),$$

$$E\equiv 2\cos\frac{\gamma}{2}2\cos\frac{\frac{\alpha-\beta}{2}+\frac{\alpha+\beta}{2}}{2}\cos\frac{\frac{\alpha-\beta}{2}-\frac{\alpha+\beta}{2}}{2},$$

$$E\equiv 4\cos\frac{\gamma}{2}\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{-\beta}{2}=4\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}.$$

III. *Să se arate că având în vedere numai unghiuri ascuțite, avem*

$$\text{arc}\sin\frac{3}{5}+\text{arc}\sin\frac{4}{5}=90^0.$$

Însemnăm cu

$$\alpha=\text{arc}\sin\frac{3}{5},\quad \beta=\text{arc}\sin\frac{4}{5};$$

de unde

$$\sin\alpha=\frac{3}{5},\quad \sin\beta=\frac{4}{5},\quad \cos\alpha=\sqrt{1-\sin^2\alpha}=\frac{4}{5},$$

$$\cos\beta=\sqrt{1-\sin^2\beta}=\frac{3}{5}.$$

Membrul întâi al egalității este $(\alpha+\beta)$. Luând sinusul acestui unghi, avem

$$\sin\alpha\cos\beta+\sin\beta\cos\alpha=\frac{3}{5}\cdot\frac{3}{5}+\frac{4}{5}\cdot\frac{4}{5}=\frac{25}{25}=1,$$

ceea ce probează că unghiul $(\alpha+\beta)$ este 90^0, căci sinusul său este egal cu 1.

EXERCIȚII.

1. *Să se probeze, în cazul unghiurilor ascuțite,*

$$\text{arctg}\frac{1}{2}+\text{arctg}\frac{1}{3}=\frac{\pi}{4}.$$

R. $\alpha = \operatorname{arctg}\frac{1}{2}$, $\beta = \operatorname{arctg}\frac{1}{3}$; $\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{2}$, $\operatorname{tg}\beta = \frac{1}{3}$. Se ia tangenta membrului întâi şi avem

$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta) = \frac{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}} = 1;\ \alpha+\beta = 45^\circ = \frac{\pi}{4}.$$

2. Să se arate că avem

$$\frac{\cos 2\alpha - \cos 4\alpha}{\cos 2\alpha + \cos 4\alpha} = \operatorname{tg}3\alpha,\ \operatorname{tg}2\alpha = \frac{\cos\alpha - \cos 3\alpha}{\sin 3\alpha - \sin\alpha}.$$

3. Să se probeze că avem

$$\sin^2(\alpha+\beta) - \sin^2(\alpha-\beta) = \sin 2\alpha \sin 2\beta.$$

R. $E \equiv [\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)]\,[\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)]$,

$$E \equiv 2\sin\frac{(\alpha+\beta)+(\alpha-\beta)}{2}\cos\frac{(\alpha+\beta)-(\alpha-\beta)}{2}\,2\sin\beta\cos\alpha.$$

4. Să se arate că dacă $\alpha+\beta+\gamma = 180^\circ$, avem

$$\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma = 1 + 4\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}.$$

R. $E \equiv (\cos\alpha - 1) + \cos\beta + \cos\gamma = -2\sin^2\frac{\alpha}{2} + 2\cos\frac{\beta+\gamma}{2}\cos\frac{\beta-\gamma}{2} =$

$$-2\sin^2\frac{\alpha}{2} + 2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta-\gamma}{2},$$

$$E \equiv 2\sin\frac{\alpha}{2}\left[\cos\frac{\beta-\gamma}{2} - \sin\frac{\alpha}{2}\right] = 2\sin\frac{\alpha}{2}\left(\cos\frac{\beta-\gamma}{2} - \cos\frac{\beta+\gamma}{2}\right).$$

REZOLVAREA TRIUNGHIURILOR OARECARE.

49. Am văzut că am obţinut între elementele unui triunghi oarecare relaţiuni fundamentale. Acestea au fost găsite nu întâmplător, ci din nevoia de a rezolva unele din cazurile referitoare la triunghiurile oarecare, când se dau anumite elemente şi se cer celelalte.

Considerând şi alte cazuri de rezolvare a triunghiurilor, se mai întâlnesc şi alte relaţiuni, unghiuri în funcţie de laturi pe care la vom stabili în cele ce urmează.

50. **Relaţia dintre suma şi diferenţa a două laturi şi între tangentele jumătăţilor sumei şi diferenţei unghiurilor opuse.** Din relaţiile cunoscute

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

deducem

$$\frac{a+b}{a-b}=\frac{\sin A+\sin B}{\sin A-\sin B},$$

şi transformând termenii raportului al doilea în expresiuni calculabile prin logaritmi, avem

$$\frac{a+b}{a-b}=\frac{2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}}{2\sin\frac{A-B}{2}\cos\frac{A+B}{2}},$$

$$\frac{a+b}{a-b}=\frac{\operatorname{tg}\frac{A+B}{2}}{\operatorname{tg}\frac{A-B}{2}}.$$

Dar

$$\frac{A+B}{2}=\frac{180-C}{2}=90^0-\frac{C}{2};$$

deci $\operatorname{tg}\frac{A-B}{2}=\operatorname{tg}\left(90^0-\frac{C}{2}\right)=\operatorname{cotg}\frac{C}{2},$

aşa că formula precedentă devine

$$\frac{a+b}{a-b}=\frac{\operatorname{cotg}\frac{C}{2}}{\operatorname{tg}\frac{A-B}{2}},$$

sau

(XXX) $$\operatorname{tg}\frac{A-B}{2}=\frac{a-b}{a+b}\operatorname{cotg}\frac{C}{2}.$$

În mod analog se obţin

(XXXI) $$\frac{b+c}{b-c}=\frac{\operatorname{tg}\frac{B+C}{2}}{\operatorname{tg}\frac{B-C}{2}},\quad \frac{c+a}{c-a}=\frac{\operatorname{tg}\frac{C+A}{2}}{\operatorname{tg}\frac{C-A}{2}},$$

$$\operatorname{tg}\frac{B-C}{2}=\frac{b-c}{b+c}\operatorname{cotg}\frac{A}{2},\quad \operatorname{tg}\frac{C-A}{2}=\frac{c-a}{c+a}\operatorname{cotg}\frac{B}{2}.$$

Formulele stabilite se mai zic *formulele lui Napier.*

51. **Unghiuri în funcţie de laturi.** Din formula

$$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A,$$

avem

$$\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}.$$

Ştim însă că

(1) $$1-\cos A=2\sin^2\frac{A}{2},\quad 1+\cos A=2\cos^2\frac{A}{2}.$$

Înlocuind, avem

$$2\sin^2\frac{A}{2}=1-\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\frac{2bc-b^2-c^2+a^2}{2bc}.$$

(2) $$2\sin^2\frac{A}{2}=\frac{a^2-(b-c)^2}{2bc}=\frac{(a+b-c)(a-b+c)}{2bc}$$

Înlocuind pe cos A în formula a doua din (1), avem

$$2\cos^2\frac{A}{2}=1+\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\frac{2bc+b^2+c^2-a^2}{2bc}.$$

(3) $$2\cos^2\frac{A}{2}=\frac{(b+c)^2-a^2}{2bc}=\frac{(b+c-a)(b+c+a)}{2bc},$$

Să însemnăm cu $2p$ perimetrul triunghiului ABC, adică

$$2p=a+b+c.$$

Scăzând $2a$ din ambii membrii, avem

$$2p-2a=a+b+c-2a,$$

sau $$2(p-a)=-a+b+c,$$

În mod analog obţinem

(4) $$p-b=\frac{a-b+c}{2},\quad p-c=\frac{a+b-c}{2}.$$

Înlocuind valorile lui $a+b+c=2p$, $-a+b+c=2(p-a)$, $a-b+c=2(p-b)$, $a+b-c=2(p-c)$, relaţiile (2) şi (3) devin

$$2\sin^2\frac{A}{2}=\frac{2(p-c)2(p-b)}{2bc},\quad 2\cos^2\frac{A}{2}=\frac{p2(p-a)2p}{bc}.$$

sau $$\sin^2\frac{A}{2}=\frac{(p-b)(p-c)}{bc},\quad \cos^2\frac{A}{2}=\frac{p(p-a)}{bc}.$$

Extrăgând rădăcina pătrată, avem

(XXXII) $$\sin\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{bc}},\quad \cos\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{p(p-a)}{bc}}.$$

Împărţindu-le, deducem

$$\operatorname{tg}\frac{A}{2}=\frac{\sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{bc}}}{\sqrt{\frac{p(p-c)}{bc}}}=\sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{bc}\cdot\frac{bc}{p(p-a)}},$$

$$\text{(XXXIII)} \qquad \operatorname{tg}\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{p(p-a)}},$$

şi altele analoage

$$\text{(XXXIV)} \qquad \operatorname{tg}\frac{B}{2}=\sqrt{\frac{(p-c)(p-a)}{p(p-b)}}, \quad \operatorname{tg}\frac{C}{2}=\sqrt{\frac{(p-a)(p-b)}{p(p-c)}}.$$

52. **Cazul I.** *Să se rezolve un triunghi când se cunosc două unghiuri şi o latură opusă la unul din unghiuri.* Fie că se cumosc unghiurile B, C şi latura c. Avem $A=180^0-(B+C)$, iar latura b o calculăm cu relaţia

$$\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C},$$

de unde

$$b=\frac{c\sin B}{\sin C},$$

Pentru latura a, aplicăm relaţia

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{c}{\sin C},$$

de unde

$$a=\frac{c\sin A}{\sin C}.$$

Aplicând logaritmii, avem

$$\log b=\log c+\log\sin B-\log\sin C,$$

$$\log a=\log c+\log\sin B-\log\sin C,$$

de unde putem calcula pe a şi b.

Exemplu. În triunghiul ABC se cunosc $B=55^0 43'18''$, $C=72^0 12'35''$ şi $c=788$ m; să se calculaze unghiul A şi laturile a şi b.

Avem

$$A=180^0-(B+C)=180^0-127^0 55'53''=52^0 4'7'',$$

$$a=\frac{788\sin 52^0 4'7''}{\sin 72^0 12'35''}, \quad b=\frac{788\sin 55^0 43'18''}{\sin 72^0 12'35''}.$$

Aplicând logaritmii, avem

$$\log a=\log 788+\log\sin 52^0 4'7''-\log\sin 72^0 12'35'',$$

$$\log b=\log 788+\log\sin 55^0 43'18''-\log\sin 72^0 12'35''.$$

Dar

$$\log 788^0 = 2{,}89653,$$
$$\log\sin 52^0 4'7'' = \overline{1}{,}89694,$$
$$\log\sin 55^0 43'18'' = \overline{1}{,}91714,$$
$$\log\sin 72^0 12'35'' = \overline{1}{,}97872.$$

Deci

$$\log a = 2{,}89653 + \overline{1}{,}89694 - \overline{1}{,}97872,$$
$$\log a = 2{,}89653 + \overline{1}{,}89694 + 0{,}02128 = 2{,}81475,$$
$$a = 652{,}74 \text{ m}.$$

De asemenea,

$$\log b = 2{,}89653 + \overline{1}{,}91714 - \overline{1}{,}97872,$$
$$\log b = 2{,}89653 + \overline{1}{,}91714 + 0{,}02128 = 2{,}83495,$$
$$b = 683{,}83.$$

53. **Cazul II.** *Să se rezolve un triunghi când ce cunosc două lături şi unghiul opus uneia dintre ele.* Dacă se cunosc a, c, A, aplicăm formula

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{c}{\sin C},$$

de unde

$$\sin C = \frac{c \sin A}{a}.$$

Însemnând cu C unghiul ascuţit al cărui sinus este dat de formula aceasta, vedem că şi $(180^0 - C)$ are acelaş sinus ca şi C, şi deci se obţin, în general, în acest caz, două valori pentru C, un unghi ascuţit şi unul obtus. Să vedem care din aceste două soluţii corespund cazului considerat.

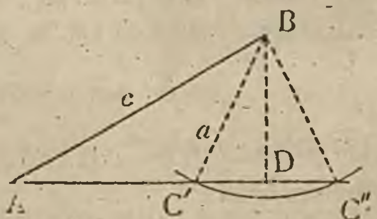

Fig. 21.

Construcţia geometrică a unui astfel de triunghi se face în modul următor. În punctul A (Fig. 21) se face unghiul dat A; se ia pe una din laturi lungimea AB $= c$ şi din punctul B ca centru, cu o rază egală cu lungimea laturii a, se descrie un cerc care, sau tae a doua latură a unghiului A în două puncte C′ şi C″, sau este tangent acestei laturi în punctul D, sau nu o tae, după cum a este mai mare ca BD, sau $a =$ BD, sau $a <$ BD. Prin urmare, corespund două triunghiuri, în general, sau ABC′, sau ABC″, sau numai unul ABD, sau nici unul.

Unghiul C fiind dat cu relaţia

$$\sin C = \frac{c \sin A}{a},$$

trebue observat de la început că problema este posibilă numai dacă

$$c \sin A < a,$$

căci numai atunci raportul $\frac{c \sin A}{a}$ este mai mic decât 1 şi astfel valoarea lui C există; în caz contrar, $c \sin A > a$, atunci $\frac{c \sin A}{a} > 1$, $\sin C > 1$, ceea ce este absurd. Aceasta însemnează că, pentru ca problema să fie posibilă, trebue ca $a > c \sin A$, $a > BD$.

Avem deci mai multe cazuri de considerat. 1°. Dacă $a > c$ (Fig. 22), în cazul când A este ascuţit, avem soluţia ABC″, iar în cazul când unghiul A este obstus, corespunde triunghiul C′AB. Aşa dar, dacă $a > c$, elementele triunghiului se determină numai într'un fel (univoc).

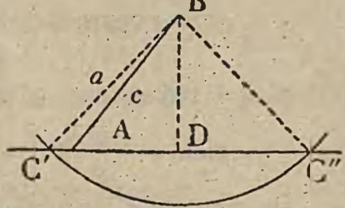

Fig. 22.

2°. Dacă $a = c$, sau $a = c \sin A$, rezolvarea triunghiului oarecare se reduce la rezolvarea triunghiului isoscel sau dreptunghic.

3°. Dacă $a < c$ şi $a < c \sin A$, ar urma $\frac{a}{\sin A} < c$, şi cum $\frac{a}{\sin A} = \frac{c}{\sin C}$, ar trebui ca $\frac{c}{\sin C} < c$, $\frac{1}{\sin C} < 1$, $\sin C > 1$, ceea ce nu se poate. Aceasta se poate vedea şi geometric, căci dacă $a < c$, $a < c \sin A$, atunci (Fig. 22) $BC' < BD$, şi deci cercul descris din B ca centru cu raza $BC' = a$ nu tae pe AD.

4°. Dacă $a < c$, dar $a > c \sin A$ (Fig. 21), rezolvarea triunghiului oarecare nu e univocă, de oarece unghiul C poate fi ascuţit sau obtus, corespund deci două soluţii pentru C, deci două triunghiuri, ABC′ sau ABC″.

Odată aflat unghiul C, unghiul B este dat de

$$B = 180^\circ - (A + C),$$

iar b cu formula

$$b = \frac{a \sin B}{\sin A}.$$

Exemple. 1) $a = 53,6$, $c = 35,2$, $A = 71^0\,15'$. De oarece $a > c$, problema are o soluție. Avem

$$\sin C = \frac{c \sin A}{a}, \quad \sin C = \frac{35,2 \sin 71^0\,15'}{53,6},$$

$$\log\sin C = \log 35,2 + \log\sin 71^0\,15' - \log 53,6$$

$$\log\sin C = 1,54654 + \bar{1},97632 - 1,72916,$$

$$\log\sin C = 1,54654 + \bar{1},97632 + \bar{2},27084 = 1,79370.$$

De unde $C = 38^0\,27'\,10''$, iar $B = 70^0\,17'\,50''$.

Latura b este dată de

$$b = \frac{a \sin B}{\sin A},$$

de unde

$$\log b = \log a + \log\sin B - \log\sin A,$$

$$\log b = 1,72916 + \bar{1},97380 - \bar{1},97632,$$

$$\log b = 1,72916 + \bar{1},97380 + 0,02368 = 1,72664,$$

$$b = 53,287.$$

2) $a = 105$ m, $c = 110$ m, $A = 58^0$. Avem formulele

$$\sin C = \frac{c \sin A}{a}, \quad B = 180^0 - (A + C), \quad b = \frac{a \sin B}{\sin A}.$$

De oarece $a < c$, problema poate să aibă două soluții. Pentru C aplicăm formula

$$\sin C = \frac{c \sin A}{a},$$

și aplicând logaritmii, avem

$$\log\sin C = \log c + \log\sin A - \log a,$$

$$\log\sin C = 2,04139 + \bar{1},92842 - 2,02119,$$

$$\log\sin C = 2,04139 + \bar{1},92842 + \bar{3},97881 = \bar{1},94862,$$

de unde

$$C' = 62^0\,40'\,34'', \quad C'' = 117^0\,19'\,26.$$

Deci

$$B' = 59^0\,19'\,26'', \quad B'' = 4^0\,40'\,35'',$$

Latura b este dată cu formula

$$b = \frac{a \sin B}{\sin A},$$

de unde

$$\log b = \log a + \log\sin B - \log\sin A.$$

Avem pentru cazul $B' = 59^0 19' 26''$,

$$\log b' = \log a + \log\sin B' - \log\sin A,$$

$$\log b' = 2{,}02119 + \bar{1}{,}93454 - \bar{1}{,}92842.$$
$$\log b' = 2{,}02119 + \bar{1}{,}93454 + 0{,}07158 = 2{,}02731,$$
$$b' = 1064{,}9 \text{ m}.$$

Pentru cazul $B'' = 4^0 40' 34''$, avem

$$\log b'' = \log a + \log\sin B'' - \log\sin A,$$
$$\log b'' = 2{,}02119 + \bar{2}{,}91118 - \bar{1}{,}92842,$$
$$\log b'' = 2{,}02119 + \bar{2}{,}91118 + 0{,}07158 = 1{,}00395,$$
$$b'' = 10{,}09 \text{ m}.$$

54. **Cazul III.** *Să se rezolve un triunghi când se cunosc două laturi şi unghiul cuprins între ele.* Fie că se dau laturile b, c şi unghiul A. Ne servim de formula

$$\operatorname{tg}\frac{B-C}{2} = \frac{b-c}{b+c}\operatorname{cotg}\frac{A}{2},$$

cu care aflăm diferenţa $\frac{B-C}{2}$. De oarece cunoaştem $\frac{B+C}{2} = \frac{180^0-A}{2}$, cunoaştem $\frac{B}{2}-\frac{C}{2}$ şi $\frac{B}{2}+\frac{C}{2}$ şi deci adunând şi scăzând aflăm direct pe B şi C.

Pentru calculul lui a, ne servim de formula

$$a = \frac{b\sin A}{\sin B}.$$

Exemplu $b = 1109{,}75$, $c = 1489{,}62$, $A = 47^0 9' 50''$.

Avem $c+b = 2599{,}37$, $c-b = 379{,}87$, $\frac{1}{2}A = 23^0 34' 55''$,

$$\operatorname{tg}\frac{1}{2}(C-B) = \frac{c-b}{c+b}\operatorname{cotg}\frac{A}{2}.$$

Deci

$$\log\operatorname{tg}\frac{1}{2}(C-B) = \log(c-b) + \log\operatorname{cotg}\frac{A}{2} - \log(c+b),$$

$$\log\operatorname{tg}\frac{1}{2}(C-B) = 2{,}57963 + 0{,}36000 - 3{,}41487,$$

$$\log\operatorname{tg}\frac{1}{2}(C-B) = 2{,}57963 + 0{,}36000 + \bar{4}{,}58512 = \bar{1}{,}52476.$$

De unde

$$\frac{C}{2} - \frac{B}{2} = 18^0 30' 34''.$$

Dar ştim că

$$\frac{B}{2}+\frac{C}{2}=66^{0}25'5''$$

Deci adunând şi scăzând, avem

$$2\frac{B}{2}=B=47^{0}54'31'',\ C=84^{0}55'39''.$$

Pentru calculul lui a, avem

$$a=\frac{b\sin A}{\sin B},$$

$$\log a=\log b+\log\sin A-\log\sin B,$$
$$\log a=3{,}04522+\bar{1}{,}86528-\bar{1}{,}87045,$$
$$\log a=3{,}04522+\bar{1}{,}86528+0{,}12955=3{,}04005,$$

de unde

$$a=1096{,}6.$$

55. **Cazul IV**. *Să se calculeze unghiurile* A, B, C, *când se cunosc laturile* a, b, c *ale triunghiului* ABC.

Pentru aceasta ne servim de formulele (XXXIII) (No. 51)

$$\operatorname{tg}\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{p(p-a)}}.$$

Exemplu. $a=543{,}9$, $b=597{,}6$, $c=625{,}9$. Trebue de la început observat că laturile a, b, c trebue să verifice relaţia $a<b+c$, adică o latură să fie mai mică decât suma celorlalte două, căci altfel triunghiul ABC nu există. În cazul de faţă condiţia fiind îndeplinită, vom calcula elementele

$$2p=a+b+c,\quad p=\frac{a+b+c}{2}=883{,}7,$$

$$p-a=339{,}8,\quad p-b=286{,}1,\quad p-c=257{,}8.$$

Avem

$$\log p=2{,}94630,\ \log(p-a)=2{,}53122,$$
$$\log(p-b)=2{,}45652,\ \log(p-c)=2{,}41128.$$

Aplicând logaritmii la ambii membrii ai formulei (XXXIII) (No. 51), care ne dă pe A, avem

$$\log\operatorname{tg}\frac{A}{2}=\frac{\log(p-b)+\log(p-c)-\log p-\log(p-a)}{2},$$

$$\log\operatorname{tg}\frac{A}{2}=\frac{2{,}45652+2{,}41128-2{,}94630-2{,}53122}{2},$$

$$\log \operatorname{tg}\frac{A}{2}=\frac{2,45652+2,41128+\bar{3},05370+\bar{3},46878}{2},$$

$$\log \operatorname{tg}\frac{A}{2}=\frac{\bar{1},39028}{2}=\frac{-2+1,39028}{2}=-1+0,69514,$$

$$\log \operatorname{tg}\frac{A}{2}=\bar{1},69514,$$

de unde

$$\frac{A}{2}=26^{0}21'47'', \quad A=52^{0}43'34''.$$

De asemenea,

$$\log \operatorname{tg}\frac{B}{2}=\frac{\log(p-c)+\log(p-a)-\log p-\log(p-a)}{2},$$

$$\log \operatorname{tg}\frac{B}{2}=\frac{2,41128+2,53122-2,94630-2,45652}{2},$$

$$\log \operatorname{tg}\frac{B}{2}=\frac{2,,41128+2,53122+\bar{3},05370+\bar{3},54348,}{2}$$

$$\log \operatorname{tg}\frac{B}{2}=\frac{\bar{1},53968}{2}=\frac{-2+1,53968}{2}=\bar{1},76984,$$

$$\frac{B}{2}=30^{0}28'56'', \quad B=60^{0}57'52''.$$

În fine

$$\log \operatorname{tg}\frac{C}{2}=\frac{\log(p-a)+\log(p-b)-\log p-\log(p-c)}{2},$$

$$\log \operatorname{tg}\frac{C}{2}=\bar{1},81508, \quad \frac{C}{2}=33^{0}9'17'', \quad C=66^{0}18'34''.$$

EXERCIŢII.

1. Să se rezolve un triunghi când se dau $A=57^{\circ}32'7''$, $B=73^{\circ}42'50''$ $v=25432,46$ m.

R. $C=48^{\circ}45'3''$; $b=\frac{a\sin B}{\sin A}$, $c=\frac{a\sin C}{\sin A}$, $b=28933,3$ m, $c=22633,5$ m.

2. Să se rezolve un triunghi când se dau $a=65,792$, $b=98,045$, $A=28^{\circ}51'48''$.

R. $a<b$, două soluţii ; $B'=46^{\circ}0'8''$, $C'=105^{\circ}8'3''$; $B''=133^{\circ}59'52''$ $C''=17^{\circ}8'19''$; $c'=131,563$ m, $c''=40,165$ m.

3. Să se rezolve un triunghi când se dau $b=61,686$, $c=51,956$, $A=24^{\circ}26'56''$.

R. $B=99^{\circ}20'17''$, $C=56^{\circ}12'47''$, $a=25,874$.

4. Să se rezolve un triunghiu când se dau $a=456,4$, $b=518,5$, $c=592,3$.

R. $A=47^\circ 57'14''$, $B=57^\circ 31'34''$, $C=74^\circ 31'12''$.

5. Să se rezolve un triunghi când se dau perimetrul triunghiului $2p=9$ m și unghiurile $A=67^\circ 22'48''$, $B=18^\circ 55'28''$.

R. Avem

$$a=\frac{c\sin A}{\sin C},\ b=\frac{c\sin B}{\sin C},$$

și înlocuind în $a+b+c=2p$, avem

$$\frac{c\sin A}{\sin C}+\frac{c\sin B}{\sin C}+c=2p,$$

și aducând la acelaș numitor,

$$\frac{c(\sin A+\sin B+\sin C)}{\sin C}=2p,$$

de unde

$$c=\frac{2p\sin C}{\sin A+\sin B+\sin C}.$$

Știm că (No. 48, II) $\sin C=2\sin\frac{C}{2}\cos\frac{C}{2}$,

$$\sin A+\sin B+\sin C=4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}.$$

Inlocuind și reducând, avem

$$c=\frac{p\sin\frac{C}{2}}{\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}},\ \frac{C}{2}=90^\circ-\frac{A+B}{2}.$$

În mod analog obținem

$$a=\frac{p\sin\frac{A}{2}}{\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}},\ b=\frac{p\sin\frac{B}{2}}{\cos\frac{A}{2}\cos\frac{C}{2}}$$

În cazul problemei date, se aplică logaritmii expresiilor ce dă pe a, b, c, și avem

$$C=93^\circ 41'44'',\ a=3,7,\ b=1,3,\ c=4.$$

6. Se dă $c=14$ m, $b-a=2$m, $B-A=14^\circ 15'$; să se afle celelalte elemente.

R. Pornim de la relațiile sinusurilor

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C},$$

de unde avem

$$\frac{b-a}{\sin B-\sin A}=\frac{c}{\sin C},\ \frac{b-a}{2\sin\frac{B-A}{2}\cos\frac{B+A}{2}}=\frac{c}{2\sin\frac{C}{2}\cos\frac{C}{2}};$$

dar $\frac{B+A}{2}=90^\circ-\frac{C}{2}$, $\cos\frac{B+A}{2}=\sin\frac{C}{2}$. Simplificând rămâne

$$(1) \qquad \frac{b-a}{c}=\frac{\sin\frac{B-A}{2}}{\cos\frac{C}{2}}.$$

În mod analog se obține

$$(2) \qquad \frac{a+b}{c}=\frac{\cos\frac{A-B}{2}}{\sin\frac{C}{2}}$$

Pentru calculul lui C se aplică logaritmii formulei (1) și avem

$$\log\cos\frac{C}{2}=\log c+\log\sin\frac{B-A}{2}-\log(b-a)$$

Se calculează apoi A+B și în fine A și B. Suma $(a+b)$ se calculează cu (2).

În cazul problemei date, se găsește $A=53^\circ 7'9''$, $B=67^\circ 22'9''$, $C=59^\circ 30'42''$; $b=15$ m, $a=13$ m.

7. Se cunosc unghiul $C=59^\circ 29'24''$, latura $c=14$ m și diferența a două laturi $a-b=2$ m. Să se rezolve triunghiul.

R. Avem $\quad p-b=\frac{a-b+c}{2},\ p-a=\frac{-a+b+c}{2},$

$$\sin^2\frac{C}{2}=\frac{(p-a)(p-b)}{ab},\quad ab=\frac{(p-a)(p-b)}{\sin^2\frac{C}{2}}.$$

Cunoscând $a-b$ și $a\,b$ se pot calcula a și b. Unghiurile le aflăm cu teorema sinusurilor.

În cazul nostru, avem $a=13$, $b=15$, $A=53^\circ 7'48''$, $B=67^\circ 22'48''$.

8. Să se calculeze laturile și unghiurile unui triunghi ABC căruia se cunosc înălțimile $h_a=12{,}92$, $h_b=11{,}2$, $h_c=12$ [1].

R. Fie AH_a, BH_b, CH_c, înălțimile triunghiului ABC (Fig. 23). Trinnghiurile dreptunghice BH_bC, AH_aC, sunt asemenea fiindcă au unghiul C comun. Urmează asemănarea laturilor, adică

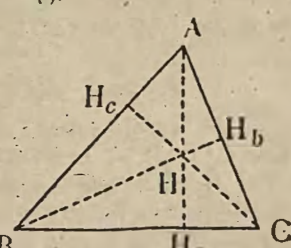

Fig. 23.

$$\frac{BC}{BH_b}=\frac{AC}{AH_a},\quad \frac{a}{h_b}=\frac{b}{h_a},$$

sau $\qquad ah_a=bh_b.$

În mod analog, gasim

$$ak_a=ch_c.$$

Înlocuind în formula

$$\operatorname{tg}\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{p(p-a)}}=\sqrt{\frac{(a-b+c)(a+b-c)}{(a+b+c)(-a+b+c)}},$$

pe $\qquad b=\frac{aha}{hb},\quad c=\frac{aha}{hc},$

[1] Incepând cu acesta, xeemplele următoare nu fac parte din program.

avem

$$\operatorname{tg}\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{\left(a-\frac{aha}{hb}+\frac{aha}{hc}\right)\left(a+\frac{aha}{hb}-\frac{aha}{hc}\right)}{\left(a+\frac{aha}{hb}+\frac{aha}{hc}\right)\left(-a+\frac{aha}{hb}+\frac{aha}{hc}\right)}},$$

$$\operatorname{tg}\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{(hb\,hc-ha\,hc+ha\,hb)\,(hb\,hc+hc\,ha-ha\,hb)}{(hb\,hc+hc\,ha+ha\,hb)\,(-hb\,hc+hc\,ha+ha\,hb)}},$$

care ne dă unghiul A. Se obţin formule analoage pentru B şi C.

În cazul nostru, $A=53^\circ7'48''$, $B=67^\circ22'48''$, $C=59^\circ29'24''$; $a=13$, $b=15$, $c=14$.

9. Să dă $b=198\,m$, $c=252\,m$ şi mediana $AA'=m_a$ (dreapta care uneşte vârful cu mijlocul laturii opuse) egală cu $185\,m$. Să se afle latura a şi unghiurile (Fig. 24).

R. Avem $c^2=\overline{BA'}^2+\overline{AA'}^2-2\,BA'.AA'\cos BA'A$,

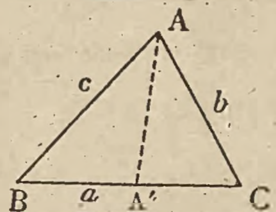

Fig. 24.

$$b^2=\overline{A'C}^2+\overline{AA'}^2-2A'C.AA'\cos CA'A,$$

$$c^2=\frac{a^2}{4}+m_a^2-a.m_a\cos BA'A,$$

$$b^2=\frac{a^2}{4}+m_a^2-a.m_a\cos AA'C.$$

Dar $AA'C=180^\circ-AA'B$; deci

$\cos BA'A=-\cos AA'C$,

şi adunând, avem

$$b^2+c^2=\frac{a^2}{2}+2m_a^2,$$

de unde

$$a^2=2(b^2+c^2)-4m_a^2,\ a=\sqrt{2(b^2+c^2)-4m_a^2}.$$

Unghiurile le calculăm apoi din triunghiurile ABA', ACA', în care se cunosc toate laturile, cu formula

$$\operatorname{tg}\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{p(p-a)}}.$$

În cazul nostru, $a=261,75$, unghiurile sunt $A=69^\circ\,57'\,38''$ $B=45^\circ\,19'\,18''$, $C=64^\circ\,45'\,4''$.

10. Să se afle elementele necunoscute ale unui triunghi, în care se cunosc laturile $a=5,2$, $b=4,7$, iar unghiul C cuprins între ele este jumătatea unghiului B opus la cea mai mică latură.

R. α fiind unghiul C., avem $B=2\alpha$, $A=180^\circ-3\alpha$. Scrim că laturile sunt proporţionale cu sinusurile şi avem

$$\frac{b}{a}=\frac{\sin B}{\sin A},\quad \frac{b}{a}=\frac{\sin 2\alpha}{\sin(180-3\alpha)},\quad \frac{b}{a}=\frac{2\sin\alpha\cos\alpha}{\sin 3\alpha},$$

$$\frac{b}{a}=\frac{2\sin\alpha\cos\alpha}{3\sin\alpha-4\sin^3\alpha},\quad \frac{b}{a}=\frac{2\cos\alpha}{3-4\sin^2\alpha},\quad \frac{b}{a}=\frac{2\cos\alpha}{4\cos^2\alpha-1},$$

ecuaţie care dă $\cos\alpha=0,84798$, $\alpha=32^\circ6'59''$.

11. Baza $BC=1120$ m, iar $B=18^\circ26'48''$, $C=45^\circ31'20''$. Cu cât trebue prelungită baza BC, astfel ca noul triunghi ABD să fie isoscel ($AB=AD$).

R. Din triunghiul CAD, în care unghiul CDA $= 18°26'48''$, avem

$$\frac{CD}{\sin CAD} = \frac{AC}{\sin CDA}, \quad CD = \frac{AC \sin(45°31'20''-18°26'48'')}{\sin 18°26'48''}$$

Din triunghiul ACB, avem

$$\frac{AC}{\sin CBA} = \frac{BC}{\sin BAC}, \quad AC = \frac{1120 \sin 18°26'48''}{\sin(18°26'48''+45°31'20'')},$$

$$CD = \frac{1120 \sin 27°4'32''}{\sin 63°58'8''}, \quad CD = 567,4.$$

12. Fie ∢ BAC $= 104°15'$ unghiul unui triunghi ABC. Să considerăm două drepte ce trec prin vârful A, care împart unghiul A în trei părți egale și cari tae latura BC în punctele D și E. Știind că AD $= 9$ m. iar AE $= 7$ m, să se calculeze elementele triunghiului ABC.

R. În triunghiul ADE se cunosc laturile AD, AE și unghiul DAE $= 34°45'$. De aci se calculează cu formula tangentelor unghiurile dela baza DE. Se cunosc deci și unghiurile AEC, ADB, iar din triunghiurile AEC, ADB se calculează AC, unghiul C, AB, unghiul B. Latura BC $= 28,264$.

CALCULUL ARIILOR.

56. Aria unui triunghiu ABC (Fig. 25) este egală cu jumătatea produsului bazei AB prin înălțimea CD,

$$S = \text{aria ABC} = \frac{AB \cdot CD}{2}.$$

Expresiunea trigonometrică a arii triunghiului are diferite forme după elementele date care definesc triunghiul.

1°. *Se cunosc două laturi și unghiul cuprins între ele.* Din triunghiul dreptunghic ADC (Fig. 25), avem

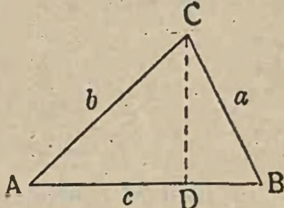

Fig. 25.

$$CD = \text{aria AC} \sin A = b \sin A.$$

Înlocuind în expresia arii, avem

$$S = \text{aria ABC} = \frac{AB.CD}{2} = \frac{c\,b \sin A}{2}$$

În mod analog, găsim pentru aria triunghiului

$$\text{(XXXV) aria ABC} = \frac{a\,b \sin C}{2} = \frac{b\,c \sin A}{2} = \frac{c\,a \sin C}{2}.$$

Exemplu. $b = 74,8$ m, $c = 37,5$ m, $A = 63°35'30''$. Avem

$$\text{aria } S = \frac{b\,c \sin A}{2} = \frac{74,8.37,5 \sin 63°35'30''}{2};$$

Aplicând logaritmii, avem

$$\log S = \log 74,8 + \log 37,5 + \log\sin 63°35'30'' - \log 2,$$

$$\log S = 1{,}87390 + 1{,}57403 + \bar{1}{,}95214 - 0{,}30103,$$
$$\log S = 1{,}87390 + 1{,}57403 + \bar{1}{,}95214 + \bar{1}{,}69897,$$
$$\log S = 3{,}09904,$$
$$\text{aria } S = 1256{,}14 \text{ m}^2.$$

2°. *Se cunosc o latură și două unghiuri alăturate.* Fie că se dă latura a și unghiurile B și C. Am văzut vă aria triunghiului e

$$S = \frac{a\,b \sin C}{2}$$

Să înlocuim pe b în funcțiune de elementele cunoscute a, B, C. Avem, după teorema sinusurilor,

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B},$$

de unde

$$b = \frac{a \sin B}{\sin A},$$

Înlocuind, expresia arii devine

$$S = \frac{a \sin C}{2} \cdot \frac{a \sin B}{\sin A},$$

sau

$$\text{(XXXVI)} \quad S = \frac{a^2 \sin B \sin C}{2 \sin A}, \quad S = \frac{a^2 \sin B \sin C}{2 \sin[180^\circ - (B + C)]}.$$

În mod analog, obținem

$$S = \frac{b^2 \sin A \sin C}{2 \sin B}, \quad S = \frac{c^2 \sin A \sin B}{2 \sin C}.$$

Exemplu. $a = 439{,}258$ m, $B = 72^\circ 50' 39''$, $C = 64^\circ 25' 48''$. Avem

$$S = \frac{1}{2} \frac{a^2 \sin B \sin C}{\sin A}, \quad A = 180^\circ - (B + C) = 42^\circ 43' 33''.$$

Aplicând logaritmii, avem

$$\log S = 2 \log a + \log\sin B + \log\sin C - \log\sin A - \log 2,$$
$$\log S = 2 .\ 2{,}64272 + \bar{1}{,}98024 + \bar{1}{,}95524 - \bar{1}{,}83155 - 0{,}30103,$$
$$\log S = 5{,}28544 + \bar{1}{,}98024 + \bar{1}{,}95524 + 0{,}16845 + \bar{1}{,}69897,$$
$$\log S = 5{,}08834, \quad S = 122557{,}14 \text{ m}^2.$$

3°. *Se cunosc laturile a, b, c.* Știm că aria este

$$S = \frac{ac \sin A}{2}.$$

Înlocuind pe $\sin A = 2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}$, iar pe $\sin\frac{A}{2}$, $\cos\frac{A}{2}$ in funcţiune de laturi (formulele XXXIII, No. 51):

$$\sin\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{bc}},\quad \cos\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{p(p-a)}{bc}},$$

avem

$$S=\frac{bc}{2}2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}=bc\sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{bc}}\sqrt{\frac{p(p-a)}{bc}},$$

$$S=bc\sqrt{\frac{p(p-a)\,(p-b)\,(p-c)}{b^2c^2}},$$

$$S=bc\frac{\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}{bc}.$$

(XXXVII)

$$S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)},$$

care dă aria triunghiului în funcţiune de laturi.

Exemplu. $a=543{,}9$ m, $b=597{,}6$ m, $c=625{,}9$ m. Aplicând logaritmii la expresia arii, acem

$$\log S=\frac{\log p+\log(p-a)+\log(p-b)+\log(p-c)}{2};$$

$$p=\frac{a+b+c}{2}=883{,}7;\ p-a=339{,}8;\ p-b=286{,}1;\ p-c=257{,}8,$$

$$\log S=\frac{2{,}94630+2{,}53122+2{,}45652+2{,}41128}{2}=5{,}17266,$$

$$S=148824\ \text{m}^2.$$

57. **Observare.** [1] Formulele arii le putem folosi la rezolvarea triunghiului dacă aria este unul din elementele cunoscute. De ex., cunoscând aria S a triunghiului, suma laturilor $a+b=m$ şi latura c, elementele necunoscute le aflăm în modul următor.

Avem

$$2S=ab\sin C,$$

$$\cos^2\frac{C}{2}=\frac{p(p-c)}{bc}.$$

Înlocuind pe ab cu egalul său de mai sus,

(1)
$$ab=\frac{2S}{\sin C},$$

avem

$$\cos^2\frac{C}{2}=\frac{p(p-c)}{\left(\frac{2S}{\sin C}\right)}=\frac{p(p-c)\sin C}{2S}.$$

---

[1] Nu face parte din program.

Înlocuim pe

$$\sin C = 2\sin\frac{C}{2}\cos\frac{C}{2}$$

și obținem

$$\cos^2\frac{C}{2} = \frac{p(p-c)2\sin\frac{C}{2}\cos\frac{C}{2}}{2S}.$$

Simplificând cu $\cos\frac{C}{2}$, avem

$$\cos\frac{C}{2} = \frac{p(p-c)\sin\frac{C}{2}}{S},$$

sau împărțind cu $\sin\frac{C}{2}$,

(2) $$\cot g\frac{C}{2} = \frac{p(p-c)}{S}.$$

După ce am calculat pe C, înlocuim în (1) și avem ecuația

$$ab = \frac{2S}{\sin C},$$

care împreună cu ecuația dată prin enunț,

$$a + b = m,$$

ne dau valorile lui a și b. Al doilea unghi al triunghiului îl aflăm aplicând teorema sinusurilor.

Exemplu. $S = 182{,}996$ m², $a + b = 45$ m, $c = 18$ m. Pentru a afla unghiul C, înlocuim în formula (2) și avem

$$\cot g\frac{C}{2} = \frac{p(p-c)}{S} = \frac{31{,}5 . 13{,}5}{182{,}996}.$$

Aplicând logaritmii, găsim

$$\log\cot g\frac{C}{2} = \log 31{,}5 + \log 13{,}5 - \log 182{,}996,$$

$$\log\cot g\frac{C}{2} = 1{,}49831 + 1{,}13033 - 2{,}26244,$$

$$\log\cot g\frac{C}{2} = 1{,}49831 + 1{,}13033 + \overline{3}{,}73756 = 0{,}36620,$$

$$C = 46^\circ 34' 2''.$$

Înlocuind în (1), avem

$$ab = \frac{2S}{\sin C} = \frac{2.182{,}996}{\sin 46^\circ 34' 2''};$$

de unde

$$\log(ab) = \log 365{,}992 - \log\sin 46^\circ 34' 2'',$$
$$\log(ab) = 2{,}56347 - \overline{1}{,}86105 = 2{,}56347 + 0{,}13895,$$
$$\log(ab) = 2{,}70242, \quad ab = 503{,}999.$$

Cunoscând suma $a + b = 45$ și produsul, ab, putem forma ecuația de gradul al doilea care dă pe a și b,

$$X^2-45X+503{,}999=0,$$

de unde se găsesc rădăcinile

$$X'=a=24 \text{ m}, \quad X''=b=21 \text{ m}.$$

EXERCIŢII.

1. Să se ducă o paralelă MN la baza AB a triunghiului ABC, astfel ca aria trapezului AMNB să fie egală cu $\frac{2}{3}$ din aria triunghiului MCN. Aplicaţie pentru $AB=53{,}4$ m; $\measuredangle BAC=50^\circ 25' 25''$; $\measuredangle ABC=62^\circ 40' 50''$.

R. M fiind pe AC şi N pe CB, poziţia paralelei MN este determinată de lungimea $CM=x$. Avem

$$\text{aria AMNB}=\frac{2}{3}\text{ aria MCN}, \quad \frac{5}{3}\text{ aria MCN}=\text{aria ABC},$$

$$\frac{\text{aria ABC}}{\text{aria MCN}}=\frac{5}{3}.$$

Dar

$$\text{aria ABC}=\frac{1}{2}AC.\,CB\sin ACB, \quad \text{aria MCN}=\frac{1}{2}MC.NC\sin MCN; \text{ deci}$$

$$\frac{\text{aria ABC}}{\text{aria MCN}}=\frac{AC.CB}{MC\,NC}=\left(\frac{AC}{MC}\right)\left(\frac{BC}{NC}\right).$$

Triunghiurile CMN şi CAB fiind asemenea, atunci

$$\frac{AC}{MC}=\frac{BC}{NC}$$

şi avem

$$\frac{\text{aria ABC}}{\text{aria MCN}}=\left(\frac{AC}{MC}\right)\left(\frac{AC}{MC}\right)=\left(\frac{AC}{MC}\right)^2,$$

adică raportul ariilor a două triunghiuri asemenea este egal cu pătratul raportului a două laturi omoloage.

Relaţia de mai sus devine

$$\left(\frac{AC}{MC}\right)^2=\frac{5}{3}, \quad \frac{x^2}{b^2}=\frac{3}{5}.$$

Aplicând teorema sinusurilor, avem

$$\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C},$$

şi deci

$$x^2=\frac{3}{5}b^2=\frac{3}{5}\frac{c^2\sin^2 B}{\sin^2 C},$$

$$x=c\sqrt{\frac{3}{5}}\,\frac{\sin B}{\sin C}.$$

Avem $\qquad C=180^\circ-(A+B)=65^\circ 53' 45'',$

$$\log x=\log c+\frac{\log 3-\log 5}{2}+\log\sin B-\log\sin C,$$

$$\log x=1{,}72754+\frac{0{,}47712-0{,}69897}{2}+\overline{1}{,}94864-\overline{1}{,}96369,$$

$$\log x=1{,}60157; \quad x=39{,}954 \text{ m}.$$

2. În triunghiul ABC se dă unghiul $C = 69^{\circ}10'12''$ și $AC = 177{,}285$ m, $BC = 89{,}214$ m. Să se determine pe latura AC punctul M, astfel că dacă P este proecția sa pe dreapta AB, să avem aria $AMP = \frac{1}{2}$ aria ABC.

R. $AM = x$. Avem $x\,AP.\sin A = \frac{1}{2} ab \sin C$, $2x^2 \sin A \cos A = ab \sin C$

$x^2 = \frac{ab \sin C}{2 \sin A \cos A}$. Totul revine să calculăm pe A. Se aplică formula

$$\operatorname{tg} \frac{1}{2}(B-A) = \frac{b-a}{b+a} \operatorname{cotg} \frac{C}{2}.$$

Se găsește $\frac{1}{2}(B-A) = 25^{\circ}36'33''$ și cum știm $\frac{1}{2}(B+A) = 55^{\circ}24'54''$, avem $A = 29^{\circ}48'21''$. Pentru x, se aplică logaritmii,

$$2 \log x = \log a + \log b + \log \sin C - \log 2 - \log \sin A - \log \cos A,$$
$$\log x = 2{,}15158; \quad x = 141{,}76 \text{ m}.$$

3. Să se calculeze laturile unui triunghi a cărui suprafață este 74281 m², și ale cărui unghiuri sunt respectiv $93^{\circ}49'38''$; $47^{\circ}35'24''$; $38^{\circ}34'58''$.

R. Formula suprafeței este

$$S = \frac{1}{2} a^2 \frac{\sin B \sin C}{\sin A},$$

de unde

$$a^2 = \frac{\sin B \sin C}{2 S \sin A};$$

la fel cu b^2, c^2. Se aplică logaritmii și se găsește

$$a = 567{,}37 \text{ m}, \; b = 419{,}85; \; c = 354{,}63 \text{ m}.$$

4. Se dă un unghi $A = 44^{\circ}20'12''$. Prin punctul B luat pe una din laturile unghiului A la distanța $AB = 107$ m, să se ducă o dreaptă AB, astfel ca aria triunghiului ABC să fie de 6527 m². Se cere lungimea dreptei AC și valoarea unghiului ABC.

R. Chestiunea revine să se calculeze B și b într'un triunghi, când se cunosc A, c, S. Avem $b = \frac{2S}{c \sin A}$ care dă pe $b = 174{,}567$ m. Unghiul B îl aflăm cu formula

$$\operatorname{tg} \frac{1}{2}(B-C) = \frac{b-c}{b+c} \operatorname{cotg} \frac{A}{2};$$

și găsim $B = 98^{\circ}19'37''$.

5. Aria unui triunghi ABC este $S = 21931$ m², iar unghiurile $A = 46^{\circ}25'$, $B = 78^{\circ}40'$. Să se afle cu cât trebue prelungită latura AB pentruca triunghiul obținut să fie isoscel.

R. AB fiind latura ce trebue prelungită până în D, avem

$$BD = \frac{BC \sin(78^{\circ}40' - 46^{\circ}25')}{\sin 46^{\circ}25'} = \frac{\sin 32^{\circ}15'}{\sin 46^{\circ}25'} \sqrt{\frac{2S \cdot \sin 46^{\circ}25'}{\sin 78^{\circ}40' \sin 125^{\circ}5'}}, \quad BD = 148{,}959.$$

RAZELE CERCULUI INSCRIS ŞI ALE CERCURILOR EXINSCRISE LA UN TRIUNGHI. RAZA CERCULUI CIRCUMSCRIS.

58. **Raza cercului înscris.** Să înscriem în triunghiul ABC un cerc şi fie C′, A′, B′ punctele sale de contact (Fig. 26) cu laturile AB, BC, CA. Centrul său I este la intersecţia bisectoarelor unghiurilor triunghiului ABC şi este egal depărtat de laturile triunghiului, astfel că raza r a cercului înscris este egală cu IA′ = IB′ = IC′.

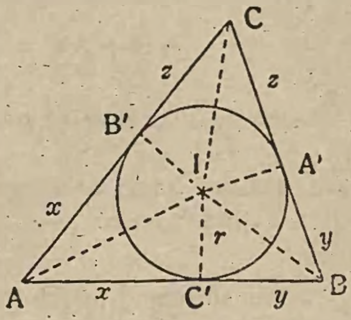

Fig. 26.

Înainte de a afla raza cercului înscris, să calculăm segmentele AB′ = AC′ = x, C′B = BA′ = y, A′C = CB′ = z, ce determină punctele de contact al cercului înscris pe laturile triunghiului ABC. Avem

$$AC' + C'B = c, \quad BA' + A'C = a, \quad CB' + B'A = b,$$

sau

$$x + y = c, \quad y + z = a, \quad z + x = b.$$

Adunându-le, obţinem

$$2x + 2y + 2z = a + b + c = 2p,$$

sau

$$x + y + z = p.$$

Însă AC′ + C′B = c, $x + y = c$; deci din relaţia precedentă, înlocuind pe $x + y$ cu c, avem

$$c + z = p, \quad z = p - c,$$

sau

$$A'C = CB' = p - c.$$

În mod analog, obţinem

$$AC' = AB' = p - a, \quad C'B = BA' = p - b.$$

Să observăm acum că dreptele AI, BI, CI fiind bisectoare, nghiurile IAB′ = IAC′ = $\frac{1}{2}$ A, IBC′ = IBA′ = $\frac{1}{2}$ B, ICA′ = ICB′ = $\frac{1}{2}$ C.

Expresiunea razei cercului înscris are diferite forme după datele care definesc triunghiul ABC.

I. *Se cunosc o latură și două unghiuri.* Dacă se dau a, B, C, din triunghiurile IBA′, ICA′ (Fig. 26), avem

$$A'B = r \operatorname{cotg} \frac{B}{2}, \quad A'C = r \operatorname{cotg} \frac{C}{2}.$$

Adunându-le, obținem

$$A'B + A'C = r \operatorname{cotg} \frac{B}{2} + r \operatorname{cog} \frac{C}{2},$$

$$a = r \left(\operatorname{cotg} \frac{B}{2} + \operatorname{cotg} \frac{C}{2} \right),$$

de unde

$$r = \frac{a}{\operatorname{cotg} \frac{B}{2} + \operatorname{cotg} \frac{C}{2}}$$

Transformând numitorul, avem

$$r = \frac{a}{\dfrac{\cos \frac{B}{2}}{\sin \frac{B}{2}} + \dfrac{\cos \frac{C}{2}}{\sin \frac{C}{2}}} = \frac{a \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2}}{\sin \frac{B+C}{2}}$$

Dar

$$\frac{B+C}{2} = 90^0 - \frac{A}{2}.$$

Deci

(1) $$r = \frac{a \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2}}{\cos \frac{A}{2}}$$

În mod analog se obțin relațiile

$$r = \frac{b \sin \frac{C}{2} \sin \frac{A}{2}}{\cos \frac{B}{2}}, \quad r = \frac{c \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2}}{\cos \frac{C}{2}}.$$

Exemple. 1) Se dau $B = 58^0\ 19'$, $C = 47^0\ 13'$, $a = 38$ dm. Pentru aflarea lui r se aplică formula (1), luând logaritmii și se găsește $r = 9{,}35$ dm.

2) Se dau $B = 58^0 19'$, $C = 47^0 13'$, $r = 14{,}8$ dm. Pentru a afla laturile a, b, c, ale triunghiului, se aplică formulele (1) și se găsesc $a = 60{,}38$ dm, $b = 53{,}34$ dm, $c = 46$ dm.

II. *Se cunosc perimetrul,* o *latură și unghiul opus acestei* *laturi.* De ex., $2p$, a, A. Din triunghiul dreptunghic AIC′, avem

$$IC' = AC' \operatorname{tg} \frac{A}{2},$$

(2) $$r = (p - a) \operatorname{tg} \frac{A}{2}.$$

În mod analog, se obţin

$$r = (p - b) \operatorname{tg} \frac{B}{2}, \quad r = (p - c) \operatorname{tg} \frac{C}{2}.$$

Exemplu. $2p = 44$ m, $A = 87^0\,16'$, $a = 18$ m. Aplicând formula (2), avem $r = 3{,}813$.

III. *Se cunosc laturile a, b, c.* Să scriem că aria triunghiului ABC (Fig. 26) este egală cu suma ariilor triunghiurilor AIB, BIC, CIA. Avem

$$S = \frac{ar}{2} + \frac{br}{2} + \frac{cr}{2} = \frac{r}{2}(a + b + c) = \frac{r}{2} 2p,$$

(3) $$S = pr,$$

de unde

$$r = \frac{S}{p} = \sqrt{\frac{p(p-a)(p-b)(p-c)}{p^2}},$$

(4) $$r = \sqrt{\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p}}.$$

Exemplu. $a = 15$ m, $b = 10$ m, $c = 8$ m. Aplicând logaritmii la formula (4), se găseşte $r = 2{,}231$.

59. **Razele cercurilor exînscrise.** Să ducem bisectoarele exterioare ale unghiurilor B şi C din triunghiul ABC. I_a fiind punctul lor de intersecţie (Fig. 27), să ducem perpendicularele $I_a A'$, $I_a B'$, $I_a C'$ pe laturile BC, CA, AB. I_a fiind pe bisectoarea unghiului B, avem $I_a B' = I_a A'$; de asemenea, fiind pe bisectoarea unghiului C, urmează $I_a B' = I_a A'$. Deci $I_a B' = I_a C'$, relaţie care probează că punctul I_a este egal depărtat de laturile unghiului A, sau că este pe bisectoarea unghiului A, cu alte cuvinte, bisectoarea interioară a unghiului A şi bisectoarele exterioare ale celorlalte două unghiuri B şi C se tae în acelaş punct, I_a, exterior triunghiului şi egal depărtat de laturile triunghiului ABC. Acest punct I_a este centrul unui cerc tangent

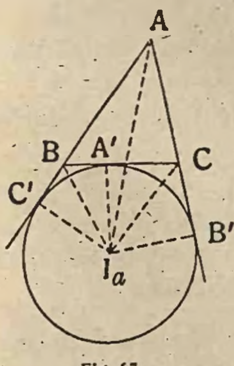

Fig. 27.

la laturile triunghiului ABC în punctele A′, B′, C′, de aceea se zice cerc ezinscris în triunghiul ABC. Raza sa este $r_a = I_a A' = I_a B' = I_a C'$.

În mod analog se obţin încă două cercuri exînscrise corespunzătoare vârfurilor B şi C.

Putem şi aci să calculăm segmentele $BA' = BC' = x$, $CA' = CB' = y$, $AB' = AC' = z$, pe care le determină pe laturile triunghiului ABC punctele de contact A′,B′,C′ ale cercului exînceris. Avem

$$x + y = a, \quad z - y = b, \quad z - x = c.$$

Adunând, obţinem

$$2z = a + b + c, \quad z = AC' = AB' = p.$$

Deci

$$y = z - b = p - b, \quad x = z - c = p - c.$$

Se pot găsi diferite expresii pentru raza r_a cercului exînscris corespunzător cârfului A.

1⁰. Din triunghiul $I_a AB'$, avem

$$I_a B' = AB' \operatorname{tg} \frac{A}{2}, \quad r_a = p \operatorname{tg} \frac{A}{2}.$$

În mod analog, se găsesc

$$r_b = p \operatorname{tg} \frac{B}{2}, \quad r_c = p \operatorname{tg} \frac{C}{2}.$$

2⁰. Să observăm (Fig. 27) că aria triunghiului ABC este dată de

$$ABC = I_a BA + I_a CA - I_a BC.$$

De unde

$$S = \frac{1}{2} AB . I_a C' + \frac{1}{2} CA . I_a B' - \frac{1}{2} BC . I_a A',$$

$$S = \frac{r_a c}{2} + \frac{r_a b}{2} - \frac{r_a a}{2} = \frac{r_a}{2}(-a + b + c) = \frac{r_a}{2}(p - a),$$

$$S = r_a\,(p - a).$$

De aci se poate deduce r_a,

(5) $$r_a = \frac{S}{p - a},$$

$$r_a = \frac{\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}{p-a} = \sqrt{\frac{p(p-b)(p-c)}{p-a}}.$$

În mod analog, se găsesc

$$r_b=\frac{S}{p-b},\ r_c=\frac{S}{p-c}. \tag{6}$$

60. **Raza cercului circumscris.** Să însemnăm cu R raza cercului cu centrul O circumscris triunghiului ABC (Fig. 28). Unghiul BOC fiind la centru, este îndoitul unghiului A înscris în cerc, căruia îi corespunde ca măsură jumătatea arcului BC. Însemnând cu D piciorul perpendicularei din O pe coarda BC, ştim că $BD=DC=\frac{a}{2}$, iar unghiul $DOC=\frac{1}{2}BOC=A$.

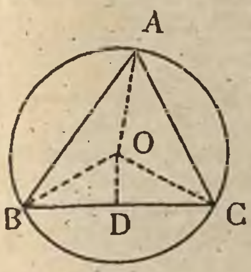

Fig. 28.

Din triunghiul dreptunghic ODC, avem

$$DC=OC\sin DOC,\ \frac{a}{2}=R\sin A,$$

deci

$$\frac{a}{\sin A}=2R, \tag{7}$$

relaţie, care dă valoarea razei cercului circumscris.

În mod analog se obţin

$$\frac{a}{\sin B}=2R,\ \frac{c}{\sin C}=2R,$$

şi deci

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R.$$

Expresiunea razei cercului circumscris are diferite forme după datele problemei.

1°. *Se cunosc o latură a şi unghiul opus* A. Raza e dată de relaţia (7),

$$R=\frac{a}{2\sin A}.$$

Când $a=12$m, $A=63°10'$, se aplică logaritmii şi avem $R=6{,}724$m.

2°. *Se cunosc laturile* $a=13$, $b=15$, $c=14$. Pentru a găsi expresia razei, înlocuim în (7) pe $\sin A$ cu $2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}$ şi avem

$$R=\frac{a}{4\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}}=\frac{a}{4\sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{bc}}\cdot\sqrt{\frac{p(p-a)}{bc}}},$$

$$(8) \qquad R=\frac{abc}{4\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}},$$

sau

$$R=\frac{abc}{4S}.$$

Cu formula (8) se calculează raza R când se cunosc laturile triunghiului. În cazul $a=13$, $b=15$, $c=14$, se găseşte $R=8{,}125$.

61. Relaţiuni între razele cercurilor înscris, exînscrise şi circumscris(1). 1°. Din relaţiile (3), (5), (6) deducem

$$(9) \qquad r=\frac{S}{p}, \quad r_a=\frac{S}{p-a}, \quad r_b=\frac{S}{p-b}, \quad r_c=\frac{S}{p-c}.$$

De unde

$$\frac{1}{r}=\frac{p}{S}, \quad \frac{1}{r_a}=\frac{p-a}{S}, \quad \frac{1}{r_b}=\frac{p-b}{S}, \quad \frac{1}{r_c}=\frac{p-c}{S}.$$

Adunând ultimele trei relaţii, obţinem

$$\frac{1}{r_a}+\frac{1}{r_b}+\frac{1}{r_c}=\frac{p-a}{S}+\frac{p-b}{S}+\frac{p-c}{S}=\frac{3p-(a+b+c)}{S},$$

sau

$$\frac{1}{r_a}+\frac{1}{r_b}+\frac{1}{r_c}=\frac{p}{S},$$

şi înlocuind pe $\frac{p}{S}$ cu egalul său $\frac{1}{r}$, rezultă

$$\frac{1}{r_a}+\frac{1}{r_b}+\frac{1}{r_c}=\frac{1}{r},$$

care este o relaţie între razele cercurilor înscris şi exînscrise unui triunghi.

2°. Înmulţind relaţiile (9), avem

$$r\,r_a\,r_b\,r_c=\frac{S^4}{p(p-a)(p-b)(p-c)}=\frac{S^4}{S^2}=S^2,$$

sau

$$S=\sqrt{r\,r_a\,r_b\,r_c}.$$

3°. Adunând relaţiile (9), avem

$$E=r_a+r_b+r_c-r=\frac{S}{p-a}+\frac{S}{p-b}+\frac{S}{p-c}-\frac{S}{p},$$

$$E=S\frac{(p-b)(p-c)p+(p-a)(p-c)p+(p-a)(p-b)p-(p-a)(p-b)(p-c)}{p(p-a)(p-b)(p-c)}.$$

Desvoltând, ordonând după puterile lui p şi reducând,

(1) Nu face parte din program.

avem

$$E = S\frac{2p^3 - p^2(a+b+c) + abc}{p(p-a)(p-b)(p-c)},$$

$$E = S\frac{2p^3 - p^2 . 2p + abc}{S^2} = \frac{abc}{S},$$

deci

$$r_a + r_b + r_c - r = \frac{abc}{S}.$$

Dar

$$R = \frac{abc}{4S},$$

deci

$$r_a + r_b + r_c - r = 4R.$$

EXERCIŢII [1].

1. În triunghiul ABC se dau unghiurile $B = 39^\circ 37' 24''$, $C = 69^\circ 17'$ iar înălţimea vârfului A egală cu 14,03 m. Să se afle laturile triunghiului şi raza cercului înscris şi a cercului circumscris.

R. Se duce înălţimea $AD = 14,03$ m. Din triunghiurile dreptunghice ADC, ABD se calculează $AC = 15$ m, $AB = 22$ m.

$$BC = BD + DC = AD(\cot g B + \cot g C) = AD\frac{\sin 108^\circ 54' 24''}{\sin 69^\circ 17' \sin 39^\circ 37' 24''},$$

$$BC = 22.24 \text{ m}.$$

Aria este $S = \frac{BC.AD}{2} = \frac{\overline{AD}^2}{2}\frac{\sin 71^\circ 5' 36''}{\sin 69^\circ 17' \sin 39^\circ 37' 24''}$, $S = 156,12 \text{m}^2$.

Raza cercului înscris [N,58, (1)]

$$r = \frac{a \sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}}{\cos\frac{A}{2}} = AD\frac{\sin\frac{A}{2}}{2\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}}, \quad r = [illegible],26\text{m}; \quad R = \frac{a}{2\sin A}, \quad R = 11,76\text{m}.$$

2. Cunoscând perimetrul $2p = 24$ m, unghiurile $B = 38^\circ 36'$, $C = 45^\circ 28'$, să se afle raza cercului înscris, raza cercului circumscris, aria triunghiului şi laturile.

R. 1°. Pentru raza cercului înscris, avem [No 58, (1)]

$$r = \frac{a\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}}{\cos\frac{A}{2}}, \quad r\cos\frac{A}{2} = a\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2},$$

şi de unde, înmulţind cu $2\sin\frac{A}{2}$, avem

$$2r\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2} = 2a\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}, \quad r\sin A = 2a\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2},$$

şi analog,

---

[1] Nu face parte din program.

$$r\sin B=2b\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2},\quad r\sin C=2c\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}.$$

Să adunăm aceste relaţiuni şi avem

$$r(\sin A+\sin B+\sin C)=4p\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}.$$

Dar se ştie (No 48, II) că $A+B+C=180^0$ şi

$$\sin A+\sin B+\sin C=4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}.$$

Înlocuind în relaţia precedentă, obţinem

(10) $$r=\frac{4p\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}}{4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}}=p\,\mathrm{tg}\frac{A}{2}\,\mathrm{tg}\frac{B}{2}\,\mathrm{tg}\frac{C}{2}.$$

În cazul numeric dat, se găseşte $r=2{,}225$.

2⁰. Pentru raza cercului circumscris, considerăm relaţiile

$$\frac{a}{\sin A}=2R,\quad a=2R\sin A,\quad b=2R\sin B,\quad c=2R\sin C.$$

Adunându-le, avem

$$a+b+c=2R(\sin A+\sin B+\sin C),$$

unde, înlocuind pe $\sin A+\sin B+\sin C$, obţinem

$$R=\frac{a+b+c}{2(\sin A+\sin B+\sin C)}=\frac{2p}{8\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}},$$

(11) $$R=\frac{p}{4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}}.$$

În cazul numeric, se află $R=4{,}693$ m.

3⁰. Împărţind relaţiile (10) şi (11), rezultă

$$\frac{r}{R}=\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2},\quad r=4R\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}.$$

4⁰. Laturile le obţinem astfel. Avem

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C},\quad \frac{a}{\sin A}=\frac{a+b+c}{\sin A+\sin B+\sin C},$$

de unde

$$a=\frac{2p\sin A}{\sin A+\sin B+\sin C}=\frac{2p\,2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}}{4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}},$$

(12) $$a=\frac{p\sin\frac{A}{2}}{\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}}.$$

Se găseşte pentru laturi, 8,57 m; 8,738 m; 6,69 m

5⁰. Pentru aria S procedăm astfel. Ştim că

$$S=\frac{a^2\sin B\sin C}{\sin A},$$

unde înlocuind pe a cu formula (12), avem

$$S=\frac{\frac{p^2\sin^2\frac{A}{2}}{\cos^2\frac{B}{2}\cos^2\frac{C}{2}}\sin B\sin C}{\sin A}=\frac{p^2\sin^2\frac{A}{2}\,2\sin\frac{B}{2}\cos\frac{B}{2}\,2\sin\frac{C}{2}\cos\frac{C}{2}}{\cos^2\frac{B}{2}\cos^2\frac{C}{2}\,2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}}$$

$$S=p^2\operatorname{tg}\frac{A}{2}\operatorname{tg}\frac{B}{2}\operatorname{tg}\frac{C}{2}.$$

În cazul numeric, $S=26{,}694\ m^2$.

3. Laturile unui triunghi fiind $a=145$ m, $b=25$ m, $c=150$ m, să se calculeze aria, raza cercului înscris și a cercului circumscris.

R. $S=1800\ m^2$; $r=11{,}25$ m; $R=75{,}52$ m; $A=73^\circ44'23''$; $B=9^\circ31'39''$; $C=96^\circ43'58''$.

4. Perimetrul unui triunghi este de 406 m, o latură de 195 m și unghiul opus acestei laturi este $112^\circ37'12''$. Să se afle razele cercului înscris, circumscris, aria și elementele necunoscute ale triunghiului.

R. Din $\frac{a}{\sin A}=2R$, aflăm $R=105{,}62$ m. Cu formula

$$r=(p-a)\operatorname{tg}\frac{A}{2},$$

aflăm $r=12$ m.

Pentru arie procedăm astfel. Știm că

$$2S=bc\sin A,\quad \cos^2\frac{A}{2}=p(p-a).$$

Înlocuind pe bc în prima formulă, avem

$$2S=\frac{p(p-a)}{\cos^2\frac{A}{2}}\sin A=\frac{p(p-a)\,2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}}{\cos^2\frac{A}{2}}$$

$$S=\frac{p(p-a)\sin\frac{A}{2}}{\cos\frac{A}{2}}=p(p-a)\operatorname{tg}\frac{A}{2}.$$

În cazul numeric, $S=2436\ m^2$.

5. Să se afle elementele triunghiului, în care se cunosc $B=68^\circ46'$, $C=51^\circ24'$ și diferența segmentelor, $CD-DB=56$ m, în care înălțimea vârfului A împarte latura BC.

R. Cele două segmente sunt $CD=b\cos C$, $DB=c\cos B$. Însemnăm cu d diferența segmentelor, $CD-DB=d$, avem $d=b\cos C-c\cos B$. Înlocuind pe c cu valoarea sa din $\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$, avem $d=b\frac{\sin(B-C)}{\sin B}$. De unde aflăm pe $b=\frac{d\sin B}{\sin(B-C)}$, $b=174{,}8$; apoi $c=\frac{b\sin C}{\sin B}=\frac{d\sin C}{\sin(B-C)}=146{,}6$ m

Pentru a, aplicăm $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}$, de unde $a=\frac{d\sin A}{\sin(B-C)}=162{,}21$ m. Aria $S=\frac{bc\sin A}{2}$, $S=\frac{d^2\sin A\sin B\sin C}{2\sin^2(B-C)}=11103{,}6\ m^2$. Raza $r=\frac{a\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}}{\cos\frac{A}{2}}=$ 45,95 m. Raza $R=\frac{a}{2\sin A}=93{,}81$ m.

6, Să se arate că între razele cercurilor exînscrise, avem

$$r_a r_b + r_b r_c + r_c r_a = p^2.$$

R. Se observă că $r_a r_b = p(p-c)$.

RELAŢIUNI INTRE ELEMENTELE UNUI TRIUNGHI(1).

62. În afară de relaţiunile stabilite între diferitele elemente ale unui triunghi, se pot găsi nenumărate alte relaţiuni între aceleaşi elemente. Vom expune, ca o recapitulare a materii studiate, câteva din cele mai simple şi cunoscute din relaţiunile între elementele unui triunghi.

1°. *Să se arate că într'un triunghi dreptunghic* ABC ($A=90°$), *avem*

$$\cos^2 B + \cos^2 C = 1, \quad \cos^2 B - \cos^2 C = 1 - 2\sin B \cos C.$$

În adevăr, unghiurile B şi C fiind complimentare, avem

$$\cos^2 B + \cos^2 C = \cos^2 B + \cos^2 (90 - B) = \cos^2 B + \sin^2 B = 1;$$

de asemenea,

$$\cos^2 B - \cos^2 C = \cos^2 B - \sin^2 B = 1 - 2\sin^2 B =$$
$$1 - 2\sin B \sin B = 1 - 2\sin B \cos C.$$

2°. *Să se arate că într'un triunghi dreptunghic avem*

$$\operatorname{cotg}\frac{B}{2} = \frac{a+c}{b}.$$

În adevăr, avem

$$\frac{c+a}{b} = \frac{a\cos B + a}{a\sin B} = \frac{1+\cos B}{\sin B} = \frac{2\cos^2\frac{B}{2}}{2\sin\frac{B}{2}\cos\frac{B}{2}} = \operatorname{cotg}\frac{B}{2}.$$

3°. *În orice triunghi dreptunghic avem*

$$\operatorname{tg}^2\frac{B}{2} + \operatorname{tg}^2\frac{C}{2} = \frac{2(a^2-bc)}{(a+b)\,(a+c)}.$$

În adevăr,

$$\operatorname{tg}^2\frac{B}{2} = \frac{1-\cos B}{1+\cos B} = \frac{a-c}{a+c}, \quad \operatorname{tg}^2\frac{C}{2} = \frac{a-b}{a+b},$$

deci

$$E = \operatorname{tg}^2\frac{B}{2} + \operatorname{tg}^2\frac{C}{2} = \frac{a-c}{a+c} + \frac{a-b}{a+b} = \frac{(a-c)\,(a+b) + (a-b)\,(a+c)}{(a+c)\,(a+b)}$$

$$E = \frac{2(a^2-bc)}{(a+c)\,(a+b)}.$$

(1) Nu face parte din program.

4°. *În orice triunghi dreptunghic avem*

$$\cos(2C-B)=\frac{c}{a^3}(3a^2-4c^2).$$

În adevăr,

$$\cos(2C-B)=\cos\left(\frac{\pi}{2}-3C\right)=\sin 3C=\sin C(3-4\sin^2 C).$$

Dar $\sin C=\frac{c}{a}$, deci

$$\cos(2C-B)=\frac{c}{a}\left(3-4\frac{c^2}{a^2}\right)=\frac{c}{a^3}(3a^2-4c^2).$$

5°. *Se dau catetele unui triunghi dreptunghic,* $b=m^2-n^2$, $c=2mn$. *Să se calculeze* $\operatorname{tg}\frac{B}{2}$, $\operatorname{tg}\frac{C}{2}$ *în funcție de* m *și* n. Avem

$$\operatorname{tg}\frac{B}{2}=\sqrt{\frac{1-\cos B}{1+\cos B}}=\sqrt{\frac{1-\frac{c}{a}}{1+\frac{c}{a}}}=\sqrt{\frac{a-c}{a+c}}=\sqrt{\frac{a^2-c^2}{(a+c)^2}}=\frac{b}{a+c}.$$

Dar $a^2=b^2+c^2=(m^2-n^2)^2+4m^2n^2=(m^2+n^2)^2$; deci $a=m^2+n^2$.

Deci

$$\operatorname{tg}\frac{B}{2}=\frac{m^2-n^2}{m^2+n^2+2mn}=\frac{(m-n)(m+n)}{(m+n)^2}=\frac{m-n}{m+n}.$$

În mod analog

$$\operatorname{tg}\frac{C}{2}=\sqrt{\frac{1-\cos C}{1+\cos C}}=\sqrt{\frac{1-\frac{b}{a}}{1+\frac{b}{a}}}=\sqrt{\frac{a-b}{a+b}}=\sqrt{\frac{a^2-b^2}{(a+b)^2}}=\frac{b}{a+b},$$

$$\operatorname{tg}\frac{C}{2}=\frac{2mn}{(m^2+n^2)+(m^2-n^2)}=\frac{n}{m}.$$

6°. *Să se arate că un triunghi este dreptunghic, dacă între unghiurile sale avem relațiile*

$$\text{I. } \sin C=\cos A+\cos B,\quad \text{II. } \sin A=\frac{\sin B+\sin C}{\cos B+\cos C},$$

$$\text{III. } \operatorname{tg}B=\frac{\cos(C-B)}{\sin A+\sin(C-B)}.$$

I. Pentru prima, avem

$$2\sin\frac{C}{2}\cos\frac{C}{2} = 2\cos\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2},$$

$$2\sin\frac{C}{2}\cos\frac{C}{2} = 2\sin\frac{C}{2}\cos\frac{A-B}{2},$$

de unde simplificând $\sin\frac{C}{2} \neq 0$, rămâne

$$\cos\frac{C}{2} = \cos\frac{A-B}{2};$$

de unde

$$\frac{C}{2} = \pm\frac{A-B}{2}, \quad C = \pm(A-B),$$

$$\pi-(A+B) = \pm(A-B).$$

Deci,
$$\pi-(A+B) = A-B, \quad A = \frac{\pi}{2};$$

sau
$$\pi-(A+B) = -(A-B), \quad B = \frac{\pi}{2}.$$

Triunghiul este dreptunghic căci are, sau unghiul A, sau unghiul B de 90°.

II. Din a doua deducem

$$\sin A = \frac{2\sin\frac{B+C}{2}\cos\frac{B-C}{2}}{2\cos\frac{B+C}{2}\cos\frac{B-C}{2}} = \operatorname{tg}\frac{B+C}{2} = \operatorname{cotg}\frac{A}{2}.$$

De unde $2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2} = \frac{\cos\frac{A}{2}}{\sin\frac{A}{2}}$, $\sin^2\frac{A}{2} = \frac{1}{2}$, $\sin\frac{A}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$,

$\frac{A}{2} = 45^\circ$, $A = 90^\circ$.

III. Din a treia, avem

$$\frac{\sin B}{\cos B} = \frac{\cos(C-B)}{\sin A + \sin(C-B)},$$

$$\sin B\sin A = \cos B\cos(C-B) - \sin B\sin(C-B),$$
$$\sin B\sin A = \cos(B+C-B), \quad \sin B\sin A = \cos C,$$
$$\sin B\sin A = \cos[\pi-(A+B)] \quad \sin B\sin A = -\cos(A+B),$$
$$\sin B\sin A = -\cos A\cos B + \sin A\sin B, \quad \cos A\cos B = 0.$$

de unde rezultă $\cos A = 0$, sau $A = 90^\circ$, sau $B = 90^\circ$.

7°. *Să se arate că un triunghi* ABC *este isoscel când avem* $a = 2\, b\cos C$.

În adevăr, înlocuind laturile a și b prin cantități proporționale sinA și sinB, avem

$$\sin A = 2 \sin B \cos C.$$

Dar $A = 180^0 - (B + C)$. Deci

$$\sin(B + C) = 2 \sin B \cos C,$$

de unde

$$\sin B \cos C + \sin C \cos B = 2 \sin B \cos C,$$

$$\sin C \cos B - \sin B \cos C = 0,\ \sin(C-B) = 0,\ C - B = 0,\ C = B.$$

8^0. *Să se arate că într'un triunghi oarecare, avem*

$$\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C = 1 - 2 \cos A \cos B \cos C.$$

Avem

$$E = \cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C - 1 + 2 \cos A \cos B \cos C,$$

$$E = \cos^2 A + \cos^2 B \cos^2 C - \cos^2 B \cos^2 C + \cos^2 B + \cos^2 C - 1 + 2 \cos A \cos B \cos C,$$

$$E = (\cos A + \cos B \cos C)^2 - \cos^2 B \cos^2 C + \cos^2 B + \cos^2 C - 1,$$

$$E = (\cos A + \cos B \cos C)^2 + \cos^2 B (1 - \cos^2 C) - (1 - \cos^2 C),$$

$$E = (\cos A + \cos B \cos C)^2 - (1 - \cos^2 B)(1 - \cos^2 C),$$

$$E = (\cos A + \cos B \cos C)^2 - \sin^2 B \sin^2 C,$$

$$E = (\cos A + \cos B \cos C + \sin B \sin C)(\cos A + \cos B \cos C - \sin B \sin C),$$

$$E = [\cos A + \cos(B - C)]\,[\cos A + \cos(B + C)],$$

$$E = 2\cos\frac{A + B - C}{2}\cos\frac{A - B + C}{2}\, 2\cos\frac{A + B + C}{2}\cos\frac{A - B - C}{2}$$

Dar $A + B + C = \pi$, deci $\frac{A + B + C}{2} = 90^0$, $\cos\frac{A + B + C}{2} = 0$

$E = 0$, astfel că relația este stabilită.

9^0. *Să se arate că într'un triunghi oarecare avem*

$$\operatorname{cotg}\frac{A}{2} + \operatorname{cotg}\frac{B}{2} + \operatorname{cotg}\frac{C}{2} = \operatorname{cotg}\frac{A}{2}\operatorname{cotg}\frac{B}{2}\operatorname{cotg}\frac{C}{2}.$$

Avem

$$E = \operatorname{cotg}\frac{A}{2} + \operatorname{cotg}\frac{B}{2} + \operatorname{cotg}\frac{C}{2} = \frac{\sin\frac{A+B}{2}}{\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}} + \frac{\cos\frac{C}{2}}{\sin\frac{C}{2}} =$$

$$\frac{\cos\frac{C}{2}}{\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}} + \frac{\cos\frac{C}{2}}{\sin\frac{C}{2}},$$

$$E=\frac{\cos\frac{C}{2}}{\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}}\left(\sin\frac{C}{2}+\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\right).$$

Se înlocueşte $\sin\frac{C}{2}$ prin $\cos\frac{A+B}{2}$, dezvoltând, făcând reducerile, se găseşte $E=\operatorname{cotg}\frac{A}{2}\operatorname{cotg}\frac{B}{2}\operatorname{cotg}\frac{C}{2}$.

10°. *Să se arate că într'un triunghi oarecare, avem*

$$a(b\cos C-c\cos B)=b^2-c^2.$$

Înlocuim cos C şi cos B în funcţiunile de laturi, date de formulele

$$c^2=a^2+b^2-2ab\cos C,\ \cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab},$$

$$\cos B=\frac{c^2+a^2-b^2}{2ac}.$$

Făcând înlocuirile în membrul întâi şi apoi reducerile, obţinem (b^2-c^2).

11°. *În orice triunghi, avem*

$$b\cos B+c\cos C=a\cos(B-C).$$

Ştim că $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$.

De unde

$$b=\frac{a\sin B}{\sin A},\quad c=\frac{a\sin C}{\sin A},$$

pe care înlocuindu-le în primul membru, avem

$$E=\frac{a\sin B\cos B}{\sin A}+\frac{a\sin C\cos C}{\sin A}=\frac{a}{2\sin A}(\sin 2B+\sin 2C),$$

$$E=\frac{a}{\sin A}\sin\frac{2B+2C}{2}\cos\frac{2B-2C}{2}=\frac{a\sin(B+C)\cos(B-C)}{\sin A}$$

$$E=a\cos(B-C).$$

12°. *În orice triunghi, avem*

$$1-\operatorname{tg}\frac{1}{2}B\operatorname{tg}\frac{1}{2}C=\frac{2a}{a+b+c}.$$

Înlocuind pe $\operatorname{tg}\frac{B}{2}$ şi $\operatorname{tg}\frac{C}{2}$, avem

$$1-\operatorname{tg}\frac{B}{2}\operatorname{tg}\frac{C}{2}=1-\sqrt{\frac{(p-a)(p-c)}{p(p-b)}}\sqrt{\frac{(p-a)(p-b)}{p(p-c)}}=$$

$$1-\frac{p-a}{p}=\frac{p-p+a}{p}=\frac{a}{p}.$$

13⁰. *În orice triunghi, avem*

$$a\sin(B-C)+b\sin(C-A)+c\sin(A-B)=0.$$

Înlocuim pe a cu $2R\sin A$, căci se știe

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R.$$

Însemnând cu E primul membru, avem

$$E=R[2\sin A\sin(B-C)+2\sin B\sin(C-A)+2\sin C\sin(A-B)],$$

$$E=R\{\cos[A-(B-C)]-\cos[A+(B-C)]+\cos[B-(C-A)]-$$
$$\cos[B+(C-A)]+\cos[C-(A-B)]-\cos[C+(A-B)]\}$$

$$E=R[\cos(A-B+C)-\cos(A+B-C)+\cos(B-C+A)-$$
$$\cos(B+C-A)+\cos(C-A+B)-\cos(C+A-B)]=0.$$

14⁰. *În orice triunghi, avem*

$$\frac{b-c}{\operatorname{tg}\frac{A}{2}}+\frac{c-a}{\operatorname{tg}\frac{B}{2}}+\frac{a-b}{\operatorname{tg}\frac{C}{2}}=0.$$

Știm că $r_a=p\operatorname{tg}\frac{A}{2}$, de unde

$$\frac{1}{\operatorname{tg}\frac{A}{2}}=\frac{p}{r_a}.$$

Înlocuind, primul membru devine

$$E=\frac{p(b-c)}{r_a}+\frac{p(c-a)}{r_b}+\frac{p(a-b)}{r_c}.$$

Dar, $S=r_a(p-a)$, de unde $r_a=\frac{S}{p-a}$. Deci

$$E=\frac{p(b-c)(p-a)}{S}+\frac{p(c-a)(p-b)}{S}+\frac{p(a-b)(p-c)}{S}=0.$$

15⁰. *În orice triunghi, avem*

$$2S=\frac{a^2}{\operatorname{cotg}B+\operatorname{cotg}C}=\frac{b^2}{\operatorname{cotg}C+\operatorname{cotg}A}=\frac{c^2}{\operatorname{cotg}A+\operatorname{cotg}B}.$$

Se va înlocui $\operatorname{cotg}B+\operatorname{cotg}C=\frac{\sin(B+C)}{\sin B\sin C}=\frac{\sin A}{\sin B\sin C}$,

şi se obţine formula cunoscută

$$2S=\frac{a^2\sin B\sin C}{\sin A}.$$

16⁰. *In orice triunghi, avem*

$$a^2 \operatorname{cotg} A + b^2 \operatorname{cotg} B + c^2 \operatorname{cotg} C = 4S.$$

Înlocuim $\operatorname{cotg} A = \dfrac{\cos A}{\sin A}$, apoi $\dfrac{a}{\sin A} = 2R$ şi avem

$$E = 2R(a\cos A + b\cos B + c\cos C) =$$

$$2R\left(a\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc} + b\frac{a^2-b^2+c^2}{2ca} + c\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}\right),$$

$$E = \frac{R}{abc}\left[a^2(b^2+c^2-a^2)+b^2(a^2-b^2+c^2)+c^2(a^2+b^2-c^2)\right],$$

$$E = \frac{R}{abc}\left(2a^2b^2+2b^2c^2+2c^2a^2-a^4-b^4-c^4\right).$$

Dar

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \frac{1}{4}\sqrt{2a^2b^2+2b^2c^2+2b^2a^2-a^4-b^4-c^4},$$

de unde

$$E = \frac{\frac{abc}{4S}}{abc}\,16S^2 = 4S,$$

17⁰. *In orice triunghi, avem*

$$2R + 2r = a\operatorname{cotg}A + b\operatorname{cotg}B + c\operatorname{cotg}C.$$

Însemnând cu E membrul a doilea, avem

$$E = \frac{a}{\sin A}\cos A + \frac{b}{\sin B}\cos B + \frac{c}{\sin C}\cos C =$$

$$2R(\cos A + \cos B + \cos C).$$

Dar

$$\cos A + \cos B + \cos C = 1 + 4\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$$

Deci

$$E = 2R\left(1 + 4\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\right),$$

$$E = 2R\left[1 + 4\sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{bc}}\sqrt{\frac{(p-c)(p-a)}{ca}}\sqrt{\frac{(p-a)(p-b)}{ab}}\right],$$

$$E = 2R\left[1 + \frac{4(p-a)(p-b)(p-c)}{abc}\right] = 2R\left[1 + \frac{4S^2}{abcp}\right],$$

$$E = 2R\left(1 + \frac{4S}{abc}\cdot\frac{S}{p}\right) = 2R\left(1 + \frac{r}{R}\right) = 2R + 2r.$$

18⁰. *În triunghiul dreptunghic* ABC (A = 90⁰), *avem*

$$rr_a = r_b r_c.$$

Avem

$$rr_a = \sqrt{\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p}}\sqrt{\frac{p(p-b)(p-c)}{p-a}} = (p-b)(p-c),$$

$$rr_a = \frac{a-b+c}{2}\,\frac{a+b-c}{2} = \frac{[a-(b-c)][a+(b-c)]}{4} =$$

$$= \frac{a^2-(b-c)^2}{4}$$

$$rr_a = \frac{a^2-b^2-c^2+2bc}{4} = \frac{b^2+c^2-b^2-c^2+2bc}{4} = \frac{bc}{2} = \mathrm{S}.$$

De asemenea

$$r_b r_c = \sqrt{\frac{p(p-a)(p-c)}{p-b}}\sqrt{\frac{p(a-a)(p-b)}{p\ \ c}} = p(p-a),$$

$$r_b r_c = \frac{(a+b+c)(-a+b+c)}{4} = \frac{(b+c)^2-a^2}{4} =$$

$$\frac{b^2+c^2+2bc-(b^2+c^2)}{4},$$

$$r_b r_c = \frac{bc}{2} = \mathrm{S}.$$

Deci

$$rr_a = r_b r_c.$$

19⁰. *In triunghiul dreptunghic* ABC (A = 90⁰), avem

$$r_a - r = r_b + r_c.$$

În adevăr, ţinând seamă că $a^2 = b^2+c^2$, $2\mathrm{S} = bc$, avem

$$r_a - r = \frac{\mathrm{S}}{p-a} - \frac{\mathrm{S}}{p} = \mathrm{S}\frac{p-(p-a)}{p(p\ \ a)} = \frac{\mathrm{S}a}{p(p-a)} = a.$$

Apoi $r_b + r_c = \mathrm{S}\left(\frac{1}{p-b} + \frac{1}{p-c}\right) = \mathrm{S}\frac{a}{(p-b)(p-c)} = a.$

Deci

$$r_a - r = r_b + r_c.$$

LINIILE TRIGONOMETRICE ALE UNGHIURILOR OARECARE.

Am studiat până acum liniile trigonometrice ale unghiurilor mai mici ca 180°. Cum în aplicațiile Trigonometriei intervin și unghiuri mai mari ca 180°, vom studia liniile trigonometrice ale unghiurilor din cadranul al treilea, adică cuprinse între 180° și 270°, apoi ale unghiurilor din cadranul al patrulea, cuprinse între 270° și 360°. În fine, vom arăta cum liniile trigonometrice ale oricărui unghi se reduc la acelea ale unghiurilor mai mici ca 45°.

63. **Liniile trigonometrice ale arcelor din cadranul al treilea și al patrulea.** Să considerăm în cercul trigonometric (Fig. 29) unghiul AOC în cadranul al treilea, căruia îi corespunde arcul ABA'C=a, și unghiul AOD în cadranul al patrulea, cărui îi corespunde arcul ABA'B'D $=b$, a și b fiind numărul de grade.

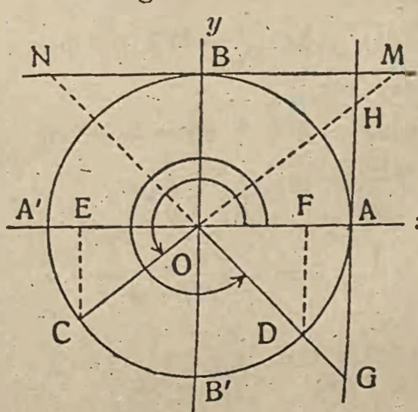

Fig. 29.

Să construim liniile trigonometrice ale acestor unghiuri, ca și pentru cele mai mici ca 180°. Ducem perpendicularele CE, DF pe diametrul AA', și prelungim razele OC și OD până tae tangentele în A și B la cerc.

Avem

$\sin a = CE$, $\cos a = OE$, $\operatorname{tg} a = AH$, $\operatorname{cotg} a = BM$, $\sec a = OH$, $\operatorname{cosec} a = OM$, $\sin b = FD$, $\cos b = OF$, $\operatorname{tg} b = AG$, $\operatorname{cotg} b = ON$, $\sec b = OG$, $\operatorname{cosec} b = BN$.

Sinusurile în cadranele al treilea și al patrulea măsurându-se pe diametrul BB' (Fig. 29), de la O către B', sunt negative.

Cosinusul în cadranul al treilea se măsoară de la O către

A', este negativ; în cadranul al patrulea, de la O către A, este pozitiv.

Tangenta în cadranul al treilea, se măsoară pe tangenta geometrică în A, deasupra diametrului AA', este pozitivă, în cadranul al patrulea, de la A către G, dedesubtul diametrului AA', este negativă. Ceea ce trebuia, căci $tga=\frac{\sin a}{\cos a}$, şi cum în cadranul al treilea, $\sin a<0$, $\cos a<0$, raportul lor, $tga>0$; iar în cadranul al patrulea, $\sin b<0$, $\cos b>0$, deci raportul lor $tgb<0$.

Cotangenta în cadranul al treilea, se măsoară pe tangenta în B la cerc, la dreapta lui B, este pozitivă; în cadranul al patrulea, la stânga lui B, este negativă. Trebuia să fie astfel, căci $\cot ga=\frac{\cos a}{\sin a}$, şi în cadranul al treilea, raportul $\cot ga>0$, iar în al patrulea cadran, $\cot gb=\frac{\cos b}{\sin b}<0$.

Secanta în cadranul al treilea, se obţine prelungind raza OC în sens contrar cu extremitatea C a arcului, este negativă; în cadranul al patrulea, se prelungeşte în acelaş ca extremitatea D a arcului până tae în G tangenta în A la cerc, este pozitivă. Aşa trebuia, căci $\operatorname{cosec}a=\frac{1}{\cos a}$, şi $\cos a<0$ în cadranul al treilea, deci $\frac{1}{\cos a}<0$, iar în cadranul al patrulea $\cos b>0$, deci $\frac{1}{\cos b}>0$.

Cosecanta în cadranul al treilea se obţine prelungind raza OC în sens contrar cu extremitatea C până tae în M tangenta în B la cerc, este deci negativă; în cadranul al patrulea, în sens contrar cu extremitatea D a arcului, este negativă. Se mai vede şi din cauză că $\operatorname{cosec}a=\frac{1}{\sin a}$, şi $\sin a<0$, în cadranele al treilea şi al patrulea.

Observare. Din cele expuse se vede că *relaţiunile fundamentale ale Trigonometriei,*

$$\sin^2 a+\cos^2 a=1,\ tga=\frac{\sin a}{\cos a},\ \cot ga=\frac{\cos a}{\sin a},$$

sunt adevărate şi pentru unghiurile din cadranele al treilea şi al patrulea, căci ele au loc şi în valoare absolută şi în semn.

64. **Proecţia unui vector pe o axă.** Un vector AB

este un segment de dreaptă, care are o origină A, o extremitate B, o mărime egală cu măsura segmentului AB şi un sens de la A la B. Un vector se notează astfel $\overrightarrow{AB}$, sau $\overline{AB}$.

Unghiul unui vector OC (Fig. 29) cu o axă OA, este unghiul cu care trebue învârtită în sens direct axa OA până se aşterne peste OC.

Considerând figurile 13 şi 29, se vede că pentru toate valorile unghiului a, avem că raportul dintre proecţia OE (Fig. 29) a vectorului OC pe AA′ şi acest vector OC, este egal cu $\cos a$. Deci $OE = OC \cos a$, a dică *proecţia unui vector pe o axă este egală cu produsul acelui vector prin cosinusul unghiului format de vector cu axa de proecţie.*

65. **Variaţia liniilor trigonometrice.** Presupunând că se consideră arcele cuprinse între 0^0 şi 360^0, semnele liniilor trigonometrice în cele patru cadrane se văd pe tabloul

a	$\sin a$	$\cos a$	$\mathrm{tg} a$	$\mathrm{cotg} a$	$\sec a$	$\mathrm{cosec} a$
Cadr. I	+	+	+	+	+	+
II	+	—	—	—	—	+
III	—	—	+	+	—	—
IV	—	+	—	—	+	—

Pentru studiul variaţii liniilor trigometrice să însemnăm cu A, A′ şi B, B′ intersecţiile cercului trigonometric cu doi diametrii perpendiculari Ox şi Oy (Fig. 30). P fiind un punct al cercului, să însemnăm cu Q proecţia sa pe Ox şi cu T, S intersecţiile dreptei OP cu tangentele în A şi B la cerc. Însemnând cu a unghiul OAP, conform definiţii linilor trigonometrice, avem

$$QP = \sin a, OQ = \cos a, AT = \mathrm{tg} a, \ OT = \sec a, BS = \mathrm{cotg} a.$$
$$OS = \mathrm{cosec} a.$$

Se vede că $\cos a$ şi $\sin a$ sunt coordonate punctului P al cercului faţă de axele Ox, Oy.

1°. *Variația liniilor trigonometrice pentru cazul unghiurilor din primul cadran* este imediată și se poate vedea că, dacă a crește de la 0° la 90°, sin$a$ (Fig. 30) crește de la 0 la 1; cos$a$ = OQ descrește de la 1 la 0; tg$a$ = AT crește de la 0 la ∞, când OP este paralelă cu tangenta în A; cotg$a$ = BS descrește de la ∞, când OP este paralelă cu tangenta în B, până la 0 când P vine în B; sec$a$ = $\frac{1}{\cos a}$ crește de la 1, când T vine în A, până la ∞, când OP este paralelă cu AT; cosec$a$ = $\frac{1}{\sin a}$ descrește de la ∞, când P vine în A, până la 1 când P vine în B.

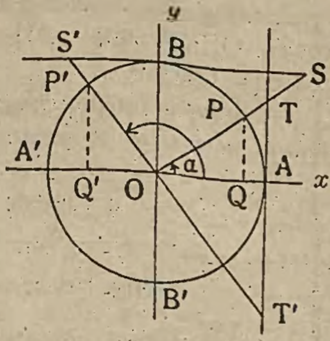

Fig. 30.

Avem deci tabloul

a	crește de la 0° la 90°				
sin$a$	crește	de la	0	la	1
cos$a$	descrește	„	1	„	0
tg$a$	crește	„	0	„	∞
cotg$a$	descrește	„	∞	„	0
sec$a$	crește	„	1	„	∞
cosec$a$	descrește	„	∞	„	1

2°. Când punctul P′ vine *în cadranul al doilea* (Fig. 30), unghiul a este cuprins între 90° și 180°. Avem

$$\sin a = Q'P' > 0, \quad \cos a = OQ' < 0, \quad \mathrm{tg}\, a = AT' < 0,$$
$$\mathrm{cotg}\, a = BS' < 0, \quad \sec a = OT' < 0, \quad \mathrm{cosec}\, a = OS' > 0.$$

Variația liniilor trigonometrice pentru unghiurile din cadranul al doilea, cuprinse între 90° și 180°, se urmărește ușor pe tabloul

a	crește de la 90° la 180°				
sin$a$	descrește	de la	1	la	0
cos$a$	descrește	„	0	„	−1
tg$a$	crește	„	$-\infty$	„	0
cotg$a$	descrește	„	0	„	$-\infty$
sec$a$	crește	„	$-\infty$	„	−1
cosec$a$	crește	„	1	„	∞

3⁰. Când se consideră *unghiuri* AOC din *cadranul al treilea* (Fig. 29), cuprinse între 180^0 şi 270^0, avem $\sin a = EC < 0$, $\cos a = OE < 0$, $\operatorname{tg} a = AH > 0$, $\operatorname{cotg} a = BM > 0$, $\sec a = OH < 0$, $\operatorname{cosec} a = OM < 0$.

Variaţia liniilor trigonometrice ale unghiurilor din cadranul al treilea se poate urmări pe tabloul

a	creşte	de la 180^0 la 270^0
$\sin a$	descreşte	de la 0 la -1
$\cos a$	creşte	„ -1 „ 0
$\operatorname{tg} a$	creşte	„ 0 „ ∞
$\operatorname{cotg} a$	descreşte	„ ∞ „ 0
$\sec a$	descreşte	„ -1 „ $-\infty$
$\operatorname{cosec} a$	creşte	„ $-\infty$ „ -1

4⁰. Pentru unghiuri AOD din *cadranul al patrulea* (Fig. 29), cuprinse între 270^0 şi 360^0, avem

$$\sin a = FD < 0,\ \cos a = OF > 0,\ \operatorname{tg} a = AG < 0,\ \operatorname{cotg} a = BN < 0,$$

$$\sec a = OG > 0,\ \operatorname{cosec} a = \frac{1}{\sin a} = ON < 0.$$

Variaţia liniilor trigonometrice ale unghiurilor din cadranul al patrulea se vede din tabloul

a	creşte	de la 270^0 la 360^0
$\sin a$	creşte	de la -1 la 0
$\cos a$	creşte	„ 0 „ 1
$\operatorname{tg} a$	creşte	„ $-\infty$ „ 0
$\operatorname{cotg} a$	descreşte	„ 0 „ $-\infty$
$\sec a$	descreşte	„ ∞ „ 1
$\operatorname{cosec} a$	descreşte	„ -1 „ $-\infty$

Vedem deci, că *sinusul unui unghi ia valori numai între* -1 *şi* $+1$; *cosinusul, de asemenea între* -1 *şi* $+1$; *tangenta şi cotangenta, orice valori, dela* $-\infty$ *la* ∞; *secanta şi cosecanta numai valori între* $-\infty$ *şi* -1 *şi între* 1 *şi* ∞.

Tabloul general al variaţiii este următorul

a	0 . . 90°	90° . 180°	180° . 270°	270° . 360°
sin$a$	0 creşte 1	1 descr. 0	0 descr. —1	—1 creşte 0
cos$a$	1 descr. 0	0 descr. —1	—1 creşte 0	0 creşte 1
tg$a$	0 creşte ∞	—∞ creşte 0	0 creşte ∞	—∞ creşte 0
cotg$a$	∞ descr. 0	0 descr. —∞	∞ descr. 0	0 descr. —∞
sec$a$	1 creşte ∞	—∞ creşte —1	—1 descr. —∞	∞ descr. 1
cosec$a$	∞ descr. 1	1 creşte ∞	—∞ creşte —1	—1 descr. —∞

66. **Reprezentarea grafică a variaţii liniilor trigonometrice.** Să reprezentăm în raport cu două axe de coordonate Ox şi Oy variaţia funcţiunilor trigonometrice. Pentru aceasta vom considera ca abscise măsurile unghiurilor exprimate în

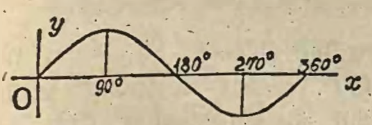

Fig. 31. — *Sinusoida.*

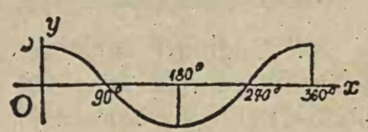

Fig. 32. — *Cosinusoida.*

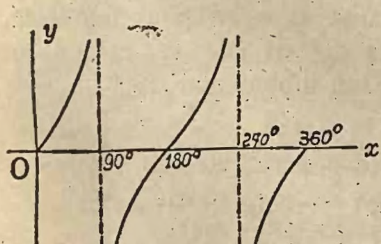

Fig 33. — *Tangentoida.*

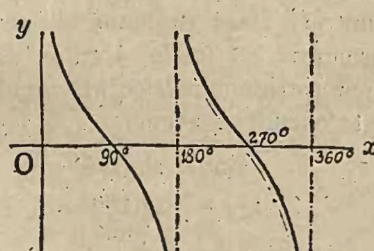

Fig. 34 — *Cotangentoida*

radiani, iar ca ordonate valorile funcţiunilor trigonometrice corespunzătoare. Se obţine astfel la fiecare valoare a unghiului un punct în planul axelor Ox, Oy. Unind aceste puncte cu o trăsătură continuă, se obţine o curbă care este reprezentarea grafică a variaţiunii funcţiunei trigonometrice considerate.

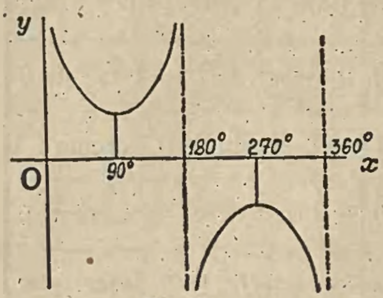

Fig. 35
Curba variaţii cosecantei.

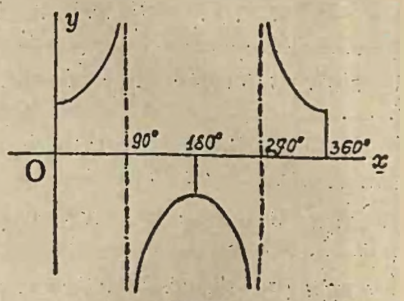

Fig. 36.
Curba variaţii secantei.

Operând astfel, să obţin curbele care reprezintă variaţiile funcţiunilor trigonometrice studiate. Pentru tangentă şi cotangentă e destul a figura curba reprezentativă numai în interiorul (0,180°), iar pentru celelalte funcţiuni trigonometrice, în intervalul (0,360°), căci vom vedea că funcţiunile fiind periodice, în toate celelalte intervale curba se reproduce.

REDUCEREA LINIILOR TRIGONOMETRICE ALE UNGHIURILOR OARECARE LA LINIILE TRIGONOMETRICE ALE UNGHIURILOR ASCUŢITE.

67. **Unghiuri cuprinse între 90° şi 180°.** Fiind dat un unghiu a cuprins între 90° şi 180°, ceeace se poate scrie $90^0<a<180^0$, să considerăm unghiul său suplimentar, 180^0-a. Acesta este mai mic de cât 90°, şi cum ştim că liniile trigonometrice a două unghiuri suplimentare sunt egale şi de semn contrar, afară de sinus şi cosecantă care au şi acelaş semn, urmează că liniile arcului dat a se pot calcula cu ajutorul liniilor trigonometrice ale arcului său suplimentar, 180^0-a, care este ascuţit şi avem

$$\sin a = \sin(180^0-a),\quad \cos a = -\cos(180^0-a),$$

$$\operatorname{tg} a = -\operatorname{tg}(180^0-a),\quad \operatorname{cotg} a = -\operatorname{cotg}(180^0-a).$$

De ex., $\sin 120^0 = \sin 60 = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\cos 130 = -\cos 50^0$, $\operatorname{tg} 140^0 = -\operatorname{tg} 40^0$, $\operatorname{cotg} 150^0 = -\operatorname{cotg} 30^0$, $\sec 105^0 = -\sec 75$, $\operatorname{cosec} 100^0 = \operatorname{cosec} 80^0$.

68. **Unghiuri cuprinse între 180° şi 270°. Unghiuri care diferă cu 180°.** Să considerăm un unghi AOC (Fig. 37.) în

cadranul al treilea, cuprins între 180° şi 270° şi să ducem liniile lui trigonometrice. Însemnând cu M punctul unde raza OC tae din nou cercul, se vede că însemnând cu a unghiul AOM, atunci unghiul AOC $= 180^0 + a$. Deci unghiurile AOC şi AOM diferă cu 180°.

Se vede că triunghiurile dreptunghice OCD şi OMP sunt egale. Deci PM $=$ CD, şi ţinând seamă de semne, urmează că

$$\sin a = -\sin(180^0 + a).$$

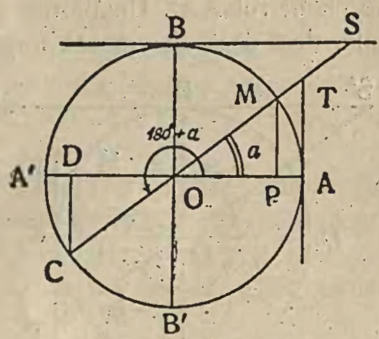

Fig. 37

Tot din egalitatea triunghiurilor, mai rezultă OP $=$ OD, sau luând în considerare semnele, avem

$$\cos a = -\cos(180^0 + a).$$

Apoi AT fiind tangenta ambelor unghiuri AOM şi AOC, rezultă

$$\mathrm{tg}\,a = \mathrm{tg}(180^0 + a).$$

De asemenea, BS este cotangenta aceloraşi unghiuri şi deci

$$\mathrm{cotg}\,a = \mathrm{cotg}(180^0 + a).$$

În fine se vede, ţinând seamă de semne, că

$$\sec a = -\sec(180^0 + a), \quad \mathrm{cosec}\,a = -\mathrm{cosec}(180 + a).$$

Deci, *liniile trigonometrice ale unghiurilor care diferă cu* 180° *sunt egale şi de semne contrare, afară de tangentă şi cotangentă care au şi acelaş semn.*

Se observă că

$$\mathrm{tg}(180^0 + a) = \mathrm{tg}\,a, \quad \mathrm{cotg}(180^0 + a) = \mathrm{cotg}\,a,$$

ceeace probează că mărind unghiul cu 180°, sau π, tangenta şi cotangenta nu se schimbă. Aceasta se mai zice că *tangenta şi cotangenta sunt funcţiuni periodice*, având ca perioadă unghiul 180° sau π (în radiani).

Deci

$$\mathrm{tg}(a + \pi) = \mathrm{tg}\,a, \quad \mathrm{cotg}(a + \pi) = \mathrm{cotg}\,a,$$

$$\mathrm{tg}(a + 2\pi) = \mathrm{tg}(a + \pi) = \mathrm{tg}\,a, \quad \mathrm{cotg}(a + 2\pi) = \mathrm{cotg}\,a,$$

$$\mathrm{tg}(a + n\pi) = \mathrm{tg}\,a, \quad \mathrm{cotg}(a + n\pi) = \mathrm{cotg}\,a,$$

n fiind un număr întreg şi pozitiv (π radiani).

Sau,

$$\mathrm{tg}(a + n.180^0) = \mathrm{tg}\,a, \quad \mathrm{cotg}(a + n.180^0) = \mathrm{cotg}\,a.$$

De ex., $\sin 240^0 = -\sin 60^0 = -\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\cos 210^0 = -\cos 30^0 = -\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\operatorname{tg} 250^0 = \operatorname{tg} 70^0$.

69. **Unghiuri cuprinse între 270⁰ şi 360⁰. Unghiuri a căror sumă este 360⁰.** Să considerăm unghiul AOM′ din cadranul al patrulea (Fig. 38) şi să ducem perpendiculara M′M pe diametrul AA′. Unghiurile ascuţite AOM şi AOM′ sunt egale, deci dacă se notează unghiul $AOM = a$, atunci unghiul din cadranul al patrulea $AOM' = 360^0 - a$.

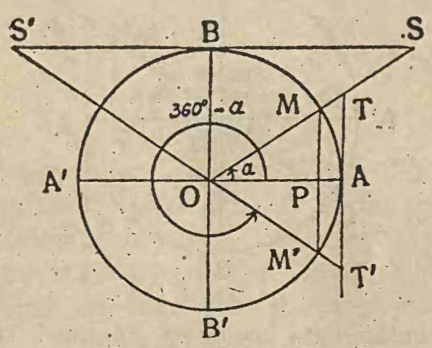

Fig. 38.

Triunghiurile dreptunghice MPO şi M′PO sunt egale, căci au ipotenuzele $OM = OM'$ ca raze şi unghiurile ascuţite $MOA = AOM'$. Deci $MP = PM'$. De asemenea triunghiurile OAT şi OAT′ sunt egale, ca şi OBS, OBS′.

Considerând liniile trigonometrice ale unghiurilor $360^0 - a = AOM'$ şi $a = AOM$, avem

$\sin(360^0 - a) = PM' = -PM = \sin a$, $\cos(360^0 - a) = OP = \cos a$, $\operatorname{tg}(360^0 - a) = AT' = -AT = -\operatorname{tg} a$, $\operatorname{cotg}(360^0 - a) = BS' = -BS = -\operatorname{cotg} a$, $\sec(360^0 - a) = OT' = OT = \sec a$, $\operatorname{cosec}(360^0 - a) = OS' = -OS = -\operatorname{cosec} a$.

Deci liniile trigonometrice ale unghiurilor din cadranul al patrulea se exprimă cu ajutorul celor din cadranul întâi. Sau, *unghiurile care diferă cu 360⁰ sunt egale şi de semne contrarii, afară de cosinus şi secantă care au şi acelaş semn.*

De ex., $\sin 320^0 = -\sin 40$, $\cos 300^0 = \cos 60^0$, $\operatorname{tg} 310^0 = -\operatorname{tg} 50^0$.

70. **Unghiuri care diferă cu 360⁰.** Considerând un unghi α (Fig. 39), unghiul $360^0 + \alpha$ se obţine făcând ocolul odată în jurul lui O şi apoi descriind unghiul α până Ox să aşterne peste OA.

Rezultă deci că liniile trigonometrice ale unghiului $(360^0 + \alpha)$ sunt aceleaşi ca ale unghiului α adică

$$\sin(360^0 + \alpha) = \sin\alpha,$$

. . . .

$$\operatorname{cosec}(360^0 + \alpha) = \operatorname{cosec}\alpha.$$

Deci, dacă mărim unghiul cu 360^0, toate liniile trigonometrice se reproduc, nu se schimbă. Se zice că *liniile trigonometrice* (funcţiunile trigonometrice) *sunt periodice şi au perioada* 360^0, *sau* 2π (*radiani*). Adică

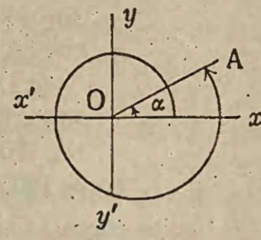

Fig. 39.

$$\sin(k.360^0+\alpha)=\sin\alpha,\ldots$$
$$\mathrm{cosec}(k.360^0+\alpha)=\mathrm{cosec}\alpha,$$
$$\sin(2k\pi+\alpha)=\sin\alpha,\ldots$$
$$\mathrm{cosec}(2k\pi+\alpha)=\mathrm{cosec}\alpha.$$

Observare. Perioada funcţiunilor periodice sinus, cosinus, secanta, cosecanta este egală cu 360^0 sau 2π, pe când a funcţiunilor tangenta şi cotangenta, este 180^0 sau π.

71. **Reducerea liniilor trigonometrice ale unghiurilor oarecare la acelea ale unghiului ascuţit. Reducerea la primul cadran.** Fiind dat un unghi oarecare a, dacă este mai mare ca 360^0, îl împărţim cu 360^0 şi fie că am găsit câtul k şi restul b, adică

$$a=k.360^0+b.$$

Urmează, conform celor de mai sus, că liniile trigonometrice ale unghiului a sunt egale cu acelea ale unghiului b. Unghiul b poate avea a doua latură în unul din cele patru cadrane. În fiecare din ultimele trei cazuri liniile trigonometrice ale unghiului b se reduc la acelea ale unghiului ascuţit, astfel că şi pentru unghiul dat a, liniile sale trigonometrice se pot exprima cu acelea ale unghiului ascuţit. Această operaţie se zice reducerea la primul cadran.

Exemple. 1°. *Să se calculeze liniile trigonometrice ale unghiului* $a=840^0$. Avem $840^0=2.360^0+120^0$. Deci liniile trigonometrice ale unghiului 840^0 sunt egale cu acelea ale unghiului 120^0. Dar 120^0 este în cadranul al doilea, suplimentar cu 60^0.

Deci $$\sin840^0=\sin120^0=\sin60,\quad \cos840^0=-\cos60^0,$$
$$\mathrm{tg}840^0=-\mathrm{tg}60^0,\quad \mathrm{cotg}840^0=-\mathrm{cotg}60^0,$$
$$\sec840^0=-\sec60^0,\quad \mathrm{cosec}840^0=\mathrm{cosec}60^0.$$

Am redus calculul liniilor trigonometrice ale unghiului 840^0 la acelea ale unghiului 60^0, din primul cadran.

2°. *Să considerăm unghiul de* 1305^0. Avem

$$1305^0=3.360^0+225,$$

deci liniile trigonometrice ale unghiului 1305^0 sunt egale cu acelea ale unghiului 225^0. Dar

$$225^0=180^0+45^0.$$

Deci

$$
\begin{aligned}
\sin 1305^\circ &= \sin 225^\circ = -\sin 45^\circ,\\
\cos 1305^\circ &= \cos 225^\circ = -\cos 45^\circ,\\
\operatorname{tg} 1305^\circ &= \operatorname{tg} 225^\circ = \operatorname{tg} 45^\circ,\\
\operatorname{cotg} 1305^\circ &= \operatorname{cotg} 225^\circ = \operatorname{cotg} 45^\circ,\\
\sec 1305^\circ &= \sec 225^\circ = -\sec 45^\circ,\\
\operatorname{cosec} 1305^\circ &= \operatorname{cosec} 225^\circ = -\operatorname{cosec} 45^\circ.
\end{aligned}
$$

Liniile trigonometrice ale unghiului 1305° s'au redus la acelea ale unghiului 45°.

3°. *Fie unghiul* 1770°. Avem

$$1770^\circ = 4.360^\circ + 330^\circ,$$

deci liniile trigonometrice ale unghiului considerat sunt egale cu acelea ale unghiului 330°. Dar

$$330^\circ = 360^\circ - 30^\circ.$$

Deci

$$
\begin{aligned}
\sin 1770^\circ &= \sin 330^\circ = -\sin 30^\circ,\\
\cos 1770^\circ &= \cos 330^\circ = \cos 30^\circ,\\
\operatorname{tg} 1770^\circ &= \operatorname{tg} 330^\circ = -\operatorname{tg} 30^\circ,\\
\cot 1770^\circ &= \operatorname{cotg} 330^\circ = -\operatorname{cotg} 30^\circ,\\
\sec 1770^\circ &= \sec 330^\circ = \sec 30^\circ,\\
\operatorname{cosec} 1770^\circ &= \operatorname{cosec} 330^\circ = -\operatorname{cosec} 30^\circ.
\end{aligned}
$$

Observare. Reducerea la unghiuri mai mici decât 45°. Am văzut că liniile trigonometrice ale unui unghi oarecare se reduc la acelea ale unui unghi ascuţit. Ştiind relaţiunile ce există între liniile trigonometrice a două unghiuri complimentare (No. 14), se pot reduce aceste funcţiuni la acelea ale unghiurilor mai mici decât 45°. De exemplu, $\sin 1730^\circ = \sin 290^\circ = \sin(360^\circ - 70^\circ) = -\sin 70^\circ = -\cos 20^\circ$.

72. *Unghiuri care corespund la o linie trigonometrică dată.* 1°. *Fiind dată valoarea lui sin* α, *să găsim forma generală a unghiurilor care au acelaş sinus ca şi* α. Am văzut că α fiind o valoare care răspunde problemei, atunci şi $180^\circ - \alpha$, sau $\pi - \alpha$, suplimentul să are acelaş sinus. Adăugându-le la fiecare câte un multiplu al lui 360°, adică $k.360$, sau $2k\pi$, urmează că şi arcele

$$2k\pi + \alpha,\quad 2k\pi + \pi - \alpha$$

au acelaş sinus ca şi α. *Forma generală a unghiurilor ce au acelaş sinus ca şi unghiul* α *este*

$$2k\pi + \alpha,\quad (2k+1)\pi - \alpha,$$

k fiind un întreg oarecare.

De ex., $\sin\alpha = \frac{1}{2}$. O valoare este 30^0; forma generală a unghiurilor al căror sinus este egal cu $\frac{1}{2}$ este

$$2k\pi + 30^0,\ (2k+1)\pi - 30^0.$$

Făcând pe $k=0, 1, 2, \ldots$, avem unghiurile 30^0, $\pi - 30^0$; $2\pi + 30^0$, $3\pi - 30^0$; ... ($\pi = 180^0$).

2^0. *Să se afle forma generală a unghiurilor ce au acelaş cosinus ca un unghi dat.* Fiind cunoscută valoarea lui $\cos\alpha$; urmează că şi $-\alpha$ are acelaş cosinus ca unghiul α. Deci

$$2k\pi + \alpha,\ 2k\pi - \alpha,$$

sau

$$2k\pi \pm \alpha$$

este forma generală a unghiurilor ce au acelaş cosinus ca şi unghiul α, k fiind un întreg oarecare.

De ex. unghiurile al căror cos este egal cu $\frac{\sqrt{2}}{2}$ sunt date de formula

$$2k\pi \pm 45^0,$$

k fiind un întreg oarecare.

3^0. *Forma generală a unghiurilor care au aceeaşi tangentă ca un unghi dat.* Dacă se cunoaşte $\operatorname{tg}\alpha$, înseamnă că şi $\alpha + \pi$, $\alpha + 2\pi, \ldots \alpha + k\pi, \ldots$ au aceeaşi tangentă ca şi α. Deci forma generală a acestor unghiuri a căror tangentă este egală cu $\operatorname{tg}\alpha$, este

$$k\pi + \alpha,$$

k fiind un întreg oarecare.

73. **Aplicaţii.** 1) Am văzut că fiind dat $\sin a$, valorile lui $\cos a$ sunt date de relaţia

$$\sin^2 a + \cos^2 a = 1.$$

De unde

$$\cos^2 a = 1 - \sin^2 a,\ \cos a = \pm\sqrt{1 - \sin^2 a},$$

adică, la o valoare dată lui $\sin a$, corespund două valori pentru $\cos a$.

Aceasta se poate explica în modul următor. Fiind cunoscută valoarea lui $\sin a$, urmează că toate arcele ce au acelaş sinus ca cel dat sunt exprimate cu formulele

$$2k\pi + a,\ (2k+1)\pi - a,$$

k fiind un întreg oarecare. Dând lui k valorile 0, 1, . . . avem

$$k=1,\ a,\ \pi - a;\ k=2,\ 2\pi + a,\ 2\pi + \pi - a; \ldots$$

Dar unghiurile obţinute pentru $k=1, 2, \ldots$, diferind de unghiurile a şi $(\pi - a)$ cu un multiplu de 2π, au aceleaşi funcţiuni trigonometrice ca şi a si $(\pi - a)$. Rămâne deci de considerat numai a şi $(\pi - a)$, ale căror consinusuri sunt

$$\cos a,\ \cos(\pi - a) = -\cos a,$$

astfel că se vede că la o valoare a lui $\sin a$ corespund două valori egale și de semn contrar, $\cos a$, și $-\cos a$ pentru funcțiunea cosinus.

2) Am văzut, de asemenea, că fiind dată valoarea lui $\operatorname{tg} a$, pentru $\sin a$ și $\cos a$ avem formulele

$$\sin a = \frac{\operatorname{tg} a}{\pm\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 a}},\quad \cos a = \frac{1}{\pm\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 a}};$$

deci la o valoare dată a lui $\operatorname{tg} a$, corespund două valori egale și de semne contrare pentru $\sin a$ și $\cos a$.

Iată cum se poate explica acest rezultat. Fiind cunoscută valoarea $\operatorname{tg} a$, arcele care au aceeași tangentă sunt date de formula

$$k\pi + a,$$

k fiind întreg oarecare. Dând valorile 0, 1, 2, . . ., avem

$$k=0,\ a;\ k=1,\ \pi+a;\ k=2,\ 2\pi+a, \ldots$$

Valorile unghiurilor, începând de la $k=2$, diferă de a și $\pi+a$ cu un multiplu al lui 2π; deci cu aceleași funcțiuni trigonometrice ca și unghiurile a și $(\pi+a)$. Astfel, pentru sinus și cosinus corespund valorile

$$\sin a,\ \sin(\pi+a) = -\sin a,$$
$$\cos a,\ \cos(\pi+a) = -\cos a,$$

adică egale și de semne contrarii și se vede că la o valoare a lui $\operatorname{tg} a$ corespund două valori egale și de semne contrarii pentru $\sin a$ și $\cos a$

EXERCIȚII.

1. Să se afle liniile trigonometrice ale unghiului $(a+90^\circ)$ cu ajutorul acelora ale unghiului a.

R. Se consideră triunghiul dreptunghic OAB, B fiind proecția lui A pe Ox. Se ia pe perpendiculara în O pe OA lungimea OC = OA și fie D proecția lui C pe Ox. Unghiurile $BOA = a$, $BOC = 90^\circ + a$. Triunghiurile OAB și OCD sunt egale. Avem

$$\sin(90^\circ + a) = \frac{\overline{DC}}{OC} = \frac{\overline{OB}}{OA} = \cos a,\ \cos(90^\circ + a) = -\sin a, \ldots$$

Se pot găsi aceste rezultate și pe baza celor obținute. In adevăr, se vede că $(90^\circ + a)$ și $(-a)$ sunt unghiuri complimentare. Deci

$$\sin(90^\circ + a) = \cos(-a) = \cos a,\ \cos(90^\circ + a) = \sin(-a) = -\sin a,$$
$$\operatorname{tg}(90^\circ + a) = \operatorname{cotg}(-a) = -\operatorname{cotg} a,\ \sec(90^\circ + a) = -\operatorname{cosec} a,$$
$$\operatorname{cosec}(90^\circ + a) = \sec a.$$

2. Să se afle liniile trigonometrice ale unghiului $(a+270^\circ)$ cu ajutorul acelora ale unghiului a.

R. Fie B proecția pe Ox a unui punct A din cadranul xOy și OC perpendiculara pe OA, astfel ca unghiul format de OA și OC să fie 270°. Fie D proecția lui C pe Ox. Unghiurile $xOA = a$, $xOC = a + 270^\circ$.

$$\sin(270^\circ + a) = \sin[180^\circ + (90^\circ + a)] = -\sin(90^\circ + a) =$$
$$-\cos(-a) = -\cos a,\ \cos(270^\circ + a) = \sin a,\ \operatorname{tg}(270^\circ + a) = -\operatorname{cotg} a, \ldots$$

Se poate şi geometric, conform definiţii liniilor trigonometrice, considerând triunghiurile OAB, COD şi ţinând seamă de sensul vectorilor. De ex.,

$$\sin(270^0+a)=\frac{\overline{DC}}{OC}=\frac{-\overline{OB}}{OA}=-\cos a, \text{ etc.}$$

3. Să se arate că $\sin(270^0-a)=-\cos a$, $\cos(270^0-a)=-\sin a$.

R. A fiind un punct în primul cadran, B proecţia lui pe Ox, OC o dreaptă în cadranul al treilea, astfel ca unghiul ascuţit $COy'=BOA$, $OC=OA$, D proecţia lui C pe Ox, unghiurile $BOA=a$, $BOC=270^0-a$. Se consideră triunghiurile AOB, COD.

Sau, în baza celor stabilite,

$$\sin(270^0-a)=\sin[180^0+(90^0-a)]=-\sin(90^0-a)=-\cos a, \text{ etc.}$$

4. Să se reducă la primul cadran unghiurile 1970^0, 1660^0, 3180^0.

R. $1970^0=5.360^0+(180^0-10^0)$; $1660^0=4.360^0+(180^0+40^0)$; $3180^0=8.360+300$.

APLICAŢII (1).

74. **Fiind cunoscut** $\cos a$, **să se calculeze liniile trigonometrice ale unghiului pe jumătate,** $\frac{1}{2}a$. Am văzut (No. 45) că

$$\sin^2\frac{a}{2}=\frac{1-\cos a}{2}, \quad \cos^2\frac{a}{2}=\frac{1+\cos a}{2}.$$

Extrăgând rădăcina pătrată şi ţinând seamă că liniile trigonometrice pot avea ambele semne, urmează

$$\sin\frac{a}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos a}{2}}, \quad \cos\frac{a}{2}=\pm\sqrt{\frac{1+\cos a}{2}},$$

$$\operatorname{tg}\frac{a}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos a}{1+\cos a}}.$$

Acestea sunt formulele care ne dau liniile trigonometrice ale unghiului $\frac{a}{2}$, când se cunoaşte $\cos a$.

Observare. Se poate uşor arăta pentru ce la o valoare dată lui $\cos a$, corespund, cu formulele de mai sus, două valori pentru $\sin\frac{1}{2}a$, $\cos\frac{1}{2}a$, $\operatorname{tg}\frac{1}{2}a$, după cum să ia semnul $+$ sau $-$ înaintea radicalului. În adevăr, când se dă $\cos a$, ştim (No. 72) că forma generală a arcelor ce au acelaş cosinus, este

$$2k\pi\pm\alpha.$$

(1) Nu face parte din program.

Trebuind a lua jumătatea acestor unghiuri, forma generală a lor este

$$k\pi \pm \frac{1}{2}\alpha,$$

k fiind un întreg oarecare. Dând lui k diferite valori, avem

$$k=0, \frac{1}{2}\alpha, -\frac{1}{2}\alpha; \quad k=1, \pi+\frac{1}{2}\alpha, \pi-\frac{1}{2}\alpha;$$

$$k=2, 2\pi+\frac{1}{2}\alpha, 2\pi-\frac{1}{2}\alpha; \ldots$$

Având în vedere că liniile trigonometrice sunt periodice, cu perioada 2π, sau 360^0, rezultă că unghiurile, ale căror linii trigonometrice ar putea să fie distincte, sunt

$$\frac{1}{2}\alpha, \frac{-1}{2}\alpha, \pi+\frac{1}{2}\alpha, \pi-\frac{1}{2}\alpha.$$

Dar $\sin(\pi+\frac{1}{2}\alpha)=-\sin\frac{1}{2}\alpha$, $\sin(\pi-\frac{1}{2}\alpha)=\sin\frac{1}{2}\alpha$,

$$\cos(\pi+\frac{1}{2}\alpha)=-\cos\frac{1}{2}\alpha, \quad \cos(\pi-\frac{1}{2}\alpha)=-\cos\frac{1}{2}\alpha,$$

$$\operatorname{tg}(\pi+\frac{1}{2}\alpha)=\operatorname{tg}\frac{1}{2}\alpha, \quad \operatorname{tg}(\pi-\frac{1}{2}\alpha)=-\operatorname{tg}\frac{1}{2}\alpha.$$

Vedem deci că pentru fiecare linie trigonometrică se obţin numai câte două valori distincte, egale respectiv cu $\pm\sin\frac{1}{2}\alpha$, $\pm\cos\frac{1}{2}\alpha$, $\pm\operatorname{tg}\frac{1}{2}\alpha$, şi aşa am explicat cum pentru o valoare dată lui $\cos\alpha$ corespund câte două valori distincte pentru $\sin\frac{1}{2}\alpha$, $\cos\frac{1}{2}\alpha$, $\operatorname{tg}\frac{1}{2}\alpha$.

75. Fiind cunoscută valoarea lui ***sin α,*** **să se calculeze liniile trigonometrice ale unghiului** $\frac{1}{2}\alpha$. Avem

$$2\sin\beta\cos\beta=\sin 2\beta,$$
$$\cos^2\beta+\sin^2\beta=1.$$

Adunând sau scăzând aceste relaţiuni, găsim

$$\cos^2\beta+\sin^2\beta+2\sin\beta\cos\beta=1+\sin 2\beta,$$
$$\cos^2\beta+\sin^2\beta-2\sin\beta\cos\beta=1-\sin 2\beta.$$

Sau

$$(\cos\beta+\sin\beta)^2=1+\sin 2\beta,$$
$$(\cos\beta-\sin\beta)^2=1-\sin 2\beta.$$

De unde

$$\cos\beta+\sin\beta=\pm\sqrt{1+\sin 2\beta},$$
$$\cos\beta-\sin\beta=\pm\sqrt{1-\sin 2\beta}.$$

Înlocuind pe β cu $\frac{1}{2}\alpha$, avem

$$\cos\frac{1}{2}\alpha+\sin\frac{1}{2}\alpha=\pm\sqrt{1+\sin\alpha},$$
(9)
$$\cos\frac{1}{2}\alpha-\sin\frac{1}{2}\alpha=\pm\sqrt{1-\sin\alpha}.$$

Adunând şi scăzând aceste relaţii, obţinem

$$2\cos\frac{1}{2}\alpha=\pm\sqrt{1+\sin\alpha}\pm\sqrt{1-\sin\alpha},$$
$$2\sin\frac{1}{2}\alpha=\pm\sqrt{1+\sin\alpha}\mp\sqrt{1-\sin\alpha},$$

care ne dau valorile lui $\cos\frac{1}{2}\alpha$ şi $\sin\frac{1}{2}\alpha$, când se cunoaşte $\sin\alpha$.

Rămâne numai de hotărât ce semne trebuesc luate în faţa radicalelor din membrul al doilea al relaţiilor (9). Iată cum se procedează. Se observă cum stau, una faţă de cealaltă, funcţiunile $\cos\frac{1}{2}\alpha$ şi $\sin\frac{1}{2}\alpha$ şi se ia în faţa radicalelor $\sqrt{1+\sin\alpha}$, $\sqrt{1-\sin\alpha}$. semnele ce le au expresiile $\cos\frac{1}{2}\alpha+\sin\frac{1}{2}\alpha$, $\cos\frac{1}{2}\alpha-\sin\frac{1}{2}\alpha$.

Exemple. 1. Să se calculeze liniile trigonometrice ale unghiului 15^0, când se cunoaşte $\sin 30^0=\frac{1}{2}$. Observăm că

$\sin 15^0<\cos 15^0$, amândouă fiind pozitive; deci $\cos 15^0+\sin 15^0>0$, $\cos 15^0-\sin 15^0>0$. Trebue deci să se ia semnul $+$ la radicalii din membrul al doilea din (9). Avem

$$\cos 15^0+\sin 15^0=\sqrt{1+\sin 30^0}=\sqrt{1+\frac{1}{2}},$$
$$\cos 15^0-\sin 15^0=\sqrt{1-\sin 30^0}=\sqrt{1-\frac{1}{2}}.$$

Adunând şi scăzând, găsim

$$2\cos 15^0=\sqrt{1+\frac{1}{2}}+\sqrt{1-\frac{1}{2}},\quad 2\sin 15^0=\sqrt{1+\frac{1}{2}}-\sqrt{1-\frac{1}{2}},$$

de unde

$$\cos 15^0=\frac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{3}{2}}+\sqrt{\frac{1}{2}}\right),\quad \sin 15^0=\frac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{3}{2}}-\sqrt{\frac{1}{2}}\right).$$

2. Să se calculeze liniile trigonometrice ale unghiului 175^0, când se cunoaşte $\sin 350^0$. Unghiul 175^0 este în cadranul al doilea, $\sin 175^0 > 0, \cos 175^0 < 0$, iar în valoarea absolută, avem

$$|\cos 175^0| > |\sin 175^0|.$$

Deci

$$\cos 175^0 + \sin 175^0 < 0, \quad \cos 175^0 - \sin 175^0 < 0,$$

aşa că în formulele (9) trebue să luăm la primul radical semnul —, iar la al doilea, semnul —. Avem

$$\cos 175^0 + \sin 175^0 = -\sqrt{1 + \sin 350^0},$$
$$\cos 175^0 - \sin 175^0 = -\sqrt{1 - \sin 350^0}.$$

Adunând şi scăzând aceste relaţii, avem

$$2\cos 175^0 = -\sqrt{1 + \sin 350^0} - \sqrt{1 - \sin 350^0},$$
$$2\sin 175^0 = -\sqrt{1 + \sin 350^0} + \sqrt{1 - \sin 350^0},$$

cu care se pot calcula $\cos 175^0$ şi $\sin 175^0$.

76. **Se dă** $tg\, a$ **şi se cere să se calculeze** $\sin\frac{1}{2}a, \cos\frac{1}{2}a$, $\operatorname{tg}\frac{1}{2}a$. Dacă am şti $\operatorname{tg}\frac{1}{2}a$, atunci valorile lui $\sin\frac{1}{2}a$ şi $\cos\frac{1}{2}a$ sunt date de relaţiile

$$\sin\frac{1}{2}a = \frac{\operatorname{tg}\frac{1}{2}a}{\pm\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\frac{1}{2}a}}, \quad \cos a = \frac{1}{\pm\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\frac{1}{2}a}}.$$

Trebue deci să calculăm pe $\operatorname{tg}\frac{1}{2}a$, când se cunoaşte $\operatorname{tg} a$. Avem

$$\operatorname{tg} 2\beta = \frac{2\operatorname{tg}\beta}{1-\operatorname{tg}^2\beta},$$

de unde

$$(1-\operatorname{tg}^2\beta)\operatorname{tg}2\beta = 2\operatorname{tg}\beta,$$
$$\operatorname{tg}2\beta - \operatorname{tg}2\beta\operatorname{tg}^2\beta = 2\operatorname{tg}\beta.$$

Sau

$$\operatorname{tg}2\beta\operatorname{tg}^2\beta + 2\operatorname{tg}\beta - \operatorname{tg}2\beta = 0.$$

Făcând pe $\beta = \frac{1}{2}a$, această ecuaţie devine

$$\operatorname{tg}^2\frac{1}{2}a \operatorname{tg} a + 2\operatorname{tg}\frac{1}{2}a - \operatorname{tg} a = 0$$

Această ecuaţie fiind de gradul al doilea în raport cu

$\operatorname{tg}\frac{1}{2}a$, rezolvând-o, avem

$$\operatorname{tg}\frac{1}{2}a=\frac{-1\pm\sqrt{1+\operatorname{tg}a.\operatorname{tg}a}}{\operatorname{tg}a}=\frac{-1\pm\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 a}}{\operatorname{tg}a}.$$

Deci, la o valoare dată pentru $\operatorname{tg}a$, corespund două valori pentru $\operatorname{tg}\frac{1}{2}a$,

$$\frac{-1+\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 a}}{\operatorname{tg}a},\quad \frac{-1-\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 a}}{\operatorname{tg}a}.$$

Înlocuind aceste două valori ale lui $\operatorname{tg}\frac{1}{2}a$ în formulele

$$\sin\frac{1}{2}a=\frac{\operatorname{tg}\frac{1}{2}a}{\pm\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\frac{1}{2}a}},\quad \cos\frac{1}{2}a=\frac{1}{\pm\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\frac{1}{2}a}},$$

şi ţinând seamă şi de dublul semn, $\pm$, înaintea radicalelor, urmează că vor corespunde câte patru valori pentru $\sin\frac{1}{2}a$, şi $\cos\frac{1}{2}a$, când se dă $\operatorname{tg}a$.

Se poate uşor arăta că trebuia să fie patru valori pentru $\sin\frac{1}{2}a$ de ex., când se cunoaşte $\operatorname{tg}a$. În adevăr, fiind dată valoarea lui $\operatorname{tg}a$, urmează că unghiurile care au aceeaşi tangentă ca şi $\operatorname{tg}a$ sunt date de formula

$$k\pi+a,$$

k fiind un întreg oarecare. Dând lui k valorile $k=0,\ 1,\ 2,\ldots$, avem

$$k=0, a;\ k=1,\ \pi+a;\ k=2,\ 2\pi+a;\ k=3,\ 3\pi+a;$$
$$k=4,\ 4\pi+a,\ldots$$

Trebuind să luăm jumătatea unghiului, aceste jumătăţi sunt

$$\frac{1}{2}a;\ \frac{1}{2}\pi+\frac{1}{2}a;\ \pi+\frac{1}{2}a,\ \frac{3}{2}\pi+\frac{1}{2}a;\ 2\pi+\frac{1}{2}a,\ldots$$

Unghiurile, începând de la al cincilea, diferă de primele patru unghiuri cu multiplii de 2π şi deci liniile lor trigonometrice sunt aceleaşi ca ale primelor patru unghiuri. Aşa, pentru sinus, valorile sinusului sunt

$$\sin\frac{1}{2}a,\ \sin\left(\frac{1}{2}\pi+\frac{1}{2}a\right),\ \sin\left(\pi+\frac{1}{2}a\right),\ \sin\left(\frac{3}{2}\pi+\frac{1}{2}a\right),$$

şi astfel se vede că la o valoare dată pentru tg$a$ corespund patru valori pentru sinusul unghiului $\frac{1}{2}a$.

Exemplu. tg$a=1$. Avem

$$\operatorname{tg}\frac{1}{2}a=\frac{-1\pm\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 a}}{\operatorname{tg}a}=\frac{-1\pm\sqrt{2}}{1}=1\pm\sqrt{2}.$$

Ne servim de formulele

$$\sin\frac{1}{2}a=\frac{\operatorname{tg}\frac{1}{2}a}{\pm\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\frac{1}{2}a}},\quad \cos\frac{1}{2}a=\frac{1}{\pm\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\frac{1}{2}a}}.$$

Înlocuind pe tg$\frac{1}{2}a$ cu valorile sale $-1\pm\sqrt{2}$, avem de ex., pentru $\sin\frac{1}{2}a$,

$$\sin\frac{1}{2}a=\frac{-1+\sqrt{2}}{\pm\sqrt{1+(-1+\sqrt{2})^2}},\quad \sin\frac{1}{2}a=\frac{-1-\sqrt{2}}{\pm\sqrt{1+(-1-\sqrt{2})^2}}.$$

Avem

$$\sin\frac{1}{2}a=\frac{-1+\sqrt{2}}{\pm\sqrt{1+1-2\sqrt{2}+2}}=$$

$$\frac{-1+\sqrt{2}}{\pm\sqrt{4-2\sqrt{2}}}=\frac{\sqrt{2}-1}{\pm\sqrt{2}\sqrt{2-\sqrt{2}}},$$

$$\sin\frac{1}{2}a=\frac{\sqrt{2}(\sqrt{2}-1)}{\pm\sqrt{2}\sqrt{2}\sqrt{2-\sqrt{2}}}=\frac{2-\sqrt{2}}{\pm 2\sqrt{2-\sqrt{2}}}=$$

$$\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}\sqrt{2-\sqrt{2}}}{\pm\sqrt{2}\sqrt{2-\sqrt{2}}}=\pm\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2};$$

$$\cos\frac{1}{2}a=\frac{1}{\pm\sqrt{1+(-1+\sqrt{2})^2}}=\frac{1}{\pm\sqrt{4-2\sqrt{2}}}=$$

$$\frac{1}{\pm\sqrt{2}\sqrt{2-\sqrt{2}}}=\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{\pm\sqrt{2}\sqrt{2-\sqrt{2}}\sqrt{2+\sqrt{2}}}$$

$$\cos\frac{1}{2}a=\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{\pm\sqrt{2}.\sqrt{4-2}}=\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{\pm\sqrt{2}.\sqrt{2}}=\frac{\pm\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}.$$

La fel se obţin alte valori înlocuind pe $\mathrm{tg}\frac{1}{2}a$ cu valoarea $(-1-\sqrt{2})$.

77. Exprimarea raţională a sinusului şi consinusului unui unghi cu ajutorul tangentei jumătăţei unghiului. Formulele

$$\sin\beta = \frac{\mathrm{tg}\beta}{\pm\sqrt{1+\mathrm{tg}^2\beta}}, \quad \cos\beta = \frac{1}{\pm\sqrt{1+\mathrm{tg}^2\beta}},$$

dau sub formă neraţională (cu radicali) valorile lui $\sin\beta$, $\cos\beta$ cu ajutorul lui $\mathrm{tg}\beta$. Vom căuta a găsi expresiunile sinusului şi consinusului sub formă raţională cu ajutorul tangentei jumătăţei unghiului.

Pentru aceasta să considerăm

$$\sin 2\beta = 2\sin\beta\cos\beta = 2\frac{\mathrm{tg}\beta}{\pm\sqrt{1+\mathrm{tg}^2\beta}}\,\frac{1}{\pm\sqrt{1+\mathrm{tg}^2\beta}},$$

$$\sin 2\beta = \frac{2\mathrm{tg}\beta}{1+\mathrm{tg}^2\beta}.$$

(10) De asemenea,

$$\cos 2\beta = \cos^2\beta - \sin^2\beta = \left(\frac{1}{\sqrt{1+\mathrm{tg}^2\beta}}\right)^2 - \left(\frac{\mathrm{tg}\beta}{\sqrt{1+\mathrm{tg}^2\beta}}\right)^2,$$

$$\cos 2\beta = \frac{1}{1+\mathrm{tg}^2\beta} - \frac{\mathrm{tg}^2\beta}{1+\mathrm{tg}^2\beta},$$

(11) $$\cos 2\beta = \frac{1-\mathrm{tg}^2\beta}{1+\mathrm{tg}^2\beta}.$$

Făcând în formulele (10) şi (11) pe $\beta = \frac{1}{2}\alpha$ avem

(12) $$\sin\alpha = \frac{2\mathrm{tg}\frac{1}{2}\alpha}{1+\mathrm{tg}^2\frac{1}{2}\alpha}, \quad \cos\alpha = \frac{1-\mathrm{tg}^2\frac{1}{2}\alpha}{1+\mathrm{tg}^2\frac{1}{2}\alpha}.$$

De asemenea avem

(13) $$\mathrm{tg}\alpha = \frac{2\mathrm{tg}\frac{1}{2}\alpha}{1-\mathrm{tg}^2\frac{1}{2}\alpha}.$$

Formulele (12) şi (13) ne dau, sub formă raţională, valorile $\sin a$, $\cos a$, $\mathrm{tg}\, a$ cu ajutorul tangentei unghiului $\frac{1}{2}a$.

EXERCIŢII.

1. Ştiind că $\cos\alpha=\frac{1}{9}$ şi că unghiul α este cuprins între 270° şi 360°, să se calculeze $\sin\frac{\alpha}{2}$, $\cos\frac{\alpha}{2}$.

R. $\frac{1}{2}\alpha$ este cuprins între 135° şi 180°; deci $\sin\frac{1}{2}\alpha>0$, $\cos\frac{1}{2}\alpha>0$.

$$\sin\frac{1}{2}\alpha=\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}=\frac{2}{3},\ \cos\frac{1}{2}\alpha=\frac{-\sqrt{5}}{3}.$$

2. Ştiind că $\sin\alpha=\frac{1}{2}$ şi că unghiul α este cuprins între 360° şi 540°, să se calculeze $\sin\frac{1}{2}\alpha$, $\cos\frac{1}{2}\alpha$.

R. Unghiul $\frac{\alpha}{2}$ este cuprins între 180° şi 270° şi $\left|\sin\frac{\alpha}{2}\right|<\left|\cos\frac{\alpha}{2}\right|$,

$$\sin\frac{\alpha}{2}<0,\ \cos\frac{\alpha}{2}<0,\ \cos\frac{\alpha}{2}+\sin\frac{\alpha}{2}<0,\ \cos\frac{\alpha}{2}-\sin\frac{\alpha}{2}<0;$$

$$\cos\frac{\alpha}{2}+\sin\frac{\alpha}{2}=-\sqrt{1+\sin\alpha},\quad \cos\frac{\alpha}{2}-\sin\frac{\alpha}{2}=-\sqrt{1-\sin\alpha}.$$

3. Ştiind că $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\sqrt{2}-1$, să se calculeze $\sin\alpha$, $\cos\alpha$ $\operatorname{tg}\alpha$.

R. Se întrebuinţeaz formulele (12) (13). Se găseşte

$$\sin\alpha=\cos\alpha=\frac{1}{2}\sqrt{2}.$$

4. Ştiind că $\operatorname{tg}\alpha=\sqrt{2}-1$, să se calculeze $\sin\frac{\alpha}{2}$, $\cos\frac{\alpha}{2}$, $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$.

R. Se va calcula întâi $\operatorname{tg}\frac{1}{2}\alpha=\frac{-1+\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}}{\operatorname{tg}\alpha}=\frac{-1+\sqrt{4-2\sqrt{2}}}{\sqrt{2}-1}=$

$$\frac{\left(-1\pm\sqrt{4-2\sqrt{2}}\right)\left(\sqrt{2}+1\right)}{(\sqrt{2}-1)\ (\sqrt{2}+1)}=\frac{\sqrt{2}-1\pm\sqrt{(4-2\sqrt{2})\ (\sqrt{2}+1)^2}}{(\sqrt{2})^2-1}=$$

$$-\sqrt{2}-1\pm\sqrt{(4-2\sqrt{2})\ (3+2\sqrt{2})}=-\sqrt{2}-1\pm\sqrt{4+\sqrt{2}}.$$

In fine, $\sin\frac{1}{2}\alpha$, $\cos\frac{1}{2}\alpha$ cu formulele

$$\sin\alpha\frac{1}{2}=\frac{\operatorname{tg}\frac{1}{2}\alpha}{\pm\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\frac{1}{2}\alpha}},\quad \cos\frac{1}{2}\alpha=\frac{1}{\pm\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\frac{1}{2}\alpha}}.$$

5. Ştiind că $\operatorname{tg}\alpha=\frac{m}{n}$ să se calculeze $x=m\sin2\alpha+\cos2\alpha$.

R. $$x=m\frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1+\operatorname{tg}^2\alpha}+n\frac{1-\operatorname{tg}^2\alpha}{1+\operatorname{tg}^2\alpha}=m\frac{2\frac{m}{n}}{1+\frac{m^2}{n^2}}+\frac{1-\frac{m^2}{n^2}}{1+\frac{m^2}{n^2}}$$

$$x=m\frac{2mn}{m^2+n^2}+\frac{n(n^2-m^2)}{m^2+n^2}=n.$$

6. Să se verifice identitatea

$$\operatorname{cotg}(\alpha-\beta)=\frac{\sin\alpha\cos\alpha+\sin\beta\cos\beta}{\sin(\alpha+\beta)\sin(\alpha-\beta)}.$$

R. $\sin\alpha\cos\alpha=\frac{1}{2}\sin2\alpha$. Avem

$$E\equiv\frac{\sin\alpha\cos\alpha+\sin\beta\cos\beta}{\sin(\alpha+\beta)\sin(\alpha-\beta)}=\frac{\frac{1}{2}\sin2\alpha+\frac{1}{2}\sin2\beta}{\sin(\alpha+\beta)\sin(\alpha-\beta)},$$

$$E\equiv\frac{1}{2}\,\frac{2\sin\frac{2\alpha+2\beta}{2}\cos\frac{2\alpha-2\beta}{2}}{\sin(\alpha+\beta)\sin(\alpha-\beta)}=\operatorname{cotg}(\alpha-\beta).$$

7. Să se verifice identitatea

$$\sin3\alpha\sin^3\alpha+\cos3\alpha\cos^3\alpha=\cos^32\alpha.$$

R. $\sin3\alpha=3\sin\alpha-4\sin^3\alpha,\quad \cos3\alpha=4\cos^3\alpha-3\cos\alpha.$

$$E\equiv4(\cos^6\alpha-\sin^6\alpha)-3(\cos^4\alpha-\sin^4\alpha),$$

$$E\equiv(\cos^2\alpha-\sin^2\alpha)[4(\cos^4\alpha+\cos^2\alpha\sin^2\alpha+\sin^4\alpha)-3(\cos^2\alpha+\sin^2\alpha)],$$

$$E\equiv\cos2\alpha\left\{4[(\cos^2\alpha+\sin^2\alpha)^2-\sin^2\alpha\cos^2\alpha]-3\right\}=\cos2\alpha(1-4\sin^2\alpha\cos^2\alpha),$$

$$E\equiv\cos2\alpha(1-\sin^22\alpha)=\cos^32\alpha.$$

8. Să se verifice identitatea

$$\sin\alpha+\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha+2\beta)+\ldots+\sin[\alpha+(n-1)\beta]$$

$$=\frac{\sin\left[\alpha+\frac{n-1}{2}\right]\sin\frac{n\beta}{2}}{\sin\frac{\beta}{2}}.$$

R. Însemnând cu S primul membru al acestei identități, înmulțim cu $2\sin\frac{\beta}{2}$, și avem

$$2S\sin\frac{\beta}{2}=2\sin\alpha\sin\frac{\beta}{2}+2\sin(\alpha+\beta)\sin\frac{\beta}{2}+\ldots+2\sin[\alpha+(n-1)\beta]\sin\frac{\beta}{2},$$

Dar

$$2\sin p\sin q=\cos(p-q)-\cos(p+q).$$

Deci

$$2S\sin\frac{\beta}{2}=\cos\left(\alpha-\frac{\beta}{2}\right)-\cos\left(\alpha+\frac{\beta}{2}\right)+$$

$$\cos\left(\alpha+\beta-\frac{\beta}{2}\right)-\cos\left(\alpha+\beta+\frac{\beta}{2}\right)+$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\cos\left[\alpha+(n-1)\beta-\frac{\beta}{2}\right]-\cos\left[\alpha+(n-1)\beta+\frac{\beta}{2}\right].$$

Adunând, rămân, în membrul al doilea, numai termenii extremi și avem

$$2S\sin\frac{\beta}{2}=\cos\left(\alpha-\frac{\beta}{2}\right)-\cos\left[\alpha+(n-1)\beta+\frac{\beta}{2}\right].$$

De unde

$$2S\sin\frac{\beta}{2} = -2\sin\frac{\alpha-\frac{\beta}{2}+\alpha+(n-1)\beta+\frac{\beta}{2}}{2}\sin\frac{\alpha-\frac{\beta}{2}-\left[\alpha+(n-1)\beta+\frac{\beta}{2}\right]}{2},$$

$$2S\sin\frac{\beta}{2} = -2\sin\left(\alpha+\frac{n-1}{2}\beta\right)\sin\frac{-\frac{\beta}{2}-\frac{\beta}{2}-(n-1)\beta}{2}.$$

$$2S\sin\frac{\beta}{2} = -2\sin\left(\alpha+\frac{n-1}{2}\beta\right)(-1)\sin\frac{n\beta}{2},$$

$$S = \frac{\sin\left(\alpha+\frac{n-1}{2}\beta\right)\sin\frac{n\beta}{2}}{\sin\frac{\beta}{2}}.$$

ECUAŢII TRIGONOMETRICE [1].

78. **Generalităţi.** Am văzut că liniile trigonometrice ale unghiului oarecare le putem exprima cu ajutorul liniilor trigonometrice ale unghiului ascuţit. Pe de altă parte, cunoscând o linie trigonometrică a unui unghi, cu ajutorul ei putem afla celelalte linii ale acelui unghi. De aceea este destul a calcula valorile unei linii trigonometrice pentru unghiul ascuţit. Mai mult, e de ajuns să calculăm valorile pentru unghiuri cuprinse între 0^0 şi 45^0, căci sinusul, cosinusul, tangenta, cotangenta unui unghi cuprins între 45^0 şi 90^0 sunt egale cu cosinusul, sinusul, cotangenta, tangenta unghiului complimentar, cuprins între 0^0 şi 45^0. De aceea, în tablele goniometrice *(Dupuis,* Lignes trigonométriques naturelles, p. 149) sunt calculate numai valorile liniilor trigonometrice pentru unghiuri dela 0^0 la 45^0.

Pentru a calcula logaritmul unei linii trigonometrice a unui unghi mai mare ca 90^0, reducem mai întâi acel unghi la cel ascuţit corespunzător şi căutăm logaritmul acestuia. Evident că luăm logaritmii numai ai acelor linii trigonometrice care sunt pozitive, căci numai numerile pozitive au logaritmi.

De ex., $\log\sin 150^0 = \log\sin 30^0 = \overline{1},69897$; $\log \mathrm{tg}\, 250^0 = \log \mathrm{tg}\, 70^0 = 0,43893$.

Dacă, acum, se dă valoarea linii trigonometrice şi se cere unghiul, se aplică logaritmul şi apoi cu ajutorul tablelor logaritmice, aflăm unghiul.

Exemple. 1) Se dă $\sin\alpha = 0,52992$ şi se cere unghiul α. Aplicând logaritmii, avem

$$\log\sin\alpha = \log 0,52992 = \overline{1},72421,$$
$$\alpha = 32^0.$$

[1] Nu face parte din program.

Fiind dat unghiul prin valoarea sinusului său, forma generală a unghiurilor corespunzătoare problemei, este

$$2k\pi + \alpha,\ (2k+1)\pi - \alpha,$$

sau, în cazul nostru,

$$2k\pi + 32^0,\ (2k+1)\pi - 32^0$$

k fiind întreg oarecare. Dând lui k valorile 0, 1, 2, 3, ..., obţinem $k=0$, 32^0, $\pi - 32^0 = 148^0$; $k=1$, $2\pi + 32^0 = 392^0$, $3\pi - 32 = 508^0$; ..., care sunt unghiurile al căror sinus este egal cu 0,52992.

2) Să considerăm acum cazul când se cere unghiul α dat de relaţia $\cos\alpha = -\frac{3}{5}$. Unghiul β, dat de relaţia $\cos\beta = \frac{3}{5}$, este suplimentar cu α, sau diferă cu 180^0, căci au cosinusurile egale şi de semne contrare. Deci

$$\alpha = 180^0 \pm \beta,\quad \alpha = 2k\pi + 180 \pm \beta = (2k+1)\pi \pm \beta.$$

Să calculăm deci pe β dat de ecuaţia

$$\cos\beta = \frac{3}{5},$$

şi apoi unghiul căutat α îl aflăm cu relaţia de mai sus. Aplicând logaritmii, avem

$$\log\cos\beta = \log\frac{3}{5} = \log 3 - \log 5,$$

$$\log\cos\beta = 0{,}47712 - 0{,}69897 = 0{,}47712 + \bar{1},30103 = \bar{1},77815.$$

De unde $\beta = 53^0\, 7'\, 49''$.

Valoarea lui α este dată de $(2k+1)\pi \pm 53^0\, 7'\, 49''$. Pentru cazul $k=0$, avem $\alpha = 180^0 - 53^0\, 7'\, 49'' = 126^0\, 52'\, 11''$.

Observare. În tablele logaritmice nu sunt calculaţi logaritmii funcţiunilor secantă şi cosecantă, deoarece $\sec\alpha = \frac{1}{\cos\alpha}$, $\operatorname{cosec}\alpha = \frac{1}{\sin\alpha}$, aşa că, aplicând logaritmii, avem $\log\sec\alpha = -\log\cos\alpha$, $\log\operatorname{cosec}\alpha = -\log\sin\alpha$ şi cum $\log\sin\alpha$ şi $\log\cos\alpha$ sunt daţi în table, urmează că şi logaritmii funcţiunilor secantă şi cosecantă vor fi cunoscuţi tot cu aceleaşi table.

I. *Să se rezolve ecuaţia* $\sin(45^0 - 3x) = \cos(2x - 60^0)$.

Inlocuind cosinusul unui unghi cu sinusul unghiului complimentar, ecuaţia devine

$$\sin(45^0 - 3x) = \sin[90^0 - (2x - 60^0)],$$

$$\sin(45^0 - 3x) = \sin(150^0 - 2x) = \sin[180^0 - 150^0 - 2x)] =$$

$$\sin(30^0 + 2x).$$

Arcele $45^0 - 3x$ şi $30^0 + 2x$ având sinusurile egale, ele sunt sau egale sau suplimentare, sau, mai general, verifică relaţiile

(1) $$45^0 - 3x = 2k\pi + (30^0 + 2x),$$

(2) $$45^0 - 3x = (2k + 1)\pi - (30 + 2x),$$

k fiind un întreg oarecare.

Din întâia, avem $3x + 2x = 45^0 - 30^0 - 2k\pi$,

de unde $$5x = 15^0 - 2k\pi,$$

sau, înlocuind pe $-k$ cu h, avem

$$x = 2h\frac{\pi}{5} + 3^0,$$

h fiind un întreg oarecare.

Din ecuaţia (2), dezvoltând, avem

$$3x - 2x = 45^0 + 30^0 - (2k + 1)\pi,$$

sau $$x = 75^0 - 2k\pi - \pi,$$

$$x = 75^0 - 180^0 - 2k\pi,$$

de unde

(4) $$x = -105^0 - 2k\pi = -105^0 + 2h\pi,$$

h fiind un întreg oarecare.

Expresiunile (3) şi (4) ne dau toate soluţiile ecuaţii considerate.

II. *Să se rezolve ecuaţia*

$$2\sin^2 x - 5\cos x - 4 = 0.$$

Înlocuind pe $\sin^2 x$ cu $1 - \cos^2 x$, ecuaţia devine

$$2(1 - \cos^2 x) - 5\cos x - 4 = 0,$$

de unde

$$2 - 2\cos^2 x - 5\cos x - 4 = 0,$$

sau

$$2\cos^2 x + 5\cos x + 2 = 0.$$

Ecuaţia fiind de gradul al doilea în $\cos x$, rezolvând-o avem

$$\cos x = \frac{-5 \pm \sqrt{25 - 4.4}}{4} = \frac{-5 \pm \sqrt{9}}{4} = \frac{-5 \pm 3}{4}.$$

Avem deci două cazuri de considerat

$$\cos x = \frac{-5 + 3}{4} = \frac{-1}{2}, \cos x = \frac{-5 - 3}{4} = -2.$$

Cosinusul unui unghi fiind cuprins între -1 şi $+1$, nu se poate să avem $\cos x = -2$. Rămâne numai de considerat

$$\cos x = \frac{-1}{2},$$

de unde $x = 120^0$. Toate unghiurile care au acelaş cosinus egal cu $\frac{-1}{2}$ sunt date de

$$x = 2k\pi \pm 120^0,$$

sau
$$x = k.\, 360^0 \pm 120^0,$$

k fiind un întreg oarecare.

III. Să se rezolve ecuaţia

$$\operatorname{cotg} x = 2 \cos x.$$

Înlocuind $\operatorname{cotg} x = \frac{\cos x}{\sin x}$, ecuaţia devine

$$\frac{\cos x}{\sin x} = 2 \cos x,$$

de unde

$$\cos x = 2 \cos x \sin x,$$

sau
$$\cos x - 2 \cos x \sin x = 0$$
$$\cos x (1 - 2 \sin x) = 0.$$

Acest produs de doi factori este nul când unul din factori se anulează. Deci,

$$\cos x = 0, \quad 1 - 2 \sin x = 0.$$

Din $\cos x = 0$, rezultă că $x = 90^0$, iar forma generală a unghiurilor este

(5) $$x = 2k\pi \pm 90^0, \quad x = k.\, 360^0 \pm 90^0.$$

k fiind întreg oarecare.

Din $1 - 2 \sin x = 0$, rezultă

$$\sin x = \frac{1}{2},$$

deci $x = 30^0$. Forma generală a unghiurilor este

(6) $$\begin{cases} x = 2k\pi + 30^0, \\ x = (2k+1)\pi - 30^0, \end{cases}$$

k fiind un întreg oarecare.

Soluţiile ecuaţii considerate sunt date de expresiile (5) şi (6)

IV. *Să se afle unghiul x pentru care avem*

$$\sin x = -\frac{1}{2}, \quad \cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Ca verificare, se vede că avem

$$\sin^2 x + \cos^2 x = \left(\frac{-1}{2}\right)^2 + \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} + \frac{3}{4} = 1,$$

astfel că suntem siguri că problema are soluție. Pentru a o găsi, să observăm că din ecuația

$$\sin x = -\frac{1}{2},$$

dacă ne mărginim numai la unghiurile mai mici ca 360°, rezultă

$$x = 180^\circ + 30^\circ, \quad x = 360^\circ - 30^\circ = 330^\circ,$$

Să vedem care din aceste valori ale lui x verifică și ecuația a doua

$$\cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Trebue să alegem pe aceea, care are cosinusul negativ, căci $\cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2} < 0$.

Dar $x = 210^\circ$ dă $\cos x = \cos 210^\circ < 0$, pe când $\cos 330^\circ > 0$. Singura soluție care verifică deodată ambele ecuații este

$$x = 210^\circ = 180^\circ + 30^\circ = \pi + \frac{\pi}{6} = \frac{7\pi}{6}.$$

V. *Să se rezolve ecuația*

$$\cos x + \sin x = \sqrt{2}.$$

Știm că sinusul și cosinusul unui unghi se exprimă rațional cu ajutorul tangentei unghiului pe jumătate, înlocuind, avem

$$\frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}} + \frac{2 \operatorname{tg} \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}} = \sqrt{2},$$

unde punând $\operatorname{tg} \frac{x}{2} = y$, avem

$$\frac{1 - y^2}{1 + y^2} + \frac{2y}{1 + y^2} = \sqrt{2},$$

sau

$$1 - y^2 + 2y = (1 + y^2)\sqrt{2}.$$

$$y^2(\sqrt{2} + 1) - 2y + \sqrt{2} - 1 = 0.$$

Rezolvând-o în y, avem

$$y=\frac{1\pm\sqrt{1-(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1)}}{\sqrt{2}+1}$$

$$y=\frac{1\pm\sqrt{1-(2-1)}}{\sqrt{2}+1}=\frac{1}{\sqrt{2}+1}=\frac{\sqrt{2}-1}{(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1)}=\frac{\sqrt{2}-1}{2-1}$$

$$y=\sqrt{2}-1,\ \operatorname{tg}\frac{x}{2}=\sqrt{2}-1.$$

Deşi este uşor de ştiut cât este unghiul $\frac{x}{2}$, căci tangenta lui este $\sqrt{2}-1$, adică $22^0 30'$, să presupunem că n'am şti aceasta, şi totuşi voim a afla valoarea lui x, care se cere, şi care cu ajutorul altei funcţiuni trigonometrice este mai uşor de aflat.

Pentru aceasta, să exprimăm tg $\frac{x}{2}$ cu ajutorul lui tg$x$, şi avem

$$\operatorname{tg}x=\frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}=\frac{2(\sqrt{2}-1)}{1-(\sqrt{2}-1)^2}$$

de unde

$$\operatorname{tg}x=\frac{2(\sqrt{2}-1)}{1-(2+1-2\sqrt{2})}=\frac{2(\sqrt{2}-1)}{2\sqrt{2}-2}=\frac{2(\sqrt{2}-1)}{2(\sqrt{2}-1)}=1.$$

Iată că mai uşor se află unghiul $x=45^0$, fiindcă se ştie că $\operatorname{tg}45^0=1$.

Deci forma generală a unghiurilor x este dată de ecuaţia $\operatorname{tg}x=\sqrt{2}-1$, adică $22^0 30'$, şi pentru că este dată cu ajutorul unei tangente, avem

$$\frac{x}{2}=k\pi+22^0 30',$$

astfel că

$$x=2k\pi+2.22^0 30',$$
$$x=2k\pi+45^0,$$

k fiind un întreg oarecare.

Ca verificare, pentru cazul $k=0$, avem $x=45^0$ şi înlocuind în ecuaţia dată, obţinem

$$\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}=\sqrt{2}.$$

VI. *Să se rezolve ecuaţia*

$$\operatorname{tg}x+\operatorname{tg}(45^0+x)=2.$$

Dezvoltând pe tg (45^0+x), avem

$$\operatorname{tg} x+\frac{\operatorname{tg} 45^0+\operatorname{tg} x}{1-\operatorname{tg} 45^0 \operatorname{tg} x}=2,$$

sau

$$\operatorname{tg} x+\frac{1+\operatorname{tg} x}{1-\operatorname{tg} x}=2.$$

Punând $\operatorname{tg} x=y$, avem ecuaţia

$$y+\frac{1+y}{1-y}=2,$$

sau

$$y^2-4y+1=0.$$

Rezolvând în raport cu y, avem

$$y=2\pm\sqrt{3},$$

deci două soluţii

$$\operatorname{tg} x=2+\sqrt{3},\quad \operatorname{tg} x=2-\sqrt{3}.$$

Fiindcă nu se vede imediat ce valoare are unghiul x după valoarea tangentei sale, să calculăm $\sin 2x$, căci ştim pentru câteva unghiuri sinusurile lor ($\sin 30^0=\frac{1}{2}$, $\sin 45^0=\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\sin 60^0=\frac{\sqrt{3}}{2}$)

Avem pentru $\operatorname{tg} x=2+\sqrt{3}$,

$$\sin 2x=\frac{2\operatorname{tg} x}{1+\operatorname{tg}^2 x}=\frac{2(2+\sqrt{3})}{1+(2+\sqrt{3})^2}=\frac{2(2+\sqrt{3})}{1+4+4\sqrt{3}+3},$$

$$\sin 2x=\frac{2(2+\sqrt{3})}{4(2+\sqrt{3})}=\frac{1}{2}$$

Deci $2x=30^0$ sau $180^0-30^0=150^0$ iar $x=15^0$ sau 75^0. Deoarece $\operatorname{tg} x=2+\sqrt{3}>1$, urmează că $x>45^0$, deci trebue a lua pentru x,

$$x=75^0.$$

Forma generală a unghiurilor x, date cu ajutorul tangentei, $\operatorname{tg} x=2+\sqrt{3}$, fiind

$$k\pi+a,$$

în cazul nostru este

$$k\pi+75^0=k.180^0+75^0.$$

Pentru cealaltă soluţie, $\operatorname{tg} x=2-\sqrt{3}$, avem, deasemenea,

$$\sin 2x=\frac{2\operatorname{tg} x}{1+\operatorname{tg}^2 x}=\frac{2(2-\sqrt{3})}{1+(2-\sqrt{3})^2}.$$

Deci $2x=30^0$ sau 150^0, şi deci $x=15^0$ sau 75^0. Dar, cum $\operatorname{tg}x=2-\sqrt{3}<1$, $x<45^0$; deci trebue luată soluţia $x=15^0$, iar forma generală este

$$x=15^0+k.\pi=15^0+k.\ 180^0,$$

k fiind un întreg oarecare.

Observare. Dacă n'am fi putut să aflăm uşor valoarea unghiului cum a fost în cazul actual, atunci se calculează numeric valorile lui tg$x$,

$$\operatorname{tg}x=2+\sqrt{3},\ \operatorname{tg}x=2-\sqrt{3},$$

înlocuind pe $\sqrt{3}$ cu aproximaţie (dată de Tablele lui Dupuis, p. 147). Avem pentru prima

$$\operatorname{tg}x=2+\sqrt{3}=2+1{,}732=3{,}732.$$

Pentru a calcula pe x, aplicăm logaritmii şi avem

$$\log\operatorname{tg}x=\log 3{,}732=0{,}57104,$$

de unde revenind la unghiuri, avem $x=75^0$, aproape. Sau, mai bine căutăm în Tablele lui Dupuis, la Lignes trigonométriques naturelles, care este unghiul când se cunoaşte tangenta sa şi avem $x=75^0$ aproape.

Soluţia cealaltă e dată de

$$\operatorname{tg}x=2-\sqrt{3}=2-1{,}732=0{,}268.$$

De unde

$$\log\operatorname{tg}x=\log 0{,}268=\bar{1}{,}42813,$$

şi aproximativ,

$$x=15^0.$$

Forma generală a soluţiilor este deci

$$x=k.\ 180+15^0,\ x=k.\ 180+75^0.$$

VII. *Să se rezolve ecuaţia*

$$4(1+\sin x)=3\cos^2 x.$$

Înlocuind $\cos^2 x=1-\sin^2 x$, avem ecuaţia

$$3\sin^2 x+4\sin x+1=0.$$

Rezolvând-o în raport cu sin$x$, avem

$$\sin x=\frac{-2\pm\sqrt{4-3}}{3},$$

$$\sin x = -1, \ \sin x = -\frac{1}{3}.$$

Considerând soluția $\sin x = -1$, unghiul $x = 270^0 = \frac{3\pi}{2}$; deci forma generală, fiindcă este dat cu un sinus, este

$$x = 2k\pi + 270^0 \quad x = (2k+1)\pi - 270^0,$$

sau

(7) $$x = k.360^0 + 270^0, \quad x = (2k+1)180^0 - 270^0,$$

k fiind un întreg oarecare.

Pentru a doua soluție $\sin x = -\frac{1}{3}$, operăm astfel. Calculăm unghiul z, pentru care avem

$$\sin z = \frac{1}{3};$$

atunci unghiul x este egal cu $180^0 + z$. Aplicând logaritmii, avem

$$\log\sin z = \log\frac{1}{3} = -\log 3 = -0{,}47712 = \bar{1}{,}52288,$$

$$z = 19^0 28' 16''.$$

Deci

$$x = 180^0 + z = 199^0 28' 16''.$$

Unghiul x fiind dat cu un sinus, forma generală a acestor unghiuri este

$$2k\pi + 199^0 28' 16'', \quad (2k+1)\pi - 199^0 28' 16'',$$

sau în grade,

(8) $$k.360^0 + 199^0 28' 16'', \quad (2k+1)\, 180^0 - 199^0 28' 16'',$$

k fiind întreg oarecare.

Soluția generală a ecuații considerate este dată de formulele (7) și (8).

EXERCIȚII.

1, Să se rezolve ecuația $\sin x = -\frac{2}{3}$.

R. $\sin y = \frac{2}{3}$, $y = 41^0 48' 38''$; $x = 2K\pi + 221^0 48' 38''$, $x = (2K+1)\pi - 221^0 48' 38''$.

2 Să se rezolve ecuația $\cos. = -\frac{4}{5}$.

R. $\cos y = \frac{4}{5}$, $y = 36^0 52' 12''$; $y = 2K\pi \pm (180^0 - 36^0 52' 12'') = 2K\pi \pm 143^0 7' 48''$.

3. Să se rezolve ecuația $\mathrm{tg}x = -\frac{\sqrt{3}}{5}$.

R. $\mathrm{tg}y = \frac{\sqrt{3}}{5}$. $y = 19^\circ 6' 23''$; $x = K\pi + (180^\circ - 19^\circ 6' 23'') = K\pi + 160^\circ 53' 37''$.

4. Să se rezolve ecuația $\sec x = \frac{4}{3}$.

R. $\cos x = \frac{3}{4}$; $x = 2K\pi + 41^\circ 24' 35''$.

5. Să se rezolve ecuația

$$\sin^2 x - 2\cos x + \frac{1}{4} = 0.$$

R. $x = 2K\pi \pm 60^\circ$.

6. Să se afle unghiul x pentru care avem în acelaş timp

$$\sin x = -\frac{1}{2}, \quad \cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

R. 330° sau $\frac{11\pi}{6}$.

7. Să se afle unghiurile pozitive mai mici ca 900° care satisfac ecuații

$$\cos^2 x = \frac{1}{2}.$$

R. $\cos x = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$. Pentru $\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $x = 2K\pi \pm 45^\circ$; $K = 0$, $x = 45^\circ$; $K = 1$, $x = 360^\circ + 45^\circ$, $x = 360^\circ - 45^\circ$; $K = 2$, $x = 720^\circ + 45^\circ$, $x = 720^\circ - 45^\circ$.

Pentru $\cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$, $x = 180^\circ - 45^\circ = 135^\circ$, $x = 2K\pi \pm 135^\circ$, $K = 0$, 135°; $K = 1$, $360^\circ + 135^\circ$, $360^\circ - 135^\circ$; $K = 2$, $720^\circ + 135^\circ$, $720^\circ - 135^\circ$.

8[1]. Să se rezolve ecuația

$$\cos x - \sin x = -\sqrt{2}.$$

R. Afară de procedeul aplicat ecuații V (No. 78), mai putem rezolva ridicând la patrat ambii membrii. Avem

$$\cos^2 x + \sin^2 x - 2\sin x\cos x = 2, \ \sin 2x = -1; \ 2x = 2K\pi + 270^\circ,$$

$x = K.\,180^\circ + 135$, K fiind un număr cu soț sau zero. Valorile pentru K, nepereche corespund ecuații $\cos x - \sin x = \sqrt{2}$.

9. Să se rezolve ecuația

$$\mathrm{tg}2x = 3\mathrm{tg}x.$$

R. Se înlocueşte $\mathrm{tg}2x$ în funcție de $\mathrm{tg}x$. Avem sau $\mathrm{tg}x = 0$, sau $\mathrm{tg}x = \frac{\pm 1}{\sqrt{3}}$. Deci, $x = K.\,180^\circ$, sau $x = K\pi \pm \frac{\pi}{6}$.

10. Să se găsească cea mai mică valoare a lui x dată de ecuația

$$\sin^2 x = \frac{\sin^3 15^\circ 42' 46'' \times \mathrm{tg}^5 208^\circ 9' 23''}{\sqrt{\cos 82^\circ 59' 28'' \times \sqrt[3]{0{,}1817}}}.$$

[1] Incepând cu acesta, exemplele următoare nu fac parte din program.

R. Se reduce la primul cadran și se aplică logaritmii; avem

$$3\log\sin x = 3\log\sin 15^0 42'46'' + 5\log\mathrm{tg}28^0 9'23'' +$$

$$-\frac{1}{2}\log\cos 82^0 59'28'' - \frac{1}{3}\log 0{,}1817,$$

$$3\log\sin x = 3\times\overline{1},43267 + 5\times\overline{1},72853 - \frac{1}{2}\times\overline{1},08644 - \frac{1}{3}\times\overline{1},25935,$$

$$3\log\sin x = \overline{2},29801 + \overline{2},64265 + \frac{0{,}91356}{2} + \frac{0{,}74065}{3},$$

$$3\log\sin x = \overline{3},64432,$$

$$\log\sin x = \frac{\overline{3} + 0{,}64432}{3} = \overline{1} + 0{,}21477 = \overline{1},21477,$$

$$x = 9^0 26'15''.$$

11. Să se calculeze valoarea lui x dată de ecuația

$$x = \sqrt{(345{,}2)^2 + (15{,}43)^2}\,.$$

R. Cătimea de sub radical e de forma $a^2 + b^2$, care se poate scrie $a^2 + b^2 = a^2\left(1 + \frac{b^2}{a^2}\right)$. Se pune $\frac{b}{a} = \mathrm{tg}\alpha$ și expresia devine $a^2(1 + \mathrm{tg}^2\alpha) = \frac{a^2}{\cos^2\alpha}$. În cazul nostru, avem

$$x^2 = (345{,}2)^2\left[1 + \left(\frac{15{,}43}{345{,}2}\right)^2\right].$$

Punem $\mathrm{tg}\alpha = \frac{15{,}43}{345{,}2}$ și aplicând logaritmii, avem $\log\mathrm{tg}\alpha = \log 15{,}43 - \log 345{,}2$; de unde $\alpha = 2^0 33'33''$. Expresia este

$$x^2 = \frac{(345{,}2)^2}{\cos^2\alpha},\quad x = \frac{345{,}2}{\cos\alpha}.$$

Se aplică logaritmii și se găsește $\log x = 2{,}53851$, $x = 345{,}55$.

12 Să se calculeze x dat de ecuația

$$x^2 = (29{,}85)^2 - (17{,}53)^2.$$

R. Avem $x^2 = (29{,}85)^2\left[1 - \left(\frac{17{,}53}{29{,}85}\right)^2\right]$. Se pune $\cos\alpha = \frac{17{,}53}{29{,}85}$;

$$\alpha = 54^0 2'14''.$$

Atunci $x^2 = (29{,}85)^2(1 - \cos^2\alpha) = (29{,}85)^2\sin^2\alpha$, $x = 29{,}85\sin\alpha$. Se aplică logaritmii și se afla $x = 24{,}16$.

13. Să se calculeze valoarea expresiunei

$$x = m\sin a + n\cos a,$$

unde $a = 35^0 40'$, $m = 12{,}56$, $n = 10{,}38$.

R. Avem

$$x = m\left(\sin a + \frac{n}{m}\cos a\right) = m(\sin a + \mathrm{tg}\beta\cos a),\ \mathrm{tg}\beta = \frac{n}{m};$$

$$x = m\left(\sin a + \frac{\sin\beta}{\cos\beta}\cos a\right) = \frac{m}{\cos\beta}\sin(a+\beta).$$

$\log x = \log m + \log\sin(a+\beta) - \log\cos\beta$; $\beta = 39^\circ 34' 18''$, $x = 15{,}755$.

14. Să se calculeze valoarea expresiunei

$$x = m + n\,\mathrm{tg}a,$$

unde $m = 10$, $n = 12$, $a = 30^\circ$.

R. $x = n\left(\frac{m}{n} + \mathrm{tg}a\right)$; se spune $\frac{m}{n} = \mathrm{tg}\beta$.

$$x = n(\mathrm{tg}\beta + \mathrm{tg}a) = \frac{n\sin(\beta + a)}{\cos\beta\cos a};$$

$\log x = \log n + \log\sin(\beta + a) - \log\cos\beta - \log\cos a$.

$$\beta = 39^\circ 48' 20'',\ x = 16{,}93, \text{ aprox.}$$

15. Să se calculeze valoarea expresiunei

$$x = m + n\sin a,$$

unde $m = 30$, $n = 18$, $a = 20^\circ$.

R. $x = n\left(\frac{m}{n\cos a}\cos a + \sin a\right) = n(\cos a\,\mathrm{tg}\beta + \sin a)$, $\mathrm{tg}\beta = \frac{m}{n\cos a}$

$x = n\left(\cos a\frac{\sin\beta}{\cos\beta} + \sin a\right) = \frac{n\sin(a+\beta)}{\cos\beta}$; $\beta = 60^\circ 35' 6''$. $x = 36{,}15$, aprox.

16. Să se discute ecuaţia $2\sin^2 x - 3\sin x + \lambda = 0$, λ fiind un parametru variabil.

R. Ecuaţia fiind de gradul al doilea în $\sin x$, realizantul este $R = 3^2 - 4.2\lambda$, $R = 9 - 8\lambda$. Rădăcinile fiind sinusul unui unghi, sunt cuprinse între -1 şi $+1$. În loc de a pune condiţia ca o ecuaţie de gradul al doilea să aibă rădăcinile cuprinse în intervalul $(-1, +1)$, este mai uşor a transforma ecuaţia dată în alta, care să aibă rădăcinile sale y legate de ale ecuaţii date de relaţia

$$y = \frac{\sin x - 1}{\sin x + 1},$$

astfel că, dacă ştim că rădăcinile $\sin x$ ale ecuaţii date sunt cuprinse între -1 şi $+1$, atunci rădăcinile y ale ecuaţii transformate vor avea semnul expresii

$$y = \frac{\sin x - 1}{\sin x + 1}.$$

Dar avem

$$y = \frac{(\sin x - 1)(\sin x + 1)}{(\sin x + 1)^2};$$

deci semnul lui y depinde numai de $(\sin x - 1)(\sin x + 1)$, căci numitorul lui y fiind un pătrat perfect are semnul plus. Însă semnul expresii $(\sin x - 1)(\sin x + 1) = (u - 1)(u + 1)$, $u = \sin x$, când se înlocueşte u cu valori cuprinse între -1 şi $+1$, este negativ [căci se ştie că un trinom de gradul al doilea $(u-1)(u+1)$ are semn contrar cu termenul său de gradul cel mai înalt, u^2, când se înlocueşte u cu valori cuprinse între acelea ce anulează trinomul şi care sunt -1, $+1$].

Aşa dar, în loc de a scrie că ecuaţia dată are rădăcinile $\sin x$ cuprinse între -1 şi $+1$, vom scrie că ecuaţia ce dă pe y are rădăcinile negative.

Înlocuind pe $\sin x$ cu valoarea sa din relaţia

$$y=\frac{\sin x-1}{\sin x+1},\quad y\sin x+y=\sin x-1,$$

adică

$$\sin x=\frac{1+y}{1-y},$$

în ecuaţia dată

$$2\sin^2 x-3\sin x+\lambda=0,$$

avem

$$2\left(\frac{1+y}{1-y}\right)^2-3\,\frac{1+y}{1-y}+\lambda=0.$$

Desvoltând, avem

$$2(1+y)^2-3(1+y)(1-y)+\lambda(1-y)^2=0,$$

sau, făcând toate calculele şi aranjând, obţinem

$$f(y)=y^2(5+\lambda)+2y(2-\lambda)+\lambda-1=0,$$

care este ecuaţia ce dă valorile lui y.

La orice rădăcină negativă a acestei ecuaţii corespunde o valoare pentru $\sin x$ cuprinsă între -1 şi $+1$, deci acceptabilă şi la o rădăcină pozi ivă a ecuaţii $f(y)=0$ nu corespunde o valoare pentru $\sin x$ cuprinsă între -1 şi $+1$, deci neacceptabilă pentru ecuaţia dată.

Realizantul ecuaţii $f(y)=0$ este

$$(2-\lambda)^2-(5+\lambda)(\lambda-1)=9-8\lambda,$$

analog cu realizantul ecuaţii date, astfel că ambele ecuaţii au rădăcini reale în acelaş timp.

Produsul rădăcinilor ecuaţii $f(y)=0$ este

$$P=y'y''=\frac{\lambda-1}{\lambda+5}=\frac{(\lambda-1)(\lambda+5)}{(\lambda+5)^2},$$

iar semnul său depinde de trinomul $(\lambda-1)(\lambda+5)$. Pentru valori ale lui λ exterioare intervalului $(-5, 1)$, produsul este pozitiv, iar pentru valori cuprinse în acest interval. produsul este negativ.

Suma rădăcinilor ecuaţii $f(y)=0$ este

$$S=y'+y''=\frac{-2(2-\lambda)}{\lambda+5}=\frac{2(\lambda-2)}{\lambda+5}=2\,\frac{(\lambda-2)(\lambda+5)}{(\lambda+5)^2},$$

şi semnul său depinde de trionul $(\lambda-2)(\lambda+5)$. Deci, pentru valori ale lui λ exterioare intervalului $(-5,2)$ suma este pozitivă, iar pentru cele interioare, suma este negativă.

Realizantul fiind $R=9-8\lambda$, dacă $\lambda<\frac{9}{8}$, $R=-8\left(\lambda-\frac{9}{8}\right)$ este pozitiv, iar dacă $\lambda>\frac{9}{8}$, $R<0$

Avem deci tabloul discuţii date

λ	Realizantul	Produsul P	Suma S	Rădăcinile y	Rădăcinile $\sin x$
$-\infty$					
	$+$	$+$	$+$	Reale, ambele pozitive	Nu există valori pentru $\sin x$
-5					
	$+$	$-$	$-$	Reale, una pozitivă, una negativă	Una acceptabilă pentru $\sin x$
1					
	$+$	$+$	$-$	Reale, ambele negative	Două acceptabile pentru $\sin x$
$\frac{9}{8}$					
	$-$	$+$	$-$	imaginare	Nici una
2					
	$-$	$+$	$+$	imaginare	Nici una
∞					

Deci, când $-5<\lambda<1$, numai o rădăcină y este negativă, o singură valoare acceptabilă pentru $\sin x$; când $1<\lambda<\frac{9}{8}$, ambele rădăcini y fiind negative, corespund două valori acceptabile pentru $\sin x$.

17. Să se rezolve sistemul de ecuaţii

$$x+y=60^\circ,\quad \sin x+\sin y=0{,}9.$$

R. Se înlocueşte $\sin x+\sin y$ cu $2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}$, de unde, aplicând logaritmii se calculează $\cos\frac{x-y}{2}$ şi deci şi $(x-y)$. Cunoscând $(x+y)$ şi $(x-y)$, se află $x=55^\circ50'30''$, $y=4^\circ9'30''$.

La fel se rezolvă sistemele

$$x-y=a,\ \sin x+\sin y=b;\quad x+y=a,\ \sin x-\sin y=b,$$
$$x-y=a,\ \sin x-\sin y=b;\quad x\pm y=a,\ \cos x\pm\cos y=b.$$

18. Să se rezolve sistemul de ecuaţii

$$x+y=45^\circ,\quad \sin x\sin y=0{,}12.$$

R. Avem $\cos(x+y)=\cos 45^\circ$, de unde se calculează $\cos x\cos y$. Ţinând seamă de a doua, se află $\cos(x-y)$ şi deci $(x-y)$. Se găseşte

$$x=31^\circ52'7'',\quad y=13^\circ7'53''.$$

La fel se rezolvă sistemele

$$x-y=a,\ \sin x\sin y=b;\quad x\pm y=a,\ \cos x\cos y=b.$$

19. Să se rezolve sistemul

$$x+y=80^\circ,\quad \frac{\sin x}{\sin y}=\frac{3}{2}.$$

R. Din ecuaţia a doua avem

$$\frac{\sin x-\sin y}{\sin x+\sin y}=\frac{3-2}{3+2}=\frac{1}{5}.$$

Se înlocuesc termenii raportului întâi cu formule calculabile prin logaritmi, de unde se găseşte $\operatorname{tg}\frac{x-y}{2}=\frac{1}{5\operatorname{cotg}\frac{x+y}{2}}$, $\frac{x}{2}-\frac{y}{2}=9^\circ31'35''$.

$\frac{x}{2}+\frac{y}{2}=40^0$; adunând și scăzând, se obține $x=49^031'35''$, $y=30^028'25''$

La fel se rezolvă sistemele

$$x-y=a,\ \frac{\sin x}{\sin y}=b;\quad x\pm y=a,\ \frac{\cos x}{\cos y}=b.$$

20. Să se rezolve sistemul de ecuații

$$x+y=45^0,\ \mathrm{tg}x+\mathrm{tg}y=0{,}9.$$

R. Se înlocuește $\mathrm{tg}x+\mathrm{tg}y=\frac{\sin(x+y)}{\cos x\cos y}$, de unde se calculează $\cos x\cos y$. Se știe că $2\cos x\cos y=\cos(x+y)+\cos(x-y)$, de unde se află $\cos(x-y)$; $x=37^036'8''$, $z=7^023'52''$.

La fel se rezolvă sistemele

$$x-y=a,\ \mathrm{tg}x+\mathrm{tg}y=b;\ x-y=a,\ \mathrm{tg}x-\mathrm{tg}y=b.$$

Se putea și astfel rezolva problema dată, aplicând tangenta lui $(x\pm y)$ și apoi luând ca necunoscute $\mathrm{tg}x$ și $\mathrm{tg}y$, pe care le găseam cu o ecuație de gradul al doilea, căreia i se știe suma rădăcinilor, $\mathrm{tg}x+\mathrm{tg}y=0{,}9$ și produsul $\mathrm{tg}x.\mathrm{tg}y=01,$; această ecuație este $z^2-0{,}9z+0{,}1=0$, pe care rezolvând-o, avem valorile lui $\mathrm{tg}x$, $\mathrm{tg}y=\frac{1}{2}(0{,}9\pm\sqrt{0{,}41})$.

21. Să se rezolve sistemul de ecuații

$$x+y=70^0,\ \mathrm{tg}x\mathrm{tg}y=0{,}4.$$

R. Din a doua ecuație, avem

$$\frac{\sin x\sin y}{\cos x\cos y}=\frac{0{,}4}{1},\quad \frac{\cos x\cos y+\sin x\sin y}{\cos x\cos y-\sin x\sin y}=\frac{1+0{,}4}{1-0{,}4}=\frac{1{,}4}{0{,}6}=\frac{0{,}7}{0{,}3},$$

$$\frac{\cos(x-y)}{\cos(x+y)}=\frac{7}{3}$$

Aplicând logaritmii, se calculează $\log\cos(x-y)$ și deci și $(x-y)$; de unde $x=53^031'40''$, $y=16^028'20''$.

Se mai putea, aplicând $\mathrm{tg}(x+y)$ și luând ca necunoscute $\mathrm{tg}x$, $\mathrm{tg}y$. La fel se rezolvă sistemul

$$x-y=a,\ \mathrm{tg}x\mathrm{tg}v=b.$$

22. Să se rezolve sistemul de ecuații

$$x+y=45^0,\ \mathrm{tg}x\mathrm{cotg}y=\frac{5}{6}.$$

R. Din ecuația a doua, avem

$$\frac{\cos x\sin y}{\sin x\cos y}=\frac{6}{5},\quad \frac{\cos x\sin y-\sin x\cos y}{\cos x\sin y+\sin x\cos y}=\frac{6-5}{6+5}.$$

$$\frac{\sin(y-x)}{\sin(y+x)}=\frac{1}{11}.$$

Aplicând logaritmii, se găsește $\sin(y-x)=\frac{\sqrt{2}}{24}$; $y-x=3^041'8''$, $x=20^0\,39'26''$, $y=24^020'34''$.

23. Să se rezolve sistemul

$$2\cos x\cos y=1,\quad \operatorname{tg}x+\operatorname{tg}y=2.$$

R. Se înlocuește primul membru al ecuației a doua, cu formulă calculabilă prin logaritmi, de unde $\sin(x+y)=1$, $x+y=90^\circ$. Din ecuația întâi, avem $2\cos x\sin x=1$, $\sin 2x=90^\circ$, $x=y=45^\circ$.

24. Să se rezolve sistemul

$$\operatorname{tg}x+\operatorname{tg}y=1,\quad \operatorname{tg}(x+y)=\frac{4}{3}.$$

R. $\operatorname{tg}x$ și $\operatorname{tg}y$ sunt rădăcinile ecuației $z^2-z+\frac{1}{4}=0$; $\operatorname{tg}x=\operatorname{tg}y=\frac{1}{2}$; $x=y=26^\circ33'54''$.

25. Să se elimine x între ecuațiile

$$\sin x+\cos x=a,\quad \sec x+\operatorname{cosec}x=b.$$

R. A elimina pe x între aceste ecuații înseamnă a egala valorile lui x date de fiecare din cele două ecuații, sau a înlocui în ecuația a doua pe x cu valoarea dată de ecuația întâi. Ridicând la patrat prima ecuație, avem

$$\sin^2x+\cos^2x+2\sin x\cos x=a^2,\quad 1+\sin 2x=a^2,\quad \sin 2x=a^2-1.$$

Din a doua, ținând seamă de prim , avem

$$\frac{1}{\cos x}+\frac{1}{\sin x}=b,\quad \frac{\sin x+\cos x}{\sin x\cos x}=b,\quad \sin 2x=\frac{2a}{b}.$$

Egalând aceste două valori ale lui $\sin 2x$, avem

$$a^2-1=\frac{2a}{b},$$

care este rezultatul eliminării lui x, sau, condiția ca cele două ecuații date să fie compatibile.

26. Să se elimine x între ecuațiile

$$\sin x+\cos x=a,\quad \operatorname{tg}2x+\operatorname{cotg}2x=b.$$

R. Din prima, $\sin 2x=a-1$. Din a doua, $b\sin 2x\cos 2x=1$, de unde $\cos 2x=\frac{1}{b\sin 2x}=\frac{1}{b(a^2-1)}$. Se înlocuește în relația $\sin^2 2x+\cos^2 2x=1$, și avem rezultatul eliminării, $(a^2-1)^2+\frac{1}{b^2(a^2-1)^2}=1$.

27. Să se arate că dacă unghiul α tinde către zero, raportul $\frac{\sin\alpha}{\alpha}$ tinde către 1.

R. Considerând liniile trigonometrice ale unghiului α (Fig. 40), se vede că $MP<\operatorname{arc}AM<AT$, adică

$$\sin\alpha<\alpha<\operatorname{tg}\alpha.$$

De unde

$$\sin\alpha<\alpha<\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$$

și divizând cu $\sin\alpha$, avem

$$1 < \frac{\alpha}{\sin\alpha} < \frac{1}{\cos\alpha}.$$

Dar când α tinde către zero, $\cos\alpha$ tinde către 1, așa că raportul variabil $\frac{\alpha}{\sin\alpha}$ rămâne cuprins între două cantități 1 și $\frac{1}{\cos\alpha}$, ce tind ambele către 1. Deci și $\frac{\alpha}{\sin\alpha}$ tinde către 1, când α tinde zero.

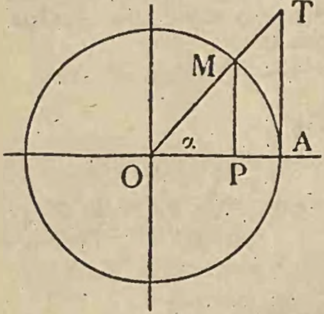

Fig. 40.

28. Să se arate că raportul $\frac{\mathrm{tg}\alpha}{\alpha}$ tinde către 1, când $\alpha \to 0$.

R. Avem $\frac{\mathrm{tg}\alpha}{\alpha} = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \cdot \frac{1}{\alpha} = \frac{\sin\alpha}{\alpha} \cdot \frac{1}{\cos\alpha}$.

Factorii $\frac{\sin\alpha}{\alpha}$ și $\frac{1}{\cos\alpha}$ tind fiecare către 1.

29. Să se afle adevărata valoare a expresii

$$\frac{x\sin x}{1-\cos x},$$

când x tinde către zero.

R. Avem

$$E = \frac{x\sin x}{1-\cos x} = \frac{x\sin x}{2\sin^2\frac{x}{2}} = \frac{x 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{2\sin^2\frac{x}{2}} = \frac{x}{\sin\frac{x}{2}} \cdot \cos\frac{x}{2},$$

$$E = 2\frac{\left(\frac{x}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)} \cos\frac{x}{2}.$$

Când x tinde către zero, $\frac{x}{2}$ tinde către zero și $\frac{\left(\frac{x}{2}\right)}{\sin\frac{x}{2}} \to 1$. Deci E tinde către 2.

30. Să se afle pentru $x=0$ adevărată valoare a expresii

$$\frac{\sin mx}{\sin nx}.$$

R. Avem

$$E = \frac{\sin(mx)}{\sin nx}(mx)\frac{(nx)}{mx}\frac{1}{(nx)} = \frac{\sin(mx)}{(mx)} \cdot \frac{(nx)}{\sin(nx)} \cdot \frac{m}{n}.$$

Când x tinde către zero, expresia tinde către $\frac{m}{n}$.

31. Să se afle adevărata valoare a expresii

$$\frac{\sin(x+h) - \sin x}{h},$$

când h tinde către zero.

R. Avem

$$E=\frac{2\sin\frac{x+h-x}{2}\cos\frac{x+h+x}{2}}{h}=\frac{\sin\left(\frac{h}{2}\right)}{\left(\frac{h}{2}\right)}\cos\left(x+\frac{h}{2}\right).$$

Primul raport tinde către 1, al doilea factor către $\cos x$; E tinde către $\cos x$.

32. Să se afle adevărata valoare a expresii

$$\frac{\cos^2\alpha-\cos^2\beta}{\sin(\alpha-\beta)}$$

când $\alpha=\beta$.

R. Avem

$$E=\frac{(\cos\alpha+\cos\beta)(\cos\alpha-\cos\beta)}{\sin(\alpha-\beta)}=\frac{2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}(-2)\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}}{2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}},$$

$$E=-2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}.$$

Când $\alpha=\beta$, E tinde către $-2\sin\alpha\cos\alpha=-\sin2\alpha$.

33. Să se afle adevărata valoare a expresii

$$\frac{\sin(\alpha-30^0)}{1-2\sin\alpha}$$

pentru $\alpha=30^0$.

R. $$E=\frac{\sin(\alpha-30^0)}{2\left(\frac{1}{2}-\sin\alpha\right)}=\frac{2\sin\frac{\alpha-30^0}{2}\cos\frac{\alpha-30^0}{2}}{2(\sin30^0-\sin\alpha)}=\frac{\sin\left(\frac{\alpha}{2}-15^0\right)\cos\left(\frac{\alpha}{2}-15^0\right)}{2\sin\frac{30^0-\alpha}{2}\cos\frac{30^0+\alpha}{2}},$$

$$E=-\frac{1}{2}\frac{\cos\left(\frac{\alpha}{2}-15^0\right)}{\cos\left(\frac{\alpha}{2}+15^0\right)}.$$ Când $\alpha=30$, $\cos\left(\frac{\alpha}{2}-15^0\right)=1$,

iar E tinde către $-\frac{1}{\sqrt{3}}$.

APLICAȚIUNI LA PATRULARE(1).

79. Un studiu asupra calculului poligoanelor, în special al patrulaterelor, adică o „*Poligonometrie*“, sau chiar o *Tetragonometrie* nu există aparte. Rezolvarea poligoanelor este numai una din aplicațiile Trigonometriei, fiindcă orice figură rectilinie se poate descompune în triunghiuri.

Ne vom ocupa de patrulatere oarecare și patrulatere inscriptibile într'un cerc.

(1) Nu face parte din program.

PATRULATERE OARECARE[1].

80. **Rezolvarea patrulaterelor oarecare.** Vom stabili mai întâi câte şi ce elemente determină un patrulater oarecare.

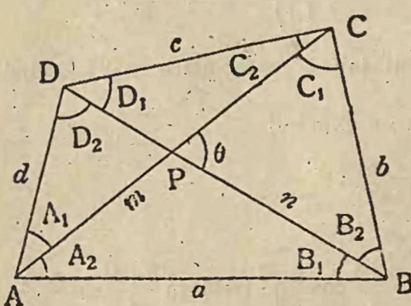

Fig. 41.

Să considerăm patrulaterul ABCD (Fig. 41) şi să notăm laturile sale cu $AB=a$, $BC=b$. $CD=c$, $DA=d$, iar diagonalele cu $AC=m$, $BD=n$. Unghiurile le vom însemna cu A, B, C, D, iar între ele avem relaţia $A+B+C+D=360^0$, sau 2π.

Diagonalele împart unghiurile în câte două unghiuri, pe care le vom nota, pentru unghiul A, cu A_1 şi A_2, pentru B, cu B_1, B_2, etc.

Fiecare diagonală împarte patrulaterul în câte două triunghiuri. Dacă unul dintre triunghiuri este determinat prin trei elemente, pentru determinarea celuilalt, ce are cu primul o latură comună, este de ajuns să cunoaştem încă două elemente noi. Astfel, ambele triunghiuri şi deci şi patrulaterul, sunt determinate prin *cinci elemente.*

Cunoscând însă trei unghiuri ale patrulaterului, în baza relaţii dintre unghiuri, cunoaştem şi unghiul al patrulea. Deci, dintre cele cinci elemente, numai *trei pot fi unghiuri, celelalte două trebue să fie laturi.* De altă parte, două dintre elementele necesare trebue să fie unghiuri, fiindcă dacă am cunoaşte numai un unghiu şi patru laturi, am avea, sau două soluţii, sau nici una.

În adevăr, fiind cunoscute a, b, c, d şi unghiul B, am putea construi sau patrulaterele ABCD, $ABCD_1$, (Fig. 42), sau nu avem nici un patrulater, cum arată figura 43.

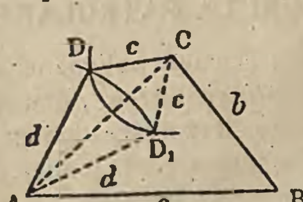

Fig. 42.

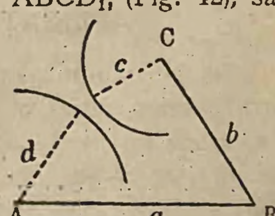

Fig. 43.

I. *Să presupunem cunoscute trei laturi a, b, c şi două unghiuri.* B şi C.

Pentru rezolvarea acestui patrulater, observăm (Fig. 41) că $C_1+A_2=180^0-B$, iar din triunghiul ABC, avem

$$\operatorname{tg}\frac{C_1-A_2}{2}=\frac{a-b}{a+b}\operatorname{cotg}\frac{B}{2}.$$

Putem afla deci unghiurile C_1 şi A_2, deci şi unghiul $C_2=C-C_1$. Pentru a calcula pe A_1 şi D, aflăm din triunghiul ABC diagonala

$$m=AC=\frac{a\sin B}{\sin C_1},$$

iar apoi, din triunghiul ACD,

$$\operatorname{tg}\frac{D-A_1}{2}=\frac{m-c}{m+c}\operatorname{cotg}\frac{C_2}{2}.$$

În fine, latura

$$d=\frac{c\sin C_2}{\sin A_1}.$$

Exemplu. $a=10$m, $b=7$m, $c=5$m, $B=87^0 24'$, $C=65^0 18'$. Avem

$$A_2+C_1=46^0 18',\ \operatorname{tg}\frac{C_1-A_2}{2}=\frac{3\operatorname{cotg}43^0 42'}{17},$$

$$\log\operatorname{tg}\frac{C_1-A_2}{2}=0{,}47712+0{,}01971-1{,}23045=\overline{1}{,}26638;$$

$$\frac{C_1-A_2}{2}=10^0 27'45'',\ \frac{C_1+A_2}{2}=23^0 9'.$$

$$A_2=35^0 50'15'',\ C_1=56^0 45'45'',\ C_2=8^0 32'14''.$$

$$m=\frac{10\sin 87^0 24'}{\sin 56^0 45'45''},\ \log m=1{,}07713,\ m=11{,}944.$$

$$\operatorname{tg}\frac{D-A_1}{2}=\frac{6{,}944\operatorname{cotg}4^0 16'7''}{16{,}944},\ \log\operatorname{tg}\frac{D-A_2}{2}=0{,}73962,$$

$$\frac{D-A_1}{2}=79^0 40'40''.$$

$$d=\frac{5\sin 8^0 32'15''}{\sin 6^0 3'12''},\ \log d=0{,}84749,\ d=7{,}0386\text{ m}.$$

$$D=165^0 24'32'',\ A_1=6^0 3'12'',\ A=41^0 53'27''.$$

II. *Se dau două laturi a, d şi trei unghiuri,* A, C, D. Unghiul B este dat de $=360^0-(A+C+D)$.

Din triunghiul ABD, avem

$$\operatorname{tg}\frac{D_2-B_1}{2}=\frac{a-d}{a+d}\operatorname{cotg}\frac{A}{2},$$

de unde aflăm $\frac{D_2-B_1}{2}$, iar suma lor este $\frac{D_2+B_1}{2}=90^0-\frac{A}{2}$.
Aflăm astfel B_1, B_2, deci şi B_2, D_1.

Din acelaş triunghi, avem

$$n=\frac{a\sin A}{\sin D_2},\quad n=\frac{d\sin A}{\sin B_1}.$$

Din triunghiul BCD, obţinem

$$b=\frac{n\sin D_1}{\sin C}=\frac{a\sin A\sin D_1}{\sin C\sin D_2}$$

$$c=\frac{n\sin B_2}{\sin C}=\frac{a\sin A\sin B_2}{\sin C\sin D_2}$$

Exemplu. $a=6$ m. $d=2{,}5$ m, $A=59^020'$, $C=98^050'$, $D=140^030'$. Să se afle laturile b şi c. Avem

$$B=360^0-298^040'=61^020'.$$

$$\operatorname{tg}\frac{D_2-B_1}{2}=\frac{3{,}5\operatorname{cotg}29^040'}{8{,}5},\ \log\operatorname{tg}\frac{D_2-B_1}{2}=\bar{1}{,}85907,$$

$$\frac{D_2-B_1}{2}=35^051'45'',\ \frac{D_2+B_1}{2}=60^020',\ D_2=96^011'45'',$$

$$B_1=24^028'15'',\ B_2=36^051'45'',\ D_1=44^018'15''.$$

$$b=\frac{6\sin 59^020\sin 44^018'15''}{\sin 98^050'\sin 96^011'45''},\ \log b=0{,}56458,\ b=3{,}669 \text{ m}.$$

$$c=\frac{6\sin 59^050\sin 36^051'45''}{\sin 98^050'\sin 96^011'45''},\ \log c=0{,}49862,\ c=3{,}1519 \text{ m}.$$

81. *Aria unui patrulater în funcţiune de laturi.* Din triunghiul ABC (Fig. 41), avem

$$m^2=a^2+b^2-2ab\cos B,$$

iar din triunghiul ACD,

$$m^2=c^2+d^2-2cd\cos D.$$

Egalând valorile lui m^2, avem

(1) $$a^2+b^2-c^2-d^2=2ab\cos B-2cd\cos D.$$

Ariile acestor triunghiuri fiind

$$2\text{ aria ABC}=ab\sin B,\ 2\text{ aria ACD}=cd\sin D,$$

avem pentru aria S a patrulaterului

$$4S=4\text{ aria ABC}+4\text{ aria ABD}=2ab\sin B+2cd\sin D,$$

(2) $$4S=2ab\sin B+2cd\sin D.$$

Ridicând la pătrat relaţiile (1) şi (2) şi adunând, avem

$$(a^2+b^2-c^2-d^2)+(4S)^2=$$
$$(2ab\cos B-2cd\cos D)^2+(2ab\sin B+2cd\sin D)^2,$$
$$(a^2+b^2-c^2-d^2)^2+16S^2=4a^2b^2+4c^2d^2-8\,ab\,cd\cos(B+D).$$

Dar

$$\cos(B+D)=2\cos^2\frac{B+D}{2}-1.$$

Inlocuind, expresiunea precedentă devine

$$(a^2+b^2-c^2-d^2)^2+16S^2=4a^2b^2+4c^2d^2-8\,ab\,cd\left(2\cos^2\frac{B+D}{2}-1\right)$$
$$16S^2=(2ab+2cd)^2-(a^2+b^2-c^2-d^2)^2-16\,ab\,cd\cos^2\frac{B+D}{2},$$
$$16S^2=(2ab+2cd+a^2+b^2-c^2-d^2)(2ab+2cd-a^2-b^2+c^2+d^2)$$
$$-16\,ab\,cd\cos^2\frac{B+D}{2},$$
$$16S^2=[(a+b)^2-(c-d)^2][(c+d)^2-(a-b)^2]-16\,ab\,cd\cos^2\frac{B+D}{2},$$
$$16S^2=(a+b+c-d)(a+b-c+d)(c+d-a+b)(c+d+a-b)$$
$$-16\,abcd\cos^2\frac{B+D}{2}.$$

Introducând notaţiile

$$a+b+c+d=2p,\quad -a+b+c+d=2(p-a),\quad a-b+c+d=2(p-b),$$
$$a+b-c+d=2(p-c),\quad a+b+c-d=2(p-d),$$

avem

$$S^2=(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)-ab\,cd\cos^2\frac{B+D}{2},$$
$$S=\sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)-ab\,cd\cos^2\frac{B+D}{2}}.$$

care este o formulă analoagă cu acea pentru aria triunghiurilor.

Exemplu. Se dau $a=12$ m, $b=7$ m, $d=5$ m, $B=54^0 15'$, $D=129^0 30'$. Să se calculeze aria patrulaterului.

Pentru a afla latura c, determinăm pe $AC=n$ din triunghiul ABC, în care se cunosc două laturi a, b şi unghiul cuprins B. Apoi, din triunghiul ACD, în care se cunosc d, D, $AC=n$, aflăm pe $c=5{,}758$.

Înlocuim în (3) pe $p-a=2{,}879$, $p-b=7{,}879$, $p-c=9{,}12$, $p-d=9{,}879$, pentru a calcula aria S, observăm că se poate scrie

$$(4)\quad S=\sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}\sqrt{1-\frac{a\,b\,c\,d\cos^2\frac{B+D}{2}}{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}}.$$

Să punem

$$\frac{abcd\cos\frac{B+D}{2}}{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)} = \cos^2\varphi,$$

şi se calculează valoarea lui φ cu ajutorul tablelor de logaritmi.

Expresia (4) devine

$$S = \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}\ \sqrt{1-\cos^2\varphi},$$

$$S = \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}\ \sin\varphi.$$

Aplicând logaritmii avem

$$\log S = \frac{\log(p-a)+\log(p-b)+\log(p-c)+\log(p-d)}{2} + \log\sin\varphi,$$

de unde se calculează $S = 45{,}18\ m^2$.

82, **Aria unui patrulater în funcţiune de diagonale.** P fiind punctul de intersecţie al diagonalelor patrulaterului ABCD (Fig. 41), să însemnăm cu θ unghiul BPC al acestor diagonale. Aria patrulaterului este dată de

$$S = \text{aria } APB + \text{aria } BPC + \text{aria } CPD + \text{aria } DPA,$$

$$S = \frac{1}{2}AP.PB\sin\theta + \frac{1}{2}BP.PC\sin\theta + \frac{1}{2}CP.DP\sin\theta + \frac{1}{2}DP.AP\sin\theta,$$

$$S = \frac{1}{2}\sin\theta.\ (AP + PC)\ (BP + PD),$$

şi deci

(5) $$S = \frac{1}{2}AC.BC\sin\theta,\quad S = \frac{1}{2}mn\sin\theta.$$

Exemplu. $a=12$ m, $b=7$ m, $d=5$ m, $B=54^0 15'$, $D=129^0 30'$. Diagonala $AC=m$ o aflăm din triunghiul ABC, în care se cunosc două laturi şi unghiul cuprins. Se calculează întâi unghiurile A_2 şi C_1, apoi m. Se calculează apoi c şi C_2 din triunghiul ACD, în care se cunosc d, m, D. Se cunoaşte deci C. Din triunghiul CBD se calculează $BD=n$, iar $\theta=A_2+B_1$. În fine se aplică formula (5). $S = 45{,}18\ m^2$.

EXERCIŢII.

1. Într'un patrulater oarecare două unghiuri opuse sunt egale şi laturile $a=9$ cm, $b=7$ cm, $c=8$ cm, $d=5$ cm. Să se afle unghiurile şi aria patrulaterului.

R. Se egalează expresiile diagonalei opusă unghiurilor egale, şi se obţine

$$\cos C = \frac{a^2+b^2-(c^2+d^2)}{2(ab-cd)} + \frac{41}{46},\quad C = A = 26^\circ 58';$$

$$\operatorname{tg}\frac{B_2-D_1}{2} = \frac{c-b}{c+b}\operatorname{cotg}\frac{A}{2},\quad \operatorname{tg}\frac{D_1-B_1}{2} = \frac{a-d}{a+d}\operatorname{cotg}\frac{A}{2}.$$

$B_1=92^\circ 3'16''$, $D_1=60^\circ 58'44''$, $B_1=69^\circ 43'16''$, $D_1=83^\circ 18'44''$, $S=23{,}353$ cm².

2. Diagonalele fiind de 87 m, 58 m, iar unghiul dintre ele $67^\circ 18'20''$, să se calculeze aria patrulaterului.

R. $S = 5345$ m².

3. Să se afle laturile, unghiurile necunoscute și aria patrulaterului în care se cunosc două laturi vecine, 65 m, 92 m, unghiul dintre ele, $65^\circ 40'$ și un unghi alăturat de $154^\circ 30'25''$, iar diagonala care tae unghiul întâi de 136 m.

R. Pentru o parte din unghiul opus unghiului întâi dat, avem $\sin x = \frac{65 \sin 154^\circ 30'25''}{37}$, $x = 11^\circ 52'14''$. Partea a doua a aceluiași unghi și unghiul al patrulea le aflăm din $\operatorname{tg}\frac{D-y}{2} = \frac{41 \operatorname{cotg} 25^\circ 31'19''}{228}$, $y = 42^\circ 28'10''$, $D = 86^\circ 29'11''$. Celelalte două laturi sunt 105,95 m, 79,77 m. $S=5980{,}94$ m².

4. Aria unui teren în formă de trapez este de 4290 m², una din diagonale îl imparte într'un triunghi echilateral și unul oarecare, astfel că ariile acestora stau în raportul $\frac{6}{5}$. Să se afle laturile și unghiurile trapezului.

R. ABCD fiind trapezul (AB paralel CD) și ABC triunghiul echilateral, avem aria ABD : aria BDC $= 6:5$, aria ABD $+$ aria BDC $= 4290$; deci aria ABD$=2340$ m², aria BCD$=1950$ m². Dar aria ABD $= \frac{a^2}{4}\sqrt{3}$; de unde $a = 73{,}51$ m. În triunghiul BDC, se cunosc aria, latura BD $= a$ și înălțimea h a lui B, egală cu înălțimea lui D, din triunghiul ABD. Din $c\frac{h}{2} =$ aria BDC, se calculează c. Unghiul BDC $=$ DBA $= 60^\circ$. Din expresia arii triunghiului BDC$= \frac{1}{2}$ BD . DC $\sin 60^\circ$, calculăm DC $= 61{,}26$ m. Din triunghiul BDC în care se cunosc două laturi și unghiul cuprins, se calculează întâi unghiul C și CBD cu teorema tangentelor, apoi se calculează BC $= 66{,}66$ m; C $= 68^\circ 57'49''$, DBC $= 51^\circ 3'11''$.

PATRULATERE INSCRIPTIBILE(1).

83. Un patrulater care se poate înscrie într'un cerc, sau, cum se mai zice, un patrulater inscriptibil, se bucură de proprietatea, că suma unghiurilor opuse este egală cu 180°. Deci, intervenind o condiţie simplă și deci o relaţie între elementele unui patrulater oarecare, numărul elementelor independente și necesare pentru rezolvirea patrulaterului inscriptibil se reduc la patru, iar a unghiurilor independente la două, căci suma unghiurilor opuse este egală cu 180°.

(1) Nu face parte din program.

Problemele ce se pot pune asupra patrulaterelor inscriptibile sunt: determinarea unghiurilor, diagonalelor, a ariei patrulaterului și a razei cercului circumscris, presupunând cunoscute laturile.

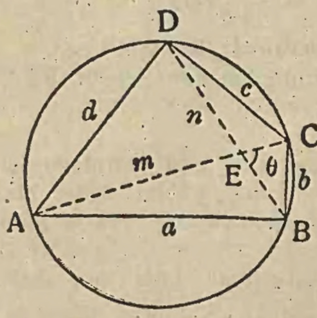

Fig. 44.

84. Calculul unghiurilor. Să considerăm patrulaterul inscriptibil ABCD (Fig. 44) și fie a, b, c, d laturile sale, A, B, C, D unghiurile și m și n diagonalele.

Triunghiurile BAD, BCD, dau

$$n^2 = a^2 + d^2 - 2ad\cos A,$$
$$n^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos C.$$

Egalând aceste valori, avem

$$a^2 + d^2 - 2ad\cos A = b^2 + c^2 - 2bc\cos C.$$

Dar A fiind suplimentar cu C, urmează că avem $\cos C = -\cos A$, deci relația precedentă devine

$$a^2 + d^2 - 2ad\cos A = b^2 + c^2 + 2bc\cos A,$$

de unde

$$\cos A = \frac{a^2 + d^2 - b^2 - c^2}{2(ad + bc)}.$$

Să înlocuim valoarea aceasta în relațiile cunoscute

$$2\sin^2\frac{A}{2} = 1 - \cos A, \quad 2\cos^2\frac{A}{2} = 1 + \cos A.$$

Avem

$$2\sin^2\frac{A}{2} = 1 - \frac{a^2 + d^2 - b^2 - c^2}{2(ad + bc)} = \frac{2(ad + bc) - (a^2 + d^2 - b^2 - c^2)}{2(ad + bc)}$$

$$(6) \qquad 2\sin^2\frac{A}{2} = \frac{(b+c)^2 - (a-d)^2}{2(ad+bc)} = \frac{(b + c + a - d)(b + c - a + d)}{2(ad + bc)}.$$

$$2\cos^2\frac{A}{2} = 1 + \frac{a^2 + d^2 - b^2 - c^2}{2(ad + bc)} = \frac{2(ad + cb) + a^2 + d^2 - b^2 - c^2}{2(ad + bc)}$$

$$(7) \qquad 2\cos^2\frac{A}{2} = \frac{(a+d)^2 - (b-c)^2}{2(ad+bc)} = \frac{(a + d + b - c)(a + d - b + c)}{2(ad + bc)},$$

$$(8) \qquad \mathrm{tg}^2\frac{A}{2} = \frac{(b+c+a-d)(b+c-a+d)}{(a+d+b-c)(a+d-b+c)},$$

Punând $a + b + c + d = 2p$, avem

$$-a + b + c + d = 2(p - a), \quad a - b + c + d = 2(p - b),$$

$$a+b-c+d=2(p-c),\ a+b+c-d=2(p-d),$$

Deci expresiunile (6), (7), (8) devin

$$2\sin^2\frac{A}{2}=\frac{2(p-d)2(p-a)}{2(ad+bc)}=\frac{2(p-a)(p-d)}{ad+bc},$$

$$2\cos^2\frac{A}{2}=\frac{2(p-b)\ (p-c)}{2(ad+bc)},\ \operatorname{tg}^2\frac{A}{2}\frac{(p-a)\ (p-d)}{(p-b)\ (p-c)}.$$

Cum unghiul $\frac{A}{2}$ este mai mic ca 90^0, căci considerăm un poligon convex, $\sin\frac{A}{2}$, $\cos\frac{A}{2}$ sunt pozitive, deci

$$\sin\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{(p-a)(p-d)}{ad+bc}},\ \cos\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{ad+bc}},$$

$$\operatorname{tg}\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{(p-a)(p-d)}{(p-b)(p-c)}}.$$

Formule analoage dau unghiul B.

85. **Diagonalele.** Să considerăm din nou formulele

$$n^2=a^2+a^2-2ad\cos A,\ n^2=b^2+c^2+2bc\cos A.$$

De unde

$$\cos A=\frac{a^2+d^2-n^2}{2ad},\ \cos A=\frac{n^2-b^2-c^2}{2bc}.$$

Egalând valorile lui cos A, avem

$$\frac{a^2+d^2-n^2}{2ad}=\frac{n^2-b^2-c^2}{2bc},$$

$$(a^2+d^2-n^2)bc=(n^2-b^2-c^2)ad,$$

$$n^2\ (bc+ad)=(a^2+d^2)bc+(b^2+c^2)ad,$$

$$n^2(bc+ad)=(ab+cd)(ac+bd),$$

$$n^2=\frac{(ab+cd)(ac+bd)}{bc+ad},\quad n=\sqrt{\frac{(ab+cd)(ac+bd)}{bc+ad}}.$$

În mod analog,

$$m=\sqrt{\frac{(bc+da)(bd+ca)}{cd+ba}}.$$

Observare. Avem

$$m.n=\sqrt{\frac{(ab+cd)(ac+bd)}{bc+ad}}\sqrt{\frac{(bc+da)(bd+ca)}{cd+ba}}=\sqrt{(ac+bd)^2},$$

$$m.n = a.c + b.d,$$

care este *relația dintre diagonalele și laturile unui patrulater inscriptibil* (stabilită de *Ptolomeu*).

86. **Aria patrulaterului.** Avem

$$S = \text{aria ABCD} = \text{aria BAD} + \text{aria BCD}.$$

Dar

$$\text{aria BAD} = \frac{1}{2}a.d \sin A, \ \text{aria BCD} = \frac{1}{2}b.c \sin C = \frac{1}{2}\ b.c \sin A.$$

Deci

$$S = \frac{1}{2}(ad+bc)\sin A.$$

Însă $\sin A = 2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}$. Deci

$$S = (ad+bc)\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2} =$$

$$(ad+bc)\sqrt{\frac{(p-a)(p-d)}{ad+bc}}\sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{ad+bc}},$$

$$S = \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}.$$

87. **Raza cercului circumscris.** Din triunghiul BAD, avem

$$R = \frac{n}{2\sin A} = \frac{n}{4\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}},$$

$$R = \frac{1}{4}\sqrt{\frac{(ab+cd)(ac+bd)}{bc+ad}}\ \frac{1}{\sqrt{\frac{(p-a)(p-d)}{ad+bc}}\sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{ad+bc}}}.$$

$$R = \frac{1}{4}\sqrt{\frac{(ab+cd)(ac+bd)(ad+bc)}{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}}.$$

88. **Unghiul θ al diagonalelor** este dat de relația care exprimă aria unui patrulater în funcțiune de diagonale,

$$S = \frac{1}{2}mn\sin\theta.$$

De unde

$$\sin\theta = \frac{2S}{m.n},$$

unde înlocuind pe m, n, S cu valorile lor în funcțiune de laturile patrulaterului avem, valoarea lui $\sin\theta$ deci și pe θ.

Exemplu. $a=169$ m, $b=195$ m, $c=52$ m, $d=150$ m. Cu ajutorul formulelor găsite, aplicând logaritmii, avem $A = 81^0 37'44''$, $B = 67^0 26' 24''$, $C = 98^0 22' 16''$, $D = 112^0 33' 36''$, $m = 156{,}26$, $n = 179{,}44$, $S = 17555{,}62$ m², $R = 90{,}686$ m.

APLICAŢII
LA CALCULUL DISTANŢELOR ŞI INĂLŢIMILOR.

89. Cele mai interesante din multele şi variatele aplicaţii ale Trigonometriei, sunt aplicaţiile la calculul distanţelor dintre două puncte, când numai un punct este accesibil şi aplicaţiile la probleme de determinări de înălţimi, când piciorul înălţimei este accesibil sau nu, şi în fine, aplicaţia la aflarea unui punct din plan, care este strâns legat de trei puncte date în plan.

În măsurări pe teren distanţele până la 20 m, le măsurăm cu metrul etalon, iar cele dela 20 în sus. cu panglica de măsurat. Unghiurile le măsurăm, pe uscat, cu *teodolitul*, iar pe apă, cu *sextantul*.

90. **Să se afle distanţa dintre două puncte accesibile, dar a căror distanţă nu se poate măsura din cauza unui obstacol.** Să însemnăm acele puncte cu A şi B separate cu un obstacol (Fig. 45). Aceste puncte fiind accesibile, alegem pe teren un punct C de unde să putem vedea punctele A şi B, măsurăm apoi distanţele $AC = b$ şi $BC = a$, şi în fine unghiul ACB al razelor vizuale AC şi CB. Din triunghiul ACB, în care cunoaştem două laturi b şi a şi unghiul cuprins între ele, putem afla lungimea laturei AB, care reprezintă distanţa dintre punctele A şi B, distanţă care, însă, nu se putea măsura direct pe teren.

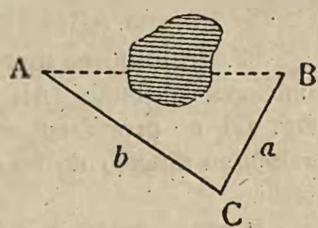

Fig. 45.

Exemplu. Să se afle lungimea unei păduri, cunoscând distanţele de la doi pomi din margini la un punct fixat în câmp, $a = 1565$ m, $b = 1483$ m şi unghiul $C = 116^0 23'$ format de razele vizuale duse de la acest punct la cei doi pomi mărginaşi.

În triunghiul ABC se cunosc două laturi şi unghiul cuprins. Se calculează A şi B cu formulele

$$\frac{A+B}{2} = 90^0 - \frac{C}{2}, \quad \operatorname{tg} \frac{A-B}{2} = \frac{a-b}{a+b} \operatorname{cotg} \frac{C}{2},$$

apoi se află $AB = 2590{,}5$ m, care reprezintă lungimea pădurei.

91. **Distanţa dintre două puncte, unul fiind accesibil,**

celalt nu, însă se vede. Fie A punctul neaccesibil, B punctul accesibil şi ne propunem a măsura distanţa AB (Fig. 46). Pentru aceasta alegem pe teren punctul C, din care să putem vedea punctul A şi astfel ca să putem măsura distanţa BC=a. Măsurăm apoi şi unghiurile B şi C.

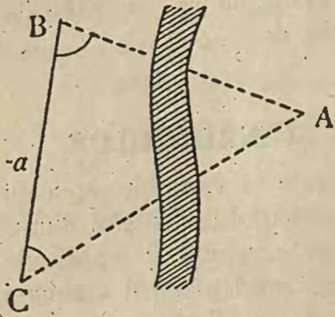

Fig. 46.

Din triunghiul ABC, avem

$$\frac{AB}{\sin C}=\frac{a}{\sin A},\quad \frac{AB}{\sin C}=\frac{a}{\sin[180^\circ-(B+C)]},$$

de unde

$$AB=\frac{a\sin C}{\sin[180^0-(B+C)]}.$$

Exemplu. Să se afle depărtarea dintre două turnuri A şi B între care curge un râu, cunoscând distanţa $a=562{,}5$ m dela turnul B la un punct C de pe acelaş mal şi unghiurile sub care se văd din B şi C distanţele CA, BA, B$=$ $8^0 46' 10''$, C$=56^0 28' 50''$.

Se găseşte AB $=$ 1120,13m.

92. **Prelungirea unei drepte dincolo de un obstacol.** Fiind cunoscută distanţa AB $=c$ (Fig. 47), ne propunem să o prelungim dincolo de un obstacol.

Pentru aceasta alegem un punct C pe teren, din care putem vedea punctele A şi B, precum şi locul unde trebue prelungită AB. Măsurăm unghiurile A şi B. Din triunghiul ABC calculăm pe BC $=a$.

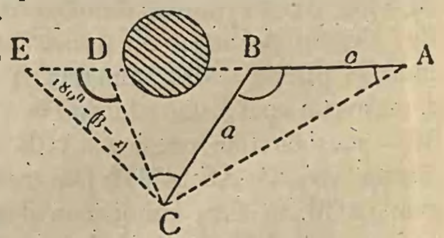

Fig. 47.

$$(1)\qquad a=\frac{c\sin A}{\sin[180^0-(A+B)]}.$$

Fixăm înspre partea unde vrem să prelungim dreapta AB o direcţie CD şi măsurăm unghiul DCB $=\alpha$. În triunghiul DCB cunoaştem latura CB $=a$, unghiul DBC $=180^0-$B. Unghiul ABC fiind exterior triunghiului DCB, este egal cu suma unghiurilor nealăturate, adică

$$B=\alpha+CDB,$$

de unde

$$CDB=B-\alpha.$$

Însemnând cu DE prelungirea dreptei AB, urmează că unghiul

$$EDC = 180^0 - CDB = 180^0 - (B - \alpha).$$

Din triunghiul CDB, avem

$$\frac{CD}{\sin DBC} = \frac{CB}{\sin CDB}, \quad \frac{CD}{\sin(180^0 - B)} = \frac{a}{\sin(B - \alpha)},$$

$$CD = \frac{a \sin B}{\sin(B - \alpha)}.$$

Înlocuind pe a cu valoarea sa (1), avem

$$CD = \frac{c \sin A \sin B}{\sin(B - \alpha) \sin[180^0 - (A + B)]}.$$

Aşa fiind, pe direcţia CD se ia punctul D, astfel ca CD să fie egală cu valoarea aflată, iar în punctul D se duce o dreaptă DE care să facă cu DC unghiul $180^0 - (B - \alpha)$. DE este prelungirea dreptei AB.

Exemplu. La săparea unei tunel drept, având într'o parte a dealului direcţia liniei ferate, să se afle continuarea acestei direcţii dincolo de deal. Să presupunem că distanţa a două puncte de pe direcţia dată a liniei ferate este $c = 1{,}5$ km; fie C punctul din care se vede de amândouă părţi ale dealului şi unghiurile $B = 102^0 52'$, $A = 47^0 25'$, iar unghiul $\alpha = 51^0 30'$.

Se obţine $CD = \dfrac{1{,}5 \sin 47^0 25' \sin 77^0 8'}{\sin 51^0 22' \sin 29^0 43''}$, $CD = 2{,}7806$ km, $EDC = 128^0 38'$.

93. **Distanţa a două puncte neaccesibile.** Fie A şi B (Fig 48) punctele neaccesibile, a căror distanţă vrem s'o măsurăm. Alegem două puncte pe teren C şi D, din care să vedem punctele A şi B. Măsurăm distanţa $CD = d$ şi unghiurile $BCA = \alpha_1$, $ACD = \alpha_2$, $BDC = \beta_1$, $BDA = \beta_2$. Din triunghiul BD C, avem

$$BC = \frac{CD \sin \beta_1}{\sin[180^0 - (\beta_1 + \alpha_1 + \alpha_2)]},$$

$$BC = \frac{d \sin \beta_1}{\sin[180^0 - (\beta_1 + \alpha_1 + \alpha_2)]}.$$

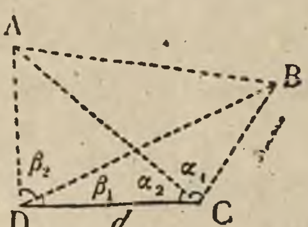

Fig 48

Din triunghiul ACD, avem

$$\frac{AC}{\sin(\beta_1 + \beta_2)} = \frac{DC}{\sin[180^0 - (\beta_1 + \beta_2 + \alpha_2)]}$$

$$AC = \frac{d \sin(\beta_1 + \beta_2)}{\sin[180^0 - (\beta_1 + \beta_2 + \alpha_2)]}.$$

De asemenea, unghiul $ACB = \alpha_1$, este cunoscut. În triunghiul ACB cunoscând laturile AC şi CB şi unghiul α_1, cuprins între ele, se pot calcula unghiurile CAB, ABC, apoi latura AB adică distanţa dintre cele două puncte neaccesibile.

Exemplu. A şi B fiind două puncte dincolo de malul unui râu, pentru o calcula distanţa acestor puncte, calculăm elementele necesare problemei şi anume $d=75$ m, $\alpha_1=60^0 29'$, $\alpha_2=42^0 10'$, $\beta_1=42^0 29'$, $\beta_2=59^0 17'$.

Se găseşte $AB = 127{,}06$ m.

94. **Problema hărţei.** Cunoscând trei puncte pe teren A, B, C, să se afle poziţia unui al patrulea punct, M, din care se văd distanţele AB şi BC sub unghiurile α şi β (Fig. 49).

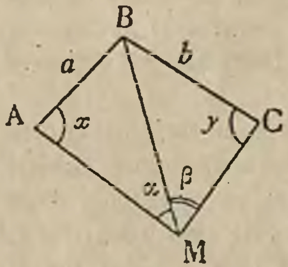

Fig. 49.

In mod geometric, poziţia punctului M este la intersecţia segmentelor de cercuri descrise pe AB şi BC capabile de unghiurile α şi β.

Problema se poate rezolva cu ajutorul Trigonometriei, luând ca necunoscute unghiurile $MAB = x$, $MBC = y$. Pentru a afla aceste unghiuri, să observăm că suma lor este dată de

$$x + y + \alpha + \beta + B = 360^0,$$

de unde

$$x + y = 360^0 - B - \alpha - \beta.$$

Pentru a calcula diferenţa $(x - y)$ măsurăm pe teren distanţele $AB = a$, $BC = b$ şi unghiul $ABC = B$. Din triunghiurile ABM, BCM, avem

$$BM = \frac{a \sin x}{\sin\alpha}, \quad BM = \frac{b \sin y}{\sin\beta}.$$

Egalând aceste valori, obţinem

$$\frac{a \sin x}{\sin\alpha} = \frac{b \sin y}{\sin\beta},$$

de unde

$$\frac{\sin x}{\sin y} = \frac{b \sin\alpha}{a \sin\beta}.$$

Să punem

(3) $$\frac{b \sin\alpha}{a \sin\beta} = \operatorname{tg}\varphi$$

şi să calculăm numeric unghiul φ cu ajutorul tablelor de logaritmi.

Avem

$$\frac{\sin x}{\sin y}=\frac{\operatorname{tg}\varphi}{1},$$

$$\frac{\sin x-\sin y}{\sin x+\sin y}=\frac{\operatorname{tg}\varphi-1}{\operatorname{tg}\varphi+1},$$

$$\frac{2\sin\frac{x-y}{2}\cos\frac{x+y}{2}}{2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}}=\operatorname{tg}(\varphi-45^0),$$

(4) $$\operatorname{tg}\frac{x-y}{2}=\operatorname{tg}\frac{x+y}{2}\operatorname{tg}(\varphi-45^0),$$

Dar din (2), avem

(5) $$\frac{x+y}{2}=180^0-\frac{B+\alpha+\beta}{2},$$

$$\operatorname{tg}\frac{x+y}{2}=-\operatorname{tg}\frac{B+\alpha+\beta}{2}.$$

Formula (4) devine

(6) $$\operatorname{tg}\frac{x-y}{2}=\operatorname{tg}\frac{B+\alpha+\beta}{2}\operatorname{tg}(45^0-\varphi).$$

Cu ajutorul ecuaţiilor (5) şi (6) se calculează x şi y. Se vor putea deci construi dreptele MA şi CM, şi deci punctul M este cunoscut.

Problema este nedeterminată când ecuaţia (6) se reduce la forma

$$\operatorname{tg}\frac{x-y}{2}=\frac{0}{0},$$

$$\operatorname{tg}(45^0-\varphi)=0,\ \operatorname{tg}\frac{B+\alpha+\beta}{2}\to\infty.$$

Acesta are loc când

$$\varphi=45^0,\ B+\alpha+\beta=180^0.$$

Dar, dacă $\varphi=45^0$, relaţia (3) devine

$$b\sin\alpha=a\sin\beta,$$

sau

$$\frac{b}{\sin\beta}=\frac{a}{\sin\alpha},$$

de unde se vede că cercurile circumscrise triunghiurilor ABM, BCM au aceeaşi rază, adică patrulaterul ABCM este înscriptibil.

De asemenea, din relaţia $B+\alpha+\beta=180^0$, urmează de asemenea că unghiurile opuse B şi $M=\alpha+\beta$ sunt suplimentare, că patrulaterul ABCM este inscriptibil.

Deci, problema este nedeterminată când suma $\alpha+\beta$ este egală cu 180^0-B.

Exemple. 1^0. $a=725$m, $b=529$m, $\beta=39^047'$, $\alpha=43^042'$, $B=132^035'$. Se găseşte $\varphi=51^055'17''$, $x=51^030'$, $y=92^044'$, $MA=1050,3$m, $MB=825,8$m, $MC=609,07$m, calculate din triunghiurile ABM, BCM, aplicând teorema sinusurilor.

2^0. $a=170$, $b=200$, $B=114^040'8''$, $\alpha=30^09'$, $\beta=46^017'13''$; $\varphi=39^015'58''$, $x=38^031'14''$, $y=130^022'24''$, $BM=210,8$.

95. **Să se afle înălţimea unui turn al cărui picior e accesibil, dar aşezat deasupra planului orizontal.** Fie BC înălţimea turnului de care ne putem apropia (Fig. 50). Măsurăm distanţa $AB=c$ şi unghiurile α şi β.

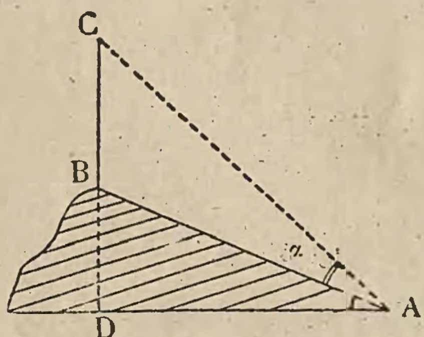

Fig. 50

În triunghiul dreptunghic ACB, unghiul $DCA=90^0-(\alpha+\beta)$.

Din triunghiul ABC, rezultă $\frac{AB}{\sin BCA}=\frac{BC}{\sin\alpha}$ de unde

$$BC=\frac{AB\sin\alpha}{\sin BCA},$$

$$BC=\frac{c\sin\alpha}{\sin 90^0-(\alpha+\beta)}=\frac{c\sin\alpha}{\cos(\alpha+\beta)}.$$

Exemplu. Să se afle înălţimea BC a unui turn aşezat pe un deal, dacă lungimea drumului drept ce duce la turn este $c=45$ m şi unghiurile sub care se văd din A turnul şi dealul fiind $\alpha=18^020'$, $\beta=22^055'$.

Se găseşte $BC=18,83$m.

96. **Să se afle înălţimea** ***unui munte,*** **terenul dela poalele lui fiind orizontal.** Considerăm direcţia BC, a cărei prelungire trece prin piciorul P al înălţimei necunoscute (Fig. 51) şi măsurăm distanţa $BC=a$ şi unghiurile α şi β sub care se vede înălţimea muntelui, din punctele C şi B.

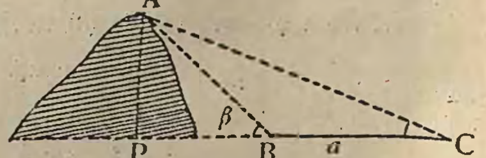

Fig. 51

Din triunghiul ABC, avem

$$\frac{AB}{\sin\alpha}=\frac{BC}{\sin BAC},\quad AB=\frac{a\sin\alpha}{\sin BAC}.$$

Dar, unghiul β fiind exterior triunghiului ABC, rezultă $\beta=A+\alpha$, de unde $BAC=\beta-\alpha$ şi deci

$$AB=\frac{a\sin\alpha}{\sin(\beta-\alpha)}.$$

Din triunghiul APB, avem

$$AP=AB\sin\beta=\frac{a\sin\alpha\sin\beta}{\sin(\beta-\alpha)}.$$

Exemplu. $a=65$ m, $\beta=68^0 17'$, $\alpha=42^0 53'$. Se găseşte AP 95,8 m.

97. **Să se afle înălţimea unui deal, terenul de la poalele lui nefiind orizontal.** Considerăm o distanţă BC pe teren şi o măsurăm; fie a lungimea ei (Fig. 52). Să măsurăm unghiurile α, sub care se vede din C înălţimea dealului, şi β şi γ, formate de razele vizuale BA şi CA cu BC.

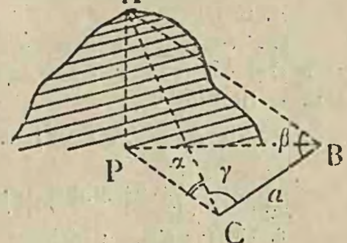

Fig. 52

Din triunghiul ABC, avem

$$\frac{AC}{\sin\beta}=\frac{BC}{\sin CAB},$$

$$AC=\frac{a\sin\beta}{\sin[180^0-(\gamma+\beta)]},$$

$$AC=\frac{a\sin\beta}{\sin(\gamma+\beta)}.$$

Din triunghiul dreptunghic APC, avem

$$AP=AC\sin\alpha,\quad AP=\frac{a\sin\alpha\sin\beta}{\sin(\gamma+\beta)}.$$

care dă înălţimea dealului.

Exemplu. $a=225$ m, $\beta=41^0 19'25''$, $\gamma=52^0 27'18''$, $\alpha=47^0 40'48''$. Se găseşte $AP=108{,}32$ m.

Observare. La toate înălţimile calculate trebue adăugată înălţimea instrumentului cu care am măsurat unghiurile.

EXERCIŢII.

1. Să se afle distanţa a două localităţi despărţite printr'un lac, ambele fiind vizibile dintr'un loc, ale cărui distanţe la cele două localităţi sunt egale cu 2,8 Km şi 1,7 Km, iar unghiul dintre aceste două distanţe fiind $61^0 55'39''$.

R. 2,5 Km.

2. O tranșee dreaptă AB este lungă de 1593,5 m. Un observator din capătul A vede un tun C al inamicului, astel că raza vizuală AC face cu direcția AB unghiul 65°51'20". De la capătul B observând acelaș tun C, unghiul ABC este de 76°32'40". Să se afle distanța tunului la tranșee (distanța se măsoară pe perpendiculara din C pe AB).

R. Se calculează mai întâi BC; însemnând cu D piciorul perpendicularei din C pe AB, din triunghiul BCD, se calculează $CD = \frac{AB \sin A \sin B}{\sin C} = 2317{,}78$ m.

3. Să se afle distanța dintre două vapoare A și B pe mare, cunoscând unghiurile calculate din punctele C și D depe mal, $BCD = 40^0$, $ACD = 69^0$, $ADC = 38^030'$, $BDC = 70^030'$, știind că distanța $CD = 150$ m.

R. 82,747 m.

4. Un aeroplan inamic C e observat în acelaş timp din locurile A și B depărtate cu 2,4 Km, unul de altul. Unghiul de elevație al aeroplanului măsurat din A (adică unghiul făcut de raza vizuală AC cu orizontala ce trece prin A) este 54°48'; unghiul CAB=85°16',; unghiul CBA, format de direcția AB cu raza vizuală dusă din B la aeroplan este 56°30'. Să se afle înălțimea în acel moment al aeroplanului.

R. 2,6425 Km.

5. Se dă unghiul BAC=38°45'. Să se ducă o dreaptă care să tae pe AB în D și AC în E, astfel ca unghiul ADE=59°16'30", iar aria triunghiului ADE să fie 248650 m².

R. Fie $AD = x$, $AE = y$; avem $xy \sin 38^045' = 2.248650$, $\frac{x}{\sin E} = \frac{y}{\sin D}$

$x = \sqrt{\frac{2.S \sin E}{\sin A \sin D}}$, S fiind aria; $x = 956{,}66$ m, $y = 830{,}52$ m.

6. Un far CF, cu piciorul în C este văzut din punctele A și B, așezate pe acelaș plan orizontal cu C (planul ABC fiind perpendicular pe dreapta CF), sub unghiurile de elevație $CAF = 45^0$, $CBF = 30^0$. Să se afle înălțimea CF a farului, știind că distanța $AB = 240$ m, iar direcțiile AC și CB sunt perpendiculare.

R. $x = CF$; $AC = \frac{x}{\operatorname{tg} 45^0}$, $CB = \frac{x}{\operatorname{tg} 30}$, $\overline{AB}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{CB}^2$; $x = 120$ m.